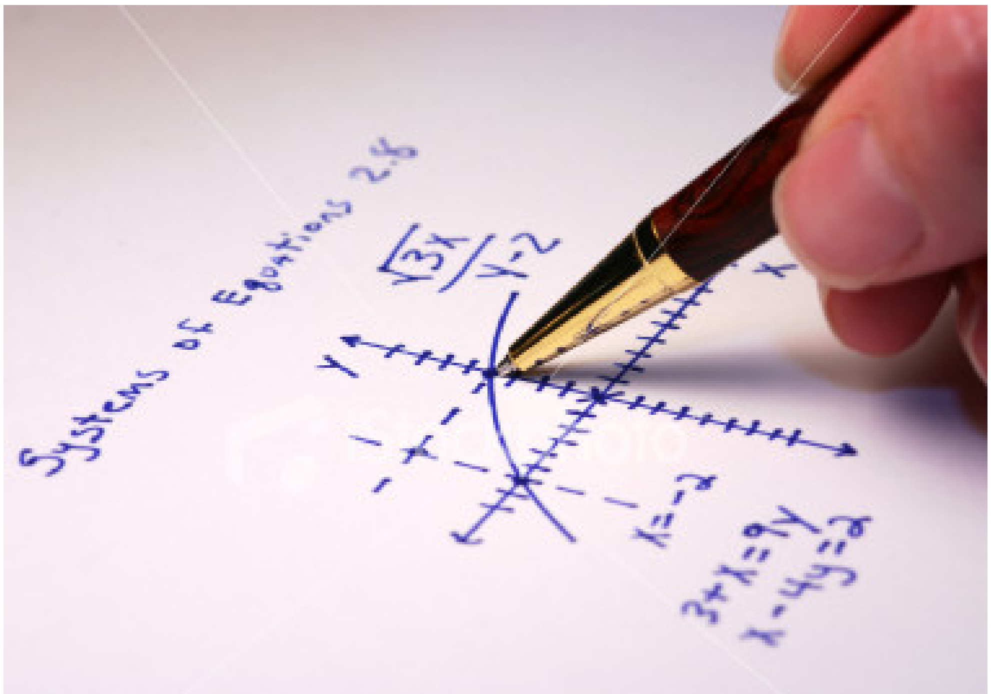
PROGRAMAS DE ESTUDIO

MATEMÁTICAS

Formación continua: 2011

Materiales para el Primer ciclo



Relaciones y álgebra

Elaborado por: Edison De Faria Campos

Relaciones y álgebra

Habilidades generales

Reconocer patrones
Identificar y sustituir el número faltante en una expresión o en una tabla
Proporcionar distintas representaciones para sucesiones

Introducción

La noción de función es central en las matemáticas. Este concepto es complejo y su estudio y desarrollo son utilizados con otros conceptos que también son importantes y complejos como el de variable y el de cambio, además de permitir el uso de distintas representaciones que coadyuvan a su comprensión. Las principales representaciones son: gráfica, tabular, verbal y simbólica. Esta última tiene que ver con el álgebra, una forma de pensar algo que es común a todas las áreas de las matemáticas por su utilidad para hacer generalizaciones, para argumentaciones y demostraciones y para la modelización y resolución de problemas.

Kaput (1999) describe cinco formas distintas de la utilización del álgebra:

- Generalización de la aritmética y de patrones.
- Uso significativo de simbolismo.
- Estudio de estructuras en el sistema numérico.
- Estudio de patrones y funciones.
- Modelización matemática.

Este material está dirigido a docentes de primaria; pretende analizar algunos tópicos de *Relaciones y álgebra* mediante la construcción de actividades didácticas y situaciones problema bajo el enfoque de los nuevos programas de estudio de matemática.

Nota: Las actividades que se describen en este material están dirigidas para docentes de primaria, por lo cual en algunas de ellas no es conveniente replicarlas tal y como se desarrollaron a los estudiantes. Es importante que el docente las estudie y realice las adaptaciones pertinentes para su utilización en el salón de clases o bien pueda implementar nuevas situaciones.

Tabla de contenidos

I. Patrones y sucesiones

Actividad 1

Los alumnos de primer grado de la escuela El Buen Saber decidieron pintar un muro de la escuela de una forma bastante artística. Para ello dividieron el muro en rectángulos del mismo tamaño, que fueron marcados con los números enteros del 1 al 60 conforme la figura que sigue:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**

Utilizaron los colores rojo, verde, azul y amarillo para pintar cada rectángulo, empezando del rectángulo número 1, es decir, rectángulo 1 color rojo, rectángulo 2 color verde, rectángulo 3 color azul, rectángulo 4 color amarillo, y siguieron el mismo orden para pintar los demás rectángulos, hasta terminar pintando el último rectángulo, el número 60.

				5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**

Pero la maestra quería saber, antes de pintar, que color correspondería a algunos rectángulos. Para ayudar a la maestra responda: ¿Qué color corresponde al rectángulo número 16? ¿Cuál será el color del rectángulo 57?

Análisis de la Actividad 1

La actividad puede ser desarrollada con estudiantes de primer grado, segundo grado o tercer grado.

Se recomienda trabajar en grupos y utilizar material concreto: papel de construcción con los rectángulos dibujados (para primer y segundo grado. Para tercer grado los estudiantes pueden dibujarlos); lápices de colores o bien rectángulos recortados con los colores señalados (uno de cada color para cada grupo). En este caso el papel de construcción representará el muro que deberá ser pintado.

Es posible que los estudiantes de primer grado vayan pintando cada rectángulo hasta llegar al que está marcado con el número 16. El docente deberá estar atento, pasando por cada grupo para averiguar si al terminar de pintar el rectángulo número 10 siguen con el 11 y no con el 20 que está inmediatamente por debajo del 10. Se espera que sigan con la estrategia de pintar uno a uno hasta llegar al número 57.

En tercer grado se espera que algunos estudiantes noten que cada color vuelve a repetir cuatro posiciones más adelante, es decir, el rojo del rectángulo 1 volverá a aparecer en los rectángulos 5 $=1\times 4+1$, $9=2\times 4+1$, $13=3\times 4+1$ y así sucesivamente. Lo mismo sucederá con los otros colores. Esto puede ser representado en la tabla que sigue:

Color	Número del rectángulo			
Rojo	1	5	9	13
Verde	2	6	10	14
Azul	3	7	11	15
Amarillo	4	8	12	16

Con esto pueden concluir que el color correspondiente al rectángulo 16 es el amarillo. Otra posibilidad consiste en notar que $16=3\times 4+4$ y como el 4 corresponde al amarillo entonces el color del rectángulo 16 será amarillo. Por otro lado $57=14\times 4+1$, y como el 1 corresponde al rojo entonces el color correspondiente al rectángulo 57 es el rojo.

En tercer grado se puede ampliar el "tamaño del muro", incluyendo más columnas y filas de rectángulos y solicitar el color de un rectángulo que corresponde a un número grande, como por ejemplo el 267, para evitar que el estudiante utilice la estrategia de pintar rectángulo por rectángulo. Si se utiliza la última estrategia, como $267=66\times 4+3$ entonces su color sería azul (corresponde al número 3).

Se podría revisitar esta actividad en sexto grado o en sétimo cuando los estudiantes estudien el algoritmo de la división. Esto permite generalizar el procedimiento al utilizar *n* filas y *m* columnas para representar los rectángulos. También se puede aumentar la cantidad de colores: usar 5 o 6 colores distintos en lugar de 4, por ejemplo.

Este manejo de los datos (en este caso los colores y los números naturales) y su ordenamiento en una secuencia, sirven como elemento motivador para introducir de forma intuitiva los conceptos de patrón y de sucesión.

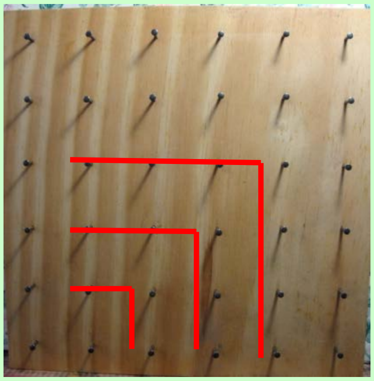
Patrones

Los patrones son ciertas regularidades que pueden observarse en algunas situaciones reales o no y modelizar matemáticamente. Algunos matemáticos, por ejemplo Steen (1994) definen a la matemática como la ciencia de patrones y relaciones.

Las matemáticas son el estudio de diversos tipos de patrones que incluyen números, formas y operaciones. Los patrones ayudan a explicar y a predecir ciertos fenómenos. Por ejemplo, una publicación de la revista Expert Systems with Applications revela cómo algunos investigadores de la Universidad Pablo de Olavide (UPO) y la de Sevilla (US) han encontrado patrones de comportamiento que se producen antes de un terremoto en la Península Ibérica. Los científicos aplicaron técnicas matemáticas sobre datos recogidos por el Instituto Geográfico Nacional acerca de 4017 terremotos de magnitudes entre 3 y 7 en la escala Richter, ocurridos en la Península Ibérica y mares que la rodean, entre los años 1978 y 2007. Los científicos aplicaron sobre los registros técnicas matemáticas de agrupamiento, lo que permite encontrar similitudes entre ellos y descubrir patrones que ayuden a predecir un terremoto. (información recuperada el 10 de octubre del 2011 en la página dirección http://www.tendencias21.net/Encuentran-patrones-matematicos-para-predecir-terremotos_a5180.html.

Los patrones son encontrados en todas las áreas de las matemáticas y es importante que los estudiantes aprendan a buscarlos, describirlos y extenderlos. La búsqueda, construcción y clasificación de patrones promueven el desarrollo del pensamiento lógico, y el primer ciclo de la enseñanza primaria es adecuado para empezar con la exploración de patrones. En primer grado los estudiantes pueden describir verbalmente las regularidades encontradas en los patrones. Estudiantes del primer ciclo deberían desarrollar la habilidad para predecir el siguiente elemento en una sucesión, examinando un conjunto específico de ejemplos

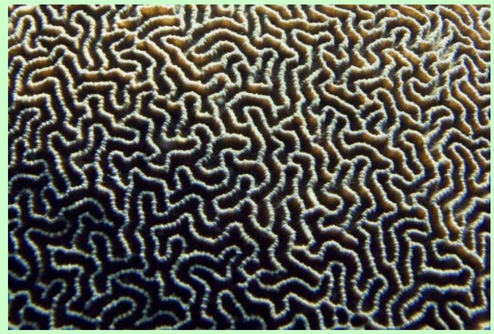
En los grados siguientes pueden utilizar expresiones símbolos matemáticos. En el segundo ciclo deberían poder hacer generalizaciones acerca de la estructura de un patrón, como por ejemplo, que la suma de los primeros n números impares es igual a $n \times n$.



$$1 = 1\times 1,\ 1+3 = 4 = 2\times 2,\ 1+3+5 = 9 = 3\times 3,\ 1+3+5+7 = 16 = 4\times 4,\ \cdots$$

Además, en el segundo ciclo, deberían poder analizar patrones números o geométricos y expresarlos matemáticamente en palabras o en símbolos matemáticos, investigar la estructura de un patrón, organizar la información de forma sistemática y utilizar el análisis para generalizar relaciones matemáticas en el patrón.

En la naturaleza encontramos muchos patrones que presentan una forma bastante agradable. Algunos de ellos son conocidos como fractales debido a que pequeñas partes de estos objetos son semejantes al objeto completo.

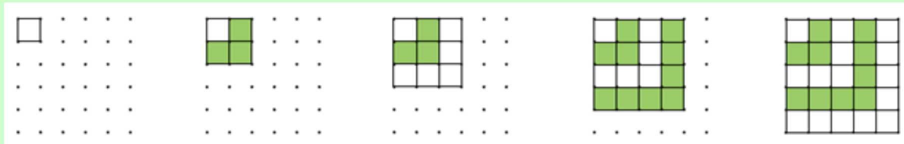





Sucesión

En los programas de matemática del 2005 este concepto aparece con el nombre de serie. Por ejemplo, en el tercer grado aparece como contenido “series en forma ascendente o descendente con diferentes patrones”. Preferimos utilizar el nombre sucesión en lugar de serie pues matemáticamente una serie es la suma de los elementos de una sucesión.

Una sucesión se puede pensar como una lista de números, formas, eventos o operaciones escritos en un orden definido, como por ejemplo:

- $2,4,6,8,\cdots$ para indicar los números pares
- $1,5,9,13,17,\cdots$ en dónde cada número se obtiene al sumar 4 al número anterior
- $A,B,C,A,B,C,A,B,C,\cdots$
-  …
-  …

El número de términos (posiblemente infinito) de una sucesión se conoce como longitud de la sucesión. Además, los mismos elementos pueden aparecer varias veces en distintas posiciones en una sucesión.

Algunas sucesiones se pueden definir verbalmente o simbólicamente mediante una fórmula para el enésimo término, la cual se denomina *ley de formación.* Por ejemplo, una ley de formación puede ser la siguiente: multiplique por 2 la posición que ocupa el término de la sucesión y sume el resultado a 5. En este caso el término que ocupa la posición 4 sería el $2\times 4+5$ o sea el número 13. En sexto grado podríamos escribir la ley anterior en forma simbólica. Si el término ocupa la posición *n* entonces su valor es $2\times n+5$.

En general, una sucesión de *n* elementos se puede escribir como

$$a(1),a(2),a(3),\cdots,a(n)$$

El objeto $a(1)$ es el primer término, $a(2)$ el segundo término y así sucesivamente.

Cuando la sucesión no tiene un último término, escribimos

$$a(1),a(2),a(3),\cdots$$

Los tres puntos a la derecha indican que la sucesión continúa sin finalizarse. En este caso, para cada número natural *n* corresponderá un término que lo representaremos por $a(n)$. En este caso suponemos que la sucesión sigue cierto patrón que puede ser encontrado.

Por ejemplo, en la sucesión $2,4,6,8,10,12,\cdots$ se puede establecer que 8 representa el cuarto término de la sucesión y que 20 representa el décimo. Nótese que aunque 20 no está descrito en forma explícita en la sucesión, el reconocimiento del patrón que describe esta sucesión permite predecir los términos sucesivos.

En la sucesión

 …

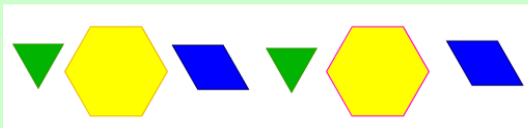
el primer término es la primera carita feliz, el sexto término es la última carita triste. Se supone que el patrón es carita feliz, carita feliz, carita triste. Podemos predecir cuál será el término número 20. Como las caritas tristes aparecen en las posiciones $3,6,9,\cdots$, es decir múltiplos de 3 y como 20 no es un múltiplo de 3 entonces aparecerá una carita feliz en la posición 20.

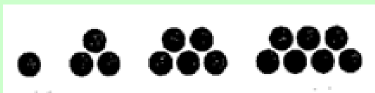
Otros desafíos

Esos juegos matemáticos favorecen la observación, el aprendizaje del cálculo mental y permiten introducir una escritura sintáctica de los números.

1. Encuentre el término que ocupa la posición número 10 en cada una de las siguientes sucesiones, suponiendo que se extienden indefinidamente:

a. $1, 4, 7, 10, 13, \cdots$

b.  …

c.  …

d. El término que ocupa una posición es 4 más que el triple de la posición.

2. Encuentre el valor de X en la sucesión de los números: $1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad X$

Soluciones:

1. En el caso de la sucesión *a*), se debe considerar que cada término se obtiene al sumarle 3 al término anterior. Una estrategia consiste en escribir todos los términos que faltan hasta llegar al número 10. Otra consiste en ir sumando mentalmente 3 a cada término e ir guardando la posición que ocupa el resultado, hasta llegar a la posición 10. Una estrategia más elaborada consiste en escribir:

   $4 = 1+3 = 1+3\times 1$, para el segundo término, $7 = 4+3 = 1+3+3 = 1+3\times 2$, para el tercero término, $10 = 7+3 = 1+3\times 3$, para el cuarto término, $13 = 10+3 = 1+3\times 4$ para el quinto término, lo que permite conjeturar que el décimo término será $1+3\times 9$ es decir 28.

   Para *b*) la secuencia es triángulo, hexágono, paralelogramo y observar que los paralelogramos ocupan posiciones que son múltiplos de 3: 3, 6, 9,…., y la figura que sigue al paralelogramo es el triángulo. Por lo tanto el triángulo ocupará la posición 10.

   Para *c)* observamos que hay que agregar dos puntos a la figura que ocupa la posición anterior. Si aplicamos la misma estrategia utilizada en la parte *a)* concluiremos que en la posición 10 tendremos que dibujar $1+2\times 9$, es decir 19 bolitas.

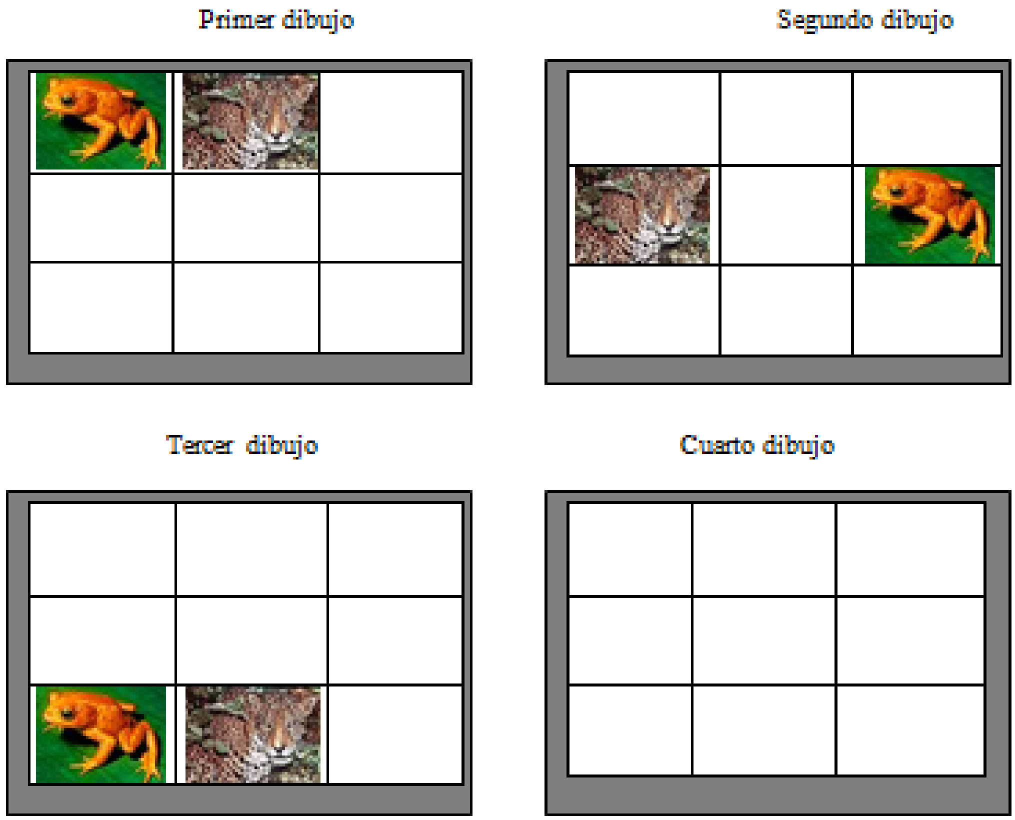
   En *d)* podemos escribir que el término que ocupa la posición 10 es $4+$ triple de 10, es decir, $4+3\times 10 = 34$.

2. En la sucesión $1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad X$ tenemos que sumarle 1 al primer término para obtener el segundo, 2 al segundo para obtener el tercero, 3 al tercero para llegar al cuarto, 4 al cuarto para llegar al quinto. Por lo tanto hay que sumarle 5 al quinto para obtener *X*, es decir el valor de *X* es 16.

El manejo con sucesiones, permite desarrollar en el estudiante la habilidad para el reconocimiento de patrones y el establecimiento de relaciones entre diferentes elementos, lo cual le permitirá más adelante tener un manejo adecuado de las diferentes formas de representación de una idea o concepto matemático, y de cambiar de una representación a otra.

Actividad 2

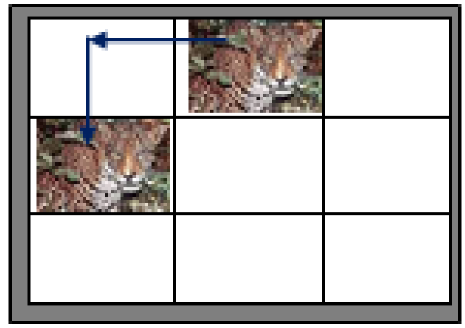
Abajo se presentan secuencias de dibujos y en cada secuencia existen dos fichas que se mueven, siguiendo un patrón. Cada ficha puede moverse horizontalmente, verticalmente y en forma diagonal. El objetivo consiste en “descubrir” cómo se mueve cada una de las fichas (encontrar el patrón) y determinar en qué lugar queda cada una de las ellas en el último dibujo.



Análisis de la Actividad 2

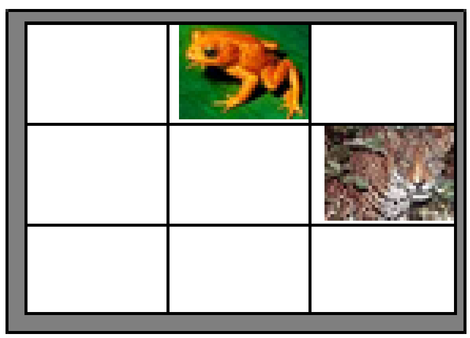
La actividad puede ser desarrollada con estudiantes de segundo grado o tercer grado.

Se recomienda trabajar en grupos y utilizar material concreto. Es importante que el estudiante argumente cómo fue que llegó a sus conclusiones, verbalizando el razonamiento seguido. Lo interesante del problema es que existen distintos patrones que conducen a una misma solución, y esto es fundamental en matemáticas: lograr obtener una misma conclusión mediante rutas o razonamientos distintos.



Un posible patrón consiste en que la rana se mueva tres casas “celdas” en el sentido del movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 a la derecha 1 hacia abajo) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 1 a la izquierda 1 hacia abajo).

Otra posibilidad es que la rana se mueva cinco casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 hacia abajo 2 a la derecha 1 hacia arriba) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el mismo sentido de movimiento de la raja o bien seis casas en el sentido contrario. Existen otros posibles patrones que conducen a la solución del problema:



La idea central es que existen distintas estrategias para resolver un problema matemático. Posteriormente los estudiantes pueden plantear problemas parecidos, aumentando el número de casillas (celdas) y cambiando el movimiento de las fichas.

Un poco de historia

El álgebra

La disciplina del álgebra pasa por tres períodos de la historia. Los primeros algebristas – de los escribas egipcios y babilonios, pasando por los grandes matemáticos griegos e islámicos a los pensadores del Renacimiento europeo – trabajaron para producir las nociones matemáticas que son utilizadas hoy tales como: números, ecuaciones y los simbolismos que representan incógnitas o variables.

Algunos de los principales algebristas fueron:

- Diofanto de Alejandría (siglo III), matemático griego muy reconocido por su obra "Aritmética", la cual es esencialmente una colección de problemas con sus respectivas soluciones. En esta obra se utiliza por primera vez símbolos para las incógnitas y sus potencias, aparecen reglas para multiplicar potencias y para multiplicar términos positivos y términos negativos. La extensión más famosa del trabajo de Diofanto se debe a Pierre de Fermat (1601-1665), el fundador de la teoría de números moderna. En el margen de su copia de Aritmética Fermat escribió varios comentarios, propuso nuevas soluciones, correcciones y generalizaciones de los métodos utilizados por Diofanto, así como algunas conjeturas como la del último teorema de Fermat.
- Liu Hui (siglo III), matemático Chino, editó y comentó la obra escrita al inicio de nuestra era, Jiuzhang Suanshu o Los nueve capítulos del arte matemático. Esta importante obra considerada una de las más famosos obras chinas de matemática contiene un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, una buena aproximación para el número π, reglas para calcular áreas de figuras tridimensionales como el prisma, la pirámide, el tetraedro, el cilindro y el cono. Otro matemático chino que contribuyó al desarrollo del álgebra fue Qin Jiushao (1202-1261) quién desarrollo un método para resolver congruencias lineales simultáneas y otro método para aproximar numéricamente ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2, utilizando aproximaciones sucesivas. Este último método fue redescubierto en Europa Occidental a inicios del siglo XIX y es conocido como método de Ruffini-Horner.
- Brahmatupta (598-665), astrónomo y matemático Indio. En su obra Brahma-sphuta-siddhanta definió el cero como el resultado de restar un número de él mismo, resuelve algunos tipos de ecuaciones indeterminadas de segundo grado con dos incógnitas y proporciona la fórmula para el área de un cuadrilátero cíclico.
- Al-Khwariszmi (780-850), astrónomo y matemático musulmán. Sus principales obras fueron las responsables de introducir el sistema de numeración Indio-Árabe y conceptos de álgebra en la matemática de Europa Occidental. De su nombre y sus obras se originan las palabras algoritmo y álgebra. Otro árabe reconocido por sus trabajos en álgebra fue Al-Karaji (980-1030). Él fue el primer matemático que liberó el álgebra de las operaciones geométricas, reemplazándolas por operaciones que constituyen la base del álgebra moderna.
- Bhaskara II (1114-1185), matemático y astrónomo Indio escribió Lilavati y Bijaganita en dónde utilizó el sistema decimal, compiló problemas de Brahmagupta y de otros matemáticos de India, anticipó la convención moderna de la multiplicación de signos, utilizó letras para representar incógnitas, resolvió ecuaciones indeterminadas de primer y segundo grado y utilizó un polígono regular de 384 lados para aproximar π.

  Otro matemático Indio que contribuyó significativamente al desarrollo del álgebra fue Mahavira (Siglo IX).
- Girolamo Cardano (1501-1576), médico, astrónomo y matemático italiano, escribió Ars

Magna, una de las piedras angulares en la historia del álgebra. En ella él publicó la solución de la ecuación cúbica, desarrollada inicialmente por Scipione del Ferro (1465-1526) quién resolvió un caso particular y posteriormente por Niccolo Tartaglia, y la solución de la ecuación de cuarto grado, encontrada por Lodovico Ferrari, discípulo de Cardano. En otra obra conocida como Liber de ludo aleae él presentó los primeros cálculos sistemáticos de probabilidades, un siglo antes de Blaise Pascal y de Pierre Fermat.

- François Viète (1540-1603), matemático Francés, conocido como el padre de la notación algebraica moderna, contribuyó al desarrollo de la teoría de ecuaciones. Se considera que la disciplina del álgebra comenzó a finales del siglo XVI con los trabajos de Viète, quien presentó la primera concepción consistente, coherente y sistemática de una ecuación algebraica.

Varios nombres están ligados al desarrollo del álgebra clásica y del álgebra moderna. Entre ellos se destacan: Niels Henrik Abel (1802, 1829), Bernhard Bolzano (1781-1848), George Boole (1815-1864), Évariste Galois (1811-1832), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Leopold Kronecker (1823-1891), Sophus Lie (1842-1899), Paolo Ruffini (1765-1822), Emil Artin (1898-1962), Richard Dagobert Brauer (1901-1977), Élie-Joseph Cartan (1869-1951), Leonard Eugene Dickson (1874-1954), Jean Dieudonné (1906-1992) y Emmy Noether (1882-1935).

Referencia: The Britannica Guide do Algebra and Trigonometry (2011)

II. Identificando la forma o el número faltante

Actividad 3

Pepe Parchón es un personaje bastante descuidado al caminar y cuando utiliza cualquier tipo de instrumento o herramienta. Un día él regó tinta sobre unos papeles en dónde la maestra había preparado una tarea para sus alumnos. La figura que sigue muestra el daño hecho por Pepe Parchón:

27 + 19 =  *+ 7. La tinta cubrió el número que se encuentra en el signo = y el +, y no hay forma de recuperarlo.*

¿Cuál es el número que fue cubierto por la tinta?

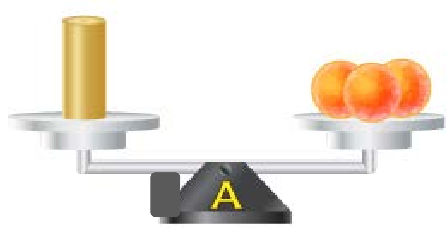
Análisis de la Actividad 3

Es importante señalar el uso del símbolo = de igualdad, Este símbolo es uno de los más importantes en la aritmética, el álgebra y en todas las áreas de las matemáticas que utilizan números y operaciones.

Algunas investigaciones revelan que los estudiantes utilizan incorrectamente el símbolo de igualdad en expresiones como la mencionada pues aunque consideran que el lado izquierdo de la igualdad es igual que el lado derecho, en la práctica no actúan como se fuera así, sino que consideran que el lado izquierdo es un problema y el lado derecho es la respuesta.

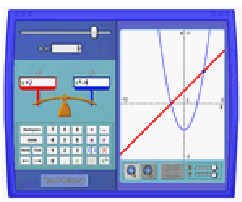
En este sentido algunos estudiantes reemplazarían el parchón que aparece después de la igualdad por 46 que es la suma de 27 con 19, y todo el segundo miembro daría 46 + 7 que es 53. Este razonamiento es equivocado. Por esto es importante señalar que la igualdad es una relación y no una operación. Una forma de corregirlo podría ser la de los dos lados de la igualdad como pesos que equilibran una balanza.

Lo ideal sería que los estudiantes construyeran su propia balanza con ganchos, ligas y vasos de papel.

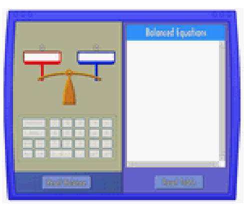


En este caso, al estar equilibrada la balanza, el peso de lado izquierdo es igual al peso del lado derecho. Si quitamos o agregamos peso a un lado de una balanza en equilibrio, el plato del lado que tiene menos peso quedará más elevado que el otro. Los estudiantes pueden observar este fenómeno en los tradicionales juegos de sube y baja que se encuentran en muchos parques públicos.

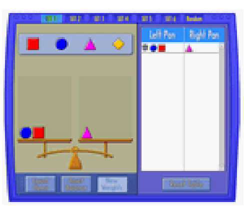
En la página Web del NCTM (Asociación de profesores de matemática de los Estados Unidos) http://illuminations.nctm.org/ en la parte de actividades, grados 3-5, encontramos actividades dinámicas relacionadas con balanzas.



Pan Balance – Expressions 3–12

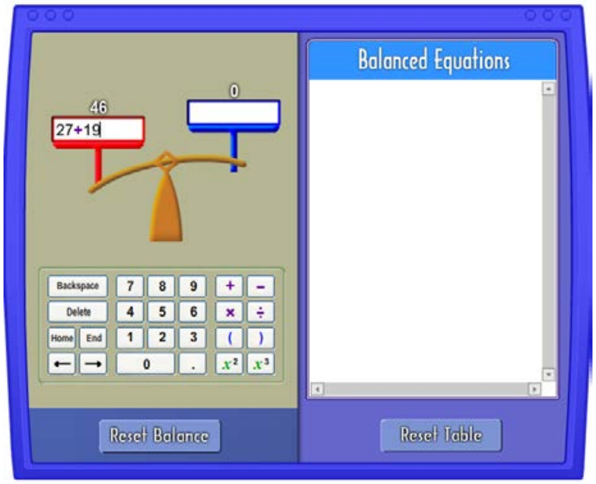


Pan Balance – Numbers 3–8

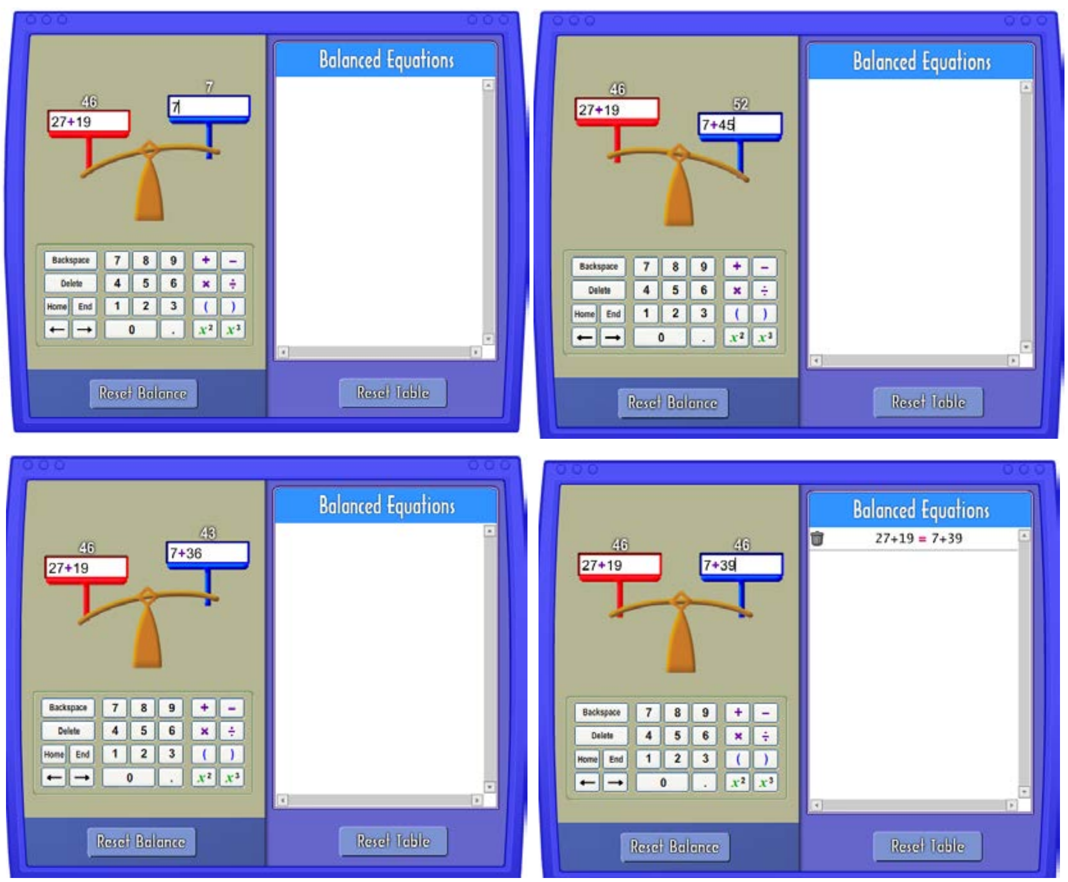


Pan Balance – Shapes 3–8

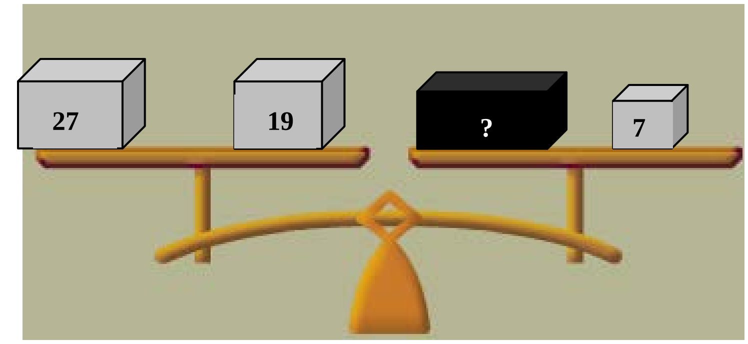
Un primer acercamiento para resolver nuestro problema podría ser en forma de juego. Si utilizamos la balanza de números ponemos inicialmente 27 + 19 del lado izquierdo de la balanza. Se observa que la balanza está desequilibrada y el plato derecho (sin peso) se encuentra más elevado.



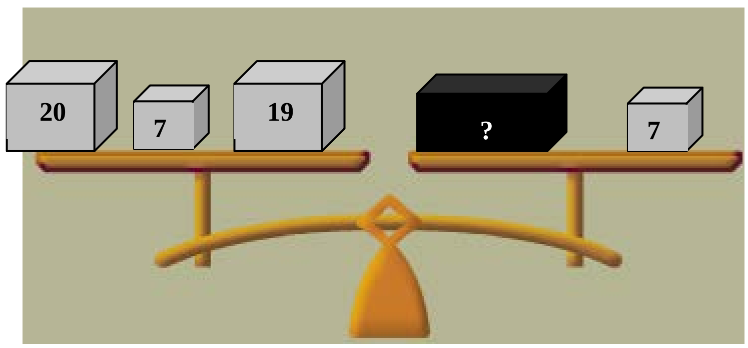
Agreguemos 7 en el lado derecho y por ensayo y error podemos ir agregando números del lado derecho hasta obtener el equilibrio. Algunos ensayos son mostrados abajo:



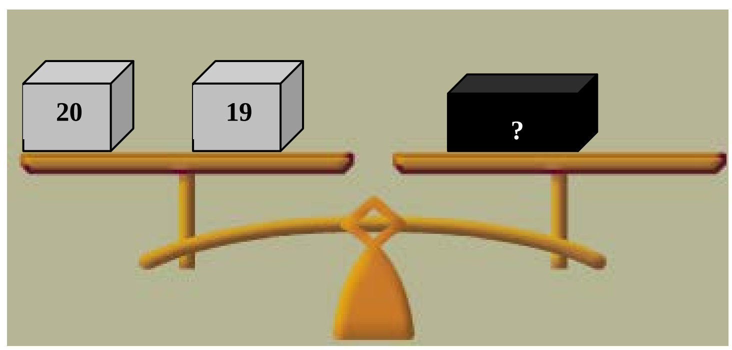
De esta forma podemos concluir que la tinta cubrió el número 39, y que 27+19 = 39+7.



La balanza está en equilibrio pero no conocemos el valor del peso de la caja negra que corresponde al número cubierto por la tinta. Pero sabemos que 27 = 20+7.



Podemos eliminar el peso marcado con el número 7 en ambos lados y el equilibrio se mantiene.



El problema se simplifica pues el plato derecho de la balanza tiene un peso igual al del lado izquierdo que es 20+19. Por lo tanto el peso del plato derecho es igual a 39.

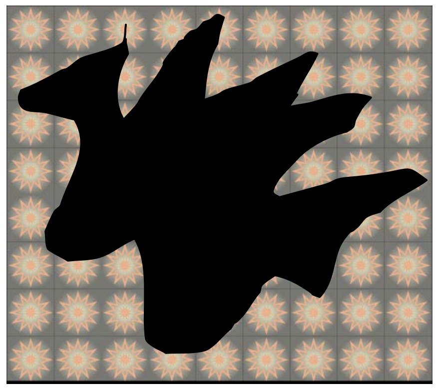
Otra alternativa se basa en el siguiente razonamiento. El lado izquierdo de la ecuación 27 + 19 es igual a 46. ¿Cuánto le falta a 7 para llegar a 46? En este caso es 46-7 que es igual a 39.

Lo importante en este ejercicio es que el parchón de tinta está siendo utilizado como un valor desconocido o una incógnita en la ecuación. Esta es la primera experiencia de los estudiantes con el uso de variable: un valor desconocido o valor faltante. En el segundo ciclo de la educación primara este valor faltante puede ser sustituido por una letra y la ecuación puede ser escrita, por ejemplo, como $27+19=n+7$, y lo que se busca es el valor de n para que la ecuación sea verdadera.

Los conceptos estudiados en esta actividad son: igualdad y valor faltante en una expresión.

Actividad 4

Pepe Parchón regó pintura sobre una mesa del jardín de la escuela y hay que conseguir un diluyente para poder limpiarla. La maestra aprovecha la situación para proponer el siguiente problema a los estudiantes: Sin limpiar la mesa del jardín, ¿Cómo podemos calcular el número total de azulejos de la mesa?



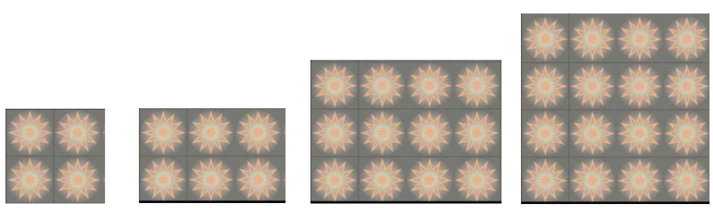
Análisis de la Actividad 4

Es importante el uso de material concreto en esta etapa. Los estudiantes podrían recibir un papel de construcción impreso con la figura anterior para que trabajen en grupos.

Algunos estudiantes podrían utilizar una regla y lápiz de color para intentar dibujar líneas para las filas y para las columnas de la mesa y de esta forma poder contar el número de azulejos.

Otros intentarán ir contando los azulejos de uno en uno intentando aproximar la posición de los azulejos cubiertos.

Otros pueden reemplazar el problema por otros problemas más sencillos, suponiendo que los azulejos están descubiertos.



Este razonamiento inductivo puede conducir al estudiante a la solución: multiplicar el número de filas por el número de columnas de azulejos. En este caso sería multiplicar 8 por 9 y la solución es 72, la mesa tiene 72 azulejos. Los azulejos cubiertos por la pintura pueden ser interpretados como valores faltantes en una expresión que determina la cantidad

total de azulejos.

Este tipo de actividad conecta el álgebra con la geometría, y si asignamos un área a cada uno de los azulejos, por ejemplo, si cada azulejo es un cuadrado de lado $20\,cm$ entonces podemos preguntar por el área total de la mesa. Esto conecta el álgebra con medidas. En el problema anterior el área total de la mesa es de $72 \times 20cm \times 20cm = 28800\,cm^2$, un número que puede ser utilizado en segundo o tercer grado.

Actividad 5

El periódico Buena Nota ha decidido dar un año de subscripción gratis a cuatro estudiantes del único grupo de tercer grado de la escuela El Buen Saber. Para ello los estudiantes del grupo tienen que formar subgrupos de cuatro estudiantes, y cada subgrupo tendrá que resolver el juego-problema planteado por el periódico:
Completar el sudoku que sigue:

5			1		
				2	5
		5			2
	6				
4		3	5	1	
	5	6		3	4

Instrucciones:

- *Cada minirejilla compuesta por dos filas y tres columnas tiene que contener cada número del 1 al 6.*
- *Cada columna tiene que contener cada número del 1 al 6.*
- *Cada fila tiene que contener cada número del 1 al 6.*

El subgrupo que resuelva correctamente y más rápido el problema gana el premio.

Análisis de la Actividad 5

Como sugiere el problema, es importante que el trabajo se realice en grupos de 4 estudiantes. De nuevo, el uso de materiales concretos es fundamental.

Un posible escenario consistiría en no seguir correctamente las instrucciones dadas y repetir algún número en una minirejilla, fila o columna.

Como el juego es de estrategia, es posible que los estudiantes descubran que una buena estrategia consiste en mirar la columna o la fila que contiene una mayor cantidad de números dados, como columna o fila inicial a completar. Posteriormente que miren las minirejillas con mayor cantidad de números completados.

Constantemente hay que estar averiguando si no existe número repetido en una fila o columna. La solución es:

5	4	2	1	6	3
6	3	1	4	2	5
3	1	5	6	4	2
2	6	4	3	5	1
4	2	3	5	1	6
1	5	6	2	3	4

III. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de una “situación problema” para iniciar una lección.
2. Resolución o aporte de ideas por parte de los estudiantes, individualmente o en subgrupos.
3. Discusión interactiva y comunicación frente al conjunto del grupo de las soluciones o ideas aportadas por los estudiantes.
4. “Institucionalización” de los conocimientos por parte del educador.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionado con el desarrollo de una habilidad propuesta para tercer año.

Concepto	Habilidades específicas
Sucesiones Patrones	Identificar patrones o regularidades en sucesiones, tablas u representaciones geométricas de números naturales menores que 1 000 000.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

1. Propuesta de una “situación problema” para iniciar una lección.

Antes de plantear la situación problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con ella? Luego, para este momento, es importante que el docente tenga claro cuáles son las habilidades desarrolladas anteriormente.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrollas en niveles anteriores como:

- ✓ Identificar patrones o regularidades en sucesiones y en tablas de números naturales menores que 1000.
- ✓ Construir sucesiones de números naturales menores que 1 000 que obedecen un patrón dado de formación.
- ✓ Organizar números ascendente o descendentemente.
- ✓ Resolver problemas relacionados con sucesiones y patrones.

Planteamiento de la situación problema:

El docente propone la siguiente situación: La empresa de alimentos “Comida Sana” se comprometió en colaborar económicamente con la comunidad organizada del barrio Pueblo Nuevo de la siguiente forma: el lunes 2 de enero del 2012 les entregaría cien colones, y posteriormente, en cada día del año les entregaría el doble de lo que les había dado el día anterior. De esta forma la comunidad recibiría cien colones el lunes 2 de enero, doscientos colones el martes 3 de enero, ochocientos colones el miércoles 4 de enero, y así sucesivamente. ¿Cuál fue el primer día en que la empresa entregó a la comunidad más de ochocientos mil colones?

2. Resolución o aporte de ideas por parte de los estudiantes mediante el trabajo en los subgrupos.

En esta etapa se espera que los estudiantes pregunten sobre algunos de los aspectos que aparecen en el problema y que no tengan claro. Se puede aclarar lo que quiere decir el doble de un número. Además es importante que se discutan diferentes estrategias para abordar el problema integralmente. Una primer estrategia sería construir una sucesión que empieza en 100 y que duplica el número al pasar de un término al siguiente:

$$100, 200, 400, 800, 1600, \cdots$$

hasta lograr alcanzar o superar por primera vez el valor solicitado de 800 000. Una equivocación posible consistiría en observar que el número 800 000 no forma parte de la sucesión ascendente construida y decir que el problema no tiene solución.

Otra estrategia parecida a la anterior consistiría en trabajar con números más pequeños y resolver un problema equivalente: construir la sucesión 1, 2, 4, 8, 16, … hasta lograr alcanzar o superar por primera vez el valor de 8 000. También se puede construir una tabla con dos columnas o dos filas: la primera columna con el número de días y la segunda con la cantidad de colones.

Cantidad de días	Cantidad de colones
1	100
2	200
3	400
4	800
…	…

Para este tipo de actividades se les debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación entre los estudiantes y estimularlos para que se enfrenten a la situación problema. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con los estudiantes para orientar el desarrollo de su trabajo y plantear preguntas generadoras que encausen a lo que se quiere llegar; pero debe permitir la discusión entre los jóvenes en relación con la búsqueda de soluciones.

3. Discusión interactiva y comunicación frente al conjunto del grupo de las soluciones o ideas aportadas por los estudiantes.

En este momento, el docente discute las posibles respuestas de los estudiantes y revisa la primera parte de la actividad. Se debe valorar todas las estrategias utilizadas y agruparlas de acuerdo a su similitud.

Se clasifican las soluciones correctas y las incorrectas y se discute en cada caso cómo las primeras satisfacen las condiciones dadas en el problema y qué condición o condiciones de estas no son satisfechas por las soluciones incorrectas.

Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

4. “Institucionalización” de los conocimientos por parte del educador.

Se repasa el concepto de patrón y el de sucesión.

IV. Bibliografía

Actividades con balanzas. http://illuminations.nctm.org/ recuperado el 10 de octubre del 2011.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fenema & T. A. Rombert (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM, Inc.

Steen, L. (1994). Mathematics: The Science of Patterns. *Scientific American Library*.

Stewart, I. (2009). *Professor Stewart: Hoard of Mathematical Treasures*. New York: Basic Books.

The Britannica Guide to Algebra and Trigonometry (2011). Hosch, W. (Ed.). Britannica Educational Publishing in association with Rosen Educational Services, LLC.

V. Lecturas recomendadas

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 6th ed. Boston: Pearson.