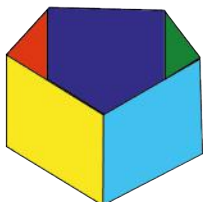


Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



www.reformamatematica.net



Documento de integración de habilidades para Noveno año

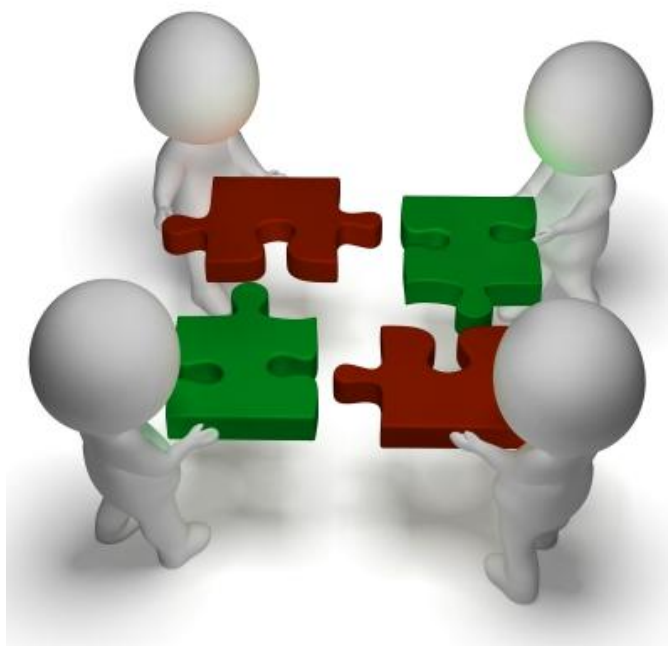


Imagen cortesía de Stuart Miles en Freedigitalphotos.net

**Costa Rica
2014**

Tabla de contenidos

PRIMERA PARTE: ELEMENTOS PREVIOS	3
SEGUNDA PARTE: INTEGRACIÓN DE HABILIDADES	4
NÚMEROS.....	4
GEOMETRÍA	11
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	18
RELACIONES Y ÁLGEBRA.....	30
CRÉDITOS	38

Primera parte: Elementos previos

A continuación se presenta la propuesta de distribución de las áreas para el Noveno año, que también será considerada en la segunda parte de este documento.

Tabla 1. Distribución de áreas Matemáticas para Noveno año según lo estipulado en los programas de estudio

Nivel	Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Noveno año	Números Geometría	Estadística y Probabilidad Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra

Nota:

- *Medidas* es transversal en el Tercer ciclo.

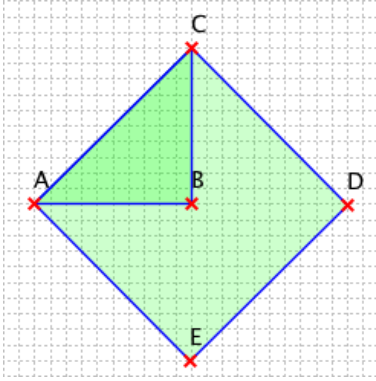
Aquí se ofrece un recuento aproximado del número de lecciones que supondría en este nivel el trabajo usando la estrategia sugerida de integración de habilidades por área mediante problemas.

Tabla 2. Conteo de lecciones por área y periodo en el Noveno año

Noveno año		
Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Números 24	Estadística y Probabilidad 20	Relaciones y Álgebra 33
Geometría 32	Relaciones y Álgebra 20	
Suma total de lecciones por periodo		
56	40	33

Segunda parte: Integración de habilidades

Números

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Números reales</p> <ul style="list-style-type: none"> Números irracionales Representaciones 	<p>1. Identificar números irracionales en diversos contextos.</p>	<p>▲ Para introducir los números racionales se puede comenzar con el siguiente problema.</p> <p>😊 Suponga que en la siguiente figura el segmento BC mide 1 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACDE?</p>  <p>▲ La discusión llevará de manera natural a concluir que el área es 2 m^2, viendo que el cuadrado está constituido por cuatro triángulos congruentes de área $0,5 \text{ m}^2$. Si no se conoce el teorema de Pitágoras, no se sabrá de antemano cuánto es x, la medida del lado del cuadrado, pero debido a que el área es 2 y el lado es x entonces $x^2 = 2$.</p> <p>A continuación se pregunta al grupo qué tipo de número es x y éste deberá concluir que no es un número entero puesto que no hay un entero que multiplicado consigo mismo dé 2.</p> <p>¿Será un racional? Esta posibilidad puede descartarse realizando una demostración, que servirá además para repasar conceptos de teoría de números.</p> <p>Finalmente se concluye que los números como x que no son racionales se llaman irracionales, que x se denota por $\sqrt{2}$. Se indica que π es otro número irracional y que hay muchos otros.</p> <p>🦉 Se puede ilustrar, por medio de reseñas históricas, que el surgimiento de este tipo de números aparece en la solución de problemas en los que los números racionales no son suficientes.</p>
	<p>2. Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.</p>	<p>▲ Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales.</p> <p>⚙️ Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001..." (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de <i>Relaciones y Álgebra</i>.</p>

3. Realizar aproximaciones decimales de números irracionales.

4. Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.



La calculadora debe usarse para que cada estudiante pueda observar más rápidamente el desarrollo; sin embargo, se debe aclarar que la calculadora tan solo ofrece una aproximación.

▲ Se implementará el procedimiento de cálculo de raíces, visto en años anteriores, para identificar aquellas raíces que corresponden a números irracionales.

▲ Se puede desarrollar una actividad para obtener una aproximación de e . Se pide a cada estudiante que complete la siguiente tabla con ayuda de la calculadora. Se puede explorar con valores de n mayores a los suministrados.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	
2	
:	
.	
100	
:	
.	
950	
:	
.	
5000	

Luego, se pueden realizar preguntas como por ejemplo,

- ¿qué sucede conforme aumenta el valor de n ?
- ¿los resultados obtenidos son números racionales?

Finalmente, en el cierre se menciona que la actividad desarrollada es una forma de aproximar el número irracional e por medio de números racionales y el o la docente puede proponer la realización de una pequeña investigación acerca de sus orígenes.



El trabajo con números irracionales puede ofrecer oportunidades para activar el proceso *Razonar* y *argumentar*. Por ejemplo, al mostrar que $\sqrt{3}$ no es un número racional.

Recuadro N° 1

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 3, Etapa II: 3)


Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades conducen al reconocimiento de los números irracionales en sus distintas notaciones. A manera de sugerencia, se puede implementar una actividad donde se realice una aproximación de un número irracional (desarrollo de la habilidad 3), donde el estudiante debe descubrir primero qué criterio permitirá efectuar la aproximación, por ejemplo buscar un número l tal que $l^2 = 91$.

Así, elaboran aproximaciones iniciales mediante el cálculo mental empleando números enteros. Esto permite al estudiante deducir que el número buscado es mayor que 9 y menor que 10.

Conforme los estudiantes realizan aproximaciones que requieren de una mayor cantidad de decimales, se espera que valoren el momento oportuno donde tendrán que hacer uso de la calculadora científica.

Por ejemplo, se comienza realizando aproximaciones utilizando décimas:



$$9,12 = \frac{8281}{100} = 82,81$$

$$9,22 = \frac{2116}{25} = 84,64$$

$$9,32 = \frac{8649}{100} = 86,49$$

$$9,42 = \frac{2209}{25} = 88,36$$


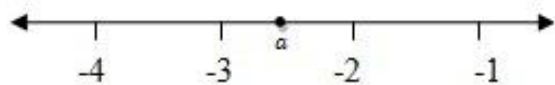
$$9,52 = \frac{361}{4} = 90,25 \quad \rightarrow \text{Aproximación anterior}$$

$$9,62 = \frac{2304}{25} = 92,16 \quad \rightarrow \text{Aproximación posterior}$$

de donde se puede deducir que el valor buscado se encuentra entre 9,5 m y 9,6 m. Se continua así estableciendo aproximaciones con una cantidad mayor de decimales, donde se puede ir visualizando el tipo de expansión decimal característica de estos números. En el cierre de la lección, se puede definir qué es un número irracional, y las diferentes formas en que se pueden representar.

En esta primera etapa cobra vital importancia darle tiempo al estudiantado para que tome conciencia en que consiste ser un número irracional, el trabajo con cálculo mental, papel y lápiz, calculadoras (corrientes, científicas, de celulares, de la computadora), hojas electrónicas, wólfram conlleva tiempo.

Para la segunda etapa podría implementarse un mini cierre de cómo implementar el procedimiento de cálculo de raíces, visto en años anteriores, para identificar aquellas raíces que corresponden a números irracionales.


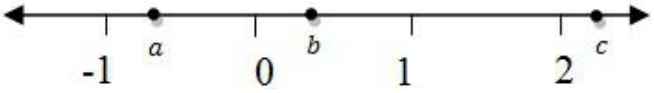
<p>Números reales</p> <ul style="list-style-type: none"> Números irracionales Representaciones Comparación Relaciones de orden Recta numérica 	<p>5. Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.</p> <p>8. Estimar el valor de la raíz de un número entero.</p> <p>9. Determinar números irracionales con representación radical entre dos números enteros consecutivos.</p>	<p>▲ Plantear ejemplos del tipo:</p> <ol style="list-style-type: none"> Determine entre qué par de números enteros consecutivos se encuentra $\sqrt{29}$. Determine tres números irracionales representados con radicales que se encuentran entre los números 7 y 8. <p>▲ Trabajar ejemplos del tipo:</p>  <p>Un posible valor de a es</p> <p>() $\sqrt{10}$ () $\sqrt{101}$ () $\sqrt{95}$ () $\sqrt{80}$</p>  <p>Un posible valor de a es</p> <p>() $\sqrt[3]{-10}$ () $\sqrt[3]{-6}$ () $\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}$ () $\sqrt[3]{-10}$</p>
---	--	---

Recuadro N° 2

Número sugerido de lecciones: 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

El logro de la habilidad 9 involucra el trabajo con las habilidades 5 y 8. Se puede proponer para la Etapa I uno de los ejemplos de las indicaciones puntuales (por ejemplo a.) para que su desarrollo utilice la definición de radical para aproximar números irracionales en su forma decimal y con los conocimientos previos relacionados con el ordenamiento de los números buscar entre qué par de números enteros es posible ubicarlo.

<p>Números reales</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de número real • Representaciones • Comparación • Relaciones de orden • Recta numérica 	<p>6. Identificar números reales (rationales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.</p>	 Se puede utilizar la calculadora. Se debe hacer énfasis en las diferentes representaciones de un número real, por ejemplo: <ol style="list-style-type: none"> $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707106 \dots$ Verificar que $\sqrt{5^2 - 7^2} \neq 5 - 7$ Al resolver la operación $5 + 23$ en la calculadora da como resultado $0,2173913043 \dots$, el cual se puede malinterpretar como un número irracional, de ahí la importancia de las diferentes representaciones de un número real. <p>▲ También es importante comentar que hay números, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-25}$ que no son reales.</p> <p>Se debe realizar un análisis de posibles errores que se pueden cometer al calcular ciertas expresiones. Por ejemplo, analizar lo incorrecto en el siguiente procedimiento:</p> $\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5.$
	<p>7. Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.</p>	<p>▲ Usar la estimación mental o la calculadora para realizar tal representación. Por ejemplo:</p> <p>😊 Dadas las coordenadas a, b, c, como se muestra en la figura:</p>  <p>coloque un punto en un lugar aproximado a</p> <ol style="list-style-type: none"> a $b + 1$ $\frac{c}{3}$


Recuadro N° 3

Número sugerido de lecciones: 3 (Etapa I: 2, Etapa II: 1)

Indicaciones y ejemplos

Ya ha existido un trabajo previo en cuanto a reconocimiento de números racionales e irracionales y su ubicación en la recta numérica.

Las diferentes representaciones de un número irracional, principalmente los de expansión decimal infinita no periódica requiere de tiempo. Así mismo las diferentes representaciones de un número irracional, donde el razonamiento y argumentación juegan un importante papel.

<p>Cálculos y estimaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias • Radicales 	<p>10. Utilizar la calculadora para resolver operaciones con radicales.</p>	<p>▲ Este es uno de los usos adecuados para la calculadora, en un tema en que no tiene sentido la realización de cálculos sin ese tipo de soporte.</p>  <p>Se debe aprovechar la calculadora científica para trabajar con expresiones con radicales. La respuesta puede darse en cualquier representación. Además, se pueden resolver problemas como:</p> <p>😊 Hallar el valor de x en la ecuación $x^7 = 5 \quad \text{o} \quad x^6 = 5$</p> <p>😊 Calcule el valor de m tal que $5^m \cdot 5^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{3125}$</p>
---	---	--



Recuadro N° 4

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 3, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabaja de manera independiente. Se podría incorporar en la Etapa I una actividad donde los estudiantes puedan justificar la operatoria con radicales mediante el uso de la calculadora científica. Esto sería sencillo a partir de la búsqueda de patrones presentes en los resultados de las operaciones y lo trabajado en lo referente a las diversas representaciones de un número en notación radical.

<p>Cantidades muy grandes y muy pequeñas</p>	<p>11. Utilizar los prefijos del Sistema Internacional de Medidas para representar cantidades muy grandes y muy pequeñas.</p> <p>12. Utilizar la calculadora o software de cálculo simbólico como recurso en la resolución de problemas que involucren las unidades.</p>	<p>▲ Se muestra a continuación los prefijos del sistema internacional de medidas a utilizar:</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">mega (10^6)</td> <td style="width: 50%;">micro (10^{-6}),</td> </tr> <tr> <td>giga (10^9)</td> <td>nano (10^{-9}),</td> </tr> <tr> <td>tera (10^{12})</td> <td>pico (10^{-12}),</td> </tr> <tr> <td>peta (10^{15})</td> <td>femto (10^{-15}),</td> </tr> <tr> <td>exa (10^{18})</td> <td>atto (10^{-18}),</td> </tr> <tr> <td>zeta (10^{21})</td> <td>zepto (10^{-21}).</td> </tr> <tr> <td>yota (10^{24})</td> <td></td> </tr> </table>	mega (10^6)	micro (10^{-6}),	giga (10^9)	nano (10^{-9}),	tera (10^{12})	pico (10^{-12}),	peta (10^{15})	femto (10^{-15}),	exa (10^{18})	atto (10^{-18}),	zeta (10^{21})	zepto (10^{-21}).	yota (10^{24})	
mega (10^6)	micro (10^{-6}),															
giga (10^9)	nano (10^{-9}),															
tera (10^{12})	pico (10^{-12}),															
peta (10^{15})	femto (10^{-15}),															
exa (10^{18})	atto (10^{-18}),															
zeta (10^{21})	zepto (10^{-21}).															
yota (10^{24})																

		<p>▲ Un problema que puede ser utilizado en relación con este tema es el siguiente:</p> <p> Gmail es un servicio de correo electrónico gratuito que ofrece una capacidad de almacenamiento de más de 7 Gb y Google afirma que esta cifra seguirá en aumento. Si un disco compacto (CD) tiene una capacidad de almacenamiento de 650 Mb, ¿cuántos discos compactos (CD) equivaldrían a la capacidad de almacenamiento de Gmail?</p> <p>▲ Para resolver este problema hay recordar que un Gigabyte equivale a</p> $2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824 \text{ bytes}$ <p>y un Megabyte equivale a</p> $2^{20} = 1\ 048\ 576 \text{ bytes}$ <p>Por lo tanto, la capacidad de almacenamiento de Gmail es de más de 11 discos compactos.</p> <p>▲ No introducir el uso de notación científica.</p> <p> Las nanomedidas pueden introducirse aquí mediante una breve historia y su conexión con el uso de Nanotecnologías.</p> <p>La nanotecnología es el estudio, diseño, creación, síntesis, manipulación y aplicación de materiales, aparatos y sistemas funcionales a través del control de la materia a nano escala, y la explotación de fenómenos y propiedades de la materia a nano escala. Cuando se manipula la materia a una escala tan minúscula de átomos y moléculas, se demuestran fenómenos y propiedades totalmente nuevas. Por lo tanto, científicos utilizan la nanotecnología para crear materiales, aparatos y sistemas novedosos y poco costosos con propiedades únicas.</p> <p>(...)</p> <p>La nanociencia está unida en gran medida desde la década de los 80 con Drexler y sus aportaciones a la "nanotecnología molecular", esto es, la construcción de nanomáquinas hechas de átomos y que son capaces de construir ellas mismas otros componentes moleculares.</p> <p>Richard Feynman, premio Nobel de Física, es considerado el padre de la "nanociencia". En 1959 propuso fabricar productos con base en un reordenamiento de átomos y moléculas. En ese año, escribió un artículo que analizaba cómo los ordenadores trabajando con átomos individuales podrían consumir poquísima energía y conseguir velocidades asombrosas.</p> <p>(...)</p> <p>Podemos decir que muchos progresos de la nanociencia estarán entre los grandes avances tecnológicos que cambiarán el mundo.</p> <p>Fuente: http://www.euroresidentes.com/futuro/nanotecnologia/nanotecnologia_que_es.htm</p>
--	--	--




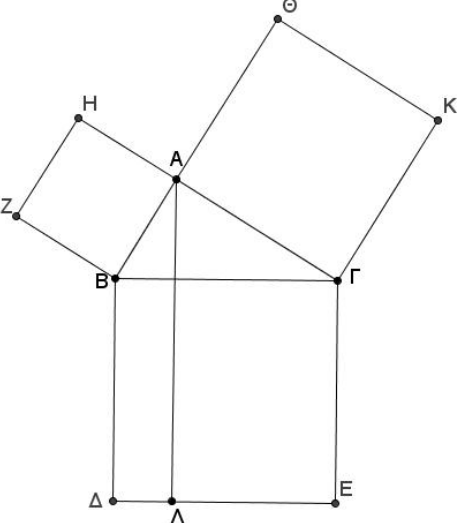
Recuadro N° 5

Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 2, Etapa II: 3)
--------------------------------------	-----------------------------

Indicaciones y ejemplos

El problema que se propone en las indicaciones puntuales es un buen parámetro para justificar el uso de otros tipos de unidades de medidas para cantidades muy grandes mediante la resolución de problemas.

Geometría

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Triángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> Teorema de Pitágoras 	<ol style="list-style-type: none"> Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos. Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras. 	<p>▲ Se puede proponer el siguiente problema:</p> <p> Diego necesita comprar una escalera para subirse al techo de su casa. El techo está a una altura de 97 pulgadas. Para poder tener una buena estabilidad en la escalera al apoyarse en la pared, las patas de la escalera deben estar a una distancia de entre 30 y 40 pulgadas. ¿Cuál podría ser la medida aproximada de la escalera?</p> <p> El problema permite el uso de varias estrategias, como hacer un dibujo a escala en su cuaderno, utilizar una cinta métrica y realizar una simulación de la situación. Esto permite estimular la creatividad estudiantil.</p> <p>▲ Es importante analizar tanto las soluciones como las estrategias utilizadas. Además hay que tomar en cuenta que hay gran variedad de soluciones correctas.</p> <p>▲ Luego se hace la clausura enunciando el Teorema de Pitágoras.</p> <p> En el proceso de clausura, y como elemento histórico pedagógico, se puede utilizar el texto de Euclides (matemático griego del siglo IV a.C.) en el que se proporciona una demostración del Teorema de Pitágoras. La proposición 47 del Libro I de <i>Elementos</i> de Euclides es el conocido teorema de Pitágoras. Se transcribe a continuación tal como aparece en dicho texto:</p> <p>Proposición 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.</p>  <p>Por ejemplo se puede usar esta referencia histórica para ilustrar el teorema y además contextualizar una época y conocer los métodos que se usaban.</p>

▲ Se puede comentar la demostración del teorema de Pitágoras brindada por Euclides.

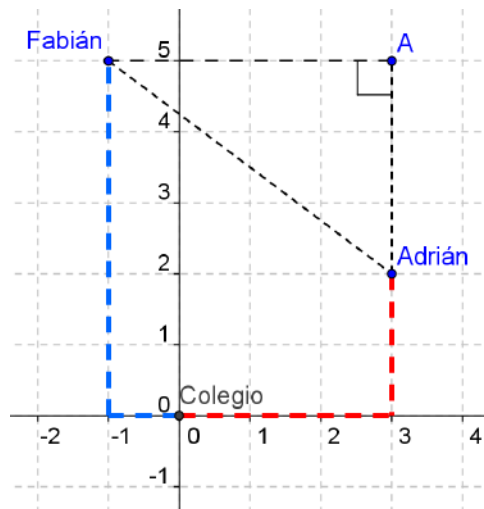
▲ Se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y luego se hace la clausura enunciando la fórmula.

Un ejemplo:



Adrián y Fabián salen del colegio para su casa. Si Adrián camina 3 km hacia el Este y 2 km hacia el Norte y Fabián camina 1 km al Oeste y 5 km al Norte, ¿a qué distancia se encuentra la casa de Adrián de la de Fabián?

Se puede proponer una representación gráfica en un plano coordenado, en donde la casa de Fabián esté en el punto (-1,5) y la casa de Adrián esté en el punto (3,2), siendo el colegio el punto (0,0). Luego, utilizar el Teorema de Pitágoras.



▲ También se puede utilizar la representación cartesiana para determinar si un triángulo, dadas las coordenadas de sus vértices, es o no rectángulo. Para esto se puede utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos. Por ejemplo:



Dadas las siguientes coordenadas de los vértices de un triángulo A(2,1), B(6,5) y C(9,2), clasifique el triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos y la medida de sus lados. Argumente su respuesta.

Con la fórmula de la distancia entre dos puntos se obtiene que:

La distancia de A a B es

$$d = \sqrt{(2 - 6)^2 + (1 - 5)^2} = 4\sqrt{2}$$

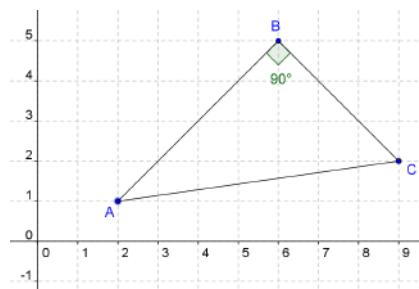
La distancia de B a C es

$$d = \sqrt{(6 - 9)^2 + (5 - 2)^2} = 3\sqrt{2}$$

La distancia de A a C es

$$d = \sqrt{(2 - 9)^2 + (1 - 2)^2} = 5\sqrt{2}$$

y por lo tanto, como $(5\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$ entonces el triángulo es rectángulo y como las medidas de sus lados son diferentes se clasifica como escaleno.



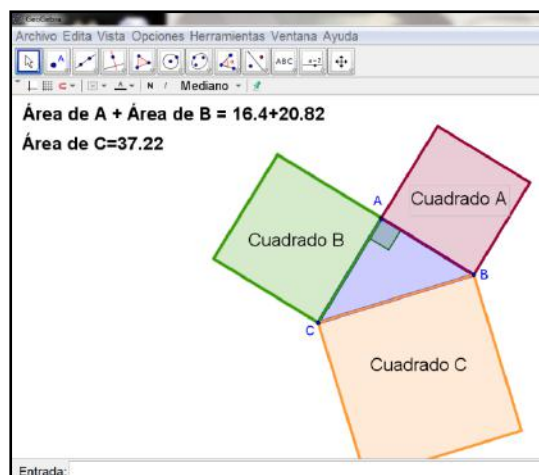
Recuadro N° 6

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos


Aunque, el teorema de Pitágoras se puede considerar abstracto y un poco desligado de lo que se ha venido trabajando hasta ahora en cuanto al tema de triángulos, es importante proponer un problema introductorio en el cual se involucren conceptos y propiedades estudiadas en primaria y secundaria. Asimismo, es significativo el trabajo con manipulativos y material concreto.

Por lo anterior, es significativo proponer una actividad inicial apropiada que promueva la indagación y la conjetura. La misma, puede considerar la manipulación de material concreto en la resolución del problema o la exploración mediante un software de geometría dinámica.



Debido a que los estudiantes han trabajado desde educación primaria con representación de puntos y figuras en el sistema de coordenadas cartesianas; luego de aplicar el teorema de Pitágoras a problemas de geometría sintética se puede proponer una situación en el contexto de la geometría cartesiana donde se aplique este teorema. Con esta actividad se podría deducir, de forma natural, la fórmula entre la distancia de dos puntos en el plano cartesiano; siempre teniendo presente que se requiere de un cierre para este tema.

Los derivados del teorema de Pitágoras pueden ser planteados como problemas de reflexión en la etapa de *Movilización y aplicación de conocimientos*. Si se cuenta con recursos tecnológicos se puede apoyar en algún tipo de software de geometría dinámica para la resolución de estos problemas mediante un proceso inductivo de exploración.




Trigonometría • Radianes	3. Convertir medidas angulares de grados a radianes y viceversa.	 Se deben proponer problemas que utilicen conversiones de grados a radianes y viceversa, con esto se logra una conexión con el área de <i>Medidas</i> .
------------------------------------	--	--

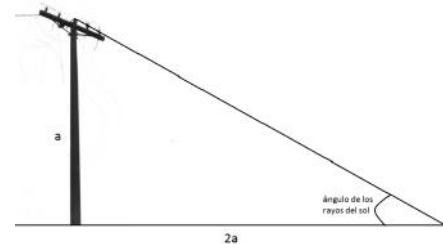
Recuadro N° 7

Número sugerido de lecciones: 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Lo importante aquí es que el estudiante comprenda que un radian representa la medida del ángulo central en una circunferencia que abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio. Además, el estudiante debe aplicar correctamente el algoritmo para la conversión de medidas angulares de grados a radianes y viceversa, por lo cual lo que se busca es muy procedimental.

Trigonometría • Seno • Coseno • Tangente • Razones trigonométricas de ángulos complementarios • Ángulos de elevación y depresión • Ley de senos	4. Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos. 5. Aplicar las relaciones entre tangente, seno y coseno. 6. Aplicar seno, coseno y tangente de ángulos complementarios. 7. Aplicar los conceptos de ángulos de elevación y depresión en diferentes contextos. 8. Aplicar que la suma de los cuadrados del seno y coseno de un ángulo es 1. 9. Aplicar la ley de senos en diversos contextos. 10. Resolver problemas que involucren las razones trigonométricas, sus propiedades y ángulos de elevación y de depresión.	<p>▲ Para iniciar se puede proponer el siguiente problema:</p>  Se quiere construir una rampa para personas con discapacidad en un colegio. Según la ley 7600 de Costa Rica, el ángulo adecuado para hacer estas rampas es de 15°. Si la altura que se quiere alcanzar es de 1,3 m: <p>a. ¿A qué distancia debe comenzar la rampa? b. ¿Qué longitud tendría la rampa?</p> <p>La idea es que por medio de la experimentación y el diálogo se logre interiorizar la necesidad de aplicar razones trigonométricas básicas y relaciones trigonométricas.</p> <p>▲ Luego se presentan formalmente las razones trigonométricas básicas y su aplicación en diversos contextos.</p>  El problema anterior también está relacionado con el eje transversal <i>Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz</i> , en cuanto a la accesibilidad para personas con discapacidad.  Es importante distinguir en qué modo (grados, radianes) se está utilizando la calculadora científica para el cálculo de razones trigonométricas. <p>▲ Se puede, de manera adicional, introducir el círculo trigonométrico y el uso de los radianes para establecer la conexión entre geometría analítica y trigonometría con el área de <i>Medidas</i>.</p> <p>▲ Se debe no sólo resolver problemas de trigonometría sino también plantearlos, puesto que al diseñar problemas de trigonometría se manejan las condiciones necesarias que se deben dar para el uso de las razones trigonométricas o ley de senos. Por ejemplo:</p>
	11. Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución.	<p>▲ Se debe no sólo resolver problemas de trigonometría sino también plantearlos, puesto que al diseñar problemas de trigonometría se manejan las condiciones necesarias que se deben dar para el uso de las razones trigonométricas o ley de senos. Por ejemplo:</p>

		<p>▲ Se propone plantear un problema contextualizado que necesite para su solución la utilización de la razón trigonométrica seno. Para esto se puede dar un caso específico como el te: $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$.</p> <p>Para construir el problema, primero se tiene que tener claro que el escenario del problema debe originar un triángulo rectángulo, luego se debe saber que las medidas que intervienen en este problema son el cateto opuesto a un determinado ángulo del triángulo, la hipotenusa y el ángulo respectivo.</p> <p>▲ Alguien podría plantear el siguiente:</p> <p>En un determinado momento del día, la sombra de un poste de electricidad mide el doble de longitud que la altura misma del poste. ¿En ese momento, cuál es el ángulo de depresión de los rayos del sol?</p>  <p>De esta manera se puede activar directamente el proceso <i>Plantear y resolver problemas</i>.</p>
--	--	--

Recuadro N° 8

Número sugerido de lecciones:	12 (Etapa I: 3, Etapa II: 9)
-------------------------------	------------------------------

Indicaciones y ejemplos

Por naturaleza histórica de la trigonometría es recomendable iniciar con una actividad o problema enmarcado en algún contexto o entorno real, donde sin dar la definición, se utilicen ángulos de elevación y de depresión y partir de éste se puedan conceptualizar las razones trigonométricas.

Para el planteamiento y la resolución del problema se pueden emplear los conocimientos de semejanza de triángulos que se desarrollaron en octavo año. Para ello, se puede proponer una situación apropiada y plantear diferentes inquietudes como:

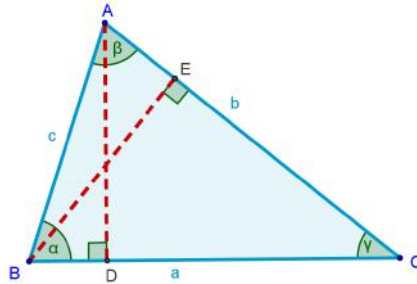
- ¿Existiría alguna “correspondencia estándar” entre la longitud de los lados de un triángulo?
- ¿Los triángulos semejantes mantienen la misma razón entre las longitudes de sus lados?
- ¿Para cualquier triángulo rectángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante?
- Por ejemplo, si dos triángulos rectángulos son semejantes entonces: ¿si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos?

Justamente estas proporciones son las que expresan las razones trigonométricas.

Por lo tanto, podemos decir que hay una relación entre el ángulo interno de un triángulo rectángulo y la razón entre las longitudes de sus lados. Estas relaciones pueden ser muy útiles para encontrar longitudes y ángulos en problemas reales.

En este tema se debe dar suficiente tiempo a la asimilación de conocimientos mediante la resolución de diferentes niveles de complejidad. Uno de los problemas que se pueden proponer tiene que ver con enlazar el teorema de Pitágoras con las razones trigonométricas para deducir que la suma de los cuadrados del seno y coseno de un ángulo es igual a 1.

Asimismo, otro problema que no puede faltar es uno en el que se utilice las razones trigonométricas básicas para deducir la ley de senos. Se puede partir de un caso particular utilizando un triángulo acutángulo, dos de sus alturas y los triángulos rectángulos que se forman para realizar una prueba de la Ley de senos que no es tan complicada.



Posteriormente, se hace la generalización para triángulos obtusángulos. También, esta prueba se puede hacer utilizando algún software dinámico de geometría en el cual con la guía del docente se pueda verificar la ley de senos utilizando varios triángulos mediante el movimiento de sus vértices.

<p>Geometría del espacio</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pirámide recta • Apotema • Prisma recto • Área lateral • Área total 	<p>12. Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero.</p> <p>13. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.</p> <p>14. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.</p>	<p>▲ Se puede proponer un problema como el siguiente:</p> <p>😊 La pirámide de Kefrén en Egipto es recta de base cuadrada. El lado de su base mide 215 m y su altura es 143 m. Para la clase de Estudios Sociales se quiere construir, en cartulina, una maqueta de dicha pirámide con una escala en la que 1cm equivale a 1 m. ¿Cuánto cartón se requiere? Dibuje el desarrollo plano de la pirámide que permite construir la maqueta.</p> <p>La situación refiere al cálculo del área de un triángulo de base 215 y una altura a determinar (apotema de la pirámide). A partir del trabajo estudiantil se realiza la etapa de clausura sistematizando el concepto de apotema piramidal y deduciendo, a través del problema, una fórmula para el cálculo del área lateral y luego del área total de una pirámide recta de base cuadrada.</p>
---	--	--

Recuadro Nº 9

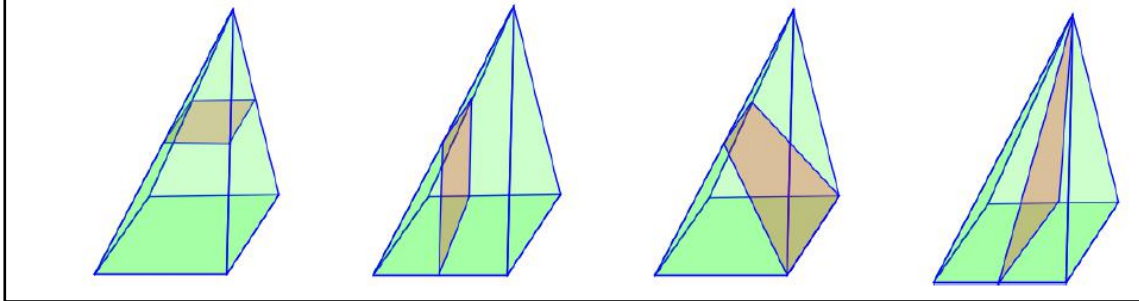
Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

En años anteriores tanto de primaria como secundaria hubo un tratamiento visual y concreto de objetos tridimensionales. Más aún, en octavo año se estudiaron elementos de la pirámide recta y del prisma recto; por lo que hay que considerar que se desarrollaron las siguientes habilidades:

- Identificar la base, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide.
- Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto.
- Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.
- Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.





5. Algunas secciones planas de una pirámide se pueden ver en la siguiente figura:




Indicaciones metodológicas (MEP, 2012, p.325)

Por lo anterior, se recomienda plantear un problema inicial que utilice los conocimientos previos de los estudiantes. Por ejemplo, en la redacción del problema se pueden emplear términos propios de los cuerpos tridimensionales y proponer preguntas relacionadas a las secciones planas de la pirámide recta y prisma recto.

Estadística y Probabilidad

Estadística		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Variables cuantitativas <ul style="list-style-type: none"> • Discretas • Continuas 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Establecer diferencias entre variables cuantitativas: discretas y continuas. 2. Clasificar variables cuantitativas en discretas o continuas. 	<p>▲ Proponer problemas que involucren el análisis de variables cuantitativas discretas y continuas. Por ejemplo:</p> <p> Suponga que se realiza una encuesta a una muestra de hogares de la comunidad en la que se localiza el colegio. La encuesta incluye las siguientes preguntas relacionadas con la vivienda:</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cuál es el área de construcción? ¿Cuántos dormitorios? ¿Cuál es el material predominante en las paredes? ¿Hace cuánto tiempo se construyó? ¿Cuántos servicios sanitarios posee? ¿Cuál es el estado general de la vivienda: bueno, regular, malo? ¿Cuánto mide de frente el lote? ¿Cuántas personas habitan en ella? <p>Con respecto a las preguntas anteriores:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Determine la unidad estadística y las características que involucra el estudio. b. Identifique las características cuantitativas y las cualitativas. c. Agrupe las características cuantitativas de acuerdo con la estrategia de recolección empleada: conteo o medición. <p>▲ El problema anterior es eminentemente descriptivo, tiene como propósito diferenciar entre los distintos tipos de características dependiendo del tipo de datos que pueden generar. Para las características cuantitativas se debe observar que unas de ellas se obtienen por conteo y normalmente generan números enteros, mientras que las otras corresponden a mediciones que teóricamente podrían tomar cualquier valor real, aunque normalmente se representan con aproximaciones decimales.</p> <p> La determinación de datos por medio de mediciones muestra una clara conexión entre las áreas de <i>Estadística</i> y <i>Medidas</i>. Pero además, debido a que los datos correspondientes a estas mediciones anteriores se expresan en forma decimal, también se puede evidenciar la conexión entre <i>Estadística</i> y <i>Números</i>.</p>
Distribuciones de frecuencia <ul style="list-style-type: none"> • Clases o intervalos • Frecuencia absoluta • Frecuencia relativa y porcentual 	<ol style="list-style-type: none"> 3. Reconocer la importancia de agrupar datos cuantitativos en clases o intervalos. 4. Resumir un grupo de datos cuantitativos por medio de la elaboración de un cuadro de distribuciones de frecuencia absoluta y relativa (o porcentual). 	<p>▲ Para continuar con el análisis de las variables continuas, se recomienda plantear la siguiente situación.</p> <p> En la Antigüedad se utilizaban unidades de medida que estaban relacionadas con el cuerpo humano, dos de ellas son el palmo y el codo. El palmo es la longitud entre el pulgar y el meñique con la mano abierta (también conocida como cuarta),</p> <p></p> <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p>

<ul style="list-style-type: none"> • Representación tabular • Representación gráfica - Histogramas - Polígonos de frecuencia 	<p>5. Interpretar la información que proporciona un cuadro de distribución de frecuencias al resumir un grupo de datos cuantitativos.</p> <p>6. Resumir la información proporcionada por una distribución de frecuencias mediante un histograma o un polígono de frecuencias (absolutas o relativas), e interpretar la información que proporcionan estas representaciones gráficas.</p> <p>7. Utilizar algún software especializado o una hoja de cálculo para apoyar la construcción de las distribuciones de frecuencia y sus representaciones gráficas.</p>	<p>y el codo correspondía a la longitud desde el codo hasta el extremo de los dedos.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> <p>😊 Proceda a realizar un análisis estadístico para determinar si existen diferencias entre hombres y mujeres respecto a la longitud del codo y del palmo (cuarta) entre estudiantes del grupo.</p> <p>▲ Se debe orientar sobre la necesidad de agrupar los datos en clases, pues las mediciones que se pudieran generar presentan mucha variabilidad, por lo que no es viable resumir estos datos empleando cuadros o gráficos de frecuencia simple. Los problemas que se enfrenten al resumir esta información permiten que se introduzcan las distribuciones de frecuencia de clases para agrupar esta información.</p> <p>⚙️ En este tipo de problemas intervienen diferentes procesos. Primeramente, la resolución de problemas está presente al momento de estructurar la situación y en la forma de abordarlos por parte del estudiantado. Luego la representación por medio de cuadros o gráficos para resumir los datos recolectados. Además se establecen conexiones con otras áreas matemáticas como <i>Medidas y Números</i> en cuanto a las mediciones y con <i>Geometría y Relaciones y Álgebra</i> con las representaciones gráficas. Por último se desarrolla la argumentación, debido a que la información que proporcionan las representaciones permite argumentar las respuestas a los problemas.</p>
--	---	--

Recuadro N° 10

Número sugerido de lecciones: 14 (Etapa I: 6, Etapa II: 8)

Indicaciones y ejemplos

Al igual que en octavo año, en este nivel se plantea el desarrollo de habilidades vinculadas con el manejo de información cuantitativa. Aunque este tema se trabajó previamente en Primaria, se debe realizar un proceso de precisión y nivelación de conceptos.

También hay que tener presente que la conceptualización de la clasificación de variables cuantitativas en discretas y continuas, se centrará básicamente en observar que en la primera los datos se obtienen por conteo y normalmente generan números enteros, mientras que en la segunda los datos corresponden a mediciones que teóricamente podrían tomar cualquier valor real, aunque normalmente se representan con aproximaciones decimales.

Para este año es importante profundizar estos conocimientos previos mediante la resolución de problemas nuevos que requieran la utilización de distribuciones de frecuencia para resumir los datos, y gráficos apropiados para representar la información. Por ejemplo, en la situación que se plantea en las indicaciones puntuales referente al palmo y al codo se puede caracterizar a los estudiantes del grupo de acuerdo con la medida del codo y el palmo, esto con la intención posterior de buscar una medida estándar que se pudiera emplear como unidad de medida en el grupo. En este caso la longitud del codo y del palmo serían variables cuantitativas continuas por ser mediciones que en este caso serán aproximaciones utilizando un decimal.

Se espera que procedan a medir el codo y el palmo a cada uno de los estudiantes del grupo y lo anoten en un cuadro como el siguiente, para generar una base de datos:

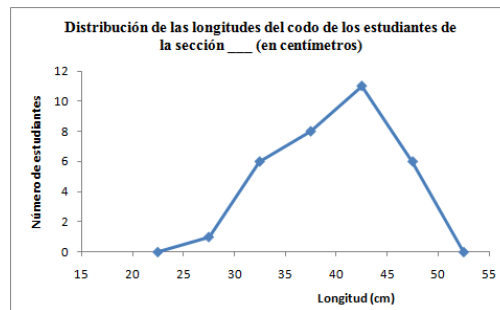
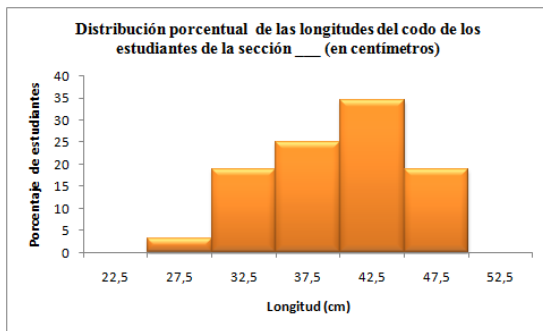
No. de cuestionario	Nombre del estudiante	Longitud del codo	Longitud del palmo
1	Abarca Rojas Mafalda	30,5	14,3
2	Alvarado Pérez Manolito	35,4	18,1
3	Barrantes Mena Libertad	35,6	15,8
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
32	Zamora Jiménez Riquito	39,1	19,8

Luego se procede a resumir la información, no obstante debido a que se generan muchas mediciones con diferencias muy pequeñas y pocos datos repetidos, no es posible realizar cuadros de frecuencia o gráficos de barras simples, por lo que se hace necesario que valoren la posibilidad de crear agrupaciones de datos tal como se muestra en el siguiente cuadro.

Distribución de las longitudes del codo de los estudiantes de la sección __ (en centímetros)

Longitud del codo	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
De 25 a menos de 30	1	3,1
De 30 a menos de 35	6	18,7
De 35 a menos de 40	8	25,0
De 40 a menos de 45	11	34,4
De 45 a menos de 50	6	18,8
Total	32	100

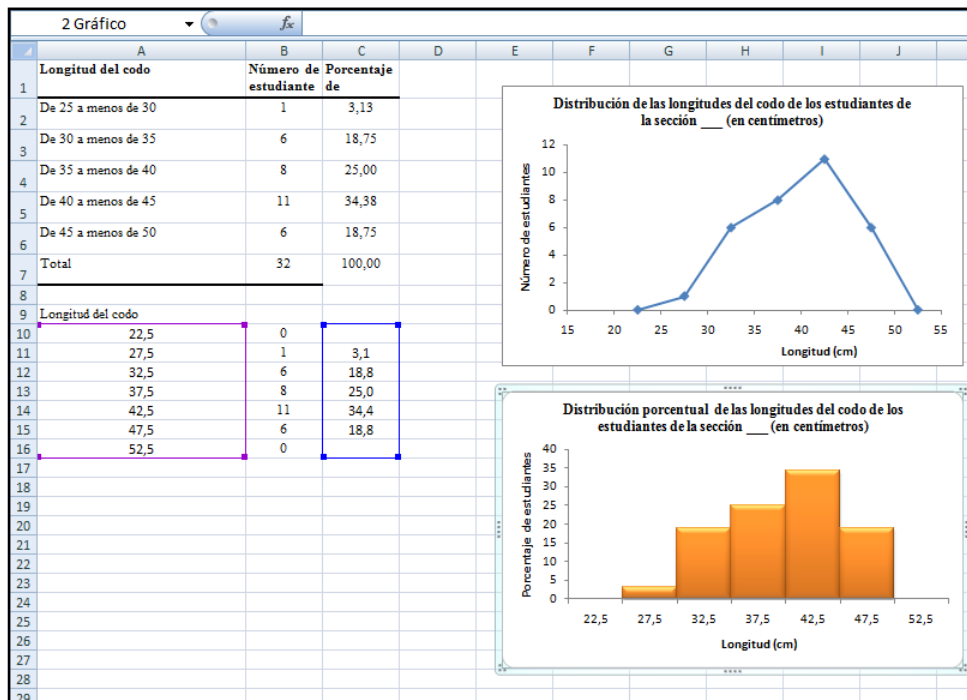
El anterior cuadro muestra la distribución de las longitudes de los codos de los estudiantes del grupo; en él se puede observar la necesidad de trabajar con una representación tabular, clases (intervalos de las longitudes del codo), frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Otra forma de representar esta distribución la constituyen los siguientes gráficos, los cuales se construyen a partir de la información del cuadro anterior.






La habilidad específica 7 no debe desarrollarse por separado de las demás sino de forma simultánea. Por ejemplo, para estimar una medida estándar para la longitud del codo podría utilizarse el promedio o media aritmética. Este valor es utilizado desde la primaria y para su cálculo, así como para los cálculos de los porcentajes, se puede emplear calculadora (o una calculadora con funciones estadísticas).






Asimismo, si se tiene acceso a una computadora la construcción de los cuadros y los gráficos se puede simplificar ampliamente, por ejemplo observe la siguiente imagen que corresponde al trabajo realizado en una hoja de cálculo:



Probabilidad		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Muestras aleatorias	1. Identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico.	<p>▲ Se pueden considerar algunos problemas similares al siguiente:</p> <p>😊 Una organización desea realizar una selección de 15 estudiantes entre el total de estudiantes de 9° Año para que participen en un nuevo programa de salud integral. El requisito que pide la organización patrocinadora del programa es que la selección de las y los estudiantes se realice de forma aleatoria. Proporcione una estrategia de selección aleatoria.</p> <p>▲ Algunas de las posibles soluciones que se podrían aportar podrían ser:</p> <p>a. Realizar un listado con cada estudiante de noveno y realizar una rifa para seleccionar 15 de ellos.</p>

		<p>b. Seleccionar por medio de una rifa una determinada cantidad de estudiantes de cada grupo de 9° Año, de modo que entre todos los seleccionados sumen 15 estudiantes.</p> <p>No obstante, podrían darse soluciones mucho más ingeniosas. Se requiere estar alerta de que efectivamente la solución propuesta sea aleatoria (cada estudiante de 9° Año tiene una probabilidad de ser seleccionado).</p> <p>▲ Se debe realizar un análisis de las soluciones aportadas en la clase y con base en ellas sistematizar el concepto de muestreo aleatorio, como aquel proceso de selección de una muestra sobre una población por medio del cual todos los grupos tienen una probabilidad (no nula) de ser seleccionados.</p> <p> El azar juega un rol fundamental en el proceso de conexión entre la <i>Probabilidad</i> y la <i>Estadística</i>. Un ejemplo de ello lo constituye la selección de muestras estadísticas aleatorias. Aunque realizar un análisis completo del muestreo estadístico aleatorio es muy complejo para discutirlo en secundaria, es posible plantear problemas sencillos para motivar su importancia.</p> <p>▲ En el análisis de las muestras aleatorias es importante enfatizar en el uso del muestreo aleatorio para la implementación de encuestas a nivel nacional.</p> <p> Es muy valioso que los jóvenes conozcan de la existencia de encuestas de este tipo, debido a que aportan datos estadísticos que deben estar dentro del análisis de temas transversales planteados para todas las asignaturas.</p>
<p>Probabilidad frecuencial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico) • Introducción a la ley de los grandes números 	<ol style="list-style-type: none"> 2. Identificar eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando el concepto clásico. 3. Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral es infinito o indeterminado. 4. Identificar que las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con evento seguro, probable e imposible también son válidas para la definición frecuencial. 	<p>▲ Lo establecido hasta este punto en materia de probabilidades limita el análisis de situaciones en las que se conoce con detalle el espacio muestral. Desafortunadamente eso no siempre ocurre pues en muchas ocasiones el espacio muestral es muy grande, es indefinido o incluso es infinito.</p> <p> Analice cada uno de los siguientes problemas y proponga una estrategia para encontrar una solución.</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Una persona se dirige a un supermercado a comprar un litro de aceite, y aunque el contenido del recipiente dice 1000 ml se tiene la duda que efectivamente estos recipientes contengan esta cantidad, por lo que se desea determinar la probabilidad de que el recipiente tenga menos de un litro tal como dice la etiqueta. ¿Cómo se podría enfrentar este problema? b. Existe la creencia entre la población que en un embarazo cualquiera es igualmente probable que la criatura sea niño o niña; no obstante, los datos indican que en una población hay más mujeres que hombres. ¿Cómo comprobar si efectivamente son igualmente probables? c. Se ha afirmado que la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo es de aproximadamente un medio. ¿De qué manera se podría estimar dicha probabilidad? <p>▲ Se debe reflexionar sobre estas interrogantes para obtener respuestas posibles. Al analizarlas la acción docente debe orientarse a la sistematización del concepto de <i>probabilidad</i></p>

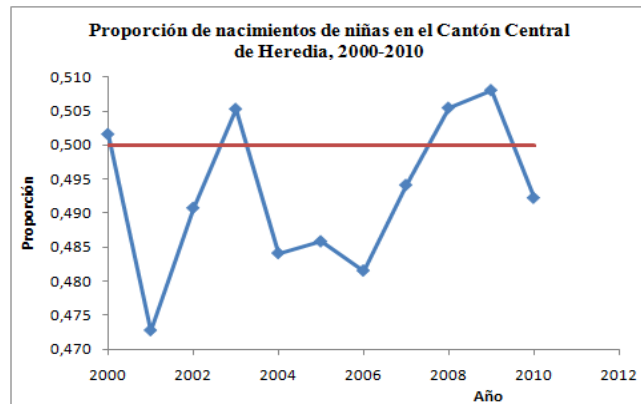
		<p><i>frecuencista o probabilidad empírica</i>, como la <i>frecuencia relativa</i> del evento en relación con una muestra aleatoria, que se determina por la razón entre los resultados favorables en la muestra entre el total de elementos muestreados.</p> <p>▲ Para complementar el análisis se sugiere generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito. Por ejemplo:</p> <p> Diferentes estudios han demostrado que las madres que fuman cuando están embarazadas tienen una mayor probabilidad de tener hijos con bajo peso y por ende con mayor probabilidad de tener complicaciones de salud. Tomando como referente la información del artículo Factores de riesgo en el bajo peso al nacer, publicado en Revista Cubana de Medicina General Integral (julio-septiembre, 1995), seguidamente se simuló un escenario basado en esta relación con una muestra aleatoria de 1000 partos.</p> <p style="text-align: center;">Relación entre fumar durante el embarazo y el bajo peso al nacer en los niños</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Madres</th> <th colspan="2">Bajo peso al nacer</th> <th rowspan="2">Total</th> </tr> <tr> <th>Sí</th> <th>No</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Fumadoras</td> <td style="text-align: center;">46</td> <td style="text-align: center;">307</td> <td style="text-align: center;">353</td> </tr> <tr> <td>No fumadoras</td> <td style="text-align: center;">39</td> <td style="text-align: center;">608</td> <td style="text-align: center;">647</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td style="text-align: center;">85</td> <td style="text-align: center;">915</td> <td style="text-align: center;">1000</td> </tr> </tbody> </table> <p>Tomando como referente esta información, estime:</p> <ol style="list-style-type: none"> La probabilidad que una madre que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso. La probabilidad que una madre no fumadora tenga un niño con bajo peso. ¿Cuántas veces más probable es que una mujer que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso respecto a una madre que no fumó en ese período? <p> Este problema debe servir de reflexión pues aunque la muestra fue simulada, científicamente se ha comprobado que las madres fumadoras tienen una mayor probabilidad de tener niños con bajo peso respecto a las madres no fumadoras. Esto se vincula con el tema <i>Educación para la Salud</i>.</p> <p>▲ Es importante hacer notar que el valor de estas probabilidades corresponde a una aproximación sujeta a una situación particular, pues no se puede aplicar aquí la definición clásica de probabilidad, sino que se aproxima por medio de la frecuencia relativa de ocurrencias en el caso estudiado.</p> <p>▲ Para ejemplificar la ley de los grandes números, se puede pedir que resuelvan el siguiente problema:</p> <p> Tradicionalmente se ha creído que dentro de un parto simple es igualmente probable que nazca una niña o un niño. Suponga que en el período 2000-2010, en el cantón central de la provincia de Heredia se presentaron los siguientes datos respecto al sexo de los niños que nacieron.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Año</th> <th>2000</th> <th>2001</th> <th>2002</th> <th>2003</th> <th>2004</th> <th>2005</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Hombres</td> <td>963</td> <td>1102</td> <td>959</td> <td>988</td> <td>988</td> <td>978</td> </tr> <tr> <td>Mujeres</td> <td>969</td> <td>988</td> <td>924</td> <td>1009</td> <td>927</td> <td>924</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>1932</td> <td>2090</td> <td>1883</td> <td>1997</td> <td>1915</td> <td>1902</td> </tr> </tbody> </table>	Madres	Bajo peso al nacer		Total	Sí	No	Fumadoras	46	307	353	No fumadoras	39	608	647	Total	85	915	1000	Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	Hombres	963	1102	959	988	988	978	Mujeres	969	988	924	1009	927	924	Total	1932	2090	1883	1997	1915	1902
Madres	Bajo peso al nacer			Total																																												
	Sí	No																																														
Fumadoras	46	307	353																																													
No fumadoras	39	608	647																																													
Total	85	915	1000																																													
Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005																																										
Hombres	963	1102	959	988	988	978																																										
Mujeres	969	988	924	1009	927	924																																										
Total	1932	2090	1883	1997	1915	1902																																										
<p>5. Identificar que, para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima hacia la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta.</p> <p>6. Resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios dentro del contexto estudiantil.</p>																																																

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	925	939	958	951	944
Mujeres	859	917	979	982	915
Total	3790	3863	3945	3942	3869

Tomado de: www.ccp.ucr.ac.cr

- Determine para cada uno de los años la probabilidad de que el producto de un parto cualquiera sea una niña.
- Los datos anteriores ¿confirman o contradicen la creencia original de que la probabilidad de que nazca una niña es $\frac{1}{2}$? Puede dibujar un gráfico de línea para visualizar mejor el patrón de variabilidad de los datos. Si los datos no apoyan dicha creencia, ¿cuál sería la mejor aproximación que usted puede dar para esta probabilidad?

▲ Conviene aquí que se realice una actividad plenaria donde cada subgrupo presente los resultados obtenidos y las conclusiones a las que han llegado. Se debe analizar la tendencia observada, la cual se muestra en el siguiente gráfico



Como una segunda parte del problema, pídeles que resuelvan nuevamente las interrogantes anteriores pero con los datos de todo el país:

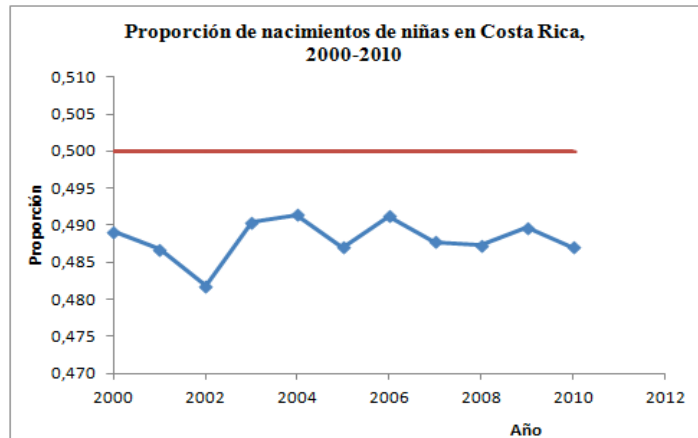
Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Hombres	39 943	39 214	36 868	37 172	36 747	36 701
Mujeres	38 235	37 187	34 276	35 766	35 500	34 847
Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247	71 548

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	36 274	37 471	38 553	38 278	36 382
Mujeres	35 017	35 673	36 634	36 722	34 540
Total	71 291	73 144	75 187	75 000	70 922

Analizar las conclusiones de las y los estudiantes con estos nuevos datos. Enfatizar en las diferencias entre lo que ocurrió en el cantón central de Heredia y lo que ocurrió en todo el país.

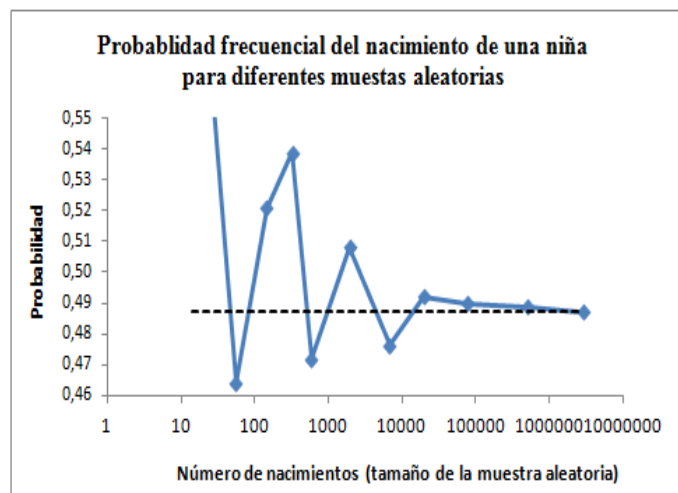
Enfatizar en el valor de la probabilidad de que nazca una niña en un parto aleatoriamente seleccionado.

Se muestra así la representación gráfica de las proporciones correspondientes.




Para concluir, proporcione la siguiente información: de acuerdo con la información que aparece en la página web del Centro Centroamericano de Población, entre los años 1972 y 2010 se tienen registrados en el país un total de 2 877 695 nacimientos, de los cuales 1 402 063 fueron mujeres. ¿Qué proporción de los nacimientos ocurridos entre 1972 y 2010 fueron mujeres? ¿A qué conclusión llega sobre la creencia de que es igualmente probable el nacimiento de una niña que de un niño?

▲ Para el proceso de clausura, la acción docente debe centrarse en la articulación de las ideas aportadas con la intención de generar la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo, en el sentido que entre más grande sea la muestra con la que se trabaja, más se aproxima la probabilidad frecuencial de un evento a su valor real. Una representación gráfica como la siguiente puede ayudar:



En este problema se puede analizar claramente la interacción con los procesos *Plantear* y *resolver problemas*, *Representar*, *Razonar* y *argumentar*, e incluso la relación con el área de *Números*.

		<p>▲ Este es un buen ejemplo de la forma en que por medio de un análisis matemático se puede valorar la veracidad de una creencia popular.</p>  <p>Por otro lado, este tipo de problemas pueden ser analizados mediante el uso de la tecnología, ya sea por medio de una calculadora para simplificar los cálculos o de una hoja de cálculo con una computadora para realizar todo el análisis. Además, mediante el uso de una calculadora o una computadora es posible simular otras situaciones que permitan apreciar la ley de los grandes números. Por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo es posible generar números aleatorios que permiten simular fenómenos de distinta naturaleza.</p>
--	--	--

Recuadro N° 11

Número sugerido de lecciones:	16 (Etapa I: 4, Etapa II: 12)
--------------------------------------	-------------------------------

Indicaciones y ejemplos

Con la definición empírica o frecuencial de la probabilidad se crea el enlace entre los conocimientos de estadística y de probabilidad.

El docente debe tener claro que la definición clásica de probabilidad, vista en años anteriores, es de uso limitado puesto que descansa sobre la base de las siguientes dos condiciones:

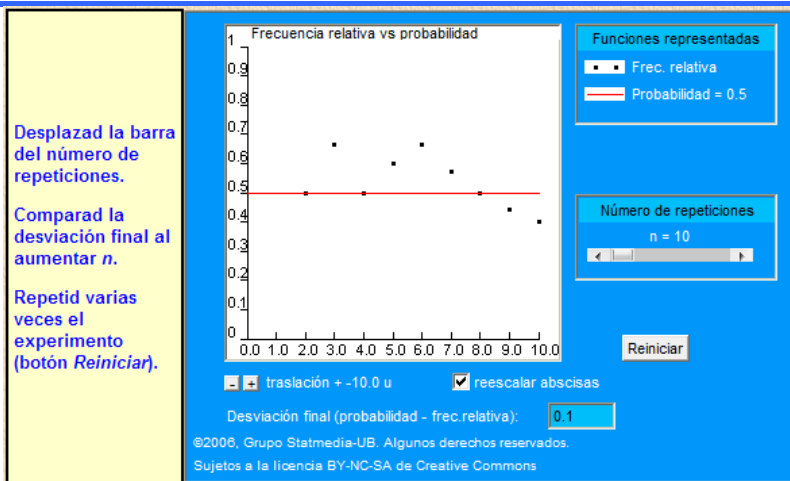
- El espacio muestral de todos los resultados posibles es finito.
- Los resultados del espacio muestral deben ser igualmente probables.

Por lo que, se debe plantear un problema probabilístico en el cual no se cumpla alguna de estas dos condiciones, y se vea la necesidad de utilizar información estadística o repetir el experimento aleatorio un número determinado de veces para registrar los resultados.

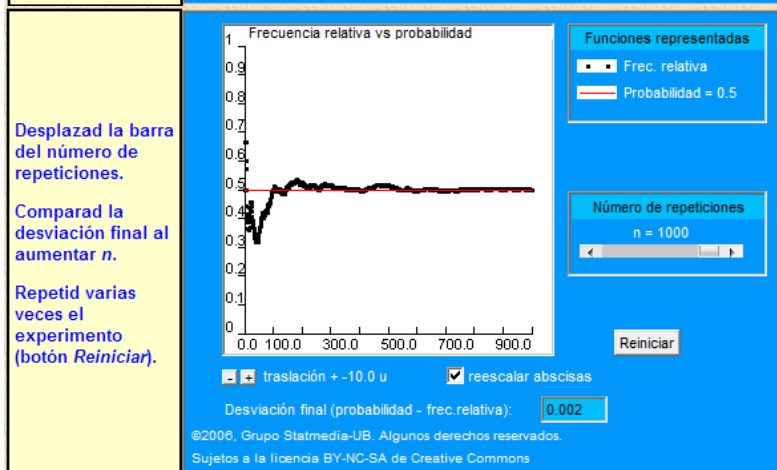
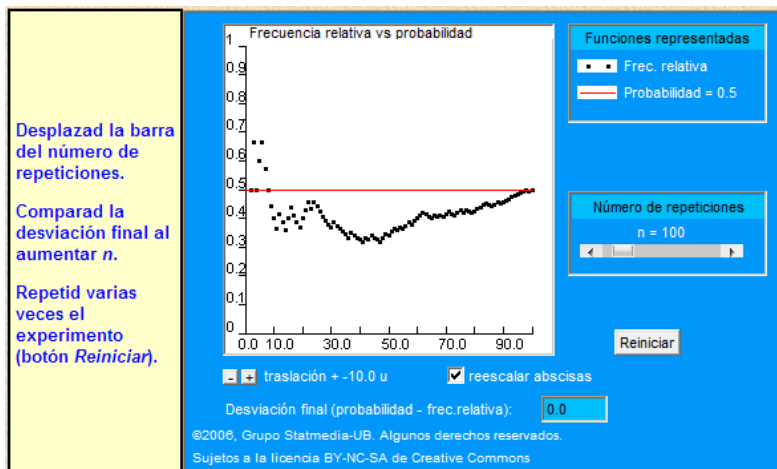
Hay que tomar en cuenta que la mayoría de experimentos aleatorios de importancia práctica tienen estabilidad, por esto podemos sospechar que prácticamente será cierto que la frecuencia relativa de un evento A en un gran número de ensayos es aproximadamente igual a un determinado número $P(A)$.

Lo anterior crea gran relación entre la definición frecuencial y la Ley de los grandes números. Un situación que puede ser importante analizar es la de ver cómo la probabilidad frecuencial de un evento A se aproxima a la probabilidad teórica (definición clásica) cuando la cantidad de ensayos es grande. Por ejemplo, se sabe que teniendo una moneda ideal perfectamente equilibrada y A el evento de que al lanzarla se obtenga corona, de acuerdo a la definición clásica una probabilidad, se tiene que $p(A) = 1/2 = 0,5$. Claro está, al realizar este experimento se podrá visualizar ésta proporción cuando la cantidad de ensayos sea grande. Para esto podría ser muy interesante trabajar con alguna aplicación computacional que simule este experimento y lo pueda realizar un número grande de veces.

El Grupo de innovación Statmedia de la Universidad de Barcelona pone a disposición del docente en el sitio <http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/applets/applets01es.htm> una serie de aplicaciones en línea para el estudio de la estadística y probabilidad, por ejemplo en el cuadro siguiente se simula por ordenador el comportamiento de la frecuencia relativa del suceso A = obtener corona. El cuadro inicia la simulación con el lanzamiento consecutivo de la moneda diez veces, calculando la frecuencia relativa de cara y comparándolo con la $p(A) = 0.5$. Aunque no es imposible que coincidan, la mayoría de veces será diferente.



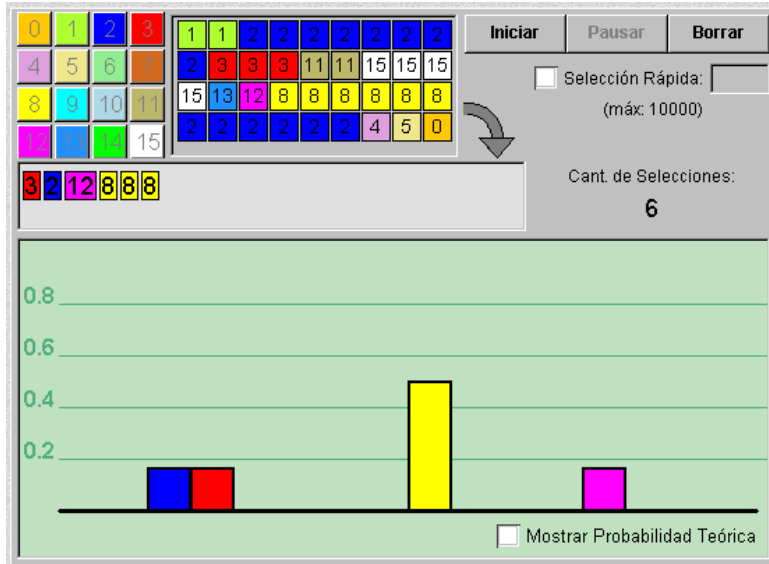
El estudiante puede manipular el cuadro para observar qué ocurre cuando la cantidad de ensayos es 100 o incluso 1000. También en el botón Reiniciar puede empezarse de nuevo.



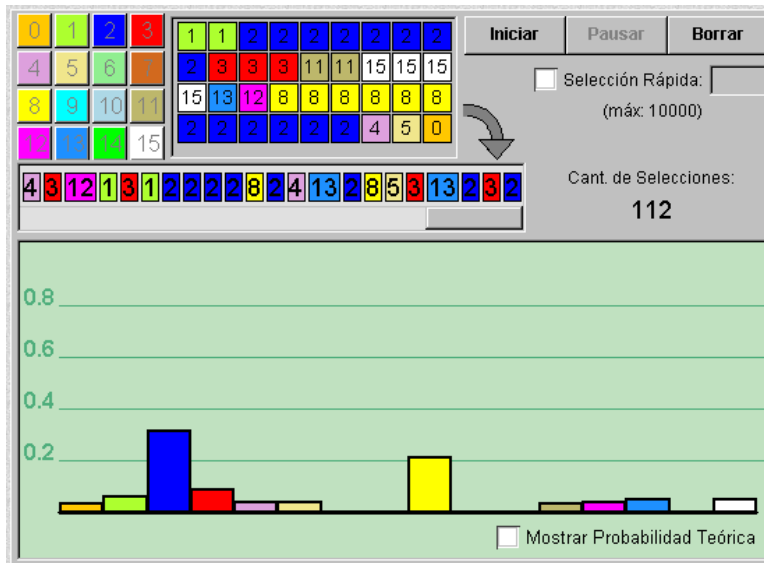
Existen sitios web que presentan actividades dinámicas para comprender el estudio de esta definición. Por ejemplo, en la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Utah State University (http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_5.html) existe una gran gama de aplicaciones dinámicas referentes al estudio de la Estadística y la Probabilidad. Por ejemplo, la siguiente imagen es de una aplicación que tiene como objetivo comprender mediante una simulación la definición frecuencial de probabilidad y la ley de los grandes números mediante el modelo de urnas o cajas. El modelo de urnas o cajas es una de las herramientas de probabilidades más versátiles. Básicamente, la única limitación es la imaginación del usuario.

En esta aplicación haciendo clic en los botones numerados que aparecen a la izquierda, se añade el número a la caja de extracción, desde donde podrá ser extraído aleatoriamente. Después de añadir los números a la caja de extracción, se inicia con la extracción aleatoria y los presentará en una gráfica de barras.

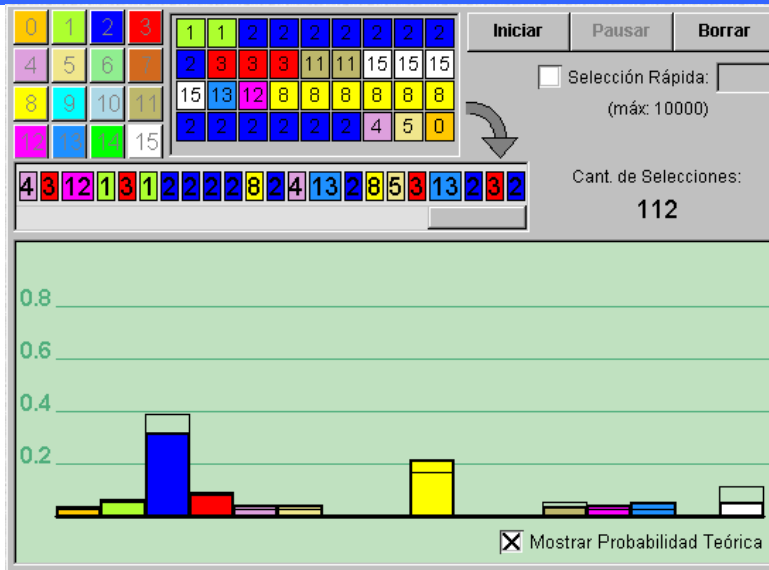
<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>*****



En la imagen anterior la cantidad de selecciones (extracciones) es 6, al ser un número pequeño, la gráfica no será representativa con respecto a la escogencia preliminar de los números. Pero con forme la cantidad de selecciones sea mayor (en la siguiente imagen es 112):




También se puede presentar una línea en la gráfica que muestra el porcentaje esperado de acuerdo con la probabilidad teórica. El estudiante comprenderá que estos porcentajes se aproximarán al porcentaje esperado cuando la cantidad de extracciones (con repetición) sea grande:



Es importante permitir a los estudiantes jugar con sus propios ejemplos, pero usando los resultados para beneficiosas discusiones en grupo. Asimismo, es importante la formulación de preguntas generadoras que lleven a nuevos experimentos y a que los estudiantes planteen sus propios problemas contextualizados.

Relaciones y Álgebra

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Expresiones algebraicas</p> <ul style="list-style-type: none"> Factorización 	<p>3. Factorizar y simplificar expresiones algebraicas.</p> <p>4. Expresar $x^2 + px + q$ como $(x + h)^2 + k$.</p>	<p>▲ Para la factorización completa utilice polinomios en una o dos variables con no más de cuatro términos. Las técnicas a utilizar son:</p> <ol style="list-style-type: none"> Factor común y fórmula notable. Grupos y factor común. Grupos y diferencia de cuadrados. Trinomio cuadrado perfecto. Factorización por inspección del trinomio $x^2 + bx + c$ como un producto de la forma $(x + p)(x + q)$ con $p + q = b$, $pq = c$. <p>▲ Las fórmulas notables a utilizar son:</p> $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ <p>▲ La técnica de expresar el trinomio $x^2 + px + q$ como</p> $(x + h)^2 + k$ <p>se conoce como <i>completar cuadrados</i> y es muy importante para deducir la fórmula general con tal de encontrar raíces de una ecuación de segundo grado, y también para graficar. En ella se utilizan las fórmulas notables:</p> $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ <p>Algunos ejemplos:</p> <p>a. $x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x) + 10$</p> $= (x^2 + 6x + 9) - 9 + 10$ $= (x + 3)^2 + 1$ <p>b. $y^2 - 5y + 1 = \left(y^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}y\right) + 1$</p> $= \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1$ $= \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$ <p> El procedimiento anterior requiere para su asimilación una actitud perseverante.</p>

Expresiones algebraicas <ul style="list-style-type: none"> Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias 	6.Efectuar operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.	Ver indicaciones metodológicas para noveno año (pág. 345).
--	---	--

Recuadro N° 12

Número sugerido de lecciones: 20 (Etapa : 10, Etapa II: 10)

Indicaciones y ejemplos

A veces los estudiantes no comprenden para qué es útil la factorización de polinomios, siendo su utilidad próxima durante el año la resolución de operaciones con fracciones. Una forma de ir haciendo conciencia sobre ello puede ser que conforme se abarquen los métodos de factorización, introducir simultáneamente ejercicios relacionados con la resolución de dichas operaciones y así mostrar al estudiante dicha utilidad.

Conviene tener claro que son necesarios varios mini cierres que permitan ir integrando en forma gradual los métodos de factorización, con la operatoria de fracciones algebraicas así como la combinación de métodos de factorización con dicha operatoria.

También conforme se va avanzando se deben realizar prácticas integradores que exijan al estudiantado identificar los métodos de factorización que debe de utilizar.

Expresiones algebraicas <ul style="list-style-type: none"> División de polinomios 	5.Efectuar división de polinomios.	▲ Para la división de polinomios considere la división de: <ol style="list-style-type: none"> Binomio por monomio. Trinomio por monomio (en una o dos variables). Binomio por binomio. Trinomio por binomio (en una variable). Trinomio por trinomio (en una variable).
---	------------------------------------	--

Recuadro N° 13

Número sugerido de lecciones: 7 (Etapa : 4, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabajará de forma independiente.

<p>Expresiones algebraicas</p> <ul style="list-style-type: none"> Racionalización 	<p>7. Racionalizar el denominador o numerador de expresiones algebraicas.</p>	<p>▲ Racionalizar expresiones algebraicas como:</p> <p>a. $\frac{2}{\sqrt[5]{a^3}}$</p> <p>b. $\sqrt{\frac{2}{45y^7z^3}}$ para $y, z > 0$</p> <p>c. $\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$</p> <p>d. $\frac{9x-4y}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$</p> <p>e. $\frac{2+3\sqrt{x}}{3-5\sqrt{x}}$</p>
---	---	---

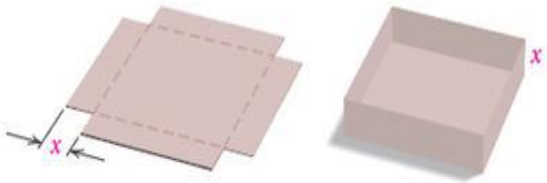
Recuadro N° 14

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa : 4, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabajará de forma independiente.

Se debe tener claro la necesidad de la ambientación de la habilidad con base en los conocimientos previos y la necesidad de realizar un cierre de la misma que abarque los diferentes casos que se especifican en las indicaciones puntuales.

<p>Ecuaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones de segundo grado con una incógnita - Raíces - Discriminante 	<p>8. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita</p> <p>9. Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.</p>	<p>▲ Se puede formular un problema cuya solución implique una ecuación de segundo grado.</p> <p>😊 Se cortan las esquinas de una lámina de cartón que mide 20 cm de largo por 10 cm de ancho, para hacer una caja rectangular sin tapa. ¿Cuáles son los valores posibles para la altura x de la caja para que su volumen sea igual a $24x$?</p>  <p>En este caso tenemos</p> $V = x(10 - 2x)(20 - 2x) = 24x.$ <p>Al multiplicar se obtiene la ecuación $4x^2 - 60x + 200 = 24$, que simplificada queda</p> $x^2 - 15x + 44 = 0.$
---	--	--

▲ Para resolver una ecuación de segundo grado, se debe explicar con anterioridad el principio de producto nulo, para implementarlo en el algoritmo de resolución de este tipo de ecuación:

$$ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

La utilización de este principio le da relevancia a la factorización.

Es importante aclarar que si se factoriza el trinomio por inspección de la siguiente forma:

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

donde $p + q = b$, $pq = c$, entonces las raíces de la ecuación

$x^2 + bx + c = 0$ son las soluciones de las ecuaciones de primer grado $x + p = 0$, $x + q = 0$, es decir, $x = -p$, $x = -q$.

Para ecuaciones de segundo grado, son útiles los siguientes principios:

a. Si $x^2 = k$, $k \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{k}$.

b. Si c es real entonces $\sqrt{c^2} = |c|$.

▲ Se puede deducir la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

▲ Es conveniente relacionar el signo del discriminante con el número de raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita $ax^2 + bx + c = 0$.



Observe y analice los datos de la siguiente tabla:

**Población de Costa Rica (en millones)
en el periodo 1960-2009**

Año	Población (millones)
1960	1,334
1965	1,583
1970	1,822
1975	2,052
1980	2,349
1985	2,699
1990	3,078
1995	3,479
2000	3,931
2005	4,396
2009	4,579

Fuente: <http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des>

Un modelo cuadrático para la población aproximada de Costa Rica es $P(t) = 11\,418t^2 + 225\,697t + 1\,317\,503$ donde $P(t)$ representa el tamaño de la población en el instante t , t el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año de 1960. Que cada estudiante proponga y resuelva un problema con la situación dada.



Se recomienda hablar acerca del aumento poblacional y sus consecuencias para el ser humano y el ambiente. Esto favorece la concientización acerca de una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible* y la *Educación para la salud*.



Un fabricante de componentes de computadoras produce

un disco duro externo de 2.5 pulgadas. La capacidad de los discos duros varía de 20 GB a 200 GB. Un modelo de costo de producción de una unidad de disco duro puede ser la función con criterio dado por

$$C(s) = \frac{1}{180}s^2 - \frac{8}{9}s + \frac{680}{9}$$

donde s es la capacidad de la unidad de disco duro, en gigabytes. Que cada estudiante plantee un problema con la situación.



Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Ejemplo: encuentre la capacidad del disco duro que tiene el menor costo de producción. ¿Cuál es el costo mínimo de producción?

▲ Es importante que cada estudiante utilice distintos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita: factorización por inspección; completando cuadrado; por fórmula; gráficamente y utilizando calculadora.



La solución de una ecuación de segundo grado que tiene muchas aplicaciones en distintas áreas y disciplinas es el número de oro, cuya historia podrá estimular al estudiantado.

En el libro VI de los *Elementos* de Euclides aparece por primera vez un estudio formal sobre lo que hoy se conoce como número áureo. Este número es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

Esta raíz es el número irracional

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

que aparece en contextos bastante variados: obras arquitectónicas (como el Partenón), en la naturaleza (caracoles), en las pinturas (obras de Miguel Ángel, Durer y Leonardo Da Vinci), en el pentagrama (símbolo místico utilizado por los pitagóricos) y hasta en la música.

Recuadro N° 15

Número sugerido de lecciones: 12 (Etapa : 2, Etapa II: 10)

Indicaciones y ejemplos

Se pueden proponer problemas que conlleven al planteo de ecuaciones de segundo grado, cuya solución se obtenga mediante despeje o factorización. A partir de este trabajo se realiza la deducción de la fórmula general, para la cual se hará un cierre abarcando el análisis del discriminante.

Luego se realizará una movilización de lo sistematizado.

Funciones

- Función cuadrática

1. Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

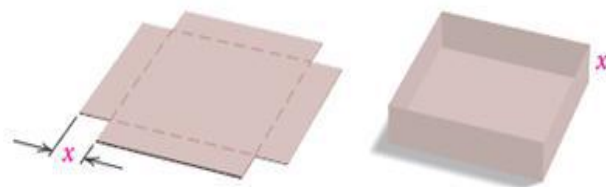
2. Representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática.

10. Trazar la gráfica de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$.

▲ Se sugiere proponer un problema en un contexto real que implique una relación del tipo $y = ax^2 + bx + c$.



Se cortan las esquinas de una lámina de cartón que mide 20 cm de largo por 10 cm de ancho, para hacer una caja rectangular sin tapa. ¿Cuáles son los valores posibles para la altura x de la caja para que su volumen sea igual a $24x$?



La población de asalariados cubiertos por seguro de salud de la Caja Costarricense de Seguro Social aparece indicada en la siguiente tabla:



Año	Número de asalariados
2000	726 048
2001	727 603
2002	754 731
2003	770 032
2004	800 123
2005	842 139
2006	896 419
2007	972 208
2008	1 054 497
2009	1 038 237
2010	1 075 528



Fuente: Programa Estado de la Nación 2011
<http://www.estadonacion.or.cr/>

La cantidad de asalariados A cubiertos por seguro de salud puede ser aproximada por el modelo matemático

$$A(t) = 1941t^2 + 20\,494t + 707\,542$$

en donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente al año 2000 (este modelo aproxima mejor los valores de la tabla que el modelo lineal planteado en 8 Año). En este caso la gráfica

		<p>correspondiente no pasa por los puntos que representan los datos de la tabla (es una curva que aproxima los datos).</p> <p>¿En qué año la cantidad de asalariados cubiertos por el seguro de salud será 1 500 000 aproximadamente?</p> <p>Este tipo de pregunta plantea la necesidad de introducir las ecuaciones de segundo grado y de trabajar con <i>expresiones algebraicas</i>, como por ejemplo la factorización.</p> <p>En particular, una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = d$ se relaciona con la función cuadrática con representación algebraica</p> $y = ax^2 + bx + c.$ <p>Cada estudiante debe tener claro que resolver la ecuación</p> $ax^2 + bx + c = d$ <p>corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax^2 + bx + c$ sea igual a d.</p> <p> Se recomienda generar un diálogo en la clase acerca de la importancia de la salud y de la cobertura del seguro social.</p> <p>▲ La idea es introducir la función cuadrática como relación entre variables. No se debe tener un enfoque abstracto en 9º Año en cuanto a funciones, sino un enfoque más intuitivo. La representación tabular es más apropiada para realizar el paso hacia la representación gráfica. Al trabajar con representaciones tabulares, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.</p> <p>Aspectos como dominio, ámbito, inyectividad, entre otros, tendrán un tratamiento más formal en 10º Año.</p> <p>Ejemplos de funciones cuyo criterio es $y = ax^2$:</p> <ol style="list-style-type: none"> El área de un cuadrado de lado x cm es $A = x^2$ cm². El área de un círculo de radio r cm es $A = \pi r^2$ cm². En el instante $t = 0$ segundos se deja caer una bola desde cierta altura. La distancia recorrida por la bola después de t segundos es dada por $y = 4.9t^2$ <p> Todos estos son <i>modelos</i> de distintas situaciones que se conectan con <i>Geometría</i> y <i>Física</i>.</p> <p>▲ La gráfica de la función con criterio $y = a(x - h)^2$ se obtiene de $y = ax^2$ al trasladar horizontalmente el origen de coordenadas al punto cuya abscisa es $x = h$. De esta forma el vértice de la parábola se ubica en $x = h, y = 0$.</p> <p>La gráfica de $y = a(x - h)^2 + c$ se obtiene de $y = a(x - h)^2$ mediante translación vertical de c unidades hacia arriba (si c es positivo) o hacia abajo (si c es negativo). En este caso el vértice de la parábola se encuentra en $x = h, y = c$.</p> <p>Aquí se observa la importancia de completar cuadrado, pues mediante transformaciones (translaciones y homotecias) se puede graficar $y = ax^2 + bx + c$ a partir de la gráfica de $y = x^2$.</p>
--	--	--

		 Además, este tipo de estrategia conecta <i>Relaciones y Álgebra</i> con <i>Geometría</i> .
	11. Analizar la influencia de los parámetros a , b , c en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, utilizando software.	 Las calculadoras graficadoras y software con capacidad para graficar son muy importantes para visualizar las gráficas de funciones.

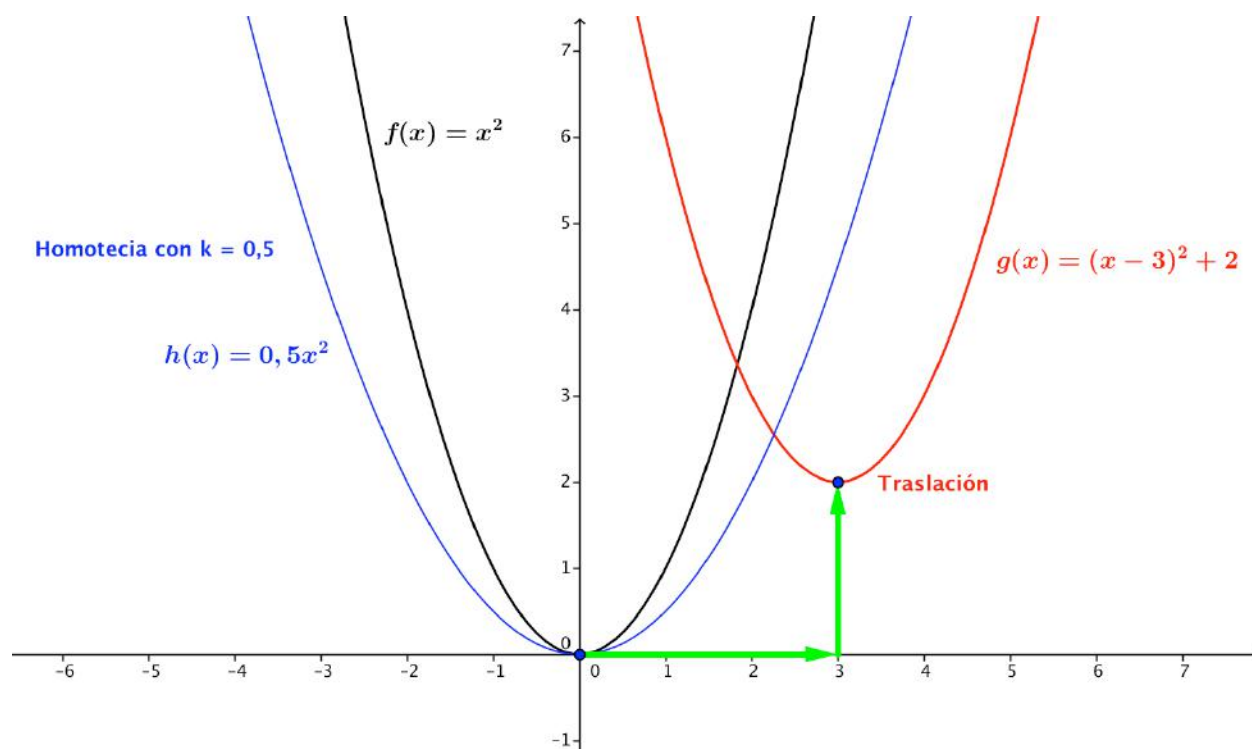
Recuadro N° 16

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa : 4, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades hacen referencia básicamente al uso de representaciones de funciones cuadráticas. No se requiere un análisis tan profundo como el que se desea realizar en décimo año, aunque sí es importante enfatizar en la relación que existe entre la función cuadrática y las ecuaciones de segundo grado.

También, es necesario relacionar los diferentes criterios de las funciones generadas mediante las factorizaciones con sus representaciones gráficas, lo cual permite visualizar traslaciones y homotecias respecto a la función $y = x^2$. Aquí el elemento tecnológico es importante.



Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores

Luis Hernández Solís
Miguel González Ortega

Editor

Angel Ruiz

Editor gráfico

Miguel González

Revisores

Javier Barquero

Revisión filológica

Julián Ruiz

Director general del proyecto

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Noveno año*. San José, Costa Rica: autor.



Documento de integración de habilidades para Noveno año por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014) se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)