

REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA



Identificación de conocimientos y habilidades en las tareas matemáticas

Costa Rica
2018

Contenidos

Conocimientos y habilidades: enfoques del currículo	3
<i>Números</i>	3
<i>Geometría</i>	4
<i>Medidas</i>	4
<i>Relaciones y álgebra</i>	4
<i>Estadística y probabilidad</i>	6
Modelo para identificar habilidades y sus interacciones	7
<i>La interacción de las áreas</i>	7
<i>La intervención combinada y sinérgica de habilidades</i>	8
<i>Relación entre habilidades generales y habilidades específicas</i>	9
<i>Participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas</i>	13
Referencias bibliográficas.....	17
Créditos	18

Este documento se aporta un modelo para identificar habilidades y sus interacciones, el cual incluye 6 escenarios de interacción de las habilidades generales del currículo en las diversas áreas (en particular se plantea la participación simultánea de habilidades de diversas áreas matemáticas).

Antes, se señalan algunos enfoques específicos de las áreas matemáticas donde se colocan estas habilidades.

Conocimientos y habilidades: enfoques del currículo

En el currículo costarricense de Matemáticas se establecieron cinco áreas para todos los niveles educativos: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad. Cada una posee una participación distinta en cada ciclo educativo (y dentro de ellos en cada año escolar). Por ejemplo Números ocupa el mayor espacio en Primaria y Relaciones y Álgebra en Secundaria. Algunas áreas se vuelven transversales e instrumentales: Medidas en toda la Secundaria y Números en el Ciclo Diversificado.

La decisión curricular de usar las mismas áreas en todo el currículo persigue el fin de tener un tratamiento homogéneo y visualizar los conocimientos de manera integrada en todos los niveles educativos. No se usó una división de los dominios matemáticos mediante categorías organizadoras que incluyeran los contenidos asociados de manera transversal a las subdisciplinas tradicionales de las Matemáticas, como se hace en la pruebas PISA: Forma y espacio, Cantidad, Cambio y relaciones, Incertidumbre y datos. El objetivo de PISA es una categorización dirigida a pruebas dentro de una visión que enfoca los diversos contextos en la vida. Hay convergencia con PISA en cuanto al rol de los contextos reales pero en nuestro caso se tenía que considerar que esta categorización debía establecerse con base en la realidad del país. Ya la introducción de las capacidades y de una multitud de elementos curriculares novedosos aportaba una demanda pesada. Los estudiantes, docentes y funcionarios de Costa Rica están familiarizados con las áreas matemáticas tradicionales. Por otro lado no se trataba solamente de enfocar la evaluación (pruebas) sino la implementación curricular en las aulas. Se apostó a una clasificación familiar a partir de la cual arrancar para que en la mediación pedagógica se desarrollen las capacidades y la competencia matemática y en ese escenario introducir todas las interacciones cognoscitivas necesarias. Esto lo analizaremos con mayor detalle más adelante.

Dentro de las áreas se asumieron importantes criterios curriculares, lo que se puede apreciar en la manera de introducir los distintos contenidos (por ejemplo en qué momento y con cuál significado) así como el enfoque que se pretende en el uso de esos contenidos. No es nuestro objetivo en este documento describir con demasiado detalle esa colección de criterios que sostienen la malla curricular. Vamos aquí solamente a reseñar algunos elementos.

Números

En Números se busca establecer distancia de un manejo muy formal de los conceptos, es decir:

(...) darle mayor relevancia a los cálculos, que permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas. En ese sentido, se propone fortalecer el cálculo mental y la estimación. Esta visión se asocia con la resolución de problemas y la contextualización activa. El cálculo mental, por ejemplo, se puede cultivar desde un primer momento como un mecanismo especial para el dominio de propiedades numéricas y como entrenamiento de destrezas mentales.

(...) las actividades de cálculo en el aula permiten fortalecer la búsqueda de soluciones distintas. El registro, explicación, crítica y comunicación de estrategias de cómputo permiten favorecer procesos cognitivos importantes, que ayudan en el desarrollo de la competencia matemática. (MEP, 2012, p. 50)

Pero no se debe confundir con un “sobredimensionar el valor de los procedimientos por encima de la comprensión conceptual, (...) sin una comprensión conceptual los procedimientos se olvidan con mayor rapidez y no se logran aprendizajes significativos” (p. 50).

Es importante mencionar que no se desea que se hagan cálculos demasiado largos o una utilización simbólica excesiva que no aporte a la solución de problemas. Aquí también se debe decir que no se promueve el uso de

la teoría de conjuntos para definir los números (naturales, enteros, racionales, reales). Los conjuntos se introducen hasta décimo año escolar de manera instrumental en Relaciones y Álgebra y en Probabilidad, los conjuntos en sí mismos no tienen cabida en este currículo.

La introducción de los números así como de sus representaciones también obedeció a consideraciones curriculares, basadas en resultados sobre cognición. Por ejemplo, un tratamiento amplio de las fracciones y decimales se deja para el segundo ciclo educativo; de igual manera, las operaciones se introducen en espiral pero con claras distinciones sobre el grado de complejidad o demanda cognitiva de las mismas.

Geometría

En Geometría se ven “los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de lo real” (p. 52). Hay un sentido que invoca “entornos espaciales”, y por lo tanto se pretende generar un “sentido espacial”. Lo que se define como: “la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio” (p. 52). En esa dirección “no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos” (p. 52); el propósito declarado es: “(...) fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas” (p. 52). Esto está asociado a capacidades que deseamos en la población, como lo es un mejor manejo de los objetos en el espacio que se requieren en decenas de actividades reales.

Uno de los cambios fuertes del nuevo currículo es: “una introducción de la geometría de coordenadas y analítica adecuada a los distintos niveles cognitivos.” (p. 52) Y eso se debe a que: “(...) las actuales perspectivas de la Geometría se colocan con fuerza dentro del Álgebra y las funciones, y eso mismo permite mostrar la visión moderna de esta disciplina matemática” (p. 52). Esto se hace escalonadamente desde la Educación Primaria.

Otra de las ideas fuerza del currículo vigente es la introducción del movimiento en los objetos geométricos. Y por supuesto las actividades planteadas para lograr ese sentido dinámico. Simetrías, traslaciones, reflexiones, rotaciones son introducidas. De alguna manera esto refleja resultados de la historia de las Matemáticas: “El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas” (p. 52). Pero también permite visualizar la Geometría de una manera más atractiva y sintonizar con temas que son además parte de profesiones modernas como el diseño gráfico digital.

Medidas

El área de Medidas juega un papel importante, para empezar “como una fuente muy rica para introducir objetos y procedimientos matemáticos, para hacer conexiones con otras áreas matemáticas y no matemáticas y con muchas situaciones del entorno” (p. 53). En otros currículos las medidas desaparecen para usar unidades lineales, de área o volumen abstractas. El trabajo con contextos reales demanda un papel de las medidas en todos los niveles escolares.

Uno de los temas que se busca cultivar gira en torno a que “siempre hay un *sentido de aproximación*” en toda medición. Tanto por el sujeto que haga la medición como por el instrumento que se utilice aparece un porcentaje de error.

Las medidas están poderosamente emparentadas con otras áreas con el sentido numérico y la medida de objetos y con la estimación en particular. Por eso: “pueden apoyar el estudio de varios conceptos matemáticos, como el cambio y la invariancia bajo algunas transformaciones” (p. 53).

Relaciones y álgebra

El primer cambio significativo en Relaciones y Álgebra es que se plantea en Primaria. Algunos elementos antes se incluían en las otras áreas matemáticas (evidentemente en Números) pero darle el lugar distinguido y separado que posee este tipo de contenidos era muy importante. Esta área proporciona situaciones especiales para el cultivo de las capacidades superiores. Trabajarla desde la Primaria nos permitía la oportunidad de

plantear las conexiones con las relaciones y álgebra de la Secundaria que ocupan el mayor lugar en ese nivel escolar. Por ejemplo ir creando conscientemente habilidades y capacidades en el manejo de las relaciones de cambio, en el uso de símbolos, en las múltiples representaciones,... El tema de funciones siempre fue un problema en los currículos anteriores, pues se introducían esencialmente en décimo año, sin una preparación gradual en sus objetos, procedimientos y significados, además de una presentación totalmente abstracta y formal. Eso cambió drásticamente con el nuevo currículo.

Una de las ideas fuerza de esta área es que “se favorece un tratamiento ‘funcional’ de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de manera gradual” (p. 52). Y también un reajuste importante para enseñar temas que poseen profunda relación de una manera cercana o integrada: por ejemplo, la ecuación de primer grado y la función lineal, las ecuaciones de segundo grado y la función cuadrática. Objetos como las raíces de una función permiten dotar de un sentido especial a tópicos como la factorización simbólica.

Ha sido una poderosa pulsión hacer de las expresiones algebraicas un territorio para la práctica rutinaria y repetitiva, donde se pierde todo significado en el uso del símbolo y la relación. Es decir: colecciones exageradas de símbolos, letras con diversos grados, no han sido ajenas a la acción en muchas aulas. Con el nuevo currículo eso desaparece: la utilización de las expresiones simbólicas debe tener un sentido dentro de las acciones relacionadas con la comprensión y uso de las Matemáticas ya sea dentro de estas como también en contextos reales.

Otro de los elementos que definen el rostro de esta área es su relación estrecha con la contextualización y especialmente de una manera aún más precisa con la modelización. Sus objetos y procedimientos deben cultivarse:

(...) con una fuerte orientación hacia la resolución de problemas y la modelización. Por ejemplo, las funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas) se tratan con esta visión novedosa y estimulante. El aprendizaje y utilización de las funciones en diversos contextos cierra la formación matemática que aporta esta área. (p. 52)

Este es un terreno que posee varias dimensiones: una de ellas es que sobre esta área los docentes poseen un mayor dominio, otra es que tal vez precisamente por lo anterior subsisten ideas o enfoques equivocados o inapropiados sobre cómo enseñar los contenidos de esta área con base en el nuevo currículo. Los temas de funciones deben introducirse con vigor dentro de contextos reales y con una poderosa participación de capacidades superiores.

Un asunto específico en esta área que todavía genera debate fue la decisión de no incluir las funciones trigonométricas en la malla curricular en el Ciclo Diversificado. Esto obedeció a una razón de fondo: se buscaba condensar un currículo que pudiera implementarse efectivamente en el escenario costarricense, donde aun se pierden muchas lecciones, las condiciones laborales o de infraestructura son desiguales, y la preparación de los docentes tampoco es uniforme. No se quería un currículo muy cargado para dar espacio tanto a nuevos contenidos o modificados en su significado, y sobre todo para potenciar el cultivo de los enfoques novedosos, en particular el papel de las capacidades superiores.

En la decisión se valoraron varios elementos. Por un lado, que estos contenidos tradicionalmente incorporados sirven a carreras universitarias muy específicas (ingenierías esencialmente) y las universidades podrían brindar esos contenidos fácilmente a los estudiantes de esas carreras sin tener que invertir una gran cantidad de tiempo. En las instituciones de secundaria demandaba más tiempo, pero además no había sido extraño que esos contenidos en muchos sitios simplemente no fueran estudiados. Se decidió en lugar de incluir este tipo de funciones trascendentes, beneficiar un tratamiento más profundo de las funciones exponenciales y logarítmicas, que en el pasado no se enseñaban adecuadamente. Por ejemplo, no se estudiaban estas últimas como funciones inversas, puesto que se había excluido el concepto de composición de funciones.

Por otra parte, y tal vez la razón más importante: este nuevo currículo enfatiza las capacidades y no los contenidos. Con mayores capacidades superiores y competencia matemática, los egresados de la educación

preuniversitaria podrían con mucha mayor facilidad aprender los contenidos de funciones trigonométricas que necesitaran.

Estadística y probabilidad

Estadística y Probabilidad es un área relativamente novedosa en el currículo, sobre todo porque debido a los pocos lugares en que se incluía en el currículo anterior, la mayoría de docentes no la enseñaba; nunca hasta el 2016 se incluyó en las pruebas nacionales de Bachillerato. Esta área: “posee un lugar estratégico, que alimenta directamente el sentido de la competencia matemática alrededor de la descripción de la realidad y el cultivo de la resolución de problemas en contextos diversos” (MEP, 2012, p. 54). Podría incluso decirse que es una disciplina distinta de las Matemáticas en donde sus criterios de validez no son idénticos a los de Geometría, Relaciones y Álgebra u otras subdisciplinas. Sin embargo, contiene Matemáticas de una manera considerable, y para el currículo escolar ofrece extraordinarios recursos de aprendizaje donde intervienen las Matemáticas más tradicionales.

En esta área:

(...) uno de los temas fundamentales que se desarrolla persistentemente es el de la variabilidad de los datos. Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida. De igual manera, un conjunto de datos requiere instrumentos para su descripción (media, mediana, moda, rango, desviación); su enseñanza debe hacerse en buena parte en función de su aplicación en el análisis de la información y resolución de problemas y no como objetos en sí mismos. Esto es relevante, pues a veces se ve equivocadamente la Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos. (MEP, 2012, pp. 54-55)

Es esencial subrayar que la introducción de los objetos estadísticos o probabilísticos debe hacerse siempre en contextos reales, puesto que deben servir a la resolución de problemas donde el análisis de la información y la toma de decisiones se vean favorecidos por sus contenidos. Aquí, por ejemplo, no tiene sentido el cálculo de medidas de tendencia central en sí mismas, lo que ya no sería Estadística sino Aritmética. En este currículo la demanda por un tratamiento adecuado de la Estadística y Probabilidad cobra mucho peso precisamente por haber sido hasta ahora un área que se trabajaba poco en las escuelas y colegios, y porque de igual manera en las mismas universidades formadoras de docentes el enfoque usado no ha sido plenamente convergente con el que sostiene el currículo costarricense.

Modelo para identificar habilidades y sus interacciones

En este apartado vamos a ofrecer una propuesta para clasificar la participación de las habilidades generales que subyace en el currículo de Matemáticas, para ello sin embargo será necesario evidenciar las interacciones que poseen habilidades específicas entre ellas, así como entre estas y las generales, y finalmente entre aquellas generales.

La interacción de las áreas

Si bien Costa Rica estableció cinco áreas matemáticas para apoyar la comprensión del currículo y beneficiar la acción de aula en su entorno educativo, no se consideran estas áreas como compartimentos estancos sin conexiones. Y más aun: se introducen diversos elementos curriculares que promueven fuertemente las interacciones entre las áreas y una visión transversal a todas ellas en las acciones de enseñanza y aprendizaje; por ejemplo, los cinco procesos o capacidades superiores y los ejes disciplinares invocan precisamente una visión integrada de las Matemáticas y su enseñanza.

Las Matemáticas contemporáneas en la perspectiva más amplia exhiben extraordinarias intersecciones entre sus objetos y métodos: las variables y las funciones propias de Relaciones y Álgebra se usan en la Geometría, o el manejo del plano o el espacio es importante para la comprensión de la naturaleza de objetos de Relaciones y Álgebra, en una situación propia de la Estadística o de la Probabilidad pueden participar elementos de Medidas, Números y Relaciones y Álgebra. Existe una conocida dicotomía que opone Matemáticas a la Matemática apuntando a si son varias disciplinas o subdisciplinas o se deben considerar como una sola, es decir una tensión entre diversidad y unicidad. La realidad es que esta dicotomía se puede resolver de una manera clara: hay Matemáticas y hay Matemática, son varias y una a la vez. Se pueden ver varias Matemáticas a partir de sus áreas, que en esencia fueron establecidas históricamente, y enfatizar características propias por ejemplo de la Geometría o del Álgebra. Sin embargo, los métodos de las matemáticas en sus diferentes disciplinas se intercambian, se integran. Conforme avanza la historia de las matemáticas y su cortejo de abstracción, es fácil encontrar más y más elementos en común, y, sin duda, se ha vuelto esencial potenciar la unidad y la generalidad de los métodos y objetos matemáticos para su construcción teórica. Hay unidad en las Matemáticas, y esto debe evidenciarse: en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conviene tener las dos perspectivas. En las Matemáticas existe un especial sentido de *transdisciplinariedad* (Ruiz, 2003).

La forma más conveniente de hacer esto, con base en el currículo nacional, es señalando, cuando sea pertinente y útil, las interrelaciones entre las áreas. Lo claramente inadmisibles sería asumir tanto en la acción de aula como en la evaluación, un tratamiento rígido de las fronteras de las áreas matemáticas.

El asunto se puede ver incluso desde una perspectiva más general: los problemas reales a los que se puede enfrentar una persona o una colectividad en su vida suelen traspasar las fronteras de las disciplinas cognoscitivas, mucho más allá de las propias matemáticas y del resto del conocimiento. La capacidad para identificar y usar los diversos instrumentos cognoscitivos, las Matemáticas y las relaciones entre sus áreas son una parte de la competencia matemática que se desea que la preparación escolar brinde a la población.

Hasta el 2017, en el currículo así como en las acciones de implementación del mismo, se ha enfatizado la clasificación de áreas y no insistido en las interacciones entre las áreas. ¿Por qué? Esto obedeció a una estrategia de implementación dotada de momentos históricos distintos. Una transformación tan amplia y profunda de las perspectivas y elementos curriculares, y en realidad, de toda la enseñanza de las Matemáticas en el país, no podía incorporarse desde un principio todos los énfasis que se derivan de estos programas. Por ejemplo, aunque se consignó la relevancia de problemas de “final abierto” para el enfoque curricular, no se propuso darles un lugar privilegiado. De igual manera, aunque se afirmó el uso intenso de tecnologías no se les brindó un papel significativo en los contenidos propiamente ni en los ejemplos ni en las acciones propuestas. Algo similar ocurre con el papel de la historia de las Matemáticas.

La colectividad educativa debía aprehender primeramente componentes “gruesos” del currículo (como su enfoque principal que funde la resolución de problemas y la contextualización activa). Aunque aun faltan varios años para instalar en la conciencia colectiva esos ejes curriculares esenciales, ya es tiempo de subrayar cada vez más el papel de las capacidades superiores y el trabajo con mayores niveles de complejidad.

En cuanto a la interrelación de las áreas: el uniformar la malla curricular mediante una clasificación con cinco áreas, algunas de ellas novedosas en ciertos niveles o con una conceptualización distinta, era suficiente carga para asumirse en el medio educativo costarricense. Algo parecido ha ocurrido con la evaluación que ha tenido que abordarse con rigor hasta unos años después de iniciarse la implementación curricular, por razones incluso de un calado social más general. Sin embargo, conforme se siga avanzando en esta poderosa reforma educativa será necesario que en las diversas acciones se incluyan todos los elementos curriculares que este currículo estableció.

La intervención combinada y sinérgica de habilidades

Las habilidades generales en el currículo en general refieren a ciclos educativos completos, pero debe señalarse que no es idéntica la “generalidad” de las mismas ya sea dentro de una área o en relación con otras. Es decir, algunas de estas habilidades generales poseen un foco más reducido que otras o, al revés, unas tienen un foco de mayor amplitud (refieren a mayor o a menor número de cosas).

Se busca estimular y obtener las habilidades en periodos, y por lo tanto su desarrollo debe verse como un proceso gradual. Tampoco conviene verlas como si se tratara de situaciones “binarias”: ceros o unos, se tiene o no se tiene, siempre existen matices o grados pues convergen diferentes niveles en el dominio de una habilidad.

Los programas oficiales subrayan la integración de habilidades como una característica central del enfoque curricular. Esto se traduce en la gestión educativa en que se debe promover el tratamiento integrado de las habilidades como una de las mejores maneras de generar el desarrollo de estas alrededor de los conocimientos. La integración de habilidades favorece un aprendizaje sinérgico, es decir, se potencia el estímulo del conjunto de habilidades más allá de la simple suma de cada una de ellas consideradas por separado. Y esta orientación permite optimizar los tiempos para la acción de aula con base en los contenidos curriculares.¹

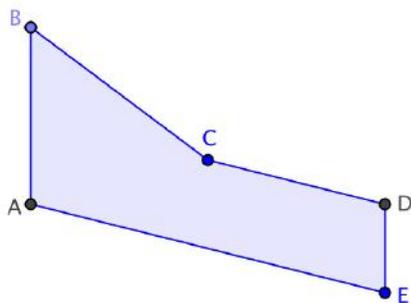
Las habilidades no se conceptúan como capacidades aisladas, por lo tanto se desarrollan de manera combinada entre sí; es decir: un estudiante puede avanzar en el cultivo de una habilidad en asociación con otras; existen intersecciones cognitivas entre las habilidades.

Una manera de valorar las habilidades es comprender que se pueden descomponer en habilidades de naturaleza más básica, como si se tratara de elementos “moleculares” o “atómicos” más pequeños; estos elementos más básicos pueden entonces estar presentes en varias habilidades. Por ejemplo: “Identificar colecciones de puntos en una figura geométrica” o “reconocer símbolos como representaciones de objetos matemáticos” no son habilidades específicas del currículo, pero son capacidades que subyacen dentro de varias específicas y generales que sí están. Un ejemplo² de esto último podría ser:

En la siguiente figura se tiene que $B-C-E$ y $\triangle ABE \sim \triangle EDC$, con razón de semejanza 2, y el segmento AD perpendicular a segmento AB . Si $AB=2$ cm y $AD=4$ cm, determine el área del pentágono $ABCDE$.

¹ En la experiencia de Costa Rica se ha podido identificar esta perspectiva integradora como un instrumento poderoso para apoyar su implementación; pero no es solo que corresponda con el enfoque del currículo, es que esta permite que los docentes comprendan mejor ese enfoque, que visualicen de manera muy práctica cómo la gestión de aula se puede concentrar y racionalizar dentro de cursos lectivos donde nunca sobra el tiempo, pues las contingencias diversas no dejan de actuar.

² Los ejemplos específicos de esta sección fueron aportados por Hugo Barrantes.



En este caso, se debe conocer el significado de los símbolos Δ y \sim . Por otra parte se debe interpretar que $B-C-E$ indica que los puntos son colineales y B está entre E y C . En la semejanza, el orden en que se dan los vértices de los triángulos refiere a la correspondencia entre los vértices, también, que la notación AB se refiere a la medida del segmento AB y que tanto ABC y EDC como $ABCDE$ refieren a polígonos cuyos vértices son los puntos denotados por las letras indicadas.

Como veremos más adelante, también es posible considerar situaciones en las que habilidades específicas podrían verse como generalizaciones de otras específicas.

La intersección de habilidades se da tanto en aquellas específicas como en las generales, siendo probable que se encuentren más intersecciones con las habilidades de naturaleza más general que con las específicas.

Relación entre habilidades generales y habilidades específicas

El currículo costarricense de Matemáticas no se elaboró pensando que las habilidades generales no tienen intersecciones, ni tampoco pensando que cada habilidad específica debía ser parte o manifestación de solamente una habilidad general, ni tampoco que siempre las habilidades que intervienen en una tarea matemática se encuentran totalmente contenidas dentro de un área. En algunas tareas matemáticas es posible que habilidades generales o específicas de un área sean las decisivas para su realización, pero en otras puede que sean habilidades de dos o más áreas las que sean cruciales para la realización de la tarea.

En este currículo se pueden distinguir dos casos de relación entre habilidades generales y específicas:

1. Habilidades generales de un área que *generalizan* de alguna manera una o varias habilidades específicas.
2. Habilidades generales de un área que se *construyen a través* de dos o más específicas.

En el primer caso, la habilidad general lo que hace es potenciar las específicas una vez que ellas se hayan adquirido; se puede ver como una generalización de ellas.



Figura 1. Habilidad general como generalización de habilidades específicas

Vamos a continuación a ofrecer un ejemplo de este primer caso.

Consideremos la habilidad general de Relaciones y Álgebra: “Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada” (MEP, 2012, p. 405). Algunas habilidades específicas relacionadas con ella son:

- “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.” (MEP, 2012, p. 415)
- “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.” (MEP, 2012, p. 417)
- “Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada (lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial).” (MEP, 2012, p. 417)

La habilidad general aquí se puede ver como una generalización de las tres específicas (en el sentido de que las engloba). “Determinar el modelo matemático” refiere a “Identificar y aplicar” modelos matemáticos así como “Analizar el tipo de función que sirva de modelo”. Lo que sucede es que las específicas refieren a casos particulares: “exponenciales”, “logarítmicas” o a “lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial”, mientras que la general refiere a cualquier “situación dada”.

En este primer caso la habilidad general potencia las específicas en su conjunto.

En casos como este también es posible identificar grados distintos de “generalidad” en las habilidades específicas, por lo que podrían incluso considerarse como habilidades “semigenerales” o incluso propiamente generales. Sin embargo, el currículo establece una habilidad más general que en conjunto las incluye y las potencia. En algunos casos podrían verse como generalización de otras específicas. Por ejemplo: “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales” podría incluir las habilidades específicas “Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales” y “Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales”, entre otras.

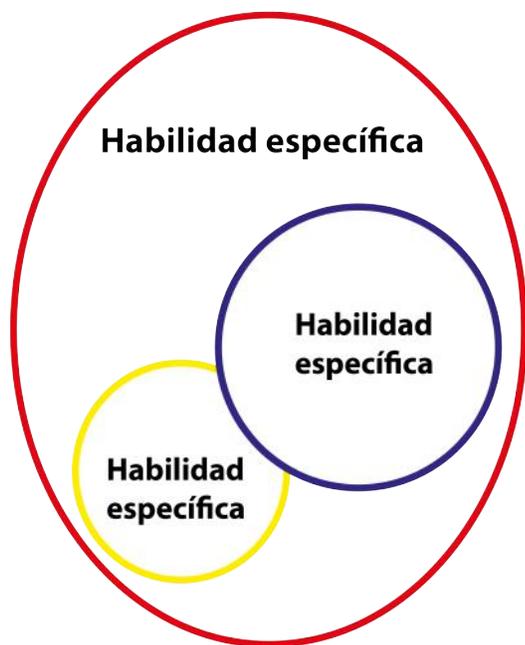


Figura 2. Habilidad específica como generalización de habilidades específicas

En el segundo caso enunciado anteriormente, las habilidades específicas se asocian a una general pero esta última no puede verse como una generalización de alguna o del conjunto de las específicas, o -si así se desea formular- la general las engloba de una manera distinta a las del caso analizado previamente. Aquí lo central es que la realización del conjunto de las habilidades específicas (con mediación pedagógica e intervención de otros elementos curriculares como los procesos) permite alcanzar la general. Es decir, se pueden ver estas habilidades específicas como “bloques” componentes (que se juntan, asocian) para desarrollar la habilidad general.

HABILIDAD GENERAL

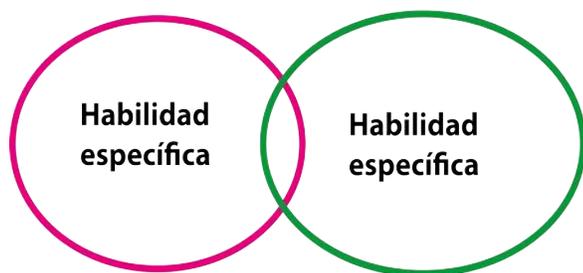


Figura 3. Habilidad general como composición de habilidades específicas

Un ejemplo muy claro: la habilidad general del área de Geometría: “Representar las circunferencias de manera analítica y gráfica” (MEP, 2012, p. 385) involucra las siguientes habilidades específicas:

- “Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.”
- “Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.” (MEP, 2012, p. 386)

En esta situación la habilidad general es prácticamente la yuxtaposición de las dos primeras específicas; es decir, la general se construye mediante las específicas, no es una generalización de ellas.

Ahora bien, se puede ofrecer aquí mismo una relación un poco distinta en la que la habilidad general no es generalización de específicas, pero tampoco simple yuxtaposición: un caso de una específica que es componente para lograr la habilidad general. En el mismo ejemplo anterior considérese otra habilidad específica asociada a la general:

- “Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.” (MEP, 2012, p. 386)

Esta tercera habilidad específica coadyuva en la interpretación del sentido de lo que es la circunferencia en cualquiera de sus representaciones, y le da a la habilidad general un rango mayor que la simple suma de las dos primeras específicas. En realidad, podría haberse formulado como dos habilidades específicas: “Determinar gráficamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia”, y “Determinar algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia”. Esta habilidad específica sería así yuxtaposición de dos habilidades más específicas (que sin embargo no fueron formuladas de esa forma en el currículo). La acción básica que construye la habilidad general en este tipo de casos es la yuxtaposición o composición y no la generalización.

HABILIDAD GENERAL

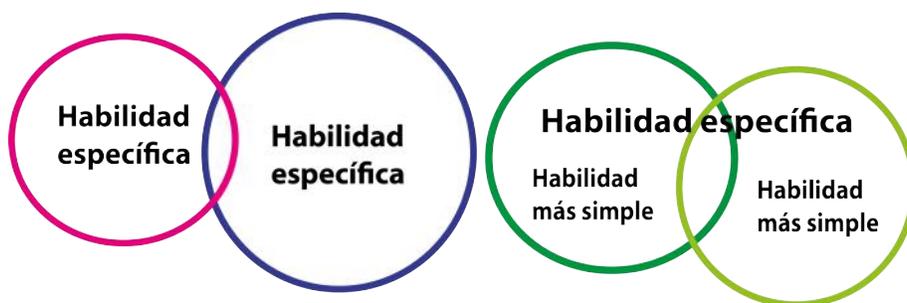


Figura 4. Habilidad general como composición de habilidades específicas y habilidades más simples

En síntesis: la relación entre habilidades específicas y las generales a las que se asocian no siempre es la misma. Al menos hay dos casos distintos: a) generales como *generalización de específicas*, y b) aquellas que se consiguen a partir de habilidades específicas (como *mera conjunción* o como *un componente necesario*). Y además: hay habilidades específicas con niveles distintos de generalidad.

Otra situación que aparece en este currículo es la existencia de habilidades generales que pueden verse como englobando o generalizando otras habilidades generales (habilidades que “incluyen” otras habilidades generales); se trata de algunas habilidades extremadamente generales.

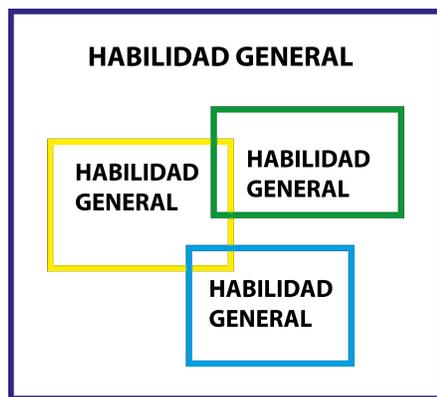


Figura 5. Habilidad general que generaliza otras habilidades generales

Un par de ejemplos en el área de Relaciones y Álgebra: “Plantear problemas a partir de una situación dada” (MEP, 2012, pp. 247, 328), “Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada” (MEP, 2012, p. 405). Esta última habilidad incluye las demás habilidades generales del área e, inclusive, se puede decir que de las otras áreas. Este tipo de habilidad realmente estará presente en todos los ítems que se consideren.

Tres ejemplos en Estadística y Probabilidad: “Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto” (MEP, 2012, p. 352), “Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística.” (MEP, 2012, p. 431), “Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil” (MEP, 2012, p. 431).

En Números: “Efectuar operaciones con números en sus diferentes representaciones” (MEP, 2012, p. 173), “Plantear y resolver problemas en diferentes contextos donde se requiera el uso de las operaciones y representaciones numéricas” (MEP, 2012, p. 275).

En Medidas: “Aplicar la medición en diversos contextos” (MEP, 2012, p. 223).

Estas habilidades tan generales, por convención, las podemos llamar “habilidades sombrilla”. Fueron introducidas en el currículo para que en diversas partes de la malla curricular se pudiera subrayar la sintonía con elementos centrales del enfoque principal del currículo y la competencia matemática como su constructo o para potenciar capacidades muy generales de toda una área.

Participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas³

Se puede por conveniencia, y en aras de la explicación de estas ideas, denominar las cinco áreas matemáticas del currículo nacional como A_1 , A_2 , A_3 , A_4 y A_5 . Es posible identificar las siguientes posibilidades de participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas para una área A_k (siendo k un valor entero entre 1 y 5).

Tabla 1
Seis escenarios de intervención de habilidades generales

	Descripción de escenario
E_1	Una habilidad general de A_k
E_2	Más de una habilidad general de A_k
E_3	Una habilidad general de A_k y una habilidad general de otra área
E_4	Una habilidad general de A_k y dos o más habilidades generales de al menos dos áreas distintas a A_k
E_5	Más de una habilidad general de solamente A_k y una de otra área
E_6	Más de una habilidad general de A_k y más de una de las otras áreas

Se podría consignar una colección con más opciones teóricas (por ejemplo, si intervinieran dos o tres o cuatro áreas). Sin embargo, estas seis opciones generales (o escenarios) solamente pretenden visualizar teóricamente la multiplicidad de opciones con las que se podrían relacionar las habilidades generales del currículo en las tareas matemáticas.

En esta discusión, no obstante, hay que tener en cuenta que lo que predominantemente sucede con una tarea matemática (problema, ítem) es que obedece prioritariamente a un área determinada y en ella a una habilidad general y a veces a dos habilidades generales.

³ La clasificación final de las relaciones entre habilidades generales que se formula en esta sección fue producto de la elaboración colectiva realizada durante el 2016 en el equipo central del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica; una sistematización preliminar que nutrió la que aparece aquí fue realizada por Hugo Barrantes.

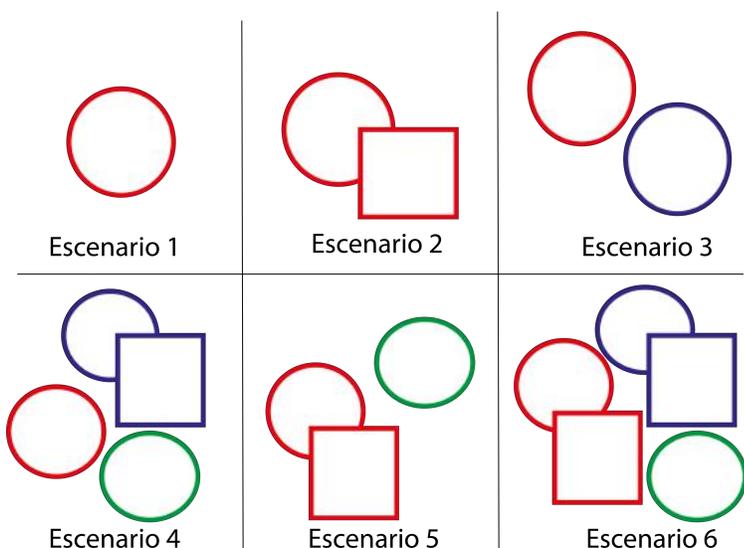


Figura 6. Seis escenarios de interacción de habilidades generales. Círculos y cuadrados representan habilidades generales distintas, el color indica una área. El escenario 2, por ejemplo, representa dos habilidades dentro de una tarea

En una tarea matemática es probable que intervenga una habilidad general del área y solamente habilidades específicas de otra general de esa área, pero sin que realmente esta última habilidad general participe plenamente. Es decir: aquí una habilidad general y además específicas de un área y algunas específicas de otras habilidades generales dentro del área serían lo crucial para realizar la tarea. Por ejemplo, considere el siguiente problema:

La longitud L (en centímetros) después de t años de vida, de un pez barracuda, está modelada por:

$$L(t) = 198 - 197,1e^{-0,23t}$$

Según este modelo, la edad aproximada, en años, de un pez barracuda cuya longitud es de 114 cm corresponde a

- A) 1,21
- B) 3,77
- C) 15,00
- D) 21,05

Solución

Si la longitud del pez es 114 cm, entonces $114 = 198 - 197,1e^{-0,23t}$. Esto equivale a $0,4264 = e^{-0,23t}$, por lo tanto $t = \frac{\ln(0,4264)}{-0,23} \approx 3,77$ años.

Aquí hay dos habilidades generales del área de Relaciones y Álgebra. La fundamental refiere a “Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada” (MEP, 2012, p. 405). La otra es “Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada” (MEP, 2012 p. 405), la cual no se da plenamente puesto que el modelo no se determina sino que está dado y se utiliza, lo cual refiere a la habilidad específica “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales” (MEP, 2012, p. 415) que corresponde a la segunda habilidad general mencionada.

Cuando en la resolución de una tarea matemática se introducen habilidades de otras áreas con mayor razón es posible que se usen en su realización algunas habilidades específicas de esas áreas y no realmente sean necesarias las habilidades generales de esas áreas como tales (con las que estarían asociadas las específicas usadas de las otras áreas).

Por ejemplo, considere la siguiente situación:

Al punto (2,5) se le aplica la homotecia H de centro (0,0) y razón 0,5 y al resultado se le aplica la reflexión $R(x, y) = \left(\frac{4y-3x}{5}, \frac{3y+4x}{5}\right)$. La ordenada del punto que se obtiene corresponde a ____

Al aplicar la homotecia al punto (2,5) se obtiene el punto $(2 \cdot 0,5, 5 \cdot 0,5) = (1, 2,5)$. Al aplicar a este la reflexión se obtiene $R(1, 2,5) = \left(\frac{4 \cdot 2,5 - 3 \cdot 1}{5}, \frac{3 \cdot 2,5 + 4 \cdot 1}{5}\right) = (1,4, 2,3)$. La respuesta es 2,3.

Aquí hay dos habilidades generales involucradas, del área Geometría:

- “Aplicar e identificar diversas transformaciones en el plano a figuras geométricas.”
- “Utilizar la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones.” (MEP, 2012, p. 385)

El problema corresponde prioritariamente al área de Geometría y a las dos habilidades generales mencionadas puesto que la información indica que se aplican dos transformaciones y, además, la información sobre ellas está dada en su forma analítica. Por otra parte, se pregunta sobre la ordenada de un punto, por lo que se hace referencia al uso de la geometría analítica.

En el proceso de solución se evidencia el uso de dos habilidades específicas:

- “Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras.” (MEP, 2012, p. 395)
- “Calcular la composición de dos funciones.” (MEP, 2012, p. 408)

La segunda corresponde al área de Relaciones y Álgebra y se utiliza de manera implícita en el proceso. No se hace uso pleno de la habilidad a la que está ligada: “Aplicar el concepto de función en diversas situaciones” (MEP, 2012, p. 405).

De manera general, lo que todo esto plantea para la acción de aula y para la evaluación, es la necesidad de tener una comprensión amplia de las habilidades generales y específicas y de las fronteras de las áreas y, por lo tanto, mucha flexibilidad en el diseño de las tareas matemáticas. Lo congruente con el currículo nacional de Matemáticas es el diseño de tareas matemáticas que incorporen de múltiples maneras las habilidades (generales y específicas) de las diversas áreas. Esta flexibilidad en la participación de habilidades no debe entenderse en el sentido de que en toda tarea matemática se deba forzar la participación de habilidades de varias áreas; hacer eso podría resultar artificial e inapropiado para las tareas matemáticas y los aprendizajes (conocimientos y habilidades) que se desean generar en los estudiantes.

Visto desde la perspectiva más amplia de la implementación curricular en las aulas: la integración de habilidades y las interrelaciones entre áreas matemáticas en el diseño de las tareas matemáticas en la acción de aula y en la evaluación, debería realizarse en el país a través de un proceso gradual. En el periodo 2012-2016 se proporcionaron recursos para la integración de habilidades específicas y generales dentro de un área⁴, pero este proceso debe avanzar con la inclusión de habilidades de varias áreas dentro de una estrategia lúcidamente concebida.

Identificar cuáles son los conocimientos que intervienen en una tarea no es tan complejo, resulta más difícil consignar las habilidades específicas y generales, y aun más, identificar la intervención de las capacidades superiores, así como precisar el nivel de complejidad de la tarea. En cuanto a las habilidades aquí hemos

⁴ El Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica elaboró en el periodo 2013-2014 múltiples documentos mostrando cómo se puede llevar a las aulas la integración de habilidades (para todos los niveles), capacitaciones presenciales en el 2014 (que fueron replicadas en muchas regiones en el 2015), y además en el 2015 se desarrolló un plan piloto en busca de hallazgos y ejemplos de buenas prácticas en conexión con esta temática (MEP, PREMCR, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d, 2014e, 2014f, 2014g, 2014h, 2014i, 2014j).

sostenido la necesidad de una actitud flexible para valorar su intervención, aunque eso no elimina la dificultad para calibrar su participación.

Referencias bibliográficas

- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Descargado de <http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014a). *Documento de Integración de habilidades para Segundo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014b). *Documento de Integración de habilidades para Tercer año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014c). *Documento de Integración de habilidades para Cuarto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014d). *Documento de Integración de habilidades para Quinto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014e). *Documento de Integración de habilidades para Sexto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014f). *Documento de Integración de habilidades para Séptimo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014g). *Documento de Integración de habilidades para Octavo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014h). *Documento de Integración de habilidades para Noveno año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014i). *Documento de Integración de habilidades para Décimo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.
- Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*, San José, Costa Rica: EUNED. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en <http://www.centroedumatematica.com/aruz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Portada.htm>
- Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622>

Créditos

Identificación de conocimientos y habilidades en las tareas matemáticas es un documento elaborado en el marco del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Autor

Angel Ruiz

Identificación de conocimientos y habilidades en las tareas matemáticas fue elaborado con base en textos contenidos en la publicación: Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622>

Colaborador

Hugo Barrantes

Revisión

Comisión central del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Director del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2018). *Identificación de conocimientos y habilidades en las tareas matemáticas*. San José, Costa Rica: autor.



Identificación de conocimientos y habilidades en las tareas matemáticas, Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/).