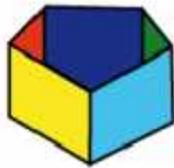


# Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



## Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas



# FUNDAMENTOS 2012

---

## Tabla de contenidos

Presentación general .....	4
Presentación de la unidad .....	7
Capítulo 1: Problemas de los aprendizajes de las matemáticas en Costa Rica .....	9
Capítulo 2: Balance de los programas de estudio 1995-2005 y orientaciones para un nuevo currículum .....	17
Balance de los programas de estudio 1995-2005 .....	18
Elementos para un nuevo currículum en el actual contexto educativo costarricense .....	20
Capítulo 3: Introducción a un nuevo currículum .....	23
<i>La resolución de problemas: enfoque principal del currículum</i> .....	24
<i>Conceptos básicos: habilidades, competencia y procesos</i> .....	25
<i>Matemáticas de calidad con profundidad</i> .....	26
<i>Integración vertical de los planes de estudio</i> .....	27
<i>Sentido histórico y adecuación al contexto educativo nacional</i> .....	28
<i>Ejes disciplinares</i> .....	28
<i>El currículum de matemáticas y los fines de la educación costarricense</i> .....	29
<i>La estructura del currículum</i> .....	30
Capítulo 4: Fundamentos .....	32
El plan de estudios se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades .....	33
Una perspectiva: competencia matemática .....	35
Procesos matemáticos .....	36
<i>Cinco procesos</i> .....	36
<i>¿Cómo actúan los procesos?</i> .....	38
La mediación pedagógica para desarrollar capacidades cognitivas superiores .....	39
Resolución de problemas .....	40
<i>Resolución de problemas: propósitos en el currículum</i> .....	40
<i>Problemas</i> .....	41
<i>Modelización</i> .....	43
<i>El uso de tecnologías</i> .....	44
<i>Diferentes niveles de complejidad de los problemas</i> .....	45
<i>Problemas, memorización y reflejos intelectuales</i> .....	46
Capítulo 5: Ejes .....	47
Cinco ejes disciplinares .....	48
Resolución de problemas y contextualización activa .....	49
Tecnologías .....	50
Actitudes y creencias .....	51
Historia de las Matemáticas .....	52
Capítulo 6: Gestión y planeamiento pedagógicos .....	54

La organización de las lecciones.....	55
<i>Un estilo para organizar las lecciones</i> .....	55
<i>Consideraciones sobre el estilo para organizar las lecciones</i> .....	57
<i>La pregunta dirigida</i> .....	59
Indicaciones generales.....	59
<i>Integrar habilidades</i> .....	59
<i>Plazos educativos</i> .....	60
<i>Variables de la lección</i> .....	60
<i>Interacciones en la institución</i> .....	61
<b>Capítulo 7: Metodología .....</b>	<b>62</b>
Sobre áreas matemáticas.....	63
<i>Números</i> .....	64
<i>Geometría</i> .....	66
<i>Medidas</i> .....	67
<i>Relaciones y Álgebra</i> .....	68
<i>Estadística y Probabilidad</i> .....	69
Sobre procesos matemáticos .....	71
<i>Indicaciones para cada proceso</i> .....	71
<i>Otras sugerencias sobre procesos</i> .....	74
Sobre la diversidad de estudiantes.....	75
Sobre el uso de tecnologías.....	76
Sobre actitudes y creencias.....	78
Sobre el uso de la Historia de las Matemáticas.....	81
<b>Capítulo 8: Evaluación.....</b>	<b>86</b>
La evaluación de los aprendizajes.....	87
Principios.....	87
La evaluación en la resolución de problemas.....	88
Componentes y valor porcentual .....	89
<i>Concepto</i> .....	90
<i>Asistencia</i> .....	90
<i>Trabajo cotidiano</i> .....	90
<i>Trabajo Extraclase</i> .....	90
<i>Pruebas</i> .....	91
<b>Créditos .....</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía y referencias .....</b>	<b>93</b>

---

## Presentación general

El *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Segundo ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar áreas como *Números y Medidas* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. Luego, *Geometría* sigue la misma línea, solo que incorporando contenidos como geometría analítica y transformaciones geométricas. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora. Por último, *Relaciones y Álgebra* que no estaba presente en el plan anterior y busca por medio del uso de representaciones ir evolucionando hacia el uso y comprensión del concepto de variable para modelar relaciones. Estas cinco unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Segundo Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

---

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos. En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

**Ángel Ruiz**

Director general  
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.



---

## Presentación de la unidad

Esta unidad temática integra varios elementos: en primer lugar, una descripción breve de la situación de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en Costa Rica, un balance de los *Programas 1995-2005 de matemáticas*, el trazado de lineamientos para el diseño de un nuevo currículo, y varios componentes de una propuesta de nuevos programas de matemáticas que se presentó en el 2011 y 2012.

Estos últimos componentes incluyen: una introducción general a esa propuesta, los fundamentos de la misma, sus ejes transversales, así como secciones de gestión y planeamiento pedagógico, metodología y evaluación.

Con este documento se busca ofrecer elementos para nutrir una acción de aula basada en la resolución de problemas como estrategia pedagógica central. Desde hace muchos años la resolución de problemas, asumida de esta manera, ha sido relevante en muchos currículos en el mundo, y ha sostenido importantes avances en los aprendizajes matemáticos. De lo que se trata es de construir una perspectiva enriquecedora en la enseñanza y aprendizaje que responda a los desafíos que tiene nuestro país.



---

# Capítulo 1: Problemas de los aprendizajes de las matemáticas en Costa Rica





La Educación Matemática en Costa Rica en el actual momento atraviesa una importante crisis. Son varios los indicadores de esta situación. Entre ellos: los resultados en las pruebas nacionales, los diagnósticos que realizan universidades públicas y pruebas comparativas internacionales (SERCE, PISA, TIMSS).

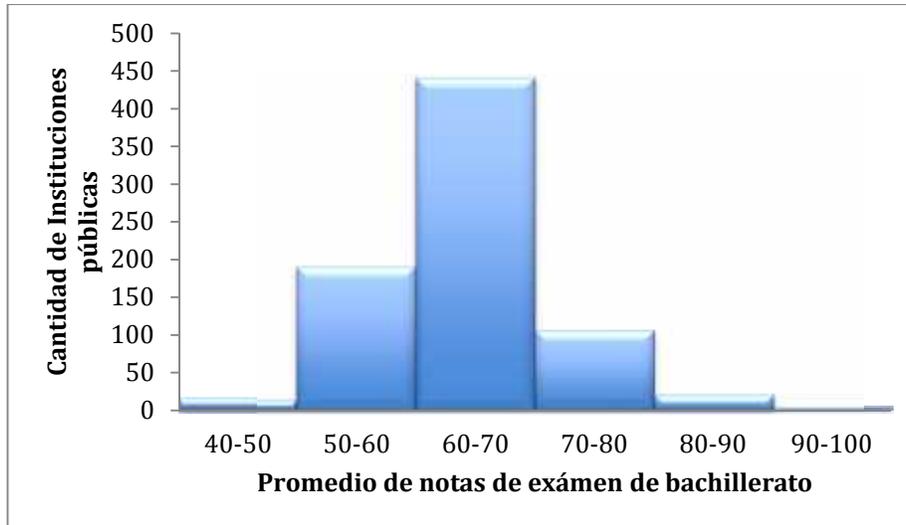
### **1.1 Pruebas nacionales**

A nivel de Educación Primaria, se realizaron en el año 2008 por primera vez las pruebas nacionales diagnósticas de segundo ciclo de la educación general básica. De acuerdo al tercer informe del Estado de la Educación del 2011, en la materia de Matemáticas la prueba resultó difícil para el nivel de habilidad de los examinados. Esto contrasta con los resultados de otras asignaturas; por ejemplo, en la materia de Español los estudiantes se ubicaron en el rango de habilidades intermedias y en general la prueba resultó fácil para el grupo de examinados. Similarmente, la prueba de Ciencias evidenció ser fácil para el nivel de habilidad de los examinados.

En las pruebas de Bachillerato, en los últimos diez años, los resultados más deficientes se han dado en matemáticas, creando una gran brecha con las otras materias. Incluso en el 2009, se obtuvo una nota promedio de 65,6. En el año 2011 bajó a 74,6 de un 79,27 en el año 2010. Se debe tener presente que la nota está compuesta por un 60% correspondiente a la nota del examen y un 40% a la llamada nota de presentación que es el promedio de las calificaciones obtenidas por el estudiante en décimo año y en los dos primeros trimestres de undécimo año en Español, Matemáticas, Estudios Sociales, Educación Cívica, Inglés o Francés (a elegir) y Biología, Química o Física (a elegir). Para los colegios técnicos se toman en cuenta las calificaciones obtenidas en décimo año, undécimo año y los dos primeros trimestres de duodécimo año. (División de Control de Calidad, “Pruebas de Bachillerato”, página electrónica del MEP, [mep.go.cr](http://mep.go.cr)). Los resultados en la prueba de matemática de bachillerato son desalentadores. En el 2011, aplicaron Bachillerato 775 instituciones públicas en las cuales se obtuvo un promedio de 65,8 en la nota del examen de bachillerato en matemáticas. Además, 644 instituciones públicas de las 775 obtuvieron un promedio de notas inferiores a 70 en el examen de bachillerato en matemática. Esto quiere decir que más del 80% de estas instituciones tienen un rendimiento preocupante en la asignatura de matemáticas.

Para tener más detalle del rendimiento en ese año, en el *Gráfico 1* se muestra la cantidad de estas Instituciones de acuerdo a su promedio de notas en el examen de matemática.

**Gráfico 1. Cantidad de instituciones públicas de acuerdo al promedio de notas obtenidas en el examen de bachillerato en matemáticas, 2011.**



Fuente: Elaboración propia con base en datos de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. MEP.

## 1.2 Diagnósticos en las universidades públicas

Las pruebas de Bachillerato no son de un alto nivel cognitivo, se centran en evaluar conceptos y procedimientos mecánicos y no conocimientos puestos en práctica en la resolución de problemas y la modelización. Cuando estos estudiantes, que han ganado su bachillerato, llegan a una universidad pública los resultados son también muy desalentadores.

La baja promoción en los primeros cursos de matemáticas es una constante desde hace años. Y esto no ha sido responsabilidad exclusiva de estas universidades. Para poner un ejemplo, desde hace varios años se creó en la Universidad de Costa Rica el examen de diagnóstico en matemática (DiMa) con el propósito de alertar a estudiantes, profesores y autoridades universitarias sobre posibles deficiencias en los conocimientos y destrezas en el área de matemáticas y proponer posibles soluciones.

En el año 2010 se admitieron 4322 estudiantes de primer ingreso a carreras que incluyen al menos un curso de cálculo en la Universidad de Costa Rica. De ellos, 331 habían aprobado MA0125 o MA1001 con el programa MATEM, por lo que estaban eximidos de aplicar el examen de diagnóstico. Muchos de estos estudiantes (277) ingresaron a carreras que requieren cursos de matemática, por lo que la población meta era de 4045 estudiantes. Al examen de diagnóstico de ese año se presentaron 2645 estudiantes (de ellos sólo 1 no era de primer ingreso) abarcando cerca del 65% de la población meta. **De los 2645 estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, 1706 obtuvieron notas inferiores a 50** (o sea el 64,5%). Solamente 423 estudiantes obtuvieron notas superiores a 70 (o sea tan sólo 16%) y de ellos el 32,1% son de instituciones privadas y 20,7% de instituciones semioficiales.

Hay que tener claro que esto no es un hecho aislado. De acuerdo a la información del Primer Informe de Resultados, DiMa 2010, se presenta el siguiente cuadro con resultados históricos:

**Tabla 1: Resultados históricos del Examen de Diagnóstico en Matemática  
Universidad de Costa Rica  
Porcentaje de notas inferiores a 50.  
Años 2004 hasta 2010**

<b>Año</b>	<b>Cantidad de estudiantes con notas inferiores a 50</b>	<b>Porcentaje (%)</b>	<b>Total de estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica</b>
<b>2004</b>	557	53,1	1049
<b>2005</b>	1011	59,2	1708
<b>2006</b>	1642	61,5	2670
<b>2007</b>	1876	64,2	2921
<b>2008</b>	1603	62,6	2562
<b>2009</b>	1929	69,0	2795
<b>2010</b>	1706	64,5	2644

Fuente: Elaboración propia con base en el Primer Informe de Resultados, DiMa 2010.

Puede observarse en el gráfico que en los últimos cinco años más del 60% de los estudiantes que aplican este diagnóstico obtienen notas inferiores a 50. A raíz de esta problemática otras universidades públicas están implementando planes similares a la UCR.

En el Instituto Tecnológico de Costa Rica los resultados son parecidos. Así lo muestran Ramírez y Barquero (2010, p. 74) en un análisis de pruebas diagnósticas que fueron contestadas por 1077 estudiantes en el 2008, por 1230 estudiantes en el 2009 y 1042 en el 2010 que se matricularon en los cursos de Matemática General, Matemática Básica o Fundamentos de Matemática I y que estuvieron presentes el día de la aplicación:

En el 2008 el promedio general fue de 52,4 con una desviación estándar de 17,43. En el 2009 el promedio general fue de 37,05 con una desviación estándar de 17,82. En el 2010 el promedio general fue de 31,62 con una desviación estándar de 17,83.

Similarmente, la Universidad Nacional ha realizado este tipo de diagnósticos para valorar el nivel de conocimientos y habilidades matemáticas que presentan los estudiantes de nuevo ingreso. Los siguientes son resultados del examen diagnóstico aplicado en el 2008:

**Tabla 2: Rendimiento en el Examen Diagnóstico de Matemáticas  
Universidad Nacional  
Año 2008**

<b>Calificación</b>	<b>Número de estudiantes</b>	<b>Porcentaje</b>	<b>Porcentaje acumulado</b>
Menos de 20	96	8,1	8,1
De 20 a menos de 40	425	36,1	44,2
De 40 a menos de 60	351	29,8	74,0
De 60 a menos de 80	205	17,4	91,4
Más de 80	101	8,6	100,0
<b>Total que respondió</b>	<b>1178</b>	<b>100,0</b>	
<b>Total</b>	<b>1385</b>		

Fuente: Edwin Chaves Esquivel, exdirector de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

De igual forma, los resultados en el año 2009 son también alarmantes, ya que aplicaron el examen de diagnóstico 1027 estudiantes, de los cuales solamente 27 tuvieron nota superior a 70, y la media fue 34, la mediana 33 y la moda 32.

### 1.3 Pruebas internacionales

i) Algunos resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), permiten identificar algunos logros positivos, pero muestran varias limitaciones en habilidades en el área de las matemáticas. De acuerdo al tercer Informe del Estado de la Educación, en el SERCE los estudiantes encuentran dificultades en las siguientes actividades:

- Encontrar promedios y resolver cálculos, combinando las cuatro operaciones básicas en el campo de los números naturales.
- Identificar el paralelismo y la perpendicularidad en una situación real y concreta, representar gráficamente un porcentaje.
- Resolver problemas que involucran propiedades de los ángulos de triángulos y cuadriláteros, que integran áreas de diferentes figuras o dos operaciones entre números decimales.
- Resolver problemas que involucran el concepto de fracción.
- Hacer generalizaciones para continuar una secuencia gráfica que responde a un patrón de formación complejo.
- Resolver problemas en los que se debe seleccionar la información útil, o con información no explícita y que requiere el uso de relaciones y conexiones entre diferentes conceptos.

Además, en la prueba de Matemáticas para tercer grado, un 24,4% y un 37,0% se ubicaron en los niveles I y II, respectivamente; y en sexto grado el 37,3% se colocó en niveles inferiores al III. Si bien son diversas las causas de este bajo nivel en matemáticas, se debe consignar una forma de enseñanza aprendizaje dirigida a procedimientos sencillos y una organización de la lección inconsistente con la generación de capacidades cognitivas de mayor nivel. Así lo muestran Chaves Esquivel, Castillo, Chaves Barboza, Fonseca & Loría (2010):

En los ambientes de aula observados, las Matemáticas que se desarrollaron estuvieron, casi en su totalidad, centradas en la definición de conceptos y la aplicación de procedimientos algorítmicos. La rutina que predominó en las actividades desplegadas se enfocó hacia la definición teórica del nuevo concepto o contenido matemático y la posterior ejemplificación de la forma en que el concepto se utiliza para resolver ejercicios. (p.27).

Se coincide con lo que indica el SERCE (2008), el foco de la enseñanza de las matemáticas no debería estar en: “el aprendizaje de algoritmos y procedimientos de cálculo, ni en el uso de los problemas solo como elemento de control de lo aprendido” (p. 57). Más bien debería estar en:

(...) que el estudiante desarrolle la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar, comprender y actuar en el mundo. En efecto, habilidades como interpretar, calcular, recodificar, graficar, comparar, resolver, optimizar, demostrar, aproximar y comunicar, entre otras, proporcionan criterios y elementos esenciales para desenvolverse también fuera de la escuela y para afrontar los retos de un mundo en cambio permanente.

**Por su parte, la resolución de problemas propicia el desarrollo del pensamiento lógico matemático, puesto que exige poner en juego y en contexto diferentes tipos y niveles de razonamiento. Esto favorece el desarrollo de habilidades para reconocer y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos con diferentes y crecientes grados de dificultad. Énfasis añadido.** (p. 57).

ii) La prueba PISA del año 2009 reportó (en el 2011) que el 23,6% de los estudiantes que realizaron la prueba en matemáticas **no alcanzan ni siquiera el primer nivel de competencia matemática que plantea esa prueba**. Un 33,1% de los estudiantes participantes están ubicados en el primer nivel de competencia matemática; en este nivel de competencia “por lo general los estudiantes realizan procesos de un paso que implican reconocer contextos familiares y problemas matemáticos bien formulados, reproducen procesos o hechos ampliamente conocidos y aplican destrezas de cálculo simples.” PISA (2003, p. 54) Hay que notar que el 23,6% de los estudiantes evaluados ni siquiera alcanzó este nivel básico de destrezas. Véase *Cuadro 1* “Resultados de la prueba PISA”.

**Tabla 3: Resultados de la prueba PISA.  
Porcentaje de alumnos en los distintos niveles de aptitud  
PISA 2009: Plus Results**

Área	No alcanza el nivel 1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Matemática	23,6	33,1	27,8	12,2	3,0	0,3	0,0
Aptitud de lectura	1,3	31,3	34,7	24,6	7,3	0,8	0,0
Ciencias	9,6	29,4	37,9	18,5	4,2	0,3	0,0

Fuente: Elaboración propia con base en *PISA 2009: Plus Results*.

Lo anterior evidencia un nivel muy bajo en la resolución de problemas y en capacidades cognitivas matemáticas de un mayor nivel.

Se debe mencionar que más de la mitad (el 56,7%) de los estudiantes que realizaron la prueba no alcanzó el segundo nivel de competencia matemática; en el cual:

(...) los estudiantes realizan generalmente ejercicios más complejos de más de un paso de procesamiento. También combinan diferentes elementos de información o interpretan diversas representaciones de información o de conceptos matemáticos identificando los elementos importantes y la relación entre ellos. Por lo general, trabajan con formulaciones o modelos matemáticos dados, presentados con frecuencia de forma algebraica, para identificar soluciones, o realizan una pequeña secuencia de pasos de procesamiento o cálculo para alcanzar una solución. PISA (2003, p. 54).

Como se puede ver, tampoco el segundo nivel de PISA es algo sumamente complicado para no pensar que debería haber un mayor porcentaje de estudiantes nuestros alcanzando este nivel.

Si se realiza una comparación por áreas de evaluación de acuerdo a los resultados de las pruebas aplicadas en el 2009, hay clara evidencia de una brecha entre materias. El *Cuadro 1* muestra las diferencias entre las competencias en lectura y ciencias donde los resultados son más favorables. Por ejemplo, en la competencia de lectura (*reading proficiency*) el 67,4% de los estudiantes está en los niveles 1 o 2 y solo el 1,3% no alcanza el nivel 1. De manera similar, en el área de ciencias el 57,9% están en los niveles 1 o 2 y solo el 9,6% no alcanza el nivel 1. Esto evidencia que los estudiantes costarricenses presentan mucho mejor nivel en competencias de lectura y en el área de ciencias que en matemáticas.

Además, es alarmante que en lo que respecta a competencia matemática el país se ubicó en el puesto 55 entre 74 países o regiones, muy por debajo de la media de los países de la OECD.

#### 1.4 Causas

Estos resultados obedecen a varias causas. Algunas son externas al sistema educativo, otras son responsabilidad de éste. Las características de la formación inicial y la continua son una dimensión. Es muy importante la forma de trabajo en las aulas, y los insumos que brinde el sistema educativo para ello.

No se puede eximir de responsabilidad a los programas de estudio en los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Si la educación matemática en el país estuviera muy bien, aportando aprendizajes significativos, creando en los niños y jóvenes habilidades y capacidades cognitivas de alto nivel, y constituyendo un modelo para los diversos países del mundo, se tendría una indicación de que los programas (dentro de varias variables) habría contribuido para lograr esa situación positiva. Sin embargo, de igual forma, al no estar la situación bien, con toda seriedad debe asumirse que algo mal ocurre con el currículo vigente.

Es equivocada la visión de aquellos que creen que un currículo no es importante, los programas pueden ser un medio útil, inútil o un obstáculo para la educación de un país. Se coincide aquí con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los Estados Unidos (NCTM, 2003):

**Un currículo de matemáticas escolares determina, en gran manera, lo que los estudiantes tienen oportunidad de aprender y lo que realmente aprenden.** En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Un currículo efectivo se centra en unas matemáticas importantes; matemáticas que preparen para un estudio continuado y para la resolución de problemas en diferentes entornos: el aula, la casa o el trabajo. Su articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan los estudios. (p.15)

Énfasis añadido.

Y sobre la situación nacional debe reconocerse como correcta la valoración de la Unión Costarricense de Cámaras y Asociaciones del Sector Empresarial Privado UCCAEP, que reseña el Banco Mundial (2009):

Una de las **deficiencias principales** de la división académica del sistema secundario de educación parece ser la falta de calidad y pertinencia, que **están asociadas con programas de estudios** y sistemas de evaluación **obsoletos**, y capacitación deficiente de profesores. (p. 29). Énfasis añadido.

Se comparte la siguiente apreciación con la que concluye el tercer informe del Estado de la Educación:

Del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes se concluye que, para enfrentar de una mejor forma otras pruebas internacionales, como PISA y TIMSS, es necesario desarrollar capacidades, valores y actitudes que permitan a los alumnos hacer frente a las distintas situaciones, tomar decisiones utilizando la información disponible y resolver problemas. **Lo anterior solo es factible si se asume el reto de buscar nuevos modelos para la enseñanza de las Matemáticas, en los que estrategias como la resolución de problemas y la modelización sean los ejes primordiales para la construcción de los conceptos matemáticos.** Este modo de trabajar es el que se tiene que adoptar en las escuelas del país. (p. 134). Énfasis añadido.

---

## Capítulo 2: Balance de los programas de estudio 1995-2005 y orientaciones para un nuevo currículo



En Costa Rica las pautas que rigen los programas educativos 1995-2005 se establecieron en la década de los noventa. La “Política Educativa hacia el Siglo XXI”, aprobada en noviembre de 1994 por el Consejo Superior de Educación (CSE), señala que el mundo experimenta un cambio de paradigma educativo y subraya la necesidad de que Costa Rica se adapte a esa transformación, para asegurar la coherencia con las prácticas internacionales que enfatizan en los nuevos conocimientos y el uso de herramientas tecnológicas modernas (CSE, 1994, p. 329). Se señala que todo proceso educativo debe potenciar la generación de una serie de competencias tendientes a perfilar el tipo de egresado que se quiere obtener. Específicamente en el ámbito de las Matemáticas para la enseñanza media, más que contenidos teóricos debe buscar el desarrollo de habilidades que ayuden al alumno a realizarse como persona y enfrentar el mundo con mayor seguridad. Esta visión, sin embargo, no se ve acuerpada adecuadamente por los programas de matemáticas diseñados en 1995-1996 y que fueron ajustados en el 2001 y 2005.

## Balance de los programas de estudio 1995-2005

Los programas vigentes para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado en sus elementos esenciales datan de 1995 y, desde entonces, no han sufrido modificaciones importantes. Los cambios han sido más que todo de desplazamiento de contenidos de un año a otro, o la incorporación de un apartado llamado “*La transversalidad en los programas de estudio*”.

Los programas vigentes jugaron un papel en su momento. Introdujeron una perspectiva constructivista valiosa (aquella que tiene que ver con la construcción de aprendizajes por parte del sujeto), que aunque no mordió la realidad del aula por muchas razones (desde las limitaciones teóricas a las prácticas) sí fue un cambio positivo. En lo que se introdujo en 1995 como en el 2001 y 2005 (estas últimas obedecieron a dimensiones educativas más generales) hay avances que deben reconocerse. Por supuesto que se podrían señalarles dificultades, como que términos como “racionalismo” y “humanismo” en los documentos de la política educativa nacional no fueron empleados de la manera más rigurosa (filosóficamente), pero al menos en matemáticas se dio un enfoque que ayudó a romper los esquemas tradicionales que gobernaron estos programas desde 1964.

Varias fuentes nacionales, sin embargo, confirman los problemas del plan de estudios en Matemáticas. En el tercer informe del Estado de la Educación (2011), por ejemplo, se hace referencia a varios cuestionamientos:

### 1. *Incongruencia entre lineamientos y malla curricular:*

(...) **los docentes consideran que la malla curricular no es congruente con los lineamientos dictados.** El enfoque teórico planteado en la política educativa que rige desde 1994 debería articularse adecuadamente con el componente operativo, es decir, con los diversos elementos de la malla curricular. (p.333). Énfasis añadido.

Se puede decir que mientras en la fundamentación se declara una perspectiva constructivista, en la malla curricular predomina un enfoque conductista. Es una auténtica contradicción.

### 2. *Un modelo desfasado:*

(...) el modelo utilizado no dista mucho de la clasificación convencional que se empleaba en programas anteriores, pues incluye los usuales segmentos de objetivos, contenidos, procedimientos y aprendizajes por evaluar. (p.333).

### 3. *Inconsistencia entre metodología y estructura de planes de estudio:*

Tanto la estructura horizontal como la vertical muestran una lógica de linealidad que no pareciera ser consistente con las orientaciones metodológicas que se plantean en los planes de estudio.(p. 333)

#### 4. Ausencia de conexiones entre las áreas del currículo:

No se visualizan las interrelaciones entre los diversos temas matemáticos, ni entre éstos y los de otras disciplinas

Un ejemplo de lo anterior se presenta con el tema de Estadística, la propuesta en la malla curricular subestima la disciplina pues le da un carácter procedimental al enfatizar en cálculos y construcción de cuadros. Con ello se desaprovecha el potencial de la disciplina para el análisis global de información que se genera en el contexto estudiantil y la posibilidad de desarrollar varias habilidades intelectuales y competencias transversales a partir de estos análisis.

Pero además, la Estadística aparece aislada de los demás tópicos matemáticos y de las otras asignaturas, lo que la hace ver como un apéndice dentro del área matemática (p. 333).

#### 5. Disonancia con la realidad:

En opinión de los docentes consultados, la implementación de los programas oficiales de Matemáticas se ha constituido en una utopía, plasmada en el papel pero **lejana de la realidad. Los actuales procesos educativos parecen estar en disonancia con lo escrito en esos documentos.** (p. 331). Énfasis añadido.

Otros autores añaden:

#### 6. No hay resolución de problemas como estrategia metodológica:

De Faria (2008), por ejemplo, señala que la resolución de problemas en los programas de estudio para el Tercer Ciclo y la Educación Diversificada no es considerada como una estrategia metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sino más bien como un tópico más que hay que “aprender”; éste, además, sin brindar las bases suficientes para interiorizar estrategias y heurísticas para su resolución. Por lo tanto, el estudiante actual se encuentra acostumbrado a “resolver problemas” de manera automática y mecánica sin profundizar en el análisis e interpretación del problema.

Además, precisamente la estructura no favorece la resolución de problemas:

En los programas oficiales, claramente se establece que las “*matemáticas a enseñar*” responden a intereses globales, donde la resolución de problemas y la contextualización juegan el papel fundamental. Sin embargo, **la estructura que presenta este componente dentro de los documentos, permite que los docentes enfatizen más en los contenidos específicos por encima de dichos principios, los cuales podrían ser relegados o, del todo, no ser considerados.** (Chaves y Barrantes, 2011, p.3). Énfasis añadido.

#### 7. Planes de estudio sobrecargados:

Un factor que recurrentemente se ha planteado como característica de la educación media es que los programas de estudio están saturados de contenidos. A partir de esta situación se justifica la dificultad de cubrir los diversos temas o de aplicar estrategias didácticas distintas a las tradicionales bajo el argumento de que requieren de un tiempo con el que no se cuenta. (Meza, Agüero y Calderón, 2011, p.13).

#### 8. No hay indicaciones suficientes y adecuadas sobre el uso de tecnologías:

(...) en estos documentos es notable la ausencia de lineamientos que propicien otros recursos con características similares a las calculadoras, y que permita ampliar las alternativas que podrían tener los docentes. (Chaves Esquivel et al., 2010, p.15).

Las debilidades de los programas elaborados en el periodo 1995-2005 son muchas más. Se pueden citar:

- ausencia de conexión entre los fundamentos de primaria (basados en esencia en un solo libro del año 1982 de Constance Kamii quien enfatiza un constructivismo radical piagetiano) y los de secundaria,

- ausencia de una visión estratégica que permita visualizar de manera integrada los contenidos de toda la educación primaria y secundaria y favorecer las conexiones,
- insuficientes indicaciones metodológicas y las que hay no están ajustadas a los contenidos por nivel y área (son meras generalidades, en su mayoría),
- débil presencia de la tecnología que no orienta sobre usos adecuados de ésta,
- problemas serios en contenidos de las áreas matemáticas: desarticulación de temas de álgebra y funciones, inapropiada y débil participación de la Estadística y Probabilidad, ausencia de Geometría de coordenadas, etc.

## Elementos para un nuevo currículo en el actual contexto educativo costarricense

En los *Programas 1995-2005* se plantea que “los estudiantes desarrollarán y aplicarán habilidades mentales que les permitan plantear razonamientos lógicos matemáticos sólidos, que sustenten la formulación de hipótesis y la comprobación de teorías” (MEP, 2005). (p.330). Sin embargo el testimonio de los docentes es contundente:

**(...) la implementación de los programas oficiales de Matemáticas se ha constituido en una utopía, plasmada en el papel pero lejana de la realidad.** Los actuales procesos educativos parecen estar en disonancia con lo escrito en esos documentos (tercer Estado de la Educación, 2011, p. 331). Énfasis añadido.

Los programas 1995-2005 jugaron un papel positivo en su momento. Sus debilidades y los desafíos de un escenario histórico con mayores demandas para nuestra sociedad, hacen ineludible una reforma curricular en educación matemática.

¿Cómo de cara al escenario actual superar las debilidades de esos programas en un nuevo currículo escolar? Aquí se proponen algunos lineamientos.

### Es importante que el currículo tenga claridad en sus perspectivas centrales

Una de las premisas que deben usarse para proporcionar un currículo es la definición de su perspectiva general. Se debe responder a la pregunta ¿para qué debe ser la formación matemática que se brinda en nuestras aulas? Esto está muy ligado a lo que se considere son las matemáticas y la capacidad matemática. En el actual momento hay mucho consenso internacional en que esa perspectiva debe ser la construcción de capacidades en el ciudadano para usar las matemática para describir y actuar sobre diversos contextos reales. Asumir esa perspectiva permitiría guiar una propuesta de programas de matemáticas escolares en muchos de sus aspectos: ejes disciplinares curriculares, el sentido de las áreas y los tópicos matemáticos, la gestión y el método. Este debería ser el inicio de lo que se proponga.

Los planes de estudio deben corresponder al enfoque aceptado por la política educativa nacional que enfatiza la construcción de los aprendizajes por los estudiantes. Enunciar este enfoque y, sin embargo, colocar los contenidos y expectativas de aprendizaje de manera conductista, es una contradicción que solo puede impedir una implementación adecuada del currículo.

## **La organización del currículo debe ser coherente, útil y equilibrada para la acción de aula**

Es crucial que exista consistencia entre fundamentos teóricos y la malla curricular. Las apreciaciones y elementos que se introducen en los fundamentos no deben ser meros enunciados sin una incorporación de los mismos en los planes de estudio. Lo contrario deja la sensación de que son simples accesorios o que no hay comprensión de lo que se enuncia.

Y mucho menos puede existir inconsistencia entre los planteamientos teóricos y esos planes.

La estructura de los planes de estudio además debe ser útil y guiar la acción docente, no deben colocarse elementos de manera artificial y que no estén integrados operativamente en los planes de estudio.

Es muy importante que haya indicaciones diversas (de significado de los propósitos, evaluación, método, gestión) que acompañen los tópicos y expectativas de aprendizaje planteadas en los ciclos y las áreas. A la vez que existan indicaciones generales para todos los niveles educativos, también es decisivo que las haya de manera precisa para cada año lectivo, en cada área. Es clave que se proporcionen ejemplos específicos para cada nivel y cada área matemática, que puedan evidenciar lo que se propone en los programas. Las indicaciones de calidad son un medio para establece la conexión entre los fundamentos y la malla curricular.

Mediante una integración vertical de los planes de estudio (desde el primero de la primaria al último de la secundaria) es posible realizar importantes conexiones entre los ciclos educativos y trabajar con una perspectiva estratégica en la introducción de los contenidos matemáticos.

### **Debe contener enfoques apropiados**

La *Resolución de problemas* debe ser potenciada dentro del currículo: sin embargo, no debe verse solo como la búsqueda de un entrenamiento en estrategias y heurísticas para resolver problemas, o para repasar temas vistos de manera abstracta. Existe un consenso en la educación matemática internacional sobre esto: lo decisivo es comprenderla como una estrategia pedagógica general que nutra la organización de las lecciones, que permita construir los aprendizajes y el desarrollo de capacidades cognitivas de alto nivel. La resolución de problemas así concebida constituiría el mejor medio para acuerpar el propósito constructivista de la participación activa de los estudiantes en su aprendizaje.

Es muy importante incluir el trabajo en contextos reales al tratar los contenidos matemáticos. Para eso se requiere usar situaciones reales y lo que se ha llamado desde hace bastantes años *modelización*, y no solamente ofrecer un revestimiento artificial de entorno a situaciones matemáticas. Solo así será posible involucrar al estudiante de una manera activa y participativa.

### **Debe contener temas transversales importantes**

El uso de historia de las matemáticas debe incluirse con un perfil adecuado, pues permite dar un rostro humano a las matemáticas y generar una gran cantidad de oportunidades para resolver problemas en contextos reales, y provocar motivación y habilidades con las matemáticas.

No es posible responder al escenario actual que atraviesa nuestra sociedad sin una incorporación lúcida y práctica en el uso de tecnologías. No hacerlo implicaría alejarse de la realidades de nuestros niños y jóvenes, y a la vez favorecer usos inapropiados de la tecnología en la educación.

Cultivar las actitudes positivas sobre las matemáticas debe estar en el currículo de manera explícita y debe hacerse operativo en los planes de estudio.

### **Debe darse respuesta a los desafíos que posee la educación nacional con una visión estratégica**

El currículo debe favorecer el progreso de capacidades cognitivas de mayor nivel. Eso plantea acciones en los contenidos como en la metodología y la gestión. Eso se logra por medio del trabajo con problemas de complejidad creciente dentro de una estrategia pedagógicamente equilibrada. Aquí es esencial que en el aula se introduzcan de manera explícita procesos matemáticos (actividades transversales a todas las áreas) que provoquen el trabajo en el aula con esos niveles superiores.

Es importante que se establezcan ejes curriculares disciplinares para darle consistencia e integración vertical y horizontal a los programas, para definir énfasis que permitan responder a las debilidades que posee la enseñanza de las matemáticas en el país, y para adoptar estándares de calidad internacional en armonía con nuestra realidad.

El currículo debe tomar en cuenta las debilidades en cuanto a la formación de docentes, y aquellas de los programas vigentes, sin embargo no se debe subordinar a ellas. Hacerlo así sería hipotecar el progreso educativo del país. Es esencial que se ofrezca una orientación general que puedan asumir los diversos protagonistas de la educación y construir con responsabilidad y perspectiva de largo plazo las mediaciones en el aula con responsabilidad, lucidez y compromiso nacional.

### **Es necesario ajustar las áreas y contenidos de acuerdo a la evolución de la educación matemática en el mundo**

En este momento histórico es importante que se introduzcan algunos temas y enfoques en las áreas matemáticas, que fortalezcan el progreso de la enseñanza de las matemáticas de una manera que no se ha hecho antes:

- Es necesario dar un lugar importante a la estadística y la probabilidad en todos los años lectivos de los planes de estudio, que subraye su papel de organizador de la información y la experiencia (no como listado de recetas), que entrene en la toma de decisiones en la incertidumbre, y que permita asociaciones especiales con las otras áreas matemáticas y con la realidad.
- En Números: potenciar el cultivo del sentido numérico y de las habilidades asociadas con el cálculo numérico.
- En Geometría: fortalecer el cultivo del sentido espacial, la introducción del movimiento de sus objetos y formas, el tratamiento con coordenadas de sus objetos y una asociación con el álgebra.
- En Relaciones y álgebra: adoptar una reconceptualización de lo que tradicionalmente se ha entendido por esto, brindar un tratamiento gradual de sus objetos desde la primaria para crear las mediaciones pedagógicas que fortalezcan su aprendizaje, y favorecer una asociación lúcida de sus contenidos, ...
- En Medidas: es importante usarlas como un soporte para el trabajo en contextos reales, que debe permear el programa, y proponer su uso en toda la formación educativa.
- Se deben buscar todas las conexiones posibles entre las áreas matemáticas, para afianzar los aprendizajes y lograr niveles mayores de comprensión. Una estrategia basada en la resolución de problemas con énfasis en contextos reales favorece ese propósito.

El plan de estudios debe equilibrar con mucho cuidado los conocimientos y expectativas de aprendizaje para impedir que haya un exceso de tópicos que no se cubran ni se asimilen en la práctica de aula. Debe tenerse siempre en mente que los programas deben ser implementados en entornos distintos y en tiempos precisos. La introducción de los nuevos tópicos y un enfoque como el que se propone, plantean la necesidad de recortar algunos contenidos, transformar unos más así como dar un tratamiento integrado de otros.

---

# Capítulo 3: Introducción a un nuevo currículo



## La resolución de problemas: enfoque principal del currículo<sup>1</sup>

Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza. Desarrollar este propósito supone al menos dos cosas: por un lado, que cada estudiante asuma un compromiso con la construcción de sus aprendizajes, y por el otro, que haya una acción docente crucial para generar aprendizajes en las cantidades y calidades que implica el escenario actual. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. El desafío intelectual le es consubstancial, un nutriente para una labor de aula inteligente y motivadora.

En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos.

La resolución de problemas como estrategia pedagógica se subrayará aquí como sustrato de un estilo de acción de aula. Para el aprendizaje de conocimientos dentro de la lección se propone una introducción de los nuevos tópicos que tome en cuenta cuatro pasos o momentos centrales:

- (1) propuesta de un problema,
- (2) trabajo estudiantil independiente,
- (3) discusión interactiva y comunicativa,
- (4) clausura o cierre.

Esta secuencia puede realizarse dentro de una lección o una colección de ellas de acuerdo al tema o al año lectivo. Este estilo se contrapone a aquel que trabaja los tópicos matemáticos en abstracto, ofrece ejemplos y prácticas rutinarias y al final, como apéndice, ejercicios o problemas contextualizados. No se trata de una prescripción a seguirse mecánicamente, pues su diseño y realización depende de las condiciones donde se plantee el aprendizaje.

Usar problemas se propone como una constante en todas las fases de la acción de aula, incluyendo aquella del reforzamiento, movilización y aplicación de los conocimientos aprendidos.

Si bien se promueve el uso de problemas en contextos reales, los abstractos se consideran muy importantes. Y más aún: lo que se pretende en última instancia es la construcción de capacidades para la manipulación de los objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta. La estrategia asumida se propone fundamentar pedagógicamente el paso desde lo concreto a lo abstracto.

---

<sup>1</sup> Este capítulo y los siguientes han sido tomados de la propuesta de nuevos programas de matemáticas que se presentó al Consejo Superior de Educación en abril del 2012, propuesta que incorpora un número muy amplio de observaciones y recomendaciones de universidades públicas, asesores pedagógicos de matemáticas, asesores nacionales y diversos profesionales de primaria y secundaria de todo el país.

## Conceptos básicos: habilidades, competencia y procesos

La organización del programa de estudios se realiza por medio de cinco áreas matemáticas: *Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*.

Los conocimientos matemáticos son la base de estos programas. No obstante se adopta un enfoque basado no solamente en contenidos matemáticos. Lo que se pretende es el desarrollo de mayores capacidades del ciudadano para enfrentarse a los retos del mundo del que forma parte. El desarrollo vertiginoso del conocimiento y su ritmo de cambio acelerado conducen a una reformulación de programas, materiales, textos, recursos materiales y humanos que transforman con fuerza la acción docente y la organización de la lección. Se impone una lógica del saber en contexto, del aprender a aprender. Las capacidades se asumen como centrales. En primer lugar aquellas de corto plazo y asociadas a las áreas matemáticas que se seleccionaron; estas capacidades se denominan aquí *habilidades específicas*. En segundo lugar la generalización de estas habilidades específicas a desarrollar en un ciclo educativo: *habilidades generales*. En tercer lugar y solamente como una perspectiva general la *competencia matemática*. Para realizar esos propósitos dentro del plan de estudios se deben modular la cantidad y calidad de los contenidos educativos en función del progreso de esas capacidades.

La competencia matemática se interpreta aquí como una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas. En esta visión la competencia matemática está definida por un poderoso sentido práctico. Adoptar el significado de la competencia matemática de esta manera posee implicaciones importantes para este currículo escolar.

La competencia matemática, sin embargo, no organiza los planes de estudio. La competencia matemática y las capacidades cognitivas superiores se desarrollan a partir de las actividades cotidianas en el aula para el logro de las habilidades específicas y generales (asociadas a las áreas matemáticas). Los conocimientos matemáticos y las expectativas de aprendizaje sobre ellos son el punto de partida en cada ciclo y año lectivo; constituyen el contacto inmediato docente con el plan de estudio de cada año escolar. Esto es fundamental pues permite no distanciarse de la preparación actual de docentes en el país y la tradición dominante en cuanto al currículo: hay plena familiaridad con las áreas matemáticas.

El dominio de las habilidades en un área matemática y el desarrollo de la competencia matemática se propone realizar a partir de la mediación pedagógica: la organización de las lecciones y de las tareas matemáticas y la acción directa docente en el aula. Son varias las estrategias que se pueden desarrollar en esa dirección. Entre ellas, el procurar que en la acción de aula se realicen *procesos matemáticos*, es decir actividades transversales que se asocian a capacidades presentes en cada área para comprender y usar conocimientos, apoyando el desarrollo de la competencia matemática.

Se plantean aquí cinco procesos centrales: *Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Conectar, Comunicar y Representar*. Son formas de acción cognitiva que pueden generar capacidades. La selección y concepción de estos procesos ordena y define el papel que se desea dar a las capacidades matemáticas (por ejemplo asociar estrechamente la resolución de problemas y la modelización), y facilitan la implementación en la acción de aula de acciones cognitivas transversales de alto nivel. Se acepta como premisa que su realización constante en todos los años lectivos permite generar el progreso de la competencia matemática. En el plan de estudios se señalan acciones para su realización en cada ciclo educativo.

## Matemáticas de calidad con profundidad

Es una creciente demanda social que las personas puedan realizar operaciones y procesos matemáticos de una mayor complejidad. Eso refiere a capacidades matemáticas asociadas a la resolución de problemas, a la aplicación de conceptos y procedimientos, a la matematización o modelización, así como a mayores niveles en la justificación y argumentación matemática. El manejo de conceptos, procesos o actividades matemáticas simples, procedimientos sencillos o rutinarios y de una exigencia mental menor, debe ser parte subordinada de las acciones matemáticas de nivel superior. Tanto en la etapa de aprendizaje como en la de movilización y aplicación de los aprendizajes se aboga por trabajar con problemas que posean niveles distintos de complejidad.

El dominio en profundidad de algunos tópicos genera capacidades para poder aprender otros temas con mayor facilidad (incluso sin el concurso docente). Por el contrario, el contacto superficial con muchos tópicos no permite aprendizajes significativos y más bien se convierte en obstáculo para el progreso de los aprendizajes.

Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. La Estadística y Probabilidad son parte obligatoria de los conocimientos que debe tener un ciudadano en nuestro escenario.

Privilegiar la profundidad en el tratamiento de los contenidos escolares sobre la amplitud de los mismos requiere brindar tiempos adecuados para los aprendizajes. Y eso posee consecuencias sobre el número de los contenidos en los planes de estudio. Es frecuente el desacierto de pensar que cuando un plan de estudios exhibe una amplia colección de contenidos se ofrece el mejor instrumento educativo al país. Se incurre en el error en dos sentidos: ni se provoca dominio de los mismos ni se afirman las capacidades matemáticas, que no sólo son esenciales para vidas profesionales asociadas a las ciencias sino para la construcción de una ciudadanía crítica y racional. En esa forma, se vuelve un mal instrumento, alejado de la realidad de aula y de las posibilidades efectivas de incidir positivamente en los aprendizajes.

Potenciar la amplitud por sí misma al margen de la profundidad es un error, pero otro error casi simétrico sería la reducción de los contenidos a mínimos indeseables que sólo pueden perjudicar la formación que debe aportar el país a su ciudadanía.

El propósito de ofrecer matemáticas de calidad persigue brindar a la ciudadanía los mejores instrumentos formativos para potenciar sus condiciones de vida en este contexto histórico. En ese sentido, se busca dar a todos los sectores sociales y culturales un programa de matemáticas moderno y sólido que promueva la *equidad social*. En todo el país se debe poder implementar este currículo. El Estado deberá asumir las acciones requeridas para asegurar esta equidad en todas partes.

## Integración vertical de los planes de estudio

Los conocimientos y expectativas de aprendizaje sobre ellos se organizan en el plan de estudios de manera integrada desde el primero al último año.

Existe sustento epistemológico y pedagógico para esa decisión: las Matemáticas no son una colección dispersa y desarticulada de conceptos y procedimientos específicos, éstos se integran a partir de ideas y métodos generales cuya construcción y ampliación han sido el resultado de los quehaceres matemáticos. En cada área matemática se pueden señalar ideas generales fundamentales y se pueden describir las diferentes dimensiones asociadas o reconstrucciones que sobre las mismas se han dado a lo largo de los distintos momentos históricos. De igual manera, nuevas ideas y métodos se construyen cada día por medio de las comunidades matemáticas. Sin embargo, no todas las ideas y los métodos matemáticos generales son pertinentes para introducirse en los programas escolares; lo que se debe introducir son las ideas básicas que fundamentan el edificio matemático y cuyo dominio genera las capacidades para acceder a otras, y aquellas que al introducirse pueden propiciar condiciones relevantes para el ciudadano. En estos programas se incluyen estas ideas y métodos con precisión. Este carácter básico y general hace que sea importante que estén presentes en los distintos niveles del plan de estudios escolar, lo que debe hacerse en distintas modalidades, profundidades y aproximaciones.

Hay otras razones elementales: con esta perspectiva se puede brindar más flexibilidad pues es conveniente que los fines curriculares específicos no se establezcan con base en fronteras rígidamente marcadas por niveles o ciclos educativos.

Esta aproximación al mismo tiempo permite enriquecer el significado de muchos de los tópicos, fines y potencialidades de los mismos, al visualizarlos en toda su dimensión desde el inicio de la vida escolar. De esta manera los tópicos en cada año se pueden ver como casos particulares o preliminares de ideas más generales: por ejemplo, introducir regularidades y patrones para preparar las funciones, manipulación de símbolos para preparar el manejo de expresiones algebraicas, representaciones en coordenadas más tempranamente para evidenciar significados de las figuras geométricas, etc.

Esta perspectiva, por lo tanto, ofrece fundamento al docente para tomar decisiones estratégicas sobre los momentos cruciales en los que se introducen algunos elementos que van a favorecer el aprendizaje de los mismos en años posteriores. Puesto de otra manera más práctica: plantea el diseño de tareas matemáticas con una visión distinta nutrida por el largo plazo. Además, así se ofrecen mejores oportunidades para la coordinación y colaboración entre docentes de distintos ciclos y niveles educativos sobre los tópicos a desarrollar.

Con esta visión, se decidió distribuir los conocimientos y habilidades del plan de estudios en áreas matemáticas para todos los años desde el primero al último. De igual manera, los procesos matemáticos y los ejes disciplinares o énfasis transversales que se adoptan aquí intervienen en todo el plan de estudios.

Finalmente, aunque se potencia aquí una aproximación integradora vertical, para definir sus fines se toman en cuenta las diferencias de los distintos ciclos educativos, en particular la diferencia entre el segundo y el tercero. La organización detallada de los programas, para su implementación operativa, se hace por medio de los ciclos que tiene el sistema educativo costarricense.

## Sentido histórico y adecuación al contexto educativo nacional

El currículo escolar es apenas un medio para alcanzar un fin: mejores aprendizajes. Posee un sentido histórico, o sea es *temporal* y se debe concebir para una etapa histórica precisa. Cuando las condiciones sean otras debidas a muchos factores (incluso no educativos), deberá transformarse.

Esto se asocia también al enfoque que se asume aquí, si éste estuviera basado estrictamente en contenidos, su lógica no se vería condicionada tanto por el contexto y sus protagonistas. Las decisiones en cuanto a número y calidades de los conocimientos, la selección de habilidades y los métodos y gestión deben tomarse con base en esos elementos.

No se puede dejar de tener en la mira que el currículo debe ser implementado (enseñado y aprendido), y esto remite a los protagonistas principales que lo llevan a la práctica: docentes y estudiantes, así como a las instituciones que participan. Un alejamiento de sus realidades sólo puede contribuir al vacío y la esterilidad.

No todos pueden aprovechar un currículo de la misma manera, y aunque el Estado debe ofrecer uno de calidad para todos bajo un criterio de equidad, debe poseer la versatilidad suficiente para ofrecer opciones distintas.

La existencia de diversas inteligencias y talentos debe ser atendida por un currículo nacional flexible. Con el correr del tiempo, el Estado costarricense deberá generar instrumentos alternativos para compensar las debilidades extraeducativas que pueden existir y a la vez animar la formación de estudiantes talentosos en distintas áreas. Si bien al currículo no le corresponde dar respuesta plena a esas necesidades sí trata de integrarlas de alguna manera; el lugar que se ha seleccionado para hacer eso es precisamente en el trabajo con distintos niveles de profundidad de los contenidos a aprender. De esta manera, se pueden modular los contenidos matemáticos de acuerdo a los diferentes talentos.

Debe subrayarse que en el número, calidades y lógica de los contenidos seleccionados y su presentación en el plan de estudios hay implícitas decisiones curriculares, que toman en cuenta las condiciones del contexto nacional.

Un buen currículo es necesario pero no es suficiente.

## Ejes disciplinares

Aquí se adoptan cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios y fortalecen el currículo:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la historia de las Matemáticas.

Los dos primeros ejes se asumen como articuladores, con lo que se quiere decir que no sólo permean todos los programas sino que sirven para vertebrar y articular los otros ejes y las diferentes actividades que supone la implementación del mismo.

La resolución de problemas corresponde a la necesidad de asumir estándares cuya conveniencia para la Educación Matemática ha sido ampliamente comprobada en la escala internacional. La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo. Se da una asociación entre estos dos ejes que obedece precisamente al enfoque principal de este currículo: la resolución de problemas en contextos reales. Y es consistente con la selección y conceptualización del proceso matemático *Plantear y resolver problemas*.

El uso de la tecnología asume las tendencias contemporáneas de expansión intensa de los instrumentos digitales y la necesidad de configurar una utilización lúcida y adecuada de la misma. El uso de la historia de las Matemáticas responde a propósitos para brindar un rostro humano a las Matemáticas y lograr una acción sinérgica de los otros ejes.

La incorporación explícita de la búsqueda de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas se sintoniza con la premisa de que los espacios actitudinales y socioafectivos son cruciales para los aprendizajes. Se plantean aquí cinco actitudes a desarrollar:

- Perseverancia.
- Confianza en la utilidad de las Matemáticas.
- Participación activa y colaborativa.
- Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.
- Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

Estos ejes participan en el plan de estudios de distintas maneras y énfasis de acuerdo al área matemática y los niveles educativos. Estos ejes disciplinares se operacionalizan en la malla curricular de manera precisa mediante contenidos, diversas indicaciones y sugerencias.

## El currículo de matemáticas y los fines de la educación costarricense

Este currículo se inscribe dentro de fines más generales de la educación costarricense:

- a) La formación de ciudadanos amantes de la patria, conscientes de sus deberes, de sus derechos y de sus libertades fundamentales, con profundo sentido de responsabilidad y de respeto a la dignidad humana.
- b) Contribuir al desenvolvimiento de la personalidad humana.
- c) Formar ciudadanos para una democracia en que se concilien los intereses del individuo con los de la comunidad.
- d) Estimular el desarrollo de la solidaridad y de la comprensión humana.
- e) Conservar y ampliar la herencia cultural, impartiendo conocimientos sobre la historia del hombre, las grandes obras de la literatura y los conceptos filosóficos fundamentales.

Se pretende afirmar una vocación de la competencia matemática especialmente asociada a la construcción de capacidades ciudadanas esenciales para el progreso de la nación. No se trata de formar las mentes para poder realizar exclusivamente propósitos limitados como el dominio de técnicas sofisticadas de demostración o la edificación de estructuras tremendamente abstractas alejadas del entorno, o para el disfrute etéreo y privado del conocimiento. Se busca por medio de las Matemáticas apoyar la comprensión e intervención ciudadana sobre diversos contextos físicos, sociales, profesionales, científicos, culturales, y por lo tanto brindarle a los individuos condiciones para poder contribuir al progreso de la patria, dentro de un espíritu de responsabilidad y respeto.

Se asume explícitamente el fortalecimiento de actitudes, creencias y valores positivos sobre las Matemáticas como eje disciplinar transversal, lo que no sólo contribuye al desenvolvimiento de la personalidad individual de quien participa en la acción educativa, sino que ensancha el espacio de los valores y las actitudes en general, como la solidaridad y la acción cooperativa.

El uso de la historia de las Matemáticas ofrece oportunidades valiosas para robustecer la herencia cultural de la especie humana, establecer conexión con las humanidades y entrar en contacto con perspectivas filosóficas más generales. Estas perspectivas buscan darle a las Matemáticas un rostro humano necesario no sólo para captar el interés estudiantil sino para fortalecer las posibilidades de que esta disciplina como un todo aporte más al progreso colectivo del país.

La resolución de problemas como estrategia pedagógica hace converger principios esenciales del constructivismo, una premisa filosófica de la política educativa nacional, como la construcción estudiantil autónoma de aprendizajes, pero de una manera aun más vigorosa y eficaz, pues resulta fundamental una acción independiente y comprometida del sujeto en la acción de aula. La utilización de problemas como generadores de la organización de las lecciones ofrece oportunidades valiosas para conectar con las necesidades de nuestro país, para cultivar la razón y para desarrollar una visión humanista. Asociar matemáticas a contextos reales, promover actitudes y creencias positivas, ensanchar el lugar de la razón y potenciar una visión histórica y social de las Matemáticas apuntalan una formación integral donde convergen las dimensiones propiamente técnicas de las Matemáticas con aquellas socioafectivas influidas por los entornos personales y culturales.

En acuerdo con la política educativa costarricense se han incorporado aquí ejes transversales a las materias escolares:

- Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible
- Educación Integral de la Sexualidad
- Educación para la Salud
- Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz

La manera en que se han introducido es por medio de problemas y diversas actividades de aprendizaje que se han seleccionado para la acción de aula; sin embargo, no en todas las áreas matemáticas se pueden introducir de la misma manera. También las estrategias pedagógicas que se plantean permanentemente en la construcción colaborativa de aprendizajes matemáticos y del rigor en el pensamiento favorecen la formación de una ciudadanía socialmente responsable y crítica, que constituye un nutriente de la vida democrática.

El propósito de incorporar estos ejes transversales se ve favorecido fuertemente por este enfoque curricular que apuntala la relación de la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas con los entornos sociales y culturales, los que se incorporan de una forma natural en los planes de estudio.

## La estructura del currículo

Este currículo posee varias partes:

- I. Fundamentos
- II. Ejes
- III. Gestión y planeamiento pedagógicos
- IV. Metodología
- V. Evaluación
- VI. Programas de estudio para cada ciclo educativo
- VII. Otros elementos

En *Fundamentos* se consignan los principales términos y conceptos que sostienen el currículo y en *Ejes* se describen los ejes disciplinares curriculares. *Gestión y planeamiento pedagógicos* incluye indicaciones generales para todos los ciclos sobre estos temas. *Metodología* incluye numerosas indicaciones generales para todos los ciclos educativos sobre estilos para la organización de las lecciones, sobre las áreas y los procesos, sobre las actitudes y creencias, sobre el uso de la tecnología y la historia de las Matemáticas. En *Evaluación* se aportan indicaciones y principios generales.

Los programas de estudio están organizados por medio de los ciclos educativos del sistema educativo costarricense. En esta parte se encuentran los conocimientos y habilidades matemáticas así como numerosas indicaciones puntuales adicionales que acompañan de manera inmediata conocimientos y habilidades específicas sobre método, gestión y evaluación. Además se incorporan sugerencias (siempre por ciclo) sobre procesos matemáticos, usos de tecnologías y fortalecimiento de actitudes positivas hacia las Matemáticas. Estas indicaciones más específicas son esenciales para delimitar y ejemplificar estos contenidos. Finalmente se introducen algunas indicaciones de evaluación para cada ciclo en cada área.

La última parte, *Otros elementos*, incluye una propuesta de secuencia temática para la implementación de los tópicos de las áreas matemáticas para cada año lectivo (donde es pertinente), un glosario (con términos clave que se usan), una tabla de conocimientos (que permite visualizar globalmente el plan de estudios en cuanto a contenidos) y la bibliografía general que se utilizó.

Con el propósito de crear un documento funcional y práctico, de fácil lectura, se decidió no incluir a lo largo del texto la gran cantidad de referencias de resultados o experiencias que fueron usadas en este diseño curricular, no obstante los documentos consultados pertinentes son incluidos en la bibliografía final y además se colocan algunas notas al final con referencias para uso de docentes o investigadores.

Este currículo exhibe una profunda integración de sus distintos componentes (teóricos, pedagógicos y prácticos), coherencia entre fundamentos y malla curricular, así como una vocación expresa de apoyo al docente. Se asume la visión de que con estos elementos se ofrecen mejores posibilidades para su implementación, para nutrir así el progreso de la Educación Matemática del país.

---

# Capítulo 4: Fundamentos



La perspectiva más general que se busca en este currículo es proporcionar a la juventud de Costa Rica una preparación matemática que le permita abordar con inteligencia, pertinencia, responsabilidad y éxito los retos que enfrenta en el escenario actual, creando medios para potenciar una sociedad más culta, más inclusiva y más democrática.

El enfoque principal que asume este currículo es el cultivo de la resolución de problemas en contextos reales. Se trata de una mediación pedagógica que adopta premisas fundamentales constructivistas, en concordancia con la política educativa aprobada por el país, especialmente aquella que subraya la construcción activa por el sujeto de sus aprendizajes. Este enfoque persigue el desarrollo de capacidades estudiantiles asociadas directamente a las áreas matemáticas para generarse en cortos periodos, así como otras de alto nivel cognitivo de naturaleza transversal con una perspectiva de plazos medianos y largos.

La descripción del sentido de este enfoque se desarrolla en varias secciones:

- El plan de estudios se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades.
- Una perspectiva: competencia matemática.
- Procesos matemáticos.
- La mediación pedagógica: clave para el desarrollo de capacidades cognitivas superiores.
- Resolución de problemas.

## El plan de estudios se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades

Este currículo se separa de las aproximaciones basadas estrictamente en contenidos. Sin embargo, no se subestima el papel de los contenidos. Por el contrario: la base que organiza los planes de estudio en cada ciclo y año lectivo son los conocimientos matemáticos y las habilidades en torno a ellos que se espera sean aprendidos. Se plantean aquí cinco áreas matemáticas:

- *Números*
- *Medidas*
- *Geometría*
- *Relaciones y Álgebra*
- *Estadística y Probabilidad*

La primera introduce los números, los sistemas numéricos, las operaciones y cálculos. Se estudian las propiedades de los mismos pero dentro de una perspectiva eminentemente pragmática que enfatiza la acción estudiantil: el cálculo y utilización de los números en la representación y manipulación del mundo.

*Geometría* refiere al estudio de las características de las figuras geométricas y las relaciones entre ellas, la modelización geométrica y la visualización espacial, que permiten potenciar los procesos de visualización, clasificación, construcción y argumentación. Se desea subrayar el movimiento de las formas geométricas.

*Medidas* plantea la comprensión y manipulación de unidades, sistemas y procesos de medición del espacio y el tiempo, el uso de herramientas y fórmulas para efectuar las medidas. Esta área juega un papel muy importante, que ha sido confinado tradicionalmente a la educación Primaria. Con eso, se le había quitado espacio en la Secundaria a un mayor dominio en los cálculos, aproximaciones y estimaciones en la medición, y al tratamiento contextualizado de temas matemáticos por ejemplo en Geometría, Estadística y funciones.

*Estadística y Probabilidad.* Esta área incluye aquí dos grandes temas: por un lado la identificación, organización y presentación de la información, lo que se asocia a la Estadística descriptiva y por el otro la Probabilidad que refiere al estudio de la incertidumbre y el azar.

*Relaciones y Álgebra* refiere a varios temas como el estudio de patrones y relaciones de distinto tipo (numéricas, geométricas), las funciones (vistas como relaciones entre variables), así como al manejo de expresiones y relaciones simbólicas, ecuaciones e inecuaciones, como medio de potenciar procesos de generalización y simbolización. El Álgebra no se ve sólo como manipulación de expresiones simbólicas o procedimientos para resolver ecuaciones sino como un poderoso medio para representar situaciones numéricas y geométricas. Las ecuaciones e inecuaciones, por ejemplo, se pueden apreciar mejor como representaciones de relaciones de variables cuyos recorridos (o dominios de aplicación) pueden ser muchos; a veces pueden ser números enteros, racionales o reales, formas geométricas o bien propiedades del espacio. De esta forma, expresiones algebraicas pueden representar regularidades y patrones en muchas circunstancias.

La participación de las mismas áreas desde el principio de Primaria hasta el final de la Secundaria fortalece especialmente la integración vertical del plan de estudios.

Aquí se usa el término de “habilidad específica” como una capacidad o un *saber hacer* en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento); por ejemplo:

- Reconocer cantidades menores que 100.
- Conocer los nombres de los números menores que 100.
- Realizar sumas de números naturales, sin agrupar, con totales menores que 100.

En esta aproximación las habilidades siempre están asociadas a un área matemática (habilidades aritméticas, habilidades geométricas, habilidades algebraicas, etc.); están asociadas a conocimientos matemáticos. Las habilidades específicas se plantean para desarrollarse en tiempos relativamente cortos. No se deben ver como capacidades que se tienen o no (u fines logrados o no) sino como *expectativas de aprendizaje* que se pueden lograr gradualmente. Las habilidades específicas se podrían visualizar como objetivos curriculares específicos, aunque no de la manera propuesta por el conductismo (“objetivos operativos” observables, medibles, cuantificables). Estas habilidades alrededor de conocimientos se pueden agrupar, de manera que se trabajen de esa manera tanto en la acción de aula como en la evaluación. Esta característica, que se busca potenciar explícitamente en este currículo, distancia el sentido de “habilidad” de lo que se suele considerar como “objetivo operativo”.

Las habilidades específicas se pueden ver como casos particulares de “habilidades generales” (por ejemplo, “efectuar sumas con números naturales” es una generalización de “sumar con números naturales hasta 100”).

En el plan de estudios las habilidades específicas se han colocado como expectativas de aprendizaje para cada año escolar, mientras que las habilidades generales como expectativas de aprendizaje para cada ciclo educativo. En ambos casos están asociadas a las áreas matemáticas.

## Una perspectiva: competencia matemática

Durante mucho tiempo se plantearon currículos educativos que en esencia eran listados de tópicos sin mucha relación con los aprendizajes o con las condiciones de la acción de aula. Desde hace varias décadas se ha dado un notable desarrollo curricular en el mundo que ha ido progresivamente abandonando ese enfoque por contenidos. Una vía que busca romper con esos esquemas es la perspectiva de la competencia. La idea de fondo ha sido la de colocar como el propósito más general la generación de capacidades en plazos diversos estrechando su conexión con la vida social. En esta perspectiva los aprendizajes de contenidos se ven en función de esas capacidades.

En la comunidad internacional se ha usado de diversas maneras el concepto de competencia. En este currículo se acepta el sentido que usa el *Programa Internacional de Evaluación de los Aprendizajes* de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (PISA y OECD, respectivamente, por sus siglas en inglés). El marco teórico que sostiene ese programa constituye una referencia central en el escenario mundial para los propósitos educativos. En este currículo se asume como conveniente su utilización en lo que es pertinente.

Se entenderá por competencia:

(...) la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones.

Se mide de un modo continuo, no como algo que una persona tiene o no tiene.

(...) el carácter variable es un rasgo fundamental. Una persona instruida posee varias capacidades, y no existe ningún límite claro entre alguien que es totalmente competente y alguien que no lo es. (OECD, 2005, p. 23).

De igual manera se selecciona la siguiente definición de competencia matemática:

(...) una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OECD, 2010, p. 4).

Esta definición establece que la *competencia matemática* se formula en relación con el uso de las Matemáticas para describir, comprender y actuar en diversos contextos de su realidad (personales, físicos, sociales, culturales).

Esta forma de comprender la competencia permite contribuir a los fines más generales de la educación costarricense en el “desenvolvimiento de la personalidad humana”, en la participación de los ciudadanos con “sentido de responsabilidad”, comprensión y “respeto”, que permita conciliar “los intereses con la comunidad” (un fundamento de la vida democrática) y cultivar una reflexión que apoye el entendimiento racional de los diversos contextos culturales y sociales, de las ideas y realizaciones que constituyen la historia humana.

La formación matemática afirma aquí el propósito de generar la competencia matemática con esas características, esto condiciona los programas escolares. No sólo apuntala una relación privilegiada de las Matemáticas con los entornos reales (busca que incidan en el mundo), sino además se asocia con la resolución de problemas en el sentido general de esa expresión: favoreciendo capacidades estudiantiles para plantear y diseñar estrategias para resolver problemas, lo que es posible de impulsar también en varias otras materias educativas. De distintas maneras cada individuo se enfrenta a problemas en diversos contextos existenciales, y todas las asignaturas escolares podrían tener la resolución de problemas como una estrategia, aunque por supuesto con instrumentos diferentes. En el caso de las Matemáticas, el alcance de lo abstracto y la preeminencia o densidad de los problemas obligan a una estrategia educativa y curricular de otra magnitud.

Se trata aquí de una visión específica del significado de la competencia matemática, pues podría ser otra la perspectiva; por ejemplo, podría asumirse que la competencia matemática que se busca provocar en la educación escolar es el dominio de las estructuras o de los formalismos matemáticos. También podría asumirse que una persona es más competente matemáticamente que otra si conoce un mayor número de contenidos matemáticos, lo que dentro de los planes de estudio daría otra perspectiva particular (por ejemplo buscar siempre introducir el mayor número posible de contenidos). Esto aquí no se considera así. La competencia matemática posee en esta perspectiva un sentido práctico muy importante. La dirección escogida aquí se basa en el propósito general de una formación matemática que busca dotar al ciudadano de medios que contribuyan a su participación en su entorno de manera positiva, inteligente, reflexiva, crítica y responsable.

Esta competencia matemática dará sentido a muchas decisiones globales que se encuentran de manera explícita o implícita en el currículo. En primer lugar aporta sentido y coherencia a las diversas partes del mismo, es un poderoso instrumento para establecer sus fines generales y sus fronteras, lo nutre y le da dirección. Es un medio para establecer ejes disciplinares curriculares estratégicos, ofrece criterios para la presencia o ausencia de contenidos y motiva un enfoque para la acción de aula que privilegia la resolución de problemas, especialmente en contextos reales, fortalece la participación de la identificación, construcción y uso de modelos, da sentido al fortalecimiento de áreas como Estadística y Probabilidad, nutre el papel de las tecnologías.

## Procesos matemáticos

Los *procesos matemáticos* se entienden aquí como actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática.

Vale decir que estos procesos matemáticos no son capacidades pero apoyan su desarrollo, y además tienen numerosas intersecciones entre sí.

### Cinco procesos

Se han seleccionado como centrales los siguientes procesos:

- *Razonar y argumentar*
- *Plantear y resolver problemas*
- *Comunicar*
- *Conectar*
- *Representar*

La descripción de esos cinco procesos se realiza a continuación.

### **Razonar y argumentar**

Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos. Busca desarrollar capacidades para permitir la comprensión de lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes.

### **Plantear y resolver problemas**

Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales.

Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas.

El énfasis que se desea dar a los contextos reales también impulsa una asociación con el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa.

### **Comunicar**

Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes.

Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas.

Por la gran presencia de simbolizaciones en las Matemáticas en ocasiones se piensa que no es relevante la comunicación verbal y escrita, es común que no se incluya en la acción de aula ni tampoco en las formas de evaluación. No obstante, es un proceso central para la generación de la competencia matemática, pues permite esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil activa.

### **Conectar**

Este proceso transversal pretende el entrenamiento estudiantil en primer lugar en la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, lo cual se deriva de las características centrales de los quehaceres matemáticos: el carácter integrado de los mismos. Los matemáticos profesionales aplican métodos y objetos matemáticos de unas áreas en otras. Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal

nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas.

Con esta multiplicidad de conexiones se comprenden mejor los límites y el significado de muchos de los objetos matemáticos. En el contexto escolar, entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad.

Este proceso busca que se cultiven las relaciones entre las distintas partes de las Matemáticas escolares, además del desarrollo de acciones para identificar dentro de situaciones no matemáticas aquellas en las cuales es posible un tratamiento matemático. Y de igual manera persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.

### **Representar**

Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares).

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada.

### **¿Cómo actúan los procesos?**

Por el sentido que se brinda aquí a la competencia matemática, se buscará que la mayoría de las actividades desarrollen el proceso *Plantear y resolver problemas*. El lugar del proceso *Razonar y argumentar* es también muy amplio pues está vinculado a otras características centrales del pensamiento matemático. Los otros procesos *Conectar*, *Comunicar* y *Representar*, siempre importantes, se integran al concurso potente de los dos primeros; esto hace que sea más evidente el lugar de los dos primeros procesos. Los cinco procesos plantean una acción docente explícita en su labor profesional dentro del aula.

Los procesos matemáticos poseen distintas intersecciones entre ellos y por eso actúan de manera coligada. En circunstancias específicas de aula, una actividad que enfatice *Plantear y resolver problemas* puede apelar a *Razonar y argumentar*, *Representar*, *Conectar* y *Comunicar* en distintas maneras. Es difícil plantear las Matemáticas separadas del razonamiento y la argumentación matemática. La forma precisa en que se asocia un proceso con otros no es la misma en cada circunstancia matemática. En ocasiones, *Plantear y resolver problemas* se activará más ligado a *Conectar*, en otras a *Comunicar* todo depende de la tarea matemática.

Cada proceso central señalado aquí se podría ver como una síntesis de procesos de otros niveles de especificidad o dominios de acción, pues en el sujeto todos los procesos (ya sean generales o menos generales) no se activan de forma aislada. Por ejemplo, en el momento de realizar el proceso *Representar* pueden participar otros procesos más generales (o básicos) como identificar, listar, ordenar, clasificar, etc.

## La mediación pedagógica para desarrollar capacidades cognitivas superiores

En estos programas, por un lado, se plantean habilidades asociadas a las áreas matemáticas, y por el otro, se proponen procesos que apoyan la generación de capacidades cognitivas transversales que se evidenciarán poco a poco y sobre todo en el mediano y largo plazos. Estas dimensiones están íntimamente asociadas: los procesos matemáticos adoptados se introducen a partir de tareas para el aprendizaje en las que se persigue el desarrollo de habilidades específicas.

Las mediaciones entre el desarrollo de la habilidad específica, capacidades cognitivas y la competencia matemática son complejas, difíciles de identificar y aun más de medir. El dominio de una habilidad específica puede darse en diferentes grados o niveles.

Los conocimientos matemáticos o las habilidades específicas no generan por sí mismos capacidades cognitivas más amplias que nutran la competencia matemática. Lo puede lograr la manera como se genera el dominio de esas habilidades, es decir, la forma en que se realiza la acción de aula, la mediación pedagógica. Es fundamental cómo se organice la lección o secuencias de lecciones, la acción directa docente en las actividades del aula y la calidad de las exigencias cognitivas que se provoque. Aquí la realización de los procesos es central. Si las lecciones se organizan siempre de manera magistral y sin participación activa de cada estudiante, o si no se proponen tareas para el aprendizaje que desafíen su inteligencia, no se provoca interés y compromiso activo, con lo que se debilitan las posibilidades para motivar acciones mentales de mayor nivel. Se trata, entonces, de diseñar lecciones con tareas para el aprendizaje que permitan la realización de procesos. Si de entrada en la lección se plantea identificar, formular y resolver un problema, se apoyará la realización del proceso matemático *Plantear y resolver problemas*. A partir de éste, se podrán introducir los otros.

Debe entenderse, sin embargo, que la realización de un proceso es a veces una labor compleja y que no se puede aplicar en todo momento; el lugar y tiempo se debe seleccionar con cuidado. Por otro lado, se debe tener en cuenta que en una sola tarea para el aprendizaje es posible realizar varios procesos a la vez, o formulado de otra manera: la realización de un proceso interseca con otros.

No sólo el diseño de tareas matemáticas es importante. También lo es la acción directa docente durante las actividades propuestas. Su intervención en cada fase de la lección apoyará el desarrollo de procesos. No logrará realizarlos adecuadamente si se extralimita en su participación (por ejemplo, resuelve los problemas en la pizarra ante la menor duda, o da indicaciones improcedentes), se ausenta indebidamente de la actividad, o si no aporta correctamente el conocimiento necesario que completaría un proceso de trabajo estudiantil. La acción docente directa es crucial.

En medio de una actividad de aprendizaje dirigida a la consecución del dominio de una habilidad específica, se puede de manera dinámica introducir los procesos matemáticos que sean pertinentes. Por ejemplo, con preguntas adecuadas que provoquen más implicaciones o derivaciones para así impulsar el razonamiento y la argumentación, mediante conexiones con otras áreas matemáticas, con la generación de la expresión y comunicación de las ideas en varios planos, o con una motivación para que las entidades matemáticas que entran en juego se puedan representar de distintas maneras. Es un asunto a determinar de manera específica y práctica: no todos los procesos matemáticos poseen el mismo peso en el desarrollo de una tarea, y a veces ni siquiera aparecen algunos.

El diseño de la tarea matemática y la conducción docente en el aula son instrumentos clave para que se realicen esos procesos matemáticos. Eso implica una planificación y un diseño cuidadosos de la lección. Hay mejores tareas que otras para esta superposición de habilidades y procesos. No sólo las investigaciones didácticas pueden aportar ejemplos y resultados pedagógicos sobre cómo realizar estas acciones en el aula sino también y sobre todo la investigación que realizan los profesores en las distintas

entidades educativas de manera sistemática y continua permite proporcionar medios para seguir esta estrategia. De una manera general: con una perspectiva adecuada, cierta experiencia y preparación, se pueden activar procesos matemáticos en casi cualquier tarea matemática orientada a la generación de una habilidad específica o un conjunto de ellas.

La mediación pedagógica es la clave para que en las actividades se logre el dominio de habilidades específicas y de esta forma se desarrollen capacidades y la competencia matemática. Es necesario que se tenga en mente la realización de los procesos matemáticos.

Un ejemplo de cómo podría funcionar esto en el aula: por medio de un problema se puede buscar la generación de una habilidad específica como la siguiente

- Identificar patrones o regularidades en sucesiones y en tablas de números menores que 100.

Se ofrece tiempo para aportar soluciones o estrategias, y luego se pide que se comuniquen. Éste puede empujar a que esto se haga de diversas maneras y que se contrasten las soluciones. Al hacer eso se realiza el proceso matemático *Comunicar* y en esa contrastación poner en juego otras actividades asociadas a procesos (*Razonar y argumentar*). Se puede pedir que se vincule esta situación con alguna otra área matemática, y se podría pedir además que justifiquen varios pasos o interrogarles sobre lo que pasaría al modificarse alguna condición apropiada de la situación inicial. Al hacer esto, se realizan también otros procesos matemáticos.

Al llevarse a cabo este tipo de procesos en las distintas áreas matemáticas, se va aumentando la capacidad estudiantil para comunicar y argumentar matemáticamente de una manera adecuada.

## Resolución de problemas

Es como parte de esta mediación pedagógica donde la resolución de problemas encuentra un sentido esencial para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas: un instrumento poderoso para lograr el dominio de habilidades, la realización de procesos así como el progreso de la competencia matemática.

### Resolución de problemas: propósitos en el currículo

La resolución de problemas está asociada sustancialmente a la naturaleza de las Matemáticas, sean problemas del entorno o abstractos. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas matemáticos define la actividad de estos profesionales en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación. Debe existir una explícita relación entre esta naturaleza y las acciones de enseñanza y aprendizaje. No establecer estas conexiones en la acción de aula significaría la incomprensión de un sentido central de las Matemáticas. Sin embargo, pasar de la actividad de resolución de problemas en los quehaceres matemáticos más generales a la acción de aula no se puede realizar de una manera mecánica: debe haber adaptación al entorno escolar.

Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos:

- aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas,
- aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) *a través de la resolución de problemas*.

En el primer propósito se enfatizan los medios (estrategias, heurísticas, métodos) que requiere un problema (una acción matemática). El aprendizaje de técnicas de resolución de problemas no garantiza que una persona pueda resolver problemas nuevos y distintos, sin embargo el entrenamiento en las mismas favorece el desarrollo de esa capacidad. Sin embargo, no sería apropiado concebir el papel de la

resolución de problemas reducido a entrenar y lograr destrezas en esas técnicas y métodos, por más ricos que éstos puedan ser.

En el segundo propósito lo que se plantea es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico; esto apela al diseño de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o una secuencia de ellas), promoviendo así la realización de los procesos matemáticos.

Se adopta aquí una premisa esencial: juegan un papel crucial los problemas reales, en los que aparecen los entornos físicos y socioculturales. Usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas. Esto sucede por varias razones. Por un lado porque es posible despertar un mayor interés, provocar actitudes positivas sobre las Matemáticas, involucrar más a las personas en la construcción de sus aprendizajes y entonces estimular diversas actividades cognitivas y el cultivo de la competencia matemática. Pero no es solamente un asunto de motivación en la acción por encontrar, usar o aplicar las Matemáticas dentro de contextos reales (bien seleccionados) se promueve el contacto con los objetos matemáticos en su relación privilegiada con la realidad de donde emergieron. Trabajar en estos contextos diversos favorece una matematización (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) que -aunque debe ser adaptada al medio escolar- corresponde a aquellas actividades similares realizadas en los quehaceres matemáticos más generales.

En el enfoque que se beneficia aquí, la escogencia de un problema para el desarrollo de una lección debe estar establecida por los propósitos de aprendizaje de un conocimiento matemático y el desarrollo educativo que se realiza, y no, por ejemplo, por las estrategias o técnicas que supone para su solución. Aunque, sin duda, existe relación entre un problema rico en posibilidades de solución y los fines de un buen aprendizaje.

Uno de los aspectos que se desea subrayar en esta visión es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes.

Aunque aquí se dará énfasis a la organización de la lección, el propósito de desarrollar competencia en los recursos y métodos para resolver problemas también se incorpora en las distintas áreas matemáticas que organizan estos programas.

## Problemas

Los contextos donde un problema puede emerger pueden ser diversos. Una situación de salud en el país, asuntos económicos, ambientales, culturales. Contextos escolares, familiares, comunitarios, profesionales, científicos. Pero también un problema puede diseñarse a partir de pasajes de la historia de las Matemáticas, de una representación artística donde es posible encontrar matemáticas, incluso un juego, un rompecabezas, un video, etc.

Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas:

- que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad,
- que se enfrenten a los problemas sin que se hayan mostrado soluciones similares,
- que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto.

Un problema debe poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva no simple. Si se trata esencialmente de acciones rutinarias, no se conceptuarán como problemas. Se puede poner en los siguientes términos: una tarea matemática constituye un problema si para resolverla el sujeto debe usar información de una manera novedosa. En el caso que el individuo pueda identificar inmediatamente las acciones necesarias se trata de una tarea rutinaria. Si una tarea matemática propuesta no tiene esas características, se consignará aquí como un ejercicio. Una tarea puede ser un ejercicio o un problema en dependencia de varias circunstancias educativas. Una suma con números de cuatro dígitos puede ser un problema en 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> Año, y un ejercicio en tercero.

La escogencia de problemas planteados en un entorno real permite potenciar la *aplicación* de los conceptos y métodos matemáticos, acoplándose así con la competencia matemática que se ha definido como la capacidad para describir, comprender y actuar en contextos diversos (o situaciones) usando matemáticas. La resolución de problemas en entornos reales apoya una percepción de utilidad de las Matemáticas.

También existen problemas que por su naturaleza no admiten una solución en poco tiempo y otros que tal vez no tengan. Este tipo de problemas ofrece oportunidades para mostrar algunas características de la construcción matemática: que las Matemáticas no son verdades absolutas, que hay procesos constructivos que pueden durar mucho tiempo, etc.

Resulta conveniente subrayar la importancia de *problemas de final abierto*, es decir aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ofrecer oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos, para organizar la lección o para trabajos extraclase por medio de proyectos. Cuando se colocan en contextos reales, hay muchas oportunidades para trabajar con problemas de este tipo.

Favorecer problemas en contextos reales no implica dejar de lado problemas abstractos. Es una orientación general y flexible que debe adaptarse con lucidez. Hay áreas matemáticas y tópicos donde no tiene sentido el trabajo en contextos reales. Pero además, no se debe olvidar nunca que las Matemáticas refieren a dimensiones generales y abstractas de lo real. En esencia, es una práctica que cultiva lo abstracto. De lo que se trata en la acción educativa es de construir los objetos abstractos con base en una estrategia que permita asociaciones con los entornos en ciertos momentos para favorecer los aprendizajes.

Los problemas abstractos son cruciales para poner en juego distintas habilidades y procesos. En los abstractos se entrena, por ejemplo, la justificación y demostración, el uso de lenguaje matemático, el razonamiento riguroso abstracto. En los quehaceres desarrollados por las comunidades matemáticas profesionales la mayoría de los problemas que se abordan son abstractos.

En el aula, el momento y la forma para introducir un problema deben constituir parte de la planificación docente. No siempre un problema debe ocupar un papel central en la organización de la lección, a veces puede introducirse solamente en ciertas fases de la acción de aula. En otras ocasiones un problema puede servir para reforzar aprendizajes. Lo que se propone aquí es el uso de problemas como una orientación general a aplicar de manera flexible.

En cuanto a las técnicas generales o métodos para el diseño de estrategias para resolver problemas, se consignarán, como guía, cuatro pasos que se sintetizan en la tabla siguiente.

**Tabla 4. Pasos en la resolución de problemas**

Pasos o fases	Acción
Paso 1. Entendimiento del problema	Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
Paso 2. Diseño	Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico.
Paso 3. Control	Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso.
Paso 4. Revisión y comprobación	Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.
Fuente: elaboración propia.	

Hay varias dimensiones que participan en este procedimiento y que son relevantes: recursos, heurísticas, creencias y la *metacognición* o *control*. Los primeros refieren a los elementos aprendidos (correctos o no) con los que parte la persona, las heurísticas son las estrategias formales o informales que se dan o pueden darse para resolver un problema, y están las creencias sobre diferentes dimensiones involucradas. La evolución o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones son fundamentales en esta etapa y se identifican con las estrategias denominadas metacognitivas. En este sentido, la metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognitivo y al control activo de las decisiones y de los métodos utilizados en la resolución de un problema. Estos pasos generales deben ajustarse cuando se trabaja con problemas en contextos reales, pues requieren modelos.

## Modelización

La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos es parte sustancial del enfoque que se propone trabajar con problemas en contextos reales. Los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad. Un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones). Pueden existir varios modelos sobre una realidad con distintos grados de representación de la misma. Identificar, construir o usar un modelo de una situación real es una manera de *matematizar* esa realidad.

En este enfoque se conceptúa modelo de una forma amplia y flexible: puede ser un diagrama con flechas, un manipulable, una tabla, una gráfica. Un modelo refiere a una situación específica, pero al mejorarse con acciones cognitivas deberá ser capaz de poder usarse en otros contextos.

Lo que se propone aquí no es solamente un entrenamiento de estudiantes en las estrategias para el planteamiento y construcción de modelos en sí mismos, sino esencialmente utilizar los modelos matemáticos y las acciones que supone su construcción y utilización para generar o reforzar aprendizajes. Conocimientos y habilidades específicas se pueden construir o aplicar a través de las acciones que ofrece la modelización. Esta matematización escolar no busca dar un modelo final y acabar la acción allí. Trata de la creación y uso sucesivo de modelos que se refinan, adecúan y amplían su rango de acción. Refiere al aprendizaje, a una acción estudiantil constructiva en la que también hay intervención docente.

Un trabajo de reelaboración y abstracción de un modelo convoca actividades matemáticas más generales y abstractas. Se podría hablar de dos maneras de matematización: la primera que establece y usa un modelo (se pasa del mundo físico o social al simbólico matemático); la segunda, que refina y generaliza de manera teórica los resultados de la primera (trabaja en el mundo simbólico y abstracto de las Matemáticas). La modelización siempre aparecerá de manera integrada al proceso *Plantear y resolver problemas*.

El grado de complejidad de los modelos que se generen dependerá de las circunstancias a las que refiere, así como de los conceptos y procedimientos matemáticos implicados, lo cual debe ajustarse en cada nivel educativo.

El *espíritu de la modelización* reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno. Este sentido de realidad es esencial para los aprendizajes. En términos muy generales, esta acción se puede resumir en algunos pasos, que se consignan en la tabla siguiente.

**Tabla 5. Pasos en la modelización.**

<b>Pasos</b>	<b>Descripción</b>
Paso 1. El Problema.	Un problema que describe una situación de la realidad que debe ser modelizada.
Paso 2. Sistematización.	Una selección de los objetos, la información y las relaciones relevantes del problema que le permitan obtener una posible representación o idealización matemática.
Paso 3. Modelo Matemático.	Una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior en lenguaje matemático, de tal forma que obtenga un modelo que represente lo que ocurre en la realidad.
Paso 4. Solución.	Uso de los conocimientos matemáticos previos para poder encontrar la solución o soluciones del modelo planteado en el paso anterior, de esta forma se podrá obtener una aproximación de la solución del fenómeno que se está idealizando en el paso 1.
Paso 5. Interpretación.	Análisis de los resultados y las conclusiones considerando los conocimientos previos que se tienen del problema.
Paso 6. Evaluación.	Verificación a la luz de los resultados matemáticos de la validez del modelo y el poder predictivo que dicho modelo tiene sobre el problema original. Para este proceso puede utilizarse la comparación con datos observados y/o el conocimiento teórico o por experiencia personal que se tenga del problema.

Fuente: elaboración propia.

## El uso de tecnologías

El trabajo con problemas adquiere una perspectiva vigorosa cuando se realiza en contextos reales y se usa la modelización. El uso de tecnologías digitales juega en la misma dirección, pues no sólo ofrece medios que intervienen como apoyo (calculadoras o computadoras para simplificar cálculos, valorar aproximaciones, entornos virtuales), las cuales permiten visualizar dimensiones que de otra manera sería muy difícil de incorporar en la acción educativa (como el movimiento en Geometría), pero también para modificar el significado de algunas fases y objetivos de la resolución de problemas. Con tecnología es posible simular situaciones reales y reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema; redefinir las estrategias que se pueden diseñar.

El sentido de la contextualización y la manipulación con los entornos reales se puede alterar con los medios tecnológicos. En la resolución de problemas donde puede intervenir la tecnología se requiere incluir otras habilidades y procesos que están asociados a la relación interactiva entre conocimiento, pedagogía y tecnología, condiciones que son parte cada vez más de las generaciones de estudiantes que asisten a la escuela (la manipulación de artefactos, relación especial con procesos visuales, multitarea, “conectividad social”, etc.). Y esto no refiere solamente a artefactos, las posibilidades que ofrece Internet para la comunicación (donde la distancia se relativiza) permiten trabajar con problemas (y con proyectos) de una forma enteramente distinta a la que se realizaría sin esos medios.

Por este tipo de consideraciones, el uso de tecnologías debe asumirse como un componente muy importante para un enfoque curricular basado en la resolución de problemas.

## Diferentes niveles de complejidad de los problemas

Es sustancial que se promueva la confrontación estudiantil con diferentes niveles de complejidad en los problemas matemáticos, pues existe una relación directamente proporcional entre niveles de complejidad y las oportunidades para realizar procesos matemáticos y nutrir el progreso de la competencia matemática. La filosofía a seguir en el aula varía a favor de acentuar acciones cognitivas de mayor nivel. Una acción de aula encaminada a la confrontación progresiva con complejidades mayores no es consistente con estilos educativos que enfatizan las acciones simples, repetitivas o de poca exigencia mental. De esta forma, la organización de la lección se debe repensar a la luz de esta visión.

Esta orientación, por supuesto, no se plantea al margen de consideraciones pedagógicas; no se trata de buscar lo complejo por lo complejo en sí mismo, pues no todo asunto complejo es relevante. De lo que se trata es que con temas pertinentes (matemática y educativamente) se confronten problemas matemáticos cada vez más complejos de manera escalonada. Por medio de una mayor profundidad en los tópicos se forjan mayores destrezas para aprender otros contenidos.

Aquí se proponen tres niveles de complejidad:

- *Reproducción.* En esencia se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Apelan a conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cálculos sencillos.

Por ejemplo, en el final de la educación general básica:

Resolver la ecuación  $8x - 2 = 15x + 9$ .

Encuentre el promedio de los números 8, 13, 6, 15, 7.

Si se deposita en una cuenta de ahorro 3000 colones y el banco ofrece un 8 por ciento de interés anual, calcular cuánto dinero en intereses ganará esa cantidad depositada al cabo de un año.

- *Conexión.* Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de representación, y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.

Por ejemplo, en el final de la educación general básica:

Una pastelería vende queques en forma circular y con el mismo grosor en 2 tamaños: unos con diámetro de 20 cm. a 8000 colones, otros con diámetro de 30 cm. a 12 000 colones. ¿Con cuáles queques se obtiene una mejor oferta? Explique.

- *Reflexión.* El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución.

Un ejemplo, adaptado de la prueba PISA del 2003:

Un documental televisivo incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. El Dr. Morales, un especialista en sismología, afirmó: *en los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia es dos de tres*. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del sismólogo?

A)  $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$  por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia.

B)  $\frac{2}{3}$  es más que  $\frac{1}{2}$ , por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de San Eulalia en algún momento en los próximos 20 años.

C) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D) No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Un énfasis curricular que asume la resolución de problemas como su enfoque principal no puede privilegiar solamente la realización de problemas de reproducción. Los problemas de conexión o reflexión son los que pondrán en movimiento más capacidades. No se trata de proponer la mayoría de problemas en estos dos niveles, sino que éstos se introduzcan de acuerdo a las características de la clase, el momento en la secuencia de lecciones o el tópico. Este tipo de problemas provoca más procesos. En la enseñanza y aprendizaje se debe diseñar una estrategia formativa que use problemas en los diferentes niveles de complejidad, de una forma equilibrada y apegada a su contexto. Hay que tener en cuenta además que un problema posee una complejidad de acuerdo al estudiante. Para un grupo de estudiantes puede resultar de conexión, pero para otros de reflexión. Es necesario interpretar el contexto específico en el que se encuentra.

## Problemas, memorización y reflejos intelectuales

Mediante la resolución de problemas, enriquecida y redimensionada por contextos reales y el uso de tecnologías, se motiva la construcción de aprendizajes. Este es un enfoque que asume esa premisa de la visión constructivista que sustenta la política educativa costarricense.

El aprendizaje de las Matemáticas se realiza de una manera progresiva a partir de conocimientos anteriores. El dominio y recuerdo de unos conocimientos deben ser base para los siguientes; sólo así se puede formar en la mente un cuerpo coherente y estructurado. Para poder enfrentar problemas nuevos son necesarios ciertos reflejos intelectuales que sirvan como conocimiento asimilado y automatizado sobre procedimientos, algoritmos o ciertos razonamientos recurrentes. Esto es indispensable para que proponga hipótesis, formule estrategias, identifique los mejores procedimientos y rutas de trabajo e imagine los caminos para enfrentar un problema. Y aquí precisamente se requiere la memorización y el fortalecimiento de reflejos en varias dimensiones. Esto no debe verse como una forma simplificada para construir el aprendizaje de conceptos o métodos, sino como una forma eficaz de acceder a lo que ya se ha comprendido.

Se deben promover oportunidades para realizar síntesis, entrenar algoritmos y procurar la memorización de procedimientos o razonamientos comunes. Por ejemplo, los algoritmos de suma, resta, multiplicación, división de números diversos, las tablas de sumar y multiplicar, las fórmulas notables, entre otras.

Es necesario que los diversos tópicos se repasen a lo largo de los distintos años. Pero esto no debe hacerse por medio de sistematizaciones generales artificiales, sino por medio de nuevos problemas que hagan recordar inteligentemente los conocimientos adquiridos en el pasado y planteen así otras expectativas de aprendizaje.

---

# Capítulo 5: Ejes



## Cinco ejes disciplinares

Se asumen cinco ejes transversales específicos a las Matemáticas que potencian algunas dimensiones curriculares relevantes para la enseñanza efectiva de esta materia:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la Historia de las Matemáticas.

Estos ejes significan aquí prioridades, por lo que deben influir todos los elementos del currículo. Estas prioridades se manifiestan en la selección de tópicos, en las indicaciones generales de gestión y de método, en las indicaciones y sugerencias que acompañan conceptos y habilidades, en la propuesta de planeamiento. Se busca que al implementarse esta propuesta curricular se brinde importancia especial a cada uno de estos ejes, aunque no todos estos ejes generan impacto de la misma forma en cada área o en cada año escolar.

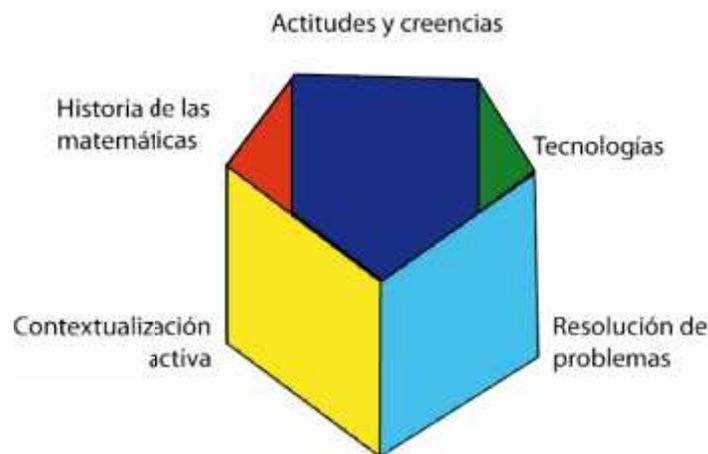


Figura 1. Ejes disciplinares

La selección de estos ejes responde a condiciones del contexto educativo nacional:

- En Costa Rica la resolución de problemas ha tenido hasta ahora un papel muy reducido y cuando se ha planteado se ha hecho de manera abstracta sin llevarse efectivamente a la acción de aula y en la mayoría de las ocasiones con una aproximación inadecuada (un apéndice del discurso pedagógico o simples colecciones de estrategias para resolver problemas).
- Aunque se ha considerado acudir al entorno para la enseñanza, sin embargo se ha hecho de forma artificial, sin provocar un compromiso estudiantil activo.
- De igual manera, la tecnología ha ocupado en los documentos oficiales un lugar muy débil y en la práctica educativa se han dado distorsiones serias en su uso.
- El tema de actitudes-creencias y el del uso de la historia han estado prácticamente ausentes de los programas y de la práctica educativa.

Los ejes buscan responder a debilidades existentes pero también posicionar la Educación Matemática que se desarrolla en el país con estándares internacionales. La acción de los cinco ejes en todos los años educativos contribuye a la integración vertical del currículo, especialmente por medio de la resolución de problemas y la contextualización activa que buscan articular todo el plan de estudios. El efecto sinérgico de estos ejes disciplinares busca favorecer una formación matemática de calidad que ayude a generar personas competentes, racionales, responsables y críticas para la construcción de una sociedad culta, justa y democrática.

## Resolución de problemas y contextualización activa

El enfoque principal de este currículo es la resolución de problemas en contextos reales. La manera más conveniente de promover la implementación del mismo es colocar en el currículo como ejes disciplinares el resolver problemas, hacerlo en contextos reales y además darle a estas acciones el mayor relieve.

La formulación que se selecciona para realizar eso es por medio de dos énfasis:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- Una contextualización activa como un componente pedagógico especial.

Este eje es consistente con el proceso matemático *Plantear y resolver problemas*.

Se pretende que estos ejes disciplinares dominen la enseñanza de los conceptos y habilidades y el diseño de las tareas matemáticas. El uso intenso y apropiado de tecnologías, el uso de la Historia de las Matemáticas y el cultivo de actitudes positivas sobre la materia debe hacerse favoreciendo problemas y una contextualización activa. A eso se refiere el usarlos como ejes articuladores.

Aquí se propone que los dos propósitos centrales de la resolución de problemas ocupen un lugar preponderante. Eso significa motivar la organización de la acción de aula por medio de problemas y también promover el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas en las distintas áreas matemáticas. Se plantea una contextualización activa que estimule la acción estudiantil, lo que requiere el uso importante de modelos sobre la realidad cercana.

El elemento esencial de la contextualización activa es la modelización. Se pueden contextualizar los objetos matemáticos de varias maneras. Por ejemplo puede ofrecerse una introducción contextual para abordar algunos conceptos o procedimientos matemáticos (“fíjense que en esta sala de clase tenemos distintas figuras, hoy vamos a estudiar los triángulos”). Otra manera: contextualizar una situación matemática (si Juan tenía 400 colones y gastó 200 en caramelos, ¿cuántos colones le quedan?). Esas contextualizaciones son útiles en muchas circunstancias educativas, pero no activan intereses y acciones cognitivas de nivel superior ni procesos matemáticos: no generan un involucramiento estudiantil activo. Al contrario, para despertar el interés y la participación, se propone usar problemas en contextos reales que provoquen la construcción o uso de modelos. Se trata de diseñar problemas sacados de las informaciones de prensa, de la escuela, de la comunidad, de la clase, de Internet. Los mismos “problemas” tradicionales que aparecen en muchos libros de texto (como apéndice) pueden ser enriquecidos si se colocan en la perspectiva de la modelización y usados para construir capacidades cognitivas superiores.

Una contextualización activa no se puede realizar de la misma manera en todas las áreas, algunas se prestan mucho, como *Estadística y Probabilidad* o *Medidas*. De igual manera, las situaciones reales pueden permitir usar tópicos de varias áreas. No se trata de que todos los problemas de aula sean de modelización, pero que éstos sean una parte importante de la acción educativa. Resolver problemas en contextos reales ofrece significados, sentido de utilidad y medios diversos para poner en juego las capacidades y habilidades matemáticas, y permite andamios para la construcción de los aprendizajes desde lo concreto hacia lo abstracto.

## Tecnologías

Las tecnologías digitales han tenido un extraordinario impacto tanto en la práctica como en la investigación en Educación Matemática. Algunos de estos recursos son instrumentos de construcción y experiencias geométricas, de análisis de datos, modelación y simulación, de cálculo algebraico, “tutores” inteligentes y cada vez más los espacios virtuales. Las calculadoras, por ejemplo, ofrecen posibilidades de disminuir los cálculos rutinarios y concentrar los esfuerzos en los procesos de razonamiento o de aplicación más significativos para el dominio de las Matemáticas. Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. La Internet, además, es uno de los más poderosos vectores que directa o transversalmente amplifican potencialidades de los diferentes instrumentos tecnológicos; ella misma abre entornos cualitativamente distintos para la enseñanza y el aprendizaje, recursos valiosos para la construcción de múltiples estrategias pedagógicas. Estas tecnologías configuran en gran medida la realidad contemporánea de la educación.

Todo apunta a poderosos cambios en el futuro de los tópicos y los enfoques educativos. Muchos de los problemas y tareas educativas que se planteaban antes de estas tecnologías se han visto transformados cualitativamente, a la vez que han aparecido nuevos retos y escenarios didácticos. Las tecnologías de la comunicación han favorecido métodos cooperativos en el aula y fuera de ella, construyendo espacios virtuales de comunicación y de interacción, lo que puede transformar mucho el significado de la labor de aula.

Las tecnologías pueden ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático. Y es precisamente en la resolución de problemas en entornos reales donde éstas pueden aportar sus beneficios de la mejor manera, en contextos de aprendizajes que fortalezcan las habilidades y capacidades matemáticas. En ese sentido refuerzan la implementación de los ejes disciplinares articuladores y añaden medios para conectar la Educación Matemática local con tendencias educativas y culturales dominantes en el mundo. La dinámica histórica actual pronostica una penetración más intensa de todas las tecnologías en la vida social del país y del mundo. Los programas de estudio deben preparar a la población para esta perspectiva.

La utilización de tecnologías, sin embargo, no conduce necesariamente al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo a las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional.

## Actitudes y creencias

En el aprendizaje son decisivas la motivación y el interés y en general todas las dimensiones afectivas, por lo que se adopta aquí una visión integral y humanista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. No se pueden generar actitudes y creencias positivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas sin que los programas las incorporen de forma explícita y ofrezcan medios pedagógicos en esa dirección.

¿Cuáles son disparadores de actitudes negativas?

- Matemáticas con un bajo nivel de demanda de la acción inteligente y creativa. Los énfasis en repeticiones mecánicas de procedimientos simples, en la memorización sin sentido o en actividades mentales poco exigentes no provocan en la mayoría de estudiantes empatía con las Matemáticas.
- La separación de los entornos estudiantiles.
- Una organización de la lección que no favorece la participación activa y colaborativa de estudiantes y docentes.
- La enseñanza separada de las realidades culturales y los medios tecnológicos de la sociedad moderna.
- El fracaso en ejercicios, problemas y pruebas que generan una estela de baja autoestima y confianza.

Las actitudes están estrechamente ligadas a las creencias, que incluso se toman de los ámbitos familiares y culturales de la sociedad. Conocer estas creencias y revertirlas hacia otras de mayor positividad hacia las Matemáticas debe ser un propósito a incorporar en todos los niveles educativos. Identificar y transformar las percepciones negativas en positivas debe ser parte de los fines de una educación anclada en los requerimientos de la sociedad en que vivimos.

Las actitudes que se desea promover son:

*Perseverancia.* Una de las principales actitudes que se busca potenciar es aquella que hace del trabajo, la dedicación y la persistencia el medio para abordar las Matemáticas. Lejos de ser un asunto para personas superdotadas, lo cierto es que las destrezas matemáticas se entrenan y desarrollan.

*Confianza en la utilidad de las Matemáticas.* Es constante el reclamo por visualizar la utilidad de estos aprendizajes para la vida. Con la contextualización activa se ofrece una valiosa oportunidad para permitir de forma perspicaz un vínculo con la realidad estudiantil. El uso de tecnologías digitales diversas resultará también un instrumento para favorecer esta comprensión del contexto y su cercanía con el entorno. De la misma manera, el progreso en la competencia matemática general para resolver problemas permite fomentar esta percepción y actitud.

*Participación activa y colaborativa.* Lograr que cada estudiante se comprometa en la construcción de su propio aprendizaje es una condición básica. La organización de la lección debe ofrecer oportunidades para la participación estudiantil activa e interactiva.

*Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.* Muchas personas sienten que fracasan al no poder abordar con éxito tareas matemáticas. Con la presencia de escaleras pedagógicas apropiadas y la existencia de niveles de profundidad distintos se tendrá la posibilidad de dar forma a las exigencias personales para buscar el desarrollo de esta autoestima.

*Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.* Si bien no todas las personas van a relacionarse con las Matemáticas de la misma manera en sus vidas ni todos van a tener las mismas habilidades para su manejo, es importante que se desarrolle un respeto del lugar que ocupa en el conocimiento y la cultura de la humanidad. Para eso resultan sustanciales los elementos que se aporte a la reflexión, recurriendo a múltiples medios como la historia, la filosofía, la ingeniería, las artes y otras disciplinas en las que las Matemáticas son parte fundamental.

Al igual que sucede con las capacidades matemáticas, el progreso de las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas se debe promover en la acción de aula a través de la intervención docente, se deben tener en mente estos propósitos en las diversas tareas matemáticas. De la misma manera, la contextualización, resolución de problemas, tecnología y la historia amplían las posibilidades para apreciar el papel de las Matemáticas.

## Historia de las Matemáticas

Otro de los ejes disciplinares es el uso de Historia de las Matemáticas en la enseñanza.

Como los objetos matemáticos corresponden a las formas o instrumentos mediante los cuales los seres humanos organizan los fenómenos de su entorno o responden a sus retos, es relevante conocer cómo ese proceso se ha desarrollado. Aquí se subrayan los aspectos constructivos, activos y dinámicos de los objetos matemáticos; son producciones influidas por contextos sociales y como respuesta a las condiciones de su medio.

Es relevante para la perspectiva de este currículo: el trabajo con problemas en contextos reales busca que en el aula se reinventen o reconstruyan los conceptos y procedimientos matemáticos que se estudian. Entrar en contacto con la historia de la construcción de esos objetos matemáticos favorece su aprendizaje.

La Historia de las Matemáticas permite romper con el esquema de que las Matemáticas son una colección de axiomas, teoremas, pruebas y donde lo esencial es la claridad lógica de sus argumentos. Al colocar los objetos matemáticos en contextos socioculturales se permite visualizar la participación de heurísticas, dudas, errores, concepciones equivocadas e incluso la existencia de retrocesos cognoscitivos en algunos campos. Muchas de las ideas matemáticas han dependido siempre de situaciones contextuales y del momento en la historia, como por ejemplo el significado de prueba, rigor, evidencia, etc. La Historia de las Matemáticas apuntala una visión humanista de las Matemáticas en cuanto subraya su carácter de construcción sociocultural. Fortalecer esta aproximación contribuye a una formación en concordancia con fines de la educación costarricense.

Se deben tener en cuenta muchas más dimensiones que aquellas asociadas sólo a los resultados o desarrollos matemáticos abstractos, también son relevantes las motivaciones individuales o colectivas, las condiciones materiales y sociales de una realidad específica; en la acción pedagógica se deben incluir las Matemáticas *en su contexto*, y esto apela a la Historia.

No se propondrá aquí la Historia como contenido a evaluar, para así ofrecer flexibilidad al gestionar su introducción, en un medio educativo nacional donde el uso de la historia de las Matemáticas no ha formado parte relevante de los programas escolares ni de las tradiciones pedagógicas.

El uso de la Historia de las Matemáticas complementa los otros ejes y permite reforzarlos. Hay una sinergia. El impacto más importante del uso de esta disciplina, sin embargo, no se puede observar en relación con habilidades específicas sino más bien en el mediano y largo plazos, pues es poco a poco que se van comprendiendo sus límites y perspectivas.

La Historia de las Matemáticas no sólo ofrece recursos muy valiosos para la acción de aula sino que potencia una perspectiva y una valoración sobre la disciplina, que es relevante para el aprendizaje efectivo y, más aún, para una comprensión culta de las Matemáticas, un imperativo para toda persona en el escenario en que vivimos.

# Capítulo 6: Gestión y planeamiento pedagógicos



La forma como se interpreta y desarrolla el currículo en el aula se llama gestión curricular, en la que intervienen varios factores. Por una parte, las condiciones socioeconómicas y culturales, individuales y colectivas, con fortalezas y debilidades; por otro lado intervienen los medios, normas y recursos generales que aportan las instituciones educativas nacionales además del entorno propiamente educativo (docentes de otras materias, administrativos, personal de apoyo). En ese contexto es que se desarrolla la implementación, cuya parte central está en el estilo con que se organiza la acción de aula.

Este capítulo abordará la gestión y el planeamiento educativo en varias secciones:

- La organización de las lecciones.
- Indicaciones generales.

## La organización de las lecciones

Como se ha enfatizado, la mediación pedagógica es decisiva para el logro de los propósitos educativos que se plantea, por eso aquí se sugieren opciones para gestionar pedagógicamente la acción en las aulas costarricenses.

### Un estilo para organizar las lecciones

Aquí se sugiere un estilo para organizar las lecciones donde se apoye la multidireccionalidad de los aportes estudiantiles y docentes, donde haya una participación activa y una construcción colectiva de significados, para así activar procesos matemáticos que hagan progresar la competencia matemática.

En el desarrollo de las lecciones hay dos etapas que se pueden distinguir por los propósitos de la enseñanza y aprendizaje:

- Etapa 1: el aprendizaje de conocimientos.
- Etapa 2: la movilización y aplicación de los conocimientos.

La primera etapa es aquella en la que se va a realizar el aprendizaje de conocimientos nuevos, la segunda ocurre una vez realizada la primera y busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados. Esta última etapa puede realizarse en cualquier momento posterior, no necesariamente de forma inmediata a la primera. En la primera etapa sí resulta conveniente que se realice en una lección o en una secuencia de lecciones.

Se propone aquí un estilo de organización de la lección donde se promueve la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos siguiendo cuatro pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

### 1. *Propuesta de un problema.*

En esta primera fase se coloca como un punto de partida un problema (contextualizado cuando resulte pertinente), un desafío inicial o una actividad para provocar la indagación.

Esta propuesta supone una escogencia apropiada con base en el lugar que ocupa el contenido y las expectativas de aprendizaje dentro de la programación del curso y las condiciones específicas del grupo de estudiantes con el que se trabaja.

### 2. *Trabajo estudiantil independiente.*

En esta fase se ofrece tiempos para el trabajo individual, en parejas o en subgrupos.

En la misma se dan varias subfases:

- apropiación del problema,
- formulación de estrategias-hipótesis-procedimientos,
- resolución del problema o investigación estudiantil.

Esta fase se consigna como una “*fase independiente*” en cuanto que no hay una intervención docente directamente y se deja a la persona enfrentar el problema por sí misma. No hay aprendizaje significativo sin esta etapa de confrontación con el problema. Al realizarse en el aula, sin embargo, es necesaria una acción docente apropiada, precisa y activa.

En esta fase la persona debe conocer alguna estrategia que le permita resolver el problema, pero no aquella que se base en el conocimiento que se desea enseñar. Por otra parte, conviene que el problema pueda permitir el uso de varias estrategias.

### 3. *Discusión interactiva y comunicativa.*

Con la guía docente, este tercer momento permite espacios para la valoración y contrastación de resultados, soluciones o elaboraciones aportadas, entrando en juego la argumentación y la comunicación.

### 4. *Clausura o cierre*

Esta *clausura* o *cierre* permite una actividad que “concluye” pedagógicamente el tema o los contenidos trabajados. Se trata de una síntesis cognoscitiva fundamental para el aprendizaje: por medio de esta acción docente se ofrece un “vínculo” con el saber matemático que ha construido la comunidad profesional de matemáticas. Es importante que esta clausura no sea artificial o alejada del proceso recién vivido.

Se trata de la adquisición y estructuración de conocimientos (conceptos, procedimientos, métodos) que se usaron a lo largo del proceso. Se confronta con el saber conocido aunque de manera accesible. Aquí se puede incidir sobre las estrategias si hubiera varias, introducir un análisis crítico de las acciones realizadas y proponer actividades complementarias que fortalezcan la comprensión de los conocimientos trabajados. Resulta conveniente que se reformulen por escrito los nuevos conocimientos adquiridos, siempre con la ayuda docente.

En la etapa 2 (de movilización y aplicación de los conocimientos aprendidos) se trata de obtener que se trabajen de forma mecánica algunos de los procedimientos aprendidos, que amplíen su dominio de las formas de expresión o representación de los conocimientos como fórmulas, símbolos, gráficas y diagramas. Y también incluye la aplicación de los nuevos conocimientos en contextos diferentes. Es una etapa en la que se puede realizar conexión con otras áreas y alguna reflexión adicional. En esta etapa se plantea la evaluación de los conocimientos aprendidos. Es importante que no se incurra en repeticiones excesivas y desarrollo de actividades sin interés, deben ser tareas para reforzar un conocimiento aprendido, ya que siempre es posible encontrar problemas y acciones que complementen, señalando aspectos poco desarrollados o mostrando caminos motivadores de aplicación de estos conocimientos.

El desarrollo y la combinación de estas etapas 1 y 2 e incluso las cuatro fases de la primera etapa son parte del planeamiento docente. No deben verse de manera lineal ni como una secuencia obligatoria. Es conveniente comenzar una lección por medio de un problema, pero antes de ir a un tema nuevo puede empezarse con la movilización y aplicación de conocimientos aprendidos que se juzguen necesarios para avanzar en los nuevos aprendizajes. Siempre se dependerá de la naturaleza de los tópicos y de las condiciones en el aula.

Este estilo de organización de las lecciones es transversal en la enseñanza de los temas matemáticos que componen el programa escolar. Pero es más que eso: se puede desarrollar en otras materias. El entrenamiento en la metodología propuesta promueve además el desarrollo de capacidades para realizar investigación en otras Ciencias naturales o sociales y en las humanidades. Eso es así porque el método seguido es similar al que domina en la construcción de conocimiento, es decir en la investigación: problema, planteo-hipótesis-conjetura, resolución, contrastación de soluciones, consignación de resultados en relación con el saber.

## Consideraciones sobre el estilo para organizar las lecciones

En este enfoque los problemas debidamente contextualizados constituyen una fuente de la que parte el proceso de aprendizaje. Estos problemas sirven como situaciones no sólo para aplicar conceptos o procedimientos matemáticos sino también para construirlos. De lo que se trata es que se puedan desarrollar las Matemáticas necesarias en el problema además de la comprensión de las acciones que realizan. Se realiza una actividad en la cual se pasa de establecer estrategias muy cercanas al contexto específico usado hacia otras de mayor generalidad. Cuando esto sucede se apela a un modelo que puede ser usado en otras situaciones, para resolver otros problemas (diferentes aunque parecidos). Mayores niveles de generalización y abstracción ofrecerán posibilidades matemáticas más amplias.

En este estilo de organización de las lecciones se dan interacciones tanto entre estudiantes y docentes como entre estudiantes: se presentan diálogos matemáticos. Es relevante proporcionar la información suficiente para que cada estudiante tenga a su disposición los antecedentes y la indagación que plantea el problema, para luego clasificar, interpretar y construir.

Es medular una intervención docente en términos de guía, asesoramiento y formulación de preguntas apropiadas pero con plena conciencia del momento en que debe actuar y en el que se debe dejar confrontar el problema. No conviene ofrecer la respuesta o la ruta de solución al problema, pues se quita la posibilidad de activar las acciones cognitivas que son las que van a provocar aprendizaje y desarrollo de capacidades matemáticas. Sin embargo, en ciertos casos se

tendrá que ofrecer soluciones y respuestas (cuando la o el estudiante no pueda actuar de manera autónoma). De lo que se trata es de tener una perspectiva general donde se busque generar esta acción independiente.

Conviene que las indicaciones sean apenas las necesarias para que se siga la actividad; estas indicaciones deben ser ajustadas individualmente. Se busca crear una cultura diferente a la que es frecuente entre estudiantes, docentes y padres de familia: el trabajo docente no se debe ver como el de “resolverle” los problemas a cada estudiante. Este estilo promueve u “obliga” a comprometerse en el aprendizaje y a tener una actitud participativa.

Un asunto importante: un mismo problema puede servir a fines distintos según las condiciones estudiantiles, si ya se dominan los conceptos y procedimientos matemáticos que involucra el problema se trata más bien de un ejercicio de reforzamiento o de la aplicación sencilla de un contenido. Los problemas en la afirmación de aprendizajes ponen en movimiento aprendizajes logrados previamente. Por eso es fundamental una acción docente que identifique con precisión el papel que un problema puede jugar con base en el contexto estudiantil.

Los problemas que se presentan deben tener cierta complejidad, suponiendo que no se poseen todos los medios (conceptos o procedimientos) para resolverla. Precisamente en esa confrontación se podrá acceder o elaborar los recursos teóricos que den solución al problema planteado.

En este estilo las personas se ven confrontadas a distintos tipos de tareas y exploraciones, con la acción docente se ven motivadas para encontrar respuestas o condensar sus aportes realizando los procesos matemáticos de *Representar*, *Razonar y argumentar*, *Comunicar* o *Conectar*. De entrada se trabaja directamente con el planteamiento y resolución de problemas, que con un énfasis en los contextualizados promueve la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos sencillos, lo que apoya el desarrollo de las capacidades matemáticas.

Este estilo obliga a una preparación cuidadosa de la lección, involucrando la escogencia de los problemas, los tiempos a destinar para cada paso y la acción docente en cada momento, que no es solamente guía general para la construcción de aprendizajes automáticos sino que posee un carácter central en la interacción social y cognitiva de aula.

Este desarrollo de la lección supone:

- *metodologías* pedagógicas o didácticas específicas,
- *gestión* apropiada del programa de estudios (su planeamiento y realización en tiempos y condiciones precisas),
- una *evaluación* adaptada al estilo de organización de las lecciones.

Ha sido común establecer los contenidos escolares dividiendo cada uno en pequeñas partes para las que se ofrecen procedimientos mecánicos y casi sin sentido. La enseñanza en ese esquema consiste en reproducir estos procedimientos sin mucha comprensión del significado de los mismos. En el estilo que se propone aquí la idea es otra: que se planteen problemas de cierta complejidad y que las personas no sólo sean receptores pasivos sino participantes activos en el aula. De igual manera, se propulsa una actividad en las lecciones para que cada estudiante contraste y comunique sus ideas y soluciones, activando así procesos matemáticos relevantes.

Debe existir una gran flexibilidad en el uso de este estilo, lo que dependerá de las condiciones y del contexto de aula así como del nivel educativo en que se enseña, pero organizar la acción de aula de esta manera puede ofrecer una estrategia general motivante para la mayoría de docentes en el país. Es una estrategia que aunada a la formación continua y al aporte de materiales especiales permitiría avanzar en los aprendizajes significativos, la potenciación de capacidades matemáticas y la construcción de ricas experiencias de aula.

Otro asunto: no se trata de usar muchos problemas en una lección, más bien unos pocos a partir de los cuales construir con profundidad los aprendizajes.

Finalmente, es un estilo que permite enriquecer la labor educativa con el correr del tiempo de manera precisa: escogencia de mejores problemas, anticipación de posibles soluciones o errores recurrentes, investigación docente para mejorar la presentación de los problemas y la organización de la lección.

## La pregunta dirigida

En sintonía con este estilo general se puede desarrollar una estrategia de conducción de la lección mediante una indagación dirigida hacia toda la clase:

- formulación de preguntas apropiadas sobre un tópico,
- tiempo de espera para que se ofrezcan respuestas,
- reformulación de las preguntas para avanzar en los distintos aspectos del tópico, y
- repetición del proceso hasta llegar a un cierre cognoscitivo y pedagógico del tema.

Esta metodología pedagógica exige un papel docente muy activo y atento, acude a los pasos del estilo sugerido (problema, trabajo estudiantil, comunicación y contrastación de respuestas y clausura) pero de una manera más dinámica, que puede reiterar la secuencia de los pasos en poco tiempo. Es un método que se puede usar en ciertos momentos en el aula, definidos ya sea por el tópico o por las condiciones de la clase (por ejemplo, clases numerosas).

Los elementos clave: las preguntas deben capturar el interés estudiantil, la secuencia debe generar variaciones crecientes en el tratamiento del tema y en la comprensión de los distintos elementos del tópico considerado. Las preguntas siempre deben formularse tomando como partida las respuestas estudiantiles.

## Indicaciones generales

En esta sección se trata de ofrecer algunas sugerencias generales para la elaboración de planeamiento didáctico y el desarrollo de las lecciones.

### Integrar habilidades

Una de las orientaciones relevantes para el desarrollo de la acción de aula con este currículo refiere al manejo de los contenidos y las habilidades específicas. Las habilidades no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado. Por el contrario, lo conveniente es tratar de integrar las habilidades

específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación. Por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades.

## Plazos educativos

De manera consciente o inconsciente cada docente adopta una estrategia de implementación, según la cual debe tomar en cuenta varios plazos (corto, mediano y largo) y los siguientes elementos.

- Las condiciones generales donde se desenvolverá la lección (contexto socioeducativo, localidad, recursos y materiales disponibles, nivel educativo, cantidad de estudiantes, etc.), que intervienen de diferentes maneras en la construcción y el desarrollo de la lección.
- El lugar que ocupa cada lección en el desarrollo de los fines curriculares. La lección debe entenderse incluida en secuencias de lecciones sobre uno o varios temas, es decir el cronograma curricular donde se colocan los tópicos y tiempos asignados en el año escolar y que exigen una visión estratégica.
- Un planeamiento de los distintos momentos de la secuencia de fases que se vaya a desarrollar.

## Variables de la lección

Hay varios asuntos muy importantes para el diseño de la lección y que suelen llamarse *eventos de la lección*.

**Tabla 6. Eventos de la lección**

Comienzo de la lección e introducción de contenido.	El comienzo de la lección es decisivo. Se debe escoger con mucho cuidado el problema que dará inicio a la lección, lo que está asociado a la forma de introducir el contenido. Se debe identificar la naturaleza de los problemas que sean más convenientes en función del área matemática, del nivel educativo, del tópico a tratar, así como de las capacidades y procesos que se quiera favorecer. No sólo es importante seleccionar un problema apropiado a los contenidos, sino la forma misma con que se plantea: un enunciado es lo más simple, pero pueden usarse imágenes o medios tecnológicos.
Los problemas que se plantean en la lección.	Es necesario identificar otros problemas que se pretende introducir durante el curso de la lección y determinar los fines que se buscan con ellos, pues tendrán una función distinta a aquellos que sirven para iniciar la lección.
Las acciones docentes cuando estudiantes trabajan de manera individual, en parejas o en subgrupos.	Estas acciones deben preverse, o al menos conviene diseñar una actitud general: por ejemplo, cuándo dar sugerencias y de qué tipo.
Participación de estudiantes en la pizarra.	La participación en la pizarra frente al conjunto del grupo refuerza la competencia de comunicación matemática, y la seguridad y confianza de cada estudiante; sin embargo debe hacerse con cuidado para no ofrecer una visión equivocada de los contenidos tratados. Siempre es necesario que cada docente haga el cierre pedagógico para mostrar los contenidos matemáticos con precisión.
Final de la lección.	También es crucial la forma como se hace el final de la lección. Se debe decidir si se hace una síntesis cognoscitiva en ese

El papel de la síntesis cognoscitiva.	momento o si se espera a hacerla en otra lección. La síntesis o cierre de los contenidos puede hacerse enfatizando su consistencia con los elementos que se desarrollaron en esta lección, subrayando la conexión de los mismos con otros temas que se verán en otras lecciones. Esto depende del tópico a enseñar y del lugar que ocupe en la secuencia de lecciones. Esta síntesis resulta imprescindible que se haga ya sea en la misma lección o en una no muy distante de aquella en la que se trabajó, ya que se podría perder el “amarre” cognoscitivo que se requiere para provocar el aprendizaje.
Fuente: elaboración propia.	

En estos eventos se debe tomar en cuenta en el planeamiento pedagógico.

*La evaluación en el planeamiento.* También las características de la aproximación metodológica deben ser consistentes con la manera en que se pretende evaluar el rendimiento estudiantil; hay que pensar desde un principio en cómo se evaluará el tópico.

*Tomar en cuenta la diversidad.* Como existen distintos talentos e inteligencias, es muy importante que se use el tiempo de manera distinta para cada subgrupo de estudiantes o diferentes individuos. Eso se puede hacer por medio de una modulación específica de las sugerencias o indicaciones que puede dar. Aquí al menos dos dimensiones son relevantes: las diferencias cognitivas asociadas a las diversas aproximaciones que las y los estudiantes pueden tener para aprender matemáticas, y por otro lado, las relacionadas con el talento y la dedicación al estudio (no todos poseen los mismos talentos en las Matemáticas) o la disposición para dedicarle mucho tiempo. Algunas personas tienen mayor facilidad para representaciones visuales de los conceptos y procedimientos matemáticos, otras poseen mayor facilidad para aproximaciones secuenciales, sistemas numéricos, etc. No es sencillo identificar en las personas esas diferencias cognitivas pero es vital tener presente el asunto, pues puede permitir un mejor aprovechamiento de la acción de aula para todos. Responder a esto se ve favorecido dentro de la lección cuando se seleccionan procesos relacionados con objetos matemáticos que poseen diversas representaciones matemáticas. El tratamiento de las diferencias en talentos y disposición al estudio es un asunto más complejo.

*Incluir comprensión conceptual y destreza procedimental.* En el planeamiento pedagógico es imprescindible reflexionar sobre los mecanismos para que el problema permita generar comprensión conceptual, a la vez que el dominio de procedimientos. Procedimientos y comprensión conceptual son decisivos para el desarrollo de la competencia matemática, sin embargo la comprensión de conceptos permite asimilar mejor los procedimientos. De igual manera, es posible fortalecer la competencia matemática a partir de procedimientos con modificaciones oportunas de sus distintos elementos.

## Interacciones en la institución

Si bien se efectúa la implementación del currículo de forma individual, es oportuno que varias de estas dimensiones se realicen con la colaboración de más docentes de la institución que enseñan matemáticas. La planificación pedagógica, el diseño de lecciones, la valoración de los resultados y experiencias obtenidas en el desarrollo de la lección así como la incorporación de conocimientos nuevos, pueden ser temas para sesiones regulares en cada institución. Estas actividades permiten ampliar y profundizar la acción en el aula que realiza cada docente, es un medio para llevar hacia adelante un programa continuo de investigación para la acción de aula.

# Capítulo 7: Metodología



En la Educación Matemática, metodología y gestión han tenido un gigantesco progreso, en gran parte por la consolidación de la misma como una disciplina científica independiente de las Matemáticas y de la pedagogía general. Más allá de esto, muchas estrategias metodológicas y de labor de aula se han replanteado gracias a las tecnologías digitales.

En este capítulo se ofrecerán indicaciones generales sobre varios componentes del currículo y la acción de aula. Se presentan en seis secciones:

- Sobre áreas matemáticas
- Sobre procesos matemáticos
- Sobre la diversidad de estudiantes
- Sobre el uso de tecnologías
- Sobre actitudes y creencias
- Sobre el uso de la Historia de las Matemáticas

La amplia colección de sugerencias e indicaciones que se consigna aquí es una guía y un reservorio de recursos. No se pretende sustituir la labor profesional en el diseño educativo, ni ofrecer un nivel inadecuadamente específico de las acciones metodológicas. En algunos casos, solamente se dan lineamientos muy generales. En los planes de estudio se ofrecen indicaciones más específicas pero siempre deberán verse como sugerencias y como una orientación a usar de forma flexible y creativa.

## Sobre áreas matemáticas

Resulta adecuado comenzar con orientaciones sobre las áreas matemáticas, pues éstas son las que organizan los planes de estudio. En primer lugar, es relevante visualizar el lugar que ocupan relativamente en los programas, y ofrecer seguidamente algunas indicaciones en cada una.

Las cinco áreas matemáticas seleccionadas participan con distinta intensidad. La siguiente gráfica de estos programas de estudios ha sido construida tomando en cuenta los lugares relativos que se pueden calcular con base en los tiempos que se espera sean dedicados a los tópicos integrados en las mismas.

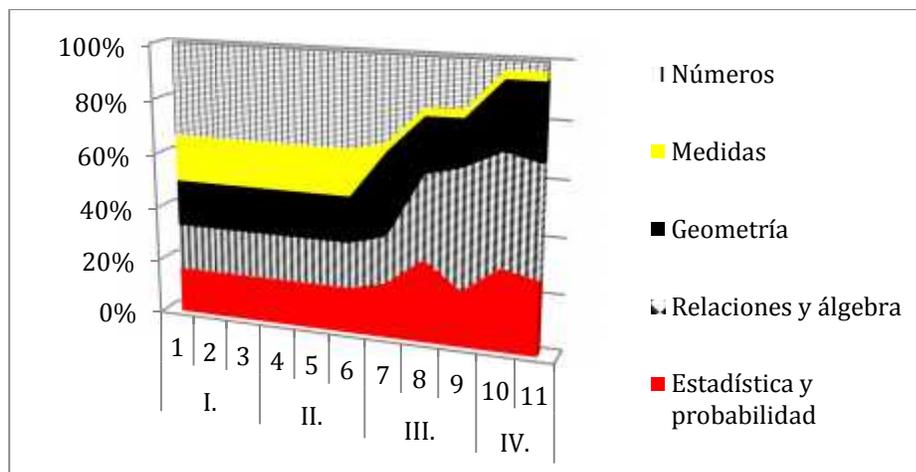


Figura 2. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos.

*Relaciones y Álgebra* es constante en los dos primeros ciclos, se duplica en el tercero y posee el mayor espacio en el Ciclo diversificado. *Geometría* es constante en la Primaria y aumenta un poco en los siguientes ciclos. *Números* ocupa un lugar muy grande en los dos primeros ciclos, es relevante en el tercero y disminuye mucho en el diversificado. *Estadística y Probabilidad* es constante en los ciclos I y II, aumenta en el III y el Diversificado, sin llegar a superar el lugar de *Relaciones y Álgebra*. *Números, Medidas y Geometría* ocupan el 70% de la formación en la Primaria.

Además de una integración entre los diferentes niveles y ciclos educativos por medio de áreas matemáticas comunes, aquí se ofrecen algunas perspectivas que se separan hasta cierto punto de los programas de estudios anteriores:

- Integración de los temas de números y operaciones con un énfasis en la realización de cálculos y fortalecimiento del sentido numérico.
- Un enfoque sobre el área de *Medidas* que busca fundamentar aprendizajes matemáticos y establecer conexiones en todos los niveles educativos.
- Un enfoque en *Geometría* que incluye énfasis en el sentido espacial, el movimiento y el uso de coordenadas y una relación especial con el Álgebra.
- Integración de los temas de álgebra, relaciones y funciones y su inserción desde la Primaria en un proceso gradual.
- Potenciación del lugar de *Estadística y Probabilidad* desde el Primer ciclo hasta el diversificado.

En lo que sigue se ofrecen algunas indicaciones generales sobre cada área.

## Números

Se busca un enfoque más integrado de esos números, operaciones y cálculos, una perspectiva especial de estrecha conexión entre las operaciones y las representaciones numéricas. En la Secundaria, a veces los grandes conjuntos numéricos ( $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ) se han colocado de una manera abstracta, que apela más a la memorización de propiedades que a la utilidad de los números y sus operaciones. Se desea enfatizar un sentido muy práctico de los números y sus propiedades, especialmente mediante la resolución de problemas extraídos del entorno. Un tratamiento conjuntista se guarda para 10º Año y se incluirá en el área de *Relaciones y Álgebra*, aunque con utilidad también en *Estadística y Probabilidad*.

Se pretende darle mayor relevancia a los cálculos, que permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas. En ese sentido, se propone fortalecer el cálculo mental y la estimación. Esta visión se asocia con la resolución de problemas y la contextualización activa. El cálculo mental, por ejemplo, se puede cultivar desde un primer momento como un mecanismo especial para el dominio de propiedades numéricas y como entrenamiento de destrezas mentales; sin embargo, no conviene caer en la tentación de sobredimensionar el valor de los procedimientos por encima de la comprensión conceptual. Sin un dominio de procedimientos se afectan las posibilidades para resolver problemas; a la vez, sin una comprensión conceptual los procedimientos se olvidan con mayor rapidez y no se logran aprendizajes significativos. De igual manera, las actividades de cálculo en el aula permiten fortalecer la búsqueda de soluciones distintas. El registro, explicación, crítica y comunicación de estrategias de cómputo permiten favorecer procesos cognitivos importantes, que ayudan en el desarrollo de la competencia matemática.

*Números* juega un papel central en el Primer y Segundo ciclo, es notable en el Tercer ciclo y se desarrolla transversalmente a otras áreas matemáticas en el Ciclo diversificado. En 7° y 8° Año se introducen los números enteros y racionales y se da cierto valor a las diversas representaciones decimales de los racionales abriendo el camino a la introducción de los números irracionales. El concepto de irracional es complejo desde muchos puntos de vista (epistemológico, cognitivo, pedagógico) y su introducción debe hacerse con cautela.

Se busca robustecer un *sentido numérico*, mediante una apropiación del valor absoluto y relativo de los números; esto refiere, por ejemplo, al uso de los números para representar dimensiones o entidades de la realidad, a la estimación numérica de valores y de las operaciones aritméticas, a la “razonabilidad” de cálculos. El sentido numérico se fortalece con un dominio de las operaciones y de las propiedades **que éstas tienen**, por ejemplo con la descomposición de números usando las propiedades del sistema posicional y decimal ( $15 = 10 + 5$ ). Un sentido numérico permite ver que una suma como  $\frac{10}{11} + \frac{12}{13}$  se aproxima a 2 sin necesidad de hacer los cálculos. Otro ejemplo: aceptar que la media **de pesos de** la gente sea 456 kilogramos mostraría falta de sentido numérico. De igual manera, el sentido numérico, estrechamente asociado a operaciones y cálculos, es el que permite decidir sobre cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar un problema: cálculo mental, estimación aproximada, trabajo sistemático con papel y lápiz, el uso de calculadora o incluso la computadora.

Uno de los propósitos centrales para esta área es potenciar la representación múltiple de números como:  $18 = 10 + 8 = 9 + 9$ , o comprender por ejemplo que los racionales se pueden representar como fracciones, decimales, porcentajes:  $1/2$ ,  $0,50$  y  $50\%$ .

Se quiere que se distingan progresivamente las propiedades de ciertos números: pares, impares, primos, cuadrados, etc. Al avanzar, ya en la Secundaria, deberán identificar y aplicar las propiedades de distintos sistemas numéricos de manera abstracta. Por ejemplo, que algunas propiedades se preservan en unos sistemas numéricos pero no en otros, como sucede con la multiplicación de naturales, que aquí siempre es mayor o igual a los números que se multiplican, pero no sucede así necesariamente cuando estos números son racionales (por ejemplo números entre 0 y 1).

Otro elemento que se desea enfatizar aquí desde el Primer ciclo es el aprendizaje de las relaciones entre las distintas operaciones, lo que prepara el camino para el aprendizaje de propiedades más abstractas, que se estudiarán en el Álgebra.

La introducción de las operaciones toma en cuenta criterios cognitivos, por eso la división que es más compleja que la suma y la multiplicación se debe introducir de manera adecuada en distintos años. En el 1<sup>er</sup> Año se da un énfasis a la suma y la resta (asociadas), en el 2° a la multiplicación y en el 3° se inicia la división. Si bien se propone una aproximación espiral en la introducción y tratamiento de tópicos matemáticos, también se busca en algunos momentos tratar con mayor amplitud y conexión ciertos contenidos, evitando repeticiones inadecuadas en distintos años lectivos que no provocan aprendizajes significativos y a menudo sobrecargan de contenidos algunos niveles del programa de estudios.

En el plan de estudios se trasladó el MCM y el MCD hacia 7°, introducidos por la teoría de números para favorecer un tratamiento más amplio.

Un asunto importante: en el Primer ciclo se incluye ahora el tratamiento con números menores de 100 000, para sintonizar con los reclamos de un escenario en que los números más grandes ocupan un lugar cotidiano.

Por otro lado, el tratamiento de fracciones y decimales se concentra en el Segundo ciclo. El Primer ciclo se destina para un fuerte entrenamiento en números naturales.

En los planes de estudio se usará el conjunto de números naturales incluyendo el cero, es decir se usará:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Esto ha sido lo tradicional en Costa Rica.

## Geometría

Se considera la Geometría como organizadora de los fenómenos del espacio y la forma, y en particular se ven los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de lo real. Es decir, no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos, sino más bien una que asuma la relación geométrica con los entornos espaciales. Esto busca fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas. Se apela de esta forma a la construcción de los aprendizajes geométricos en fases crecientes que van desde lo intuitivo, manipulable, pictórico y visual hacia las representaciones más generales y abstractas. Se refuerza la necesidad de ascender por medio de distintos niveles en los aprendizajes geométricos.

Lo anterior está asociado con un enfoque que busca darle mayor presencia al “sentido espacial”, es decir la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio. De esta manera arranca el sentido de figuras, cuerpos y sólidos desde los primeros años, con las representaciones físicas y objetos del entorno que se pueden acompañar por medio del uso de tecnologías. Por ejemplo, la representación de figuras tridimensionales, su traslación, el uso del color, texturas, sonidos y todas las posibilidades que el recurso multimedia puede proporcionar, en caminos radicalmente nuevos para abordar la enseñanza y aprendizaje de la Geometría tridimensional. Esto se hace de manera gradual en todos los programas desde el Primer ciclo. No es conveniente enfatizar el uso de fórmulas sino más bien la visualización de las formas en el espacio.

Se pretende una introducción de la geometría de coordenadas y analítica adecuada a los distintos niveles cognitivos. La geometría analítica presente en esta área se reduce a la representación en sistemas coordenados de puntos y de algunas figuras geométricas como el círculo. Se estudia la simetría axial, que posee muchos ejemplos interesantes en la realidad, y se introducen, en el Ciclo diversificado, algunas transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). La introducción de estos tópicos favorece los vínculos entre Geometría y Álgebra, una dimensión importante de las Matemáticas contemporáneas.

Se propone introducir el movimiento de las formas geométricas, uno de los temas importantes que se desarrolló desde los siglos XVII y XVIII abriendo una nueva orientación en la Geometría (ampliando revolucionariamente los resultados de la Antigüedad). El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. El tratamiento del movimiento en Geometría había sido difícil de incorporar en los programas escolares por las limitaciones para el

trazado y su presentación gráfica. Con las tecnologías digitales esto cambió radicalmente. La presencia de software diverso de geometría dinámica y de representación geométrica desde hace bastantes años permite aproximarse a los fenómenos geométricos incluyendo esta propiedad esencial. Pero es más que eso: la tecnología permite replantear la lógica del plan de estudios y de muchos de sus contenidos en la Geometría y en otras áreas. Este sentido dinámico se puede introducir en congruencias, semejanzas y simetría lineal o rotacional de objetos que se transforman, lo que permite conexiones estrechas con el pensamiento *funcional*.

Un tratamiento con coordenadas que se apoya en el uso de tecnologías permite oportunidades muy ricas para la representación múltiple de sus objetos geométricos, una de las características importantes de las Matemáticas. Por medio de las coordenadas se pueden representar y manipular procedimientos algebraicos, objetos y propiedades matemáticas de maneras que son muy difíciles de lograr sin las coordenadas. Por otro lado, las actuales perspectivas de la Geometría se colocan con fuerza dentro del Álgebra y las funciones, y eso mismo permite mostrar la visión moderna de esta disciplina matemática, lo que al mismo tiempo será de gran utilidad para muchos estudiantes al cursar estudios superiores.

En la Primaria se propone trabajar la Geometría mediante aproximaciones muy intuitivas y contextualizadas que se deben formalizar en la Secundaria en ciertos temas. La geometría sintética (sin coordenadas) sigue siendo clave en cuanto a la generación de capacidades de razonamiento y prueba. Se destaca en los primeros ciclos el reconocimiento de figuras y propiedades geométricas, se cultiva el sentido espacial y el estudio en el plano de figuras sólidas. Este tratamiento se profundiza en el Tercer ciclo, especialmente en 8° Año se ofrece un énfasis a los aspectos lógicos y deductivos, es decir al razonamiento, argumentación y prueba. Bajo esta visión se pretende tratar los tópicos de congruencia y semejanza de figuras geométricas, introducidos de manera sencilla por medio del concepto de homotecia (lo que es novedoso), con lo que de nuevo se logra una conexión con la geometría de coordenadas.

En el plan de estudios los temas de esta área, sobre todo en la Secundaria, se han seleccionado con base en el criterio de perseguir el desarrollo de la competencia matemática y a la vez el de proporcionar los contenidos y habilidades instrumentales para una formación profesional posterior. Se excluyeron de la propuesta aquellos contenidos cuyo aporte no favorecía a ninguna de las dos.

La trigonometría se introduce en 9° Año favoreciendo la conexión con la Geometría. Es primordial enfatizar el uso de modelos donde participa la trigonometría.

## Medidas

La medida es una característica de algunos objetos físicos (o matemáticos). No todo atributo es medible cuantitativamente, y en el caso de los que admiten la medición siempre hay un *sentido de aproximación*. Tanto por el sujeto que la haga como por el instrumento que se utilice aparece un porcentaje de error. Este es uno de los asuntos clave de esta área. Las medidas están emparentadas con el sentido numérico, con la estimación en particular. Un mismo atributo que es común a varios objetos permite la comparación de mediciones, y por ende apreciar semejanzas y diferencias entre los objetos. En un mismo objeto sus atributos son susceptibles de poseer relaciones cuyo estudio puede hacerse a través de medidas. Por ejemplo, un triángulo dibujado es un objeto que posee perímetro y área, existe una relación entre ambos. Y más aún, cuando se

introducen cambios en un atributo puede ser que otros permanezcan invariantes o que cambien de cierta manera; por ejemplo, puede haber varios rectángulos con área de 60 centímetros cuadrados pero con perímetros distintos: se cambian los valores del ancho y el largo pero el área sigue igual. Se propone el área de las medidas como una fuente muy rica para introducir objetos y procedimientos matemáticos, para hacer conexiones con otras áreas matemáticas y no matemáticas y con muchas situaciones del entorno. Las medidas pueden apoyar el estudio de varios conceptos matemáticos, como el cambio y la invariancia bajo algunas transformaciones. De la misma forma, las unidades de medidas se pueden manipular como variables (especialmente cuando se hacen conversiones de unidades) y por lo tanto ser capaces de motivar un tratamiento por medio de procedimientos algebraicos más generales. Temas como la proporcionalidad matemática o la semejanza de figuras se pueden generar usando mapas, que expresan relaciones de medidas de posiciones mediante escalas diversas. El uso de escalas no lineales, por ejemplo logarítmicas, pueden usarse para crear modelos reales, en los niveles finales de la educación Secundaria.

Las medidas se asocian en el Primer ciclo más al área de *Números* y en el Segundo ciclo a *Geometría*, pero también se requiere para algunos tópicos de *Estadística* y *Probabilidad*. En el Tercer ciclo y el Ciclo diversificado, *Medidas* se introduce de manera transversal a las otras áreas matemáticas. Esta presencia transversal de medidas en la Secundaria contribuye a un tratamiento contextualizado de varios temas matemáticos y a un sentido de realidad que deben poseer las Matemáticas escolares.

Aquí se han incorporado medidas relativas a dimensiones de la informática como la capacidad de almacenamiento y de velocidad de transmisión de los datos, lo que sintoniza con el entorno informatizado y lleno de tecnología que vivimos.

## Relaciones y Álgebra

Hay varias indicaciones relevantes sobre esta área. Las funciones, que usualmente han tenido en el pasado sólo un tratamiento muy abstracto de relaciones entre elementos de conjuntos (correspondencias, dominios, codominios, ámbitos, etc.), se colocan aquí en otra perspectiva más concreta: relaciones de cambio entre 2 variables (que dependen entre sí). Las funciones vistas así están asociadas a relaciones más generales, como pueden ser las relaciones de orden (menor o mayor que) o las relaciones de divisibilidad, etc. Asuntos como la proporcionalidad, los porcentajes, las velocidades o razones de cambio forman parte de esta área.

El concepto de cambio o variación, que también es común al análisis de datos, forma parte central de los temas de esta área. Se podría decir que los procesos de cambio pueden ser modelados por las relaciones y funciones matemáticas, y éstas pueden tener distintas representaciones: gráficas, tabulares, simbólicas.

Otro asunto importante: se favorece un tratamiento “funcional” de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de manera gradual.

La asociación entre funciones y álgebra permite darle coherencia a muchos contenidos que suelen estar dispersos en los planes de estudio usuales.

Los temas de esta área, por ejemplo en el Ciclo diversificado, poseen estrecha conexión y continuidad con la formación profesional en muchas carreras que requieren matemáticas. Por eso, en los últimos años de la Secundaria se insiste en contenidos y habilidades de las funciones, con una fuerte orientación hacia la resolución de problemas y la modelización. Por ejemplo, las funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas) se tratan con esta visión novedosa y estimulante. El aprendizaje y utilización de las funciones en diversos contextos cierra la formación matemática que aporta esta área.

Se ha considerado relevante el uso de tecnologías de cómputo algebraico en temas como la factorización o el manejo de polinomios, ya que dan cabida natural a la participación de nuevos sistemas de software o hardware, y esto entonces se consigna en el replanteamiento de algunos de los contenidos curriculares y sobre todo el enfoque con el que se introducen.

Se integran y concentran los tópicos algebraicos; por ejemplo, se concentra el estudio de lo lineal (ecuaciones y funciones) en el 8° Año y lo cuadrático (ecuaciones y funciones) en el 9° Año. Esto prepara la introducción en 10° Año del estudio abstracto de las funciones. Con esta visión, que ha permeado los programas con relaciones y funciones desde el Primer ciclo y que se profundiza en el Tercer Ciclo, se logra con mayor facilidad el aprendizaje de los aspectos más abstractos de las funciones.

Esta área matemática, en conexión con otras áreas en este programa de estudios y con una buena preparación desde la Primaria, se convierte en el corazón de la educación Secundaria.

## Estadística y Probabilidad

*Estadística y Probabilidad* adquiere un relieve mucho mayor en este plan de estudios que en los anteriores. Antes, al desvanecerse en el Ciclo diversificado y al no incluirse probabilidad aplicada o estadística, quedando por fuera de las pruebas del Bachillerato, se quitaban poderosos medios para la comprensión y organización de la información. A partir de los años Noventa se ha generalizado su uso y potenciado su lugar en los programas de los distintos países por su notable presencia en la vida cotidiana. Esta es un área que permite visualizar mejor el papel de las Matemáticas y contribuir con actitudes y creencias positivas en torno a esta disciplina. Por eso esta área posee un lugar estratégico, que alimenta directamente el sentido de la competencia matemática alrededor de la descripción de la realidad y el cultivo de la resolución de problemas en contextos diversos.

La adición de más tópicos de probabilidad en el presente programa busca formar en el pensamiento aleatorio y en el desarrollo de capacidades para abordar el azar, lo impredecible, la incertidumbre, características que participan en el conocimiento y en la vida de múltiples maneras. La probabilidad conecta mucho con *Números y Geometría*, y se debe tratar de manera informal en los primeros años para ir avanzando en su abstracción en la Secundaria.

El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna. En el siglo XXI se requiere de personas capaces de comprender, interpretar y usar la información para entender la realidad, resolver distintos problemas y tomar decisiones inteligentes. Los temas de la Estadística y la Probabilidad son cada día un requisito para poder comprender lo que pasa en el mundo y poder actuar. Los tópicos de esta área se

introducen de forma paulatina, intuitiva y práctica desde el Primer ciclo y preservando ese tono en toda la educación Primaria. Ya en el Tercer Ciclo se repasan y formalizan los conceptos y técnicas introducidas, que se resumen y completan en el Ciclo diversificado. En todo momento, lo que es apenas natural en esta área, las temáticas se presentan a través de problemas reales, que generan conexiones con otras materias como Ciencias y Estudios Sociales, y que permiten favorecer actitudes positivas sobre las Matemáticas.

Algunas consideraciones sobre esta área resultan iluminadoras: por un lado, uno de los temas fundamentales que se desarrolla persistentemente es el de la variabilidad de los datos. Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida. De igual manera, un conjunto de datos requiere instrumentos para su descripción (media, mediana, moda, rango, desviación); su enseñanza debe hacerse en buena parte en función de su aplicación en el análisis de la información y resolución de problemas y no como objetos en sí mismos. Esto es relevante, pues a veces se ve equivocadamente la Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos.

Las representaciones de fenómenos estadísticos deben pasar de formas simples a más complejas en los distintos niveles de escolaridad, siempre de lo más intuitivo en los primeros años a lo más técnico en los últimos años, sin olvidar que un mismo conjunto de datos permite realizar distintas representaciones.

Un detalle sustancial a tomar en cuenta en la enseñanza de la Probabilidad especialmente en la Primaria es la enseñanza de la diferencia entre los números que representan valores de datos y aquellos valores de frecuencia con que ocurren esos primeros valores. Se encuentra en la esencia de esta disciplina la distinción entre, por ejemplo, que no se pueda predecir que se obtenga escudo o corona al lanzarse una moneda, mientras que sí se pueda determinar la tendencia de un número grande de lanzamientos.

Se sugiere una relación estrecha con el uso de algunas tecnologías digitales, puesto que muchos de los datos pueden y deben “procesarse” por medio de ese tipo de instrumentos. Esto es relevante pues existe un aumento vigoroso en instrumentos tecnológicos de análisis de datos y modelación matemática. Internet proporciona hoy acceso a una variedad de datos que pueden ser explorados en la clase de Estadística.

Un egresado de la educación Secundaria costarricense debe ser capaz de comparar y juzgar en la vida cotidiana la validez de argumentos basados en datos, identificar los errores y distorsiones comunes en los medios de información, descubrir la racionalidad de afirmaciones sobre la probabilidad de eventos, así como manejar las ideas básicas de muestreo y realizar estadísticas aplicadas simples. Al igual que la lectura y escritura, el manejo de la Aritmética, la Geometría, el Álgebra y otras formas de matemáticas han sido parte de la alfabetización de la ciudadanía durante épocas: la Estadística y la Probabilidad deben concebirse como parte de la alfabetización ciudadana en el actual escenario histórico.

## Sobre procesos matemáticos

En congruencia con los fundamentos teóricos de este currículo, una vez ofrecidas algunas orientaciones de método sobre los conocimientos y habilidades que organizan los planes de estudio, es relevante brindar sugerencias sobre los procesos matemáticos, es decir formas de comprender, aprender y usar los conocimientos que promueven capacidades cognitivas transversales y la competencia matemática.

### Indicaciones para cada proceso

#### Razonar y argumentar

El proceso se activa en todas las áreas de múltiples maneras, por ejemplo en el estudio de regularidades y patrones, en la justificación de la congruencia de triángulos, la elección de una representación matemática y su manipulación, en la solución de ecuaciones, entre otros. La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar.

Un lugar relevante lo ocupa la acción de conjeturar, pues es un camino central para el descubrimiento. Se trata en general de plantear una conjetura y buscar los medios para justificarla (en adecuación a cada nivel educativo), ya sea por medio de materiales concretos, diagramas, calculadoras u otros instrumentos. Las conjeturas deberán hacerse sobre tópicos más generales o abstractos conforme se progresa en la formación escolar y de modo creciente se deberán usar las formas matemáticas más precisas o técnicas. La argumentación también debe cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas. Así mismo, se deben ir introduciendo poco a poco las formas de razonamiento por contradicción, inducción, uso de contraejemplos y las diferentes formas de la deducción.

Este proceso se puede reforzar por medio de la actividad de grupo, en la que se contrasten las argumentaciones o justificaciones que aporta cada estudiante, siempre con la guía docente. De igual manera, los errores que se cometen son oportunidades muy útiles para mejorar los procesos de razonamiento matemático y hacer progresar la competencia matemática general asociada.

#### Plantear y resolver problemas

Hay algunos elementos que vale la pena subrayar. En primer lugar, que no todo problema permite conducir a ideas matemáticas aunque sea interesante o divertido, por eso la acción docente es decisiva para el diseño de problemas apropiados. En segundo lugar, en cada área matemática es posible realizar este proceso de distintas maneras, pero siempre gradualmente. Las estrategias para la resolución de problemas deben ser introducidas no de manera abstracta sino en las instancias específicas en los problemas escogidos: a veces será potenciar el uso de diagramas, otras el reconocimiento de patrones, o la prueba con la exhibición de casos, etc. De igual manera, es necesario entrenar a las y los estudiantes en las diferentes etapas de la resolución de problemas como la comprensión de los mismos, el trazado de planes de acción y la evaluación o monitoreo de las acciones.

El uso de modelos, por otra parte, debe hacerse de forma escalonada con la enseñanza de las diversas estrategias. Las actividades de modelización sólo se pueden dar con un compromiso estudiantil activo que es vital para que la contextualización tenga éxito en la enseñanza. La

modelización es una acción que se desarrolla de una manera natural y privilegiada cuando se inscribe en un marco educativo donde es central la organización de las lecciones por medio de problemas.

### **Comunicar**

Este proceso está asociado a una característica esencial de los quehaceres matemáticos: una idea matemática para ser “correcta” debe ser aceptada por una comunidad profesional de matemáticos. Existen reglas específicas para hacer esto, lo cual es importante de incluir en los programas escolares. El proceso sugiere la comunicación en distintos niveles y formas, desde las más simples como verbales o escritas, hasta gráficas, simbólicas y formales.

Debe señalarse que no todo tópico se presta para realizar actividades ricas de comunicación. Por ejemplo, los algoritmos son en ese sentido menos útiles que los conceptos, sin embargo mediante una acción docente adecuada es posible desencadenar comunicación matemática. La comunicación y el pensamiento matemático, en particular la argumentación, están entrelazados en los quehaceres matemáticos. *Comunicar* obliga a precisar el pensamiento.

En el aula, por ejemplo, se puede usar la comunicación matemática para introducir nuevos conceptos (pidiendo la elaboración de diagramas, de expresión de ideas, de colocación de símbolos y expresiones), y también solidificar el propio pensamiento estudiantil sobre las ideas que se introducen en la clase. El desarrollo de este proceso permite conocer otros puntos de vista que pueden mostrar aspectos distintos de una entidad matemática. Y de igual manera en las actividades asociadas al proceso *Comunicar* es posible ensanchar la criticidad a través del natural cuestionamiento racional de las afirmaciones y argumentaciones expresadas.

El lenguaje matemático específico -a veces abstracto y muy técnico- es el vehículo a través del cual viajan las comunicaciones matemáticas, y por eso debe entrenarse. Hay una similitud entre la comunicación matemática y aquella que se realiza en otras áreas: es necesaria la práctica constante y la guía docente. Pero precisamente por su tecnicismo y abstracción es necesario realizar este proceso de forma paulatina en todos los niveles educativos.

### **Conectar**

Es necesario tener una visión amplia de lo que este proceso supone en el medio educativo. Las conexiones se pueden desarrollar en muchos contextos: por ejemplo, dentro de cada área matemática (como cuando se aplican los procedimientos y operaciones de los números naturales en los racionales o reales). Pero también entre las distintas áreas matemáticas y de manera general con otras materias. Las Matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar los procesos transdisciplinarios que desde los primeros años escolares se deben cultivar. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces.

Este tipo de formación escolar permite lograr una comprensión más profunda y precisa de los objetos matemáticos, pero además permite cultivar la abstracción estudiantil, pues la generalización y universalización de métodos e ideas obliga a mayores abstracciones. Observar la aplicabilidad e interconectividad de las Matemáticas refuerza su aprecio y disfrute.

Sin embargo, no es tan sencillo introducir las conexiones en el aula. Se requiere dominio de las distintas áreas matemáticas así como de algunos conocimientos precisos para apoyar estas

conexiones con problemas especiales. Es importante planear anticipadamente la introducción en el aula de las conexiones de los tópicos de una lección.

## Representar

La representación y manipulación de objetos matemáticos no deben verse como un fin en sí mismo, debe entenderse que estas representaciones y sus leyes expresan a la vez acciones mentales y características de los objetos matemáticos. *Representar* debe estar estrechamente ligado a *Comunicar*, *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas*; de lo contrario se distorsiona su sentido hacia un uso meramente mecánico, sin realmente poder alcanzar la comprensión.

Las representaciones matemáticas por símbolos, expresiones, diagramas, gráficos o por medios tecnológicos son productos elaborados históricamente, por lo que cambian y exigen acciones de enseñanza y aprendizaje. Si bien al principio de la escolaridad son posibles formas no convencionales o incluso intuitivas y personales para representar ideas matemáticas, es importante que se vayan enseñando gradualmente formas más convencionales y técnicas. El aprendizaje de las representaciones matemáticas formales permite que se pueda realizar la comunicación, pues ofrece el lenguaje y los objetos para entenderse; si cada quien funcionara con sus propias representaciones individuales no habría lugar para la comunicación.

Esto es muy relevante: las representaciones de ideas y objetos matemáticos pueden fácilmente oscurecer la complejidad de las ideas y objetos que representan. Por ejemplo, cuando se escribe  $x$  para representar una variable con mucha sencillez y utilidad, se puede perder de vista que el significado matemático de lo que es una variable es complejo y difícil de comprender (y requiere acciones educativas para su aprendizaje). Sucede lo mismo con el sistema posicional decimal, el cual nos permite un uso fácil en la realización de operaciones aritméticas que puede ocultar la complejidad de las acciones mentales y matemáticas que representa.

El cultivo de las representaciones diversas permite una organización mejor de las ideas matemáticas, para así avanzar en su comprensión y el desarrollo de nuevas formas matemáticas. Esto es lo mismo que ha sucedido en los asuntos matemáticos más generales no asociados con la educación: sin las representaciones simbólicas y gráficas que construyeron los matemáticos no hubiera sido posible el progreso de nuevas etapas en las Matemáticas.

Es esencial insistir en las representaciones diversas para los objetos matemáticos. Se trata de mostrar desde la sencillez de expresar de diferentes maneras un número ( $5+3$ ,  $4+4$ ,  $8$ ) o expresión [ $3x+3$ ,  $3(x+1)$ ], hasta otras representaciones más complejas y abstractas. Cada representación de un objeto matemático puede revelar un aspecto o propiedad de una manera especial. Por ejemplo,  $\frac{3}{2}$  expresa un número por medio de una operación o una relación, lo que no hace el mismo número 1,5. Escoger la representación matemática oportuna para resolver un problema o construir un modelo es uno de los tópicos más relevantes en la enseñanza de las Matemáticas, práctica que se ha visto favorecida por el uso de tecnologías digitales.

La representación matemática incorpora, al mismo tiempo, una abstracción de propiedades, permitiendo su manipulación eficaz ya sea para construir nuevos conceptos o teorías, para resolver problemas, construir modelos o bien para expresar entidades más complejas en distintos contextos.

Es muy importante que de manera escalonada se pueda avanzar en la abstracción de las representaciones matemáticas para potenciar el conjunto de matemáticas que se pueden aprender y usar. Con el progreso de distintas formas de representación, cada vez con mayor abstracción, se ofrecen más oportunidades para construir modelos más interesantes y complejos en distintas situaciones.

## Otras sugerencias sobre procesos

*Adaptación al nivel educativo y al área matemática.* Estos procesos se deben identificar y adaptar apropiadamente en cada nivel educativo; además, su participación es distinta en cada una de las áreas matemáticas. La comunicación en números, operaciones y cálculos es tal vez más fácil de realizar en la educación Primaria que en las otras áreas. En algunos años lectivos ciertos tópicos y áreas favorecen un proceso más que otro. Por ejemplo, en 8º Año congruencia y semejanza de figuras (en Geometría) o la introducción de los irracionales en 9º Año (en *Números*) promueven el proceso *Razonar y argumentar*. Las conexiones con el entorno y otras materias son fáciles de realizar en *Estadística y Probabilidad* en todo momento, y las conexiones entre Geometría y Álgebra siempre se ven favorecidas. La acción docente deliberada es la que propicia que se active un proceso y, por eso, la planificación pedagógica y el diseño de tareas matemáticas deben efectuarse cuidadosamente.

*Diseñar problemas especiales.* Hay problemas especiales más ricos que estimulan más procesos que otros. Un problema no debe diseñarse orientado “exclusivamente a procesos”, sino más bien éstos deben emerger de problemas orientados al aprendizaje de habilidades.

*Enriquecer problemas para lograr una mayor activación de procesos.* Un mismo problema puede ser modificado en sus variables didácticas para que resulte más rico. Enriquecer problemas es una de las tareas más importantes en la enseñanza de las Matemáticas.

*Implementar varios procesos matemáticos en un problema.* No siempre será posible desarrollar los cinco procesos centrales en una lección. En algunas se podrá proponer unos procesos u otros, o uno solo, pero es importante tomar esto en cuenta a la hora del planeamiento y del desarrollo de la lección. Al escogerse un problema contextualizado como centro generador de una lección se apela a *Plantear y resolver problemas*, pero también es posible activar allí *Razonar y argumentar*, *Conectar y Comunicar*. No todo problema se presta para ello, pero se deben diseñar tareas donde sea posible activar esos procesos. Una ventaja de organizar la lección por medio de problemas contextualizados es la posibilidad de que casi todos los procesos matemáticos entren en juego. Pero todo depende de cómo se planifique y cómo se desarrolle la lección.

*Propiciar la redacción y la comunicación de respuestas.* Una actividad privilegiada que convoca estos últimos procesos matemáticos es la redacción cuidadosa de las soluciones y su comunicación oral o escrita en el subgrupo o en la clase completa.

## Sobre la diversidad de estudiantes

Las circunstancias educativas en Costa Rica no son iguales en todas las instituciones y regiones, hay diferencias entre lo urbano y lo rural, entre las zonas de mayor desarrollo socioeconómico y las urbano marginales. A esta diversidad de realidades que genera distintos niveles en los aprovechamientos escolares se suma también la diversidad de condiciones individuales (desde cognitivas y personales hasta culturales) en relación con los aprendizajes.

De alguna forma se debe ofrecer oportunidades adecuadas a todas y todos y cumplir con el fin de la educación nacional que promueve una perspectiva inclusiva y democrática. Si se restringen o minimizan los programas a localidades o sectores sociales por razones de condición socioeconómica o geográfica, se profundiza en las desigualdades sociales. La idea aquí ha sido proponer un currículo general base para todos con los contenidos necesarios y suficientes para generar los conocimientos, y sobre todo las destrezas y capacidades matemáticas que requiere el contexto en que vivimos.

Es fundamental comprender, sin embargo, que las acciones para la atención de la diversidad se encuentran en manos de docentes y de autoridades educativas y no en los planes de estudio. Lo que el currículo puede hacer es ofrecer algunos medios generales que pueden adoptarse.

*Es necesario un enfoque inclusivo en el aula.* Es importante ofrecer opciones a los diversos segmentos de estudiantes en los distintos niveles educativos. En el plano internacional las opciones para canalizar alternativas a los sectores de estudiantes son muy variadas. En algunos casos se hace por medio de segregaciones por rendimiento que incluso pueden empezar en la Primaria. En el contexto de Costa Rica, aparte de factores materiales y logísticos y en particular por razones culturales e históricas, no se podría introducir segmentaciones en la educación. Aparte de eso, hay razones pedagógicas y educativas de fondo por las que no resulta adecuado un enfoque que haga segregaciones, y más bien es necesario un enfoque *inclusivo* que fomente actitudes colaborativas en la acción de aula.

*Tomar en cuenta a estudiantes con rezago.* En un enfoque inclusivo es necesario dar atención particular a estudiantes rezagados, afinando las tareas matemáticas que se proponen y diseñando la intervención específica docente en las diferentes fases de la lección. Los rezagos pueden responder a muchas circunstancias y pueden ser superados si se les da la atención adecuada. Es necesario que se tome en cuenta este segmento de la población estudiantil en el planeamiento de su lección y en general en su acción educativa, para poder desarrollar los fines de aprendizaje que se propone. En los casos de adecuación curricular, según la reglamentación oficial es responsabilidad docente cumplir con las indicaciones que emanan del marco jurídico que rige estas situaciones.

*El tratamiento de la complejidad sirve para atender la diversidad.* Una manera de dar respuesta a las necesidades y cualidades distintas de la población estudiantil es por medio de un adecuado tratamiento de la complejidad de los problemas matemáticos en el aula. El asunto se vuelve metodológico. Resulta importante identificar las aptitudes y la disposición hacia las Matemáticas y ofrecer acciones de aula adecuadas a las distintas necesidades. Docentes con mucha experiencia ya suelen hacer esto de manera regular. Se trataría de establecer acciones con distinto peso en los niveles de complejidad de los problemas: para algunas personas un peso mayor en problemas de reproducción y de conexión, para otras un peso mayor en los de conexión y reflexión y para la mayoría probablemente una distribución “equilibrada”. Es una decisión que debe recaer en manos de los y las docentes. También esto puede dar lugar a acciones extra clase adicionales.

*Debe existir atención especial de estudiantes con mayor talento o disposición hacia las Matemáticas.* Ha sido insuficiente el apoyo para estudiantes con talento o con mayor disposición hacia el aprendizaje de esta materia. Acciones como Olimpiadas Matemáticas o programas en el Ciclo diversificado como MATEM (organizado por las universidades públicas) son útiles en esa dirección pero no son suficientes, y este segmento de estudiantes también debe recibir atención específica.

Esto se puede hacer con matemáticas de mayor profundidad, lo que además puede impactar la clase y los aprendizajes de manera positiva. No sólo se da respuesta justa a las necesidades de aprendizaje de estas personas, sino que su acción se puede introducir en el aula de forma colaborativa para beneficiar a todos los segmentos estudiantiles. Quienes tengan más talento o mayor disposición al estudio pueden apoyar y ayudar a estudiantes con menos avances en los aprendizajes y esto se asocia con valores generales que la educación debe potenciar, como la equidad, inclusividad y la solidaridad.

## Sobre el uso de tecnologías

El uso de tecnologías es central para enriquecer y redimensionar la resolución de problemas y las estrategias educativas. En estos planes de estudio se incorporan mediante el tratamiento de varios tópicos, aumentando su uso con el avance en los años lectivos. Esto se hace por medio de indicaciones puntuales, así como otras que se colocan al final de cada área en cada ciclo. La selección de algunos contenidos asume este enfoque (como las rotaciones en el Ciclo diversificado). No obstante, las habilidades específicas que se incluyen son relativamente pocas. Esto es así precisamente porque el país no posee todas las condiciones formativas para una introducción más intensa. La forma en que se coloca en los planes, sin embargo, permite que se puedan usar las tecnologías en diversas condiciones. Con el tiempo se deberá intensificar el uso de las tecnologías.

*Identificar el sentido pedagógico, no usar tecnología por la tecnología misma.* El uso de tecnología en el aula debe hacerse de manera apropiada. Existen diferencias en los fines y posibilidades de cada tecnología. Es necesario tener muy claro que el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste.

*La calculadora debe ser un auxiliar.* Debe insistirse en un uso de las calculadoras desde la Primaria para corroborar operaciones (cálculo mental, estimación) y como un auxiliar en la resolución de problemas y situaciones contextualizadas.

*Usar la computadora para visualizar y experimentar las Matemáticas.* La computadora es un recurso muy poderoso para utilizar en la enseñanza de las Matemáticas, siempre y cuando responda a los fines pedagógicos. Los llamados instrumentos dinámicos, por ejemplo, son especialmente relevantes: del tipo *Geometer's Sketchpad*, *Cabri*, *Fathom* o *Geogebra*, pues tienden a reducir las fronteras entre estudiantes y quienes han elaborado las actividades. Algunos instrumentos (como los paquetes señalados, donde se afirman actividades abiertas que no terminan) están más cerca del punto de vista estudiantil que del docente (como por ejemplo *Java Sketchpad*). Son instrumentos para facilitar cómputos, para apoyar la visualización de entidades y relaciones matemáticas, para favorecer la experimentación matemática, orquestar comunicaciones, formar redes y matematizar lo real externo.

*Usar algunos paquetes informáticos especiales.* En el actual momento histórico, el acceso de las personas a una computadora es amplio en el país, tanto en el entorno social externo como interno a la entidad educativa. Se propone aquí de manera apropiada a los niveles educativos el uso de paquetes informáticos de tres tipos:

- Geometría dinámica.
- Cálculo y representación gráfica (CAS).
- Simulación de experimentos estadísticos dinámicos.

En todos ellos existe excelente software libre -fácil de usar- que puede permitir el desarrollo de varios tópicos de matemáticas con mayor facilidad, proyección y experimentación.

*Es importante el papel de Internet.* Ofrece a las Matemáticas y su enseñanza múltiples vínculos con el entorno estudiantil y además con las principales tendencias sociales, culturales y educativas en el planeta. Dimensiones que se incorporan:

- Indagación, valoración y selección de información pertinente para tópicos matemáticos; por ejemplo páginas web con información de situaciones matematizables, censos, mapas Google, figuras, etc.
- Reforzamiento de aprendizajes de matemáticas mediante sitios especializados con plataformas interactivas.
- Aprendizajes interactivos y colaborativos en redes virtuales educativas, también mediante plataformas especiales.

*Multimedios son muy útiles.* Los medios audiovisuales son hoy un extraordinario instrumento para generar motivación en el aula, para consignar pasos de la lección e incorporar elementos del entorno. En particular, tanto para propiciar el tratamiento de temas como para revisar o analizar los procesos educativos en el aula, los videos se han convertido en un instrumento muy útil.

*La evaluación del uso de tecnologías.* Se propone que el uso de la tecnología se evalúe por medio de los problemas o ejercicios planteados, donde su utilización representa un componente oportuno. Por ejemplo, si en un problema el uso de la calculadora es significativo para su tratamiento o solución (cálculos muy grandes que sin calculadora tomarían muchísimo tiempo, o el valor de una función en un punto que resulta necesario para el ejercicio), ese elemento debe ser tomado en cuenta. Entonces, no se trata de evaluar la manipulación tecnológica en sí misma sino en función de problemas adecuados.

## Sobre actitudes y creencias

Es fundamental que se aprovechen las oportunidades que se tienen en el aula para arraigar las actitudes que se han seleccionado como centrales. Esto es trascendental, pues puede existir una íntima conexión entre la actitud y el rendimiento en las Matemáticas si se reducen las sensaciones negativas que muchas veces existen entre estudiantes y padres de familia sobre las Matemáticas. Que se tenga presente no significa que en cada tópico sea posible ni conveniente introducirlo como objetivo a desarrollar, pues puede distorsionar el significado y el éxito de la lección. La potenciación de actitudes positivas hacia las Matemáticas se deriva aquí de varias orientaciones globales. Por ejemplo, la escogencia de los ejes articuladores trabaja en esa dirección apelando al interés estudiantil y a un involucramiento en el aprendizaje. Otra: el uso correcto de tecnologías es un poderoso recurso de motivación, pues además de asociarse con la realidad actual de nuestra juventud, inmersa en un mundo lleno de tecnología, se refuerzan dinámicas activas e interactivas que pueden facilitar la atención estudiantil.

Aquí se proponen algunas ideas para robustecer actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas.

*Poner atención a las creencias, pues son base de actitudes.* La mayoría de las actitudes están asociadas a creencias que a veces son muy difíciles de cambiar, porque pueden estar incrustadas en la cultura local. Pero si se sabe cuáles son esas creencias y se dispone de apoyo pedagógico es posible cultivar en las personas nuevas creencias y la generación de actitudes positivas asociadas a ellas. Cuando alguien piensa que al dedicar más de 10 minutos a un problema se pierde el tiempo, pensando que está mal formulado o porque es para genios y no puede hacerlo, se está frente a una creencia típica en la cultura local. Es una creencia según la cual el dominio de las Matemáticas requiere un talento que se trae al nacer, y que si no se tiene pues “no hay nada que hacer”. Frente a esa creencia falsa es necesario cultivar aquella que afirma que el dominio de las Matemáticas se logra con el trabajo y la perseverancia. Al trabajar con un problema más de 10 minutos, media hora o una hora aunque no salga la solución, se logra aprendizaje, pues se entrena la mente, se repasa teoría, se exploran alternativas fallidas y se aprende sobre los límites de los métodos. Esto es fundamental, pues precisamente los problemas que permiten realizar procesos matemáticos fundamentales y originar capacidades matemáticas exigen dedicación, tiempo, esfuerzo y perseverancia. Si sólo se está en disposición de realizar esfuerzos mínimos difícilmente se podrá pasar de problemas del nivel de reproducción y con ello se limitará fuertemente el progreso de su competencia matemática.

*Involucrar a los familiares.* Especialmente en los dos primeros ciclos, es elemental involucrar en el desarrollo de actitudes y creencias positivas a los familiares, con tal de fomentar el desarrollo matemático del niño o la niña, proporcionar un ambiente rico en lenguaje, estimular la exploración y valorar la originalidad. Es necesario abordar el tema con ellos de forma explícita.

*Realizar un diagnóstico y llevar un registro escrito de actitudes y creencias.* Al igual que se lleva un registro de los rendimientos escolares, se debe llevar uno sobre las actitudes y creencias que se perciben en el aula. Es una tarea muy relevante que se debe adecuar a cada ciclo educativo. En los primeros dos ciclos se puede obtener la información por medio de algunas preguntas específicas: ¿le gusta contar? ¿Qué piensa que son las Matemáticas? En otros niveles se puede hacer alguna actividad sobre el uso de las Matemáticas en la sociedad (una circunstancia histórica o un recorte de periódico con una noticia sobre matemáticas, por ejemplo), permitiendo obtener

esta información.

También se puede hacer una pequeña encuesta cuidadosamente elaborada. En el Tercer ciclo es más provechoso este registro de las actitudes y creencias, pues se trata de un contexto escolar con poblaciones por lo general muy heterogéneas, debido a que provienen de diferentes escuelas. Una vez que se identifique quienes expresan actitudes o creencias negativas, lo que a menudo se asocia a malos rendimientos, se debe insistir para que alcancen los niveles de participación, confianza, respeto, autoestima y perseverancia deseados. Lo deseable es que este tipo de actitudes o creencias negativas no queden inadvertidas y se puedan intentar acciones para revertirlas.

*Se requiere planificar muy bien el tiempo.* Tanto para disfrutar de las Matemáticas como para tener una mejor comprensión de sus ideas y procedimientos fundamentales, se requiere tener suficiente tiempo para probar, experimentar, construir, equivocarse, reflexionar. Eso implica que debe existir un planeamiento muy metódico del tiempo en las lecciones.

*El lenguaje que se utiliza es importante.* Hay que estar atento a frases como “qué fea es la Matemática”, “esto nunca me va a salir”, “nunca voy a poder”, “las mates son demasiado difíciles”, “las Matemáticas no sirven para nada”, “a mí las Matemáticas siempre me han costado”, etc. No es pertinente expresar frases como “este tema sí es muy complejo”, “en este año las Matemáticas son bien difíciles”, “aquí no va aprobar casi nadie”. El lenguaje que se usa es clave para que se aprecien y disfruten las Matemáticas, para impedir sensaciones negativas y para potenciar la autoestima.

*Monitorear el rendimiento individual.* Uno de los desencadenantes más fuertes de actitudes negativas son las dificultades en las tareas o problemas matemáticos. Es conveniente monitorear el trabajo de cada estudiante e intervenir oportunamente cuando observa que alguien está presentando dificultades para avanzar con las actividades propuestas.

*La interacción docente-estudiante es esencial.* Es relevante tener en el aula una actitud activa, brindando especial atención a estudiantes en dificultades e igualmente a quienes tienen talento. Se puede interrogar acertadamente para indagar si realmente esa persona está aprendiendo los conceptos. Cada estudiante debe sentir que sus aportes son necesarios para el desarrollo de las lecciones. Es sustancial que se valoren con cuidado las diferentes aproximaciones que aportan para detectar aquellos elementos que pueden reconocerse y usarse para fortalecer la autoestima.

*Promover conexiones con otras materias.* Las múltiples conexiones que las Matemáticas tienen con las distintas disciplinas y áreas del saber es otro elemento que debe ser aprovechado para mostrar la utilidad de las Matemáticas. En la escuela primaria hay buenas oportunidades para hacer esto pues una persona se encarga de impartir casi todas las materias. En la Secundaria se puede coordinar con colegas de otras materias.



**Tabla 7. Algunas indicaciones para actitudes-creencias**

<b>Actitud</b>	<b>Indicación</b>
Perseverancia	<i>Tratar adecuadamente los errores.</i> Si una persona se equivoca, no se debe permitir que se dé por vencida, debe insistirse para que continúe buscando estrategias que le permitan encontrar la respuesta para enfrentar y resolver los problemas. Los errores deben verse como oportunidades para revisar la teoría, explorar diferentes aproximaciones y mejorar los procesos de razonamiento. Debe transmitirse la idea de que al cometer un error no se pierde el tiempo, sino que más bien se aprende sobre una solución que no era la adecuada para esa situación. Equivocarse es también aprender.
Confianza en la utilidad de las Matemáticas	<i>Usar el entorno.</i> El uso de elementos de la zona geográfica en el entorno favorece la percepción de utilidad de las Matemáticas para resolver problemas.
	<i>Enfatizar que las Matemáticas sirven para resolver todo tipo de problemas.</i> Desde los primeros años en primaria es esencial que se explique el papel fundamental que las Matemáticas juegan en la resolución de un amplio número de problemas. Se debe visualizar las Matemáticas como algo práctico y sentir que lo que está aprendiendo es muy importante.
Participación activa y colaborativa	<i>Siempre propiciar un espacio para lo lúdico.</i> El juego provoca un entorno natural donde se colabora y comparte colectivamente. Es una metodología muy útil para involucrar la participación y el disfrute de las Matemáticas. Juegos del tipo competencias, como “Antorcha” o “Justas de la sabiduría”, el cubo Rubik, cuatro en fila, batalla naval, ajedrez y otros, favorecen el desarrollo de actitudes de sana competencia y disfrute de las Matemáticas.
	<i>El trabajo en grupo.</i> A través del trabajo en grupo se puede fomentar la participación activa. Este consume más tiempo de las lecciones, pero bien realizado permite que haya una adecuada apropiación de los aprendizajes. Este tipo de actividades conviene que concluyan con exposiciones orales. Así se involucra a todos y todas y se activan otros procesos matemáticos. Estas exposiciones permiten desafíos, obligan a afinar y reforzar argumentos.
Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas	<i>Poner atención a comentarios negativos.</i> Es importante impedir que en el aula se hagan comentarios despectivos sobre los aportes de una persona cuando comete errores.
	<i>Usar positivamente las distintas formas de razonar y abordar los problemas.</i> Se pueden identificar en el aula las distintas maneras de aprender y así impulsar la búsqueda de múltiples formas de razonamiento y aproximaciones a los problemas.
	<i>Modular las exigencias.</i> Las actividades deben ser apropiadas al nivel emocional y cognitivo estudiantil. Esto es imprescindible.
Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas	<i>Uso de aplicaciones e historia.</i> Aunque sólo sean ejemplos poco elaborados sobre aplicaciones de las Matemáticas, noticias sacadas de la prensa o anécdotas sobre la historia de las Matemáticas, éstos se convierten en poderosos instrumentos para ir cultivando el respeto y aprecio por las Matemáticas.

Fuente: elaboración propia.

## Sobre el uso de la Historia de las Matemáticas

El papel de la Historia de las Matemáticas debe concebirse como un recurso para proporcionar oportunidades didácticas especiales, para ofrecer insumos a la lógica de la lección y para la generación de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas. Se pueden citar algunos de sus usos:

*Mostrar distintas formas de pensamiento y acción matemática.* Por ejemplo, cuando se compara el esquema deductivo en los *Elementos* de Euclides con el uso de recursos intuitivos y heurísticos como en *El Método* de Arquímedes (donde usa medios de física e ingeniería). Aquí habría oportunidad para mostrar el sentido de lo que es y lo que no es una prueba matemática.

*Potenciación de las conexiones entre las diferentes áreas matemáticas.* Al estudiar contextos socioculturales de conceptos y procedimientos matemáticos es posible encontrar con frecuencia

muchas conexiones entre las áreas matemáticas; por ejemplo, la geometría analítica en Descartes y Fermat.

*Favorece conexiones entre matemáticas, Educación Matemática y concepciones generales de estudiantes y docentes.* La Historia de las Matemáticas es el mejor medio para establecer vínculos entre matemáticas, Educación Matemática y la cultura global de una sociedad, y por eso mismo con las concepciones generales de los individuos. Esto es muy importante para trazar puentes entre enseñanza de las Matemáticas y estudiantes.

*Enriquecimiento de la resolución de problemas.* Al proponerse un problema matemático de un periodo histórico no sólo se ofrece la oportunidad para identificar esas relaciones entre matemáticas y otras Ciencias o dimensiones culturales, sino para usar desafíos interesantes que pueden poner en movimiento procesos. Hay una estimulante intersección entre uso de Historia y resolución de problemas.

*Potenciación de la contextualización activa.* Ofrece oportunidades para desarrollar las conexiones de una manera natural, realista, lo que a veces se intenta hacer de una forma artificial que no provoca el interés. Puesto en otra manera, la Historia es un instrumento para potenciar la contextualización activa.

*Fortalecimiento de la multiculturalidad.* Se pueden introducir distintas aproximaciones culturales a conceptos matemáticos colocándolos en contextos históricos. Las Matemáticas contemporáneas se tienden a visualizar como un producto occidental, la Historia puede permitir identificar los aportes de distintas civilizaciones en los quehaceres matemáticos (China, India, los Mayas), y por lo tanto cultivar una visión más amplia de las Ciencias y la cultura.

*Atender grupos con particularidades socioculturales.* La Historia es un poderoso vehículo para introducir circunstancias culturales precisas, locales, que pueden usarse para la enseñanza y aprendizaje en ambientes rurales o con particularidades étnicas o culturales. Hay muchas referencias de situaciones de enseñanza en medios culturales o sociales específicos. Por ejemplo, en lenguas polinesias la noción de distancia está asociada al tiempo que se toma en llegar a un lugar y no a la noción lineal que se maneja en Occidente, cambiando el significado de la medición y de las formas de aproximarse a la Geometría. La cultura condiciona el aprendizaje matemático.

*Atender estudiantes con talento.* Es un medio privilegiado para atender a estudiantes con talento, que pueden disfrutar de la evolución de tópicos matemáticos donde ha intervenido la habilidad procedimental, la perspicacia intelectual, la estética o las variables socioculturales.

*Conexiones entre matemáticas y otras disciplinas: la interdisciplina.* Esto se fundamenta precisamente en que en los contextos sociohistóricos hay múltiples conexiones entre las prácticas científicas y culturales. Una relación especial que se puede introducir desde la historia es la que existe entre matemática y textos literarios. Esto se puede lograr de una manera muy práctica: lectura de textos originales y su traducción a lenguaje matemático y viceversa: escribir en lenguaje natural realidades matemáticas. Al hacerse esto se favorece la comunicación y otras capacidades no necesariamente matemáticas pero que son relevantes para los aprendizajes, como la lectura, la búsqueda de referencias, la búsqueda de documentación, etc. La lectura de textos literarios que apelan a un momento histórico puede ser una excelente forma para introducir la naturaleza y fronteras de los objetos matemáticos de ese momento. Estos pueden ser problemas

para iniciar una lección. El arte en general (plástico, dramático, literario, musical) es un recurso metodológico valioso que puede usarse muy bien dentro de situaciones históricas relacionadas con las Matemáticas.

*Apoyo para el desarrollo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas.* Al concebirse las construcciones matemáticas como actividades dinámicas se logra motivar el desarrollo de actitudes como, por ejemplo, la persistencia, que se puede nutrir al comprender los esfuerzos necesarios durante épocas para lograr el desarrollo de las Matemáticas. En la misma dirección, se puede motivar mayor autoestima, pues la historia de errores, fracasos y malos entendidos en la historia de las Matemáticas es una de sus características, así como de toda construcción intelectual humana. Se pueden usar problemas no resueltos o resueltos con gran dificultad, pruebas erróneas y diversas soluciones de problemas, con el fin de mostrar las dificultades de la construcción matemática. Hay muchos problemas recreativos planteados en distintos momentos históricos que pueden fomentar el disfrute de las Matemáticas. Al mismo tiempo, reseñar resultados matemáticos que han estado presentes en el progreso tecnológico aportaría en actitudes positivas hacia las Matemáticas.

Se puede mostrar, por ejemplo, que mucho del mundo de la informática tiene sus orígenes en las Matemáticas, que la modelización del universo se ha hecho con matemáticas, que hay matemáticas en el diseño y construcción de puentes y edificios, que las naves aeroespaciales tienen en sus entrañas matemáticas. Esto fomenta el respeto, el prestigio y el disfrute de las Matemáticas.

Existen varias opciones didácticas para el uso de la Historia en la Educación Matemática:

- Como un reservorio de anécdotas para motivar y sensibilizar. Una anécdota puede ser la referencia que permita a un sujeto recordar un objeto o resultado matemático.
- Descripción de situaciones matemáticas, que sitúan un contexto y circunstancias individuales y socioculturales.
- Para determinar la secuencia o lógica de la presentación de algunos tópicos, pues la lógica histórica puede sugerir caminos semejantes en los aprendizajes.
- Uso de fuentes primarias, problemas o textos de matemáticos que pueden permitir el tratamiento de ciertos tópicos con las herramientas teóricas que se disponían en el momento histórico.

En cuanto a las dos primeras, no se suscitan muchas dificultades para comprender su utilidad. El tercer uso puede parecer más sofisticado. Refiere a una temática que se ha planteado desde hace muchos años: la relación entre la historia de las ideas y el aprendizaje de ellas. Sin duda, en cuanto a la educación se deben tener siempre en mente las grandes transformaciones de las ideas científicas y matemáticas para su inserción en la acción pedagógica. Por eso la lógica histórica proporciona oportunidades para el tratamiento de tópicos, como por ejemplo cuando se decide empezar por logaritmos para pasar luego a exponenciales debido a la manera como se desarrolló esto en la historia. El cuarto uso que se consigna es el diseño de problemas con base en fuentes primarias o que aparecieron tal cual en su momento histórico. Son extraordinariamente útiles pues brindan a la vez el contexto y las fronteras cognoscitivas, permiten hacer comparaciones que aclaran sobre las ideas generales y sobre la efectividad de los métodos propiamente matemáticos a la luz del presente. Por ejemplo, se han tenido concepciones sobre el rigor y el sentido de la prueba, o prejuicios como la idea de que sólo se deben usar círculos y rectas en las construcciones geométricas porque son figuras perfectas.

Colocar problemas tal cual aparecieron en la historia y a los que se enfrentaron los científicos y matemáticos de una época (con medios específicos) puede ser un recurso contextualizado especial para realizar procesos matemáticos fundamentales, para desarrollar habilidades y para darle la perspectiva adecuada a los quehaceres matemáticos.

Muy ligado a lo anterior, en una circunstancia histórica es posible identificar obstáculos o dificultades epistemológicas que podrían poseer un paralelo con aquellas que se podrían encontrar en los aprendizajes (por ejemplo: el manejo del infinito, los inconmensurables, etc.).

Para estas diferentes opciones didácticas se pueden usar documentos o fuentes primarias (textos de matemáticos, Euclides, Diofanto, Descartes, Fermat, Gauss, entre otros), libros de Historia de las Matemáticas que narran o hacen un recuento de fases o áreas de las Matemáticas, personajes, momentos o libros didácticos que contienen orientaciones para la acción de aula. Estos últimos son más difíciles de conseguir, pero en los últimos años han aumentado considerablemente las páginas en Internet con usos y recursos didácticos de la Historia de las Matemáticas. Aquí hay confluencia recíproca: con uso de tecnologías de la información se potencia el uso de la Historia y con ésta se ayuda a configurar algunos usos pertinentes de aquellas.

*Insistir en el carácter de las Matemáticas como construcciones.* Es una creencia arraigada que las Matemáticas son exactas y sus verdades están colocadas en un mundo platónico al que sólo las mejores mentes pueden acceder y describir. Eso es falso. Todas las Matemáticas han sido producto de construcciones humanas y sociales en contextos con reglas no universales y modificables. En la mayoría de las ocasiones se han dado errores y aproximaciones diversas hasta llegar a lo que ahora existe. Las Matemáticas no están tan alejadas de otras Ciencias naturales. Y esto es importante expresarlo en el aula.

*Varias estrategias para el uso de Historia de las Matemáticas:*

- elaboración de carteles sobre matemáticos o resultados matemáticos; por ejemplo, números figurados, pruebas interesantes como la atribuida a Thales de Mileto sobre el ángulo recto de un triángulo con un vértice en la circunferencia y teniendo por lado opuesto el diámetro, el cálculo de la medida del diámetro terrestre por Eratóstenes, ejemplos de las diferentes notaciones matemáticas, entre otros,
- proyectos extra clase, puede ser sobre la historia de  $\pi$  (pi) o de la última conjetura de Fermat, sobre los instrumentos de medición, sobre la historia del sistema métrico decimal, sobre los orígenes de la Probabilidad, etc.,
- recreación dramatizada, por ejemplo de una discusión matemática (sobre el uso de círculos versus elipses en la cosmología, en Ptolomeo, Hipatia, o Kepler),
- videos sobre temas científicos y matemáticos (sobre Copérnico o Galileo acerca del heliocentrismo),
- comparación multicultural, por ejemplo de varias pruebas sobre un mismo resultado (podría ser el teorema de Pitágoras en Euclides o en la civilización china),
- traducción de pasajes de textos matemáticos a lenguaje moderno, etc.

*Una didáctica relevante: identificar problemas interesantes (en fuentes primarias o secundarias) para resolver usando los conocimientos de la época.* Esto se puede hacer en varios pasos, lo que se consigna en la siguiente tabla.

**Tabla 8. Uso de problemas históricos originales.**

<b>Primer paso</b>	Ubicar el contexto social, geográfico y cultural. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se pueden usar mapas, pasajes de libros históricos, películas, etc.</li> </ul>
<b>Segundo paso</b>	Plantear el problema y el significado del mismo en las Matemáticas de esa época. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se puede empezar por poner estudiantes a trabajar procedimientos sencillos relacionados con el problema.</li> <li>• Identificar el problema en forma matemática precisa.</li> </ul>
<b>Tercer paso</b>	Resolver el problema <ul style="list-style-type: none"> <li>• Por medio de las heurísticas, analogías y estrategias disponibles en la época, etc.</li> </ul>
<b>Cuarto paso</b>	Analizar y comparar las soluciones <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudiar aquellas que se dieron históricamente y compararlas con las soluciones en el contexto actual.</li> </ul>
Fuente: elaboración propia.	

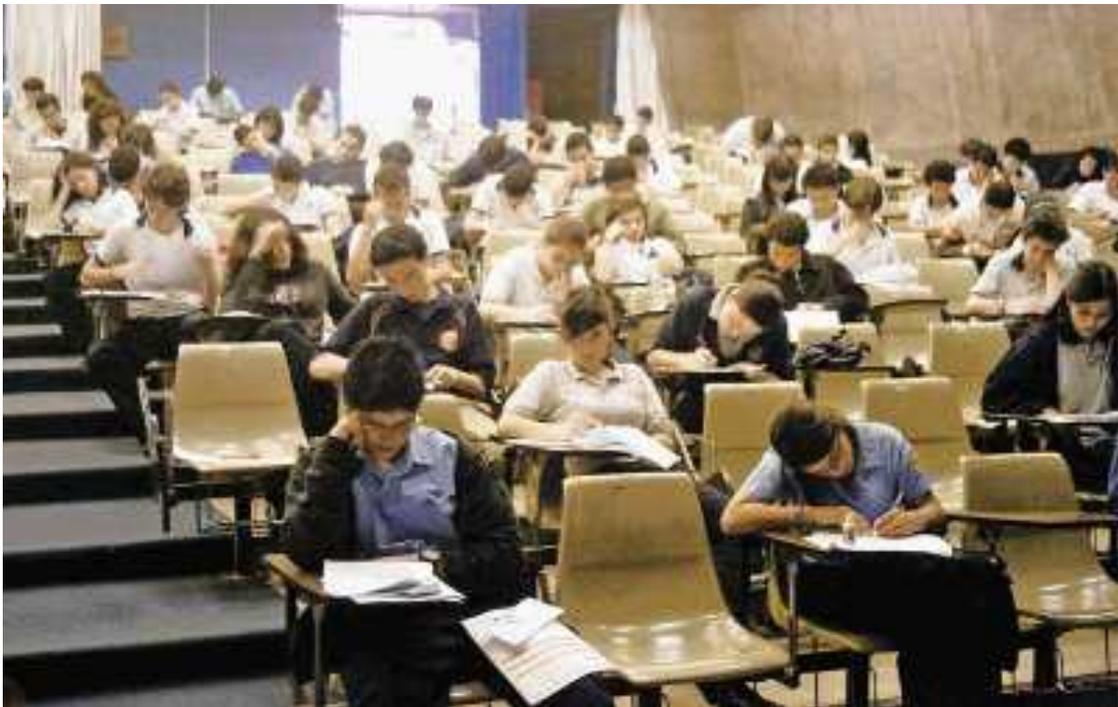
Un ejemplo: los logaritmos. Estos se pueden colocar en el contexto de la navegación en alta mar (siglo XV, de la conquista de América) que promovía el estudio astronómico, pues requería amplios cálculos numéricos y el uso de las series aritméticas y geométricas, de donde emergió la idea de logaritmo. Se puede estudiar la forma como los trabajaron Briggs, Napier y Bürgi, o bien se puede acudir a tablas logarítmicas y también al uso de software para su consideración. Se pueden usar pasajes de libros viejos que contienen las tablas.

Otro ejemplo: construcciones con regla no graduada y compás. Esto permitiría estudiar el contexto de la Grecia antigua (como la presencia de prejuicios sobre los irracionales), usar los instrumentos para una prueba específica, plantear el asunto en términos modernos y con otros recursos y contrastar las distintas concepciones.

También se puede citar el uso de restas sucesivas para calcular el común divisor de dos números cuando se aplica al lado y a la diagonal de un pentágono regular; resulta que al no ser éstos conmensurables el proceso sigue indefinidamente y de esta forma se da una oportunidad para estudiar uno de los irracionales más famosos: la razón dorada.

---

# Capítulo 8: Evaluación



En este capítulo se resumen principios e indicaciones generales para el desarrollo de una evaluación efectiva en la enseñanza de las Matemáticas.

## La evaluación de los aprendizajes

La evaluación como parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje tiene como propósito recopilar información válida y confiable, que permita determinar hasta qué punto el estudiantado logra las habilidades, destrezas y competencias propuestas en los programas de estudio.

En este sentido le facilita a la o el docente la toma de decisiones prontas y oportunas orientadas al mejoramiento del desempeño de los estudiantes. De la misma forma, le brinda al estudiantado información acerca de su desempeño, la comprensión y aplicación conceptual, y la reflexión acerca de la resolución de problemas.

La evaluación no se debe visualizar como una actividad aislada con un sentido punitivo, sino, un proceso inherente a la mediación pedagógica, que permite a las personas construir aprendizajes a partir de sus experiencias, trascendiendo de esta forma la idea de la evaluación como mecanismo de sanción.

Los programas de matemáticas tienen como enfoque principal en el currículo la resolución de problemas como estrategia metodológica, esto implica un cambio en los procesos de mediación, partiendo de una organización de la lección, donde se promueva la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos, siguiendo cuatro pasos o momentos centrales: propuesta de un problema, trabajo independiente, discusión interactiva y comunicativa y clausura o cierre. Esto conlleva a un cambio en el proceso evaluativo, que comienza con el replanteamiento del quehacer educativo y la forma en que se planifican, desarrollan y evalúan las actividades educativas.

Si se mantiene la mirada puesta en la retención de conocimientos, la evaluación seguirá siendo un proceso para solicitar respuestas memorísticas y la resolución mecánica de ejercicios, situación que es contraria al enfoque de estos programas.

## Principios

Para el abordaje de éstos programas, es importante replantear la evaluación de los aprendizajes a partir de los siguientes principios:

- **Es parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje.** La evaluación no debe considerarse un proceso separado de la mediación pedagógica, o como un conjunto de pruebas aplicadas al finalizar una unidad o un tema. Debe constituirse en parte natural del proceso de aprendizaje, que tiene lugar durante las actividades propuestas por el docente, cuando el estudiante participa, escucha, analiza situaciones del entorno y propone estrategias para su solución considerando los diferentes niveles de complejidad.
- **Constituye un proceso colaborativo.** Los estudiantes aprenden de sus compañeros y del docente y éste aprende de y con sus estudiantes. La formulación de actividades que impliquen la puesta en práctica de las habilidades, destrezas y competencias de los estudiantes, favorece el desarrollo de su autoestima, valores y actitudes, así como la promoción de creencias positivas respecto de la asignatura.

- **Pertinencia con las actividades de mediación.** Durante el desarrollo de las actividades de mediación, el docente recopila información, cualitativa y cuantitativa, acerca del desempeño de los estudiantes en las distintas áreas matemáticas. La información recopilada, mediante instrumentos técnicamente elaborados, le permitirá evaluar sus habilidades, destrezas y competencias y la toma de decisiones.
- **Congruencia de las técnicas e instrumentos.** Las técnicas e instrumentos que utilice el docente en el proceso de evaluación deben ser variados y adecuados al nivel que pretende evaluar, deben servir para reflejar los conocimientos y las habilidades específicas logradas por los estudiantes, según el nivel de resolución de problemas.
- **Permite la toma de decisiones.** El análisis de la información recopilada, le permite al docente reflexionar respecto de su práctica pedagógica y tomar decisiones orientadas a la realimentación y reorientación de la misma. Además, identificar las fortalezas del aprendizaje de cada estudiante y como potenciarlas; ser claros y constructivos respecto a eventuales debilidades y las posibles formas de cómo enfrentarlas.

Al estudiante, por su parte, le permite reflexionar en torno a su desempeño y autoevaluarse, con el fin de que a través del tiempo sea responsable de su propio aprendizaje, y solicitar al docente, en caso necesario, los apoyos que le faciliten el desarrollo de las habilidades y destrezas propuestas en estos programas.

- **Promueve el compromiso hacia el aprendizaje.** Para garantizar un aprendizaje efectivo los estudiantes deben conocer en qué consisten los objetivos de aprendizaje y querer lograrlos. Esta comprensión y compromiso, hacia su propio aprendizaje, surge del conocimiento de los objetivos y los criterios que el docente utilizará para evaluar su progreso. La comunicación de estos criterios implica formularlos de manera que los estudiantes tengan claro lo que se espera de su desempeño.

## La evaluación en la resolución de problemas

La evaluación debe inscribirse dentro de situaciones portadoras de sentido y que provoquen el desequilibrio cognitivo, a partir del cual se favorezca el desarrollo de nuevas habilidades y destrezas estudiantiles.

Un problema se organiza alrededor de un obstáculo a superar que ha sido identificado y planeado previamente. Esta situación debe representar un reto para que los y las estudiantes se esfuercen por resolver, poniendo en práctica conocimientos, habilidades y destrezas.

Cuando en el aula se plantea la resolución de un problema, la evaluación debe orientarse no solo a la valoración del resultado, sino también el proceso desarrollado para obtener ese resultado. De esta manera, se debe identificar y valorar las siguientes fases:

- Exploración del problema.
- Establecimiento de la estrategia.
- Desarrollo de la estrategia.
- Autoreflexión sobre la estrategia.
- Análisis de los resultados.
- Conclusión.

El aprendizaje de las Matemáticas es progresivo en la medida de que se desarrolla con base en el logro de unos conocimientos que son fundamentales para el logro de otros más complejos. Y es operativo, en tanto no es suficiente el conocimiento de los conceptos, sino, su aplicación en la resolución de problemas matemáticos con diferente nivel de complejidad.

Al resolver problemas matemáticos de diferentes niveles de complejidad, el o la docente debe identificar las posibles estrategias propuestas por los estudiantes para su resolución, no todos los problemas planteados se pueden evaluar de la misma manera.

Si se trata de un problema del nivel de reproducción, es más fácil medir el desempeño en cuanto a los resultados. Sin embargo, si se trata de un problema de conexión o de reflexión, no es suficiente con ello, es necesario utilizar diversas técnicas e instrumentos, que permitan recopilar información acerca de los procesos cognitivos llevados a cabo para su resolución.

En el caso de las pruebas escritas esto se medirá con ítems de desarrollo, que progresivamente deben incorporarse con mayor peso en los diferentes niveles lectivos. Esto de acuerdo al enfoque de estos programas de estudio.

Las estrategias de evaluación que se planteen deben ser congruentes con el nivel de complejidad de los problemas. Por lo tanto para su diseño, se debe garantizar el equilibrio entre los distintos niveles de los problemas, considerando para ello el abordaje realizado durante el proceso de mediación pedagógica.

## Componentes y valor porcentual

Hasta ahora, en el *Reglamento de evaluación de los aprendizajes* se proponía para la materia de Matemáticas la siguiente distribución porcentual:

**Tabla 9.**  
**Porcentajes asignados a los rubros de evaluación**  
**Previos a los nuevos programas de matemáticas**

Componente de la calificación	Reglamento actual					Ciclo Diversificado
	I Ciclo		II Ciclo	III Ciclo		
	1°	2° y 3°		7°	8° y 9°	
Trabajo cotidiano	50%	40%	30%	25%	15%	10%
Pruebas	30%	40%	50%	55%	65%	70%
Trabajo extraclase	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Concepto	5%	5%	5%	5%	5%	5%
Asistencia	5%	5%	5%	5%	5%	5%

Al modificarse la acción de aula, según la metodología basada en la resolución de problemas, se ha decidido cambiar algunos de los porcentajes asignados a los rubros de evaluación.

Los nuevos porcentajes se consignan en la tabla siguiente:

**Tabla 10.**  
**Porcentajes asignados a los rubros de evaluación**  
**Con los nuevos programas de matemáticas**

Componente de la calificación	Modificación					
	I Ciclo		II Ciclo	III Ciclo		Ciclo Diversificado
	1°	2° y 3°		7°	8° y 9°	
Trabajo cotidiano	55%	45%	35%	30%	20%	15%
Pruebas	30%	40%	50%	50%	60%	65%
Trabajo extraclase	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Concepto	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Asistencia	5%	5%	5%	10%	10%	10%

Los cambios realizados o indicaciones en relación con lo anterior son:

### Concepto

Se elimina el porcentaje por concepto.

### Asistencia

Se aumenta a un 10% en toda la Educación Secundaria. En la educación Primaria queda igual.

### Trabajo cotidiano

Aumenta un 5% en todos los años lectivos.

En el estilo de organización de la lección que proponen los programas, las/los estudiantes deberán realizar trabajo independiente, discusión interactiva y comunicativa como parte imprescindible en su proceso de aprendizaje. El trabajo cotidiano es determinante, por lo tanto, el valor porcentual de este rubro debe ser aumentado en relación con el existente.

Para la evaluación de este rubro se sugiere el uso del portafolio. Sin embargo, así como lo establece el Departamento de Evaluación de los Aprendizajes, se pueden utilizar: escalas de calificación, registros anecdóticos, registros de desempeño, rúbricas, listas de control, entre otros. La decisión sobre cuál instrumento usar debe quedar en manos de la o el docente.

### Trabajo Extraclase

El porcentaje anterior se mantiene igual en todos los niveles educativos. Sin embargo, se propone el trabajo extraclase de tres formas, excluyentes entre sí:

#### a. Trabajo extraclase único

El propósito es que el o la estudiante amplíe los temas desarrollados en el aula de acuerdo con las habilidades específicas del Programa de estudios. Los y las estudiantes tienen un plazo mínimo de ocho días naturales posteriores a la asignación del trabajo para la entrega del mismo a la o el docente, para su respectiva calificación. En estos trabajos se potenciarán los procesos

matemáticos: *Razonar y argumentar, Conectar, Representar, Comunicar, Plantear y resolver problemas.*

Se emplearía para realizar una investigación sobre algún tema particular, con una estructura similar al proyecto. Se consigna a continuación la reglamentación pertinente.

*Para su evaluación debe considerarse tanto el proceso como el resultado y utilizar instrumentos técnicamente elaborados.*

*El desarrollo de un proyecto puede ser de manera individual y/o colectiva, bajo la supervisión del docente. Debe incluirse como un elemento en su calificación, la auto y coevaluación. Para la calificación tanto del proceso como del producto, se debe utilizar instrumentos técnicamente elaborados.*

### **b. Tareas cortas**

El propósito es que el alumno repase o fortalezca los temas desarrollados por el/la docente de acuerdo con las habilidades específicas. Se realizarán un máximo de dos por semana y un mínimo de cinco por periodo. Deberán ser revisadas en la lección siguiente. En la calificación de las mismas se dará importancia al cumplimiento de la misma, no así a las respuestas (buenas o malas), pero ofreciendo una realimentación a través de la revisión docente.

Debe quedar claro que el tipo de tarea asignado será uno o dos problemas que tengan relación con la temática tratada para fortalecer la habilidad que se pretende desarrollar. Pueden incluirse los tres niveles reproducción, conexión y reflexión. Sin embargo, pueden privilegiarse los dos últimos debido a que las/los estudiantes realizarán la actividad fuera del aula y pueden disponer de más tiempo.

### **c. Al menos dos trabajos extraclase**

Es la modalidad que se realiza en la actualidad.

## **Pruebas**

Se disminuye su porcentaje un cinco por ciento en toda la educación secundaria. Se establecen algunos énfasis y características.

### **a. Indicadores para calificar problemas y modelos**

Además, se sugieren los indicadores para calificar cada pregunta de desarrollo acorde con la propuesta de evaluación:

Indicadores para Resolución de Problemas
Compresión del problema
Estrategia de solución
Aplicación efectiva o correcta de la estrategia de solución
Respuesta al problema

Indicadores para Resolución de Problemas-Modelización
Compresión del problema
Estrategia de solución
Elaboración de un modelo
Solución del problema
Interpretación/Evaluación de la solución

Estos indicadores se pueden utilizar opcionalmente en la evaluación de los diferentes componentes. El docente podrá redactar otros indicadores que respondan a los procesos desarrollados en el aula.

### **b. Alternativas para el componente de pruebas**

Se ofrecen dos alternativas excluyentes para obtener el porcentaje de pruebas:

1. Dos pruebas escritas, como ha estado hasta ahora.
2. Una prueba escrita ordinaria y al menos 3 pruebas cortas.

### **c. Tiempos para las pruebas ordinarias**

De acuerdo a esta estructura de prueba, los/las estudiantes puede que necesiten más tiempo para la resolución del mismo, por lo que el/la docente decidirá la asignación del tiempo, el cuál podría ser de 2 o 3 lecciones.

---

## Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

### Autor

Angel Ruiz

### Editor gráfico

Miguel González

### Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

### Imagen de la portada

Ministerio de Educación Pública

### Para referenciar este documento:

Ministerio de Educación Pública (2012). *Curso bimodal para el Segundo ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Fundamentos para un currículo por Resolución de problemas*. San José, Costa Rica: autor.



Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Fundamentos para un currículo por Resolución de problemas por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).

---

## Bibliografía y referencias

- Alfaro, C. & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4, 83-98.
- Alpizar, M. (2007). Herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3, 99-118.
- Australian Council for Educational Research. (2011). *PISA 2009: Plus Results*. Recuperado de [https://mypisa.acer.edu.au/images/mypisadoc/acer\\_pisa%202009%2B%20international\\_1.pdf](https://mypisa.acer.edu.au/images/mypisadoc/acer_pisa%202009%2B%20international_1.pdf)
- Banco Interamericano de Desarrollo, BID. (2010). *La condición de la educación en matemáticas y ciencias naturales en América Latina y el Caribe*. Recuperado de <http://www.oei.es/salactsi/bidciencias.pdf>
- Banco Mundial. (2009, junio). *Competitividad en Costa Rica*. Recuperado de <http://siteresources.worldbank.org/INTCOSTARICAINSPANISH/Resources/CostaRicaCompetitiveness.pdf>
- Callingham, R. & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 69–86.
- Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación*, 32(1), 123-138. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/440/44032109.pdf>
- Chaves, E. (2007, marzo). Inconsistencias entre los programas de estudio y la realidad de aula en la enseñanza de la estadística en secundaria. *Actualidades Investigativas en Educación*, 7(3), 1-35. Recuperado de [http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx\\_magazine/estadistica\\_01.pdf](http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx_magazine/estadistica_01.pdf)
- Chaves, E. (2008, marzo). Análisis de la propuesta ministerial para la enseñanza de la estadística en Secundaria. *Revista Posgrado y Sociedad*, 8(1), 51-88.
- Chaves, E., Castillo, M., Chaves, E., Fonseca, J. & Loría R. (2010). *La enseñanza de las matemáticas en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía*. Ponencia preparada para el Tercer Informe Estado de la Educación. San José, Programa Estado de la Nación.
- Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 41-51.
- Cogan, L., Wang, H. & Schmidt, W. (2001). Culturally specific patterns in the conceptualization of the school science curriculum: Insights from TIMSS. *Studies in Science Education*, 36, 105–33.
- Conley, D. (2003). *Understanding University Success: A Report from Standards for Success*. Eugene, OR: Center for Educational Policy Research.
- Consejo Superior de Educación, CSE. (1994). *La Política Educativa hacia el Siglo XXI*. Recuperado de <http://www.oei.es/quipu/costarica/politicaeducativasigloXXI.pdf>
- De Faria, E. (2008, abril). Resolución de problemas en los programas de estudio de matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4, 157 - 173.
- Ertl, H. (2006). Educational standards and the changing discourse on education: The reception and consequences of the PISA Study in Germany. *Oxford Review of Education*, 32 (5), 619–34.
- Figueroa, N. & Jiménez, K. (2010). *Primer informe de resultados. Examen de Diagnóstico en Matemática, DiMa*. Recuperado de <http://www.diagnostico.emate.ucr.ac.cr/sites/diagnostico.emate.ucr.ac.cr/files/PrimerInformeDiMa2010.pdf>
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3, 11-44.
- Jiménez, M., Espinoza J. & Morales, I. (2011). *Capacitación docente y Tecnologías Digitales en la Enseñanza de la Matemática*. Recuperado de <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2474/supp/2474-6563-1-SP.pdf>

- 
- Kamii, C. (1997). The role of a scientific theory of knowledge in education. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 18(2), 5-11.
- Kamii, C. (2004). Primary arithmetic based on Piaget's constructivism. En H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, Peng Yee Lee, S. Lerman, & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education*, 142-143, Makuhari, Japan, 2000. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. En L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 NCTM yearbook* (pp. 130–140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kamii, C., & Long, K. (2003). The measurement of time: Transitivity, unit iteration, and conservation of speed. En Clements, D. H., & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 NCTM Yearbook*, 169–180. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kamii, C., & Warrington, M. A. (1999). Teaching fractions: Fostering children's own reasoning. En Stiff, L. V., & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12: 1999 NCTM yearbook* (pp. 82–92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kamii, C., Kirkland, L., & Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 NCTM yearbook* (pp. 24–34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- McKnight, C. & Valverde, G. (1999). Explaining TIMSS mathematics achievement: A preliminary survey. En G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntley. (eds). *International Comparisons in Mathematics Education*. London: Falmer Press.
- McKnight, C., Crosswhite, F., Dossey, J., Kifer, E., Swafford, J., Travers, K. & Cooney, T. (1987). *The Underachieving Curriculum: Assessing U.S. School Mathematics from an International Perspective*. Champaign, IL: Stipes Publishing Company.
- Meza, L., Agüero, E. & Calderón, M. (2011). *La teoría en la práctica educativa: una perspectiva desde la experiencia de docentes graduados/as de la carrera "Enseñanza de la matemática asistida por computadora"*. Recuperado de <http://www.tec.ac.cr/sitios/Docencia/matematica/Documents/Informe%20Final-documento%201-formato%20VIE-Meza-Aguero-Calderon-2011.pdf>
- Ministerio de Educación Pública. (2005a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública. (2005b). *Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública. (2005c). *Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública. (2005d). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública. (2009). *Informe Preliminar Pruebas Nacionales Diagnósticas de Segundo Ciclo (2007-2009)*. Resumen ejecutivo. San José, Departamento de Evaluación Académica y Certificación, Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, Ministerio de Educación Pública.
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* [Traducción de Manuel Fernández Reyes]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. España: Santillana Educación S.L.
- OECD (2010). *PISA 2012 Mathematics framework*. Descargado de <http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf> el 6 de marzo del 2012.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: OECD.
- OECD. (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy a framework for PISA 2006*. París: autor.

- 
- OECD. (2010). *Pisa 2009 results: what students know and can do – student performance in reading, mathematics and science* [Vol. I]. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en> doi: 10.1787/9789264091450-en
- Programa Estado de la Nación. (2011). *Estado de la Educación 3*. San José, Costa Rica: Consejo Nacional de Rectores, Programa Estado de la Nación.
- Ramírez, G. & Barquero, J. (2010). Análisis de las pruebas de diagnóstico en matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. En Y. Morales (Ed.), *Memorias II CIEM*, 73-77. Recuperado de [http://www.cicma.una.ac.cr/CICMA2010/CICMA\\_2010.pdf](http://www.cicma.una.ac.cr/CICMA2010/CICMA_2010.pdf)
- Resnick, L. & Nolan, K. (1995, marzo). Where in the world are world-class standards? *Educational Leadership* (March), 6–10.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Ruiz, A. (2001). Asuntos de método en la educación matemática. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*, 3(2). Recuperado de <http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesN12001/AngelRuiz/pag1.html>
- Schmidt, W., McKnight, C., Houang, R., Wang, H., Wiley, D., Cogan, L. & Wolfe, R. (2001). *Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Schmidt, W., McKnight, C., Valverde, G., Houang, R. & Wiley, D. (1997a). *Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics*. (Vol. 1). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Schmidt, W., Raizen, S., Britton, E., Bianchi, L. & Wolfe, R. (1997b). *Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Science*. (Vol. 2). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 55–80.
- Stevenson, D. & Baker, D. (1991). State Control of the Curriculum and Classroom Instruction. *Sociology of Education*, 64 (1), 1–10.
- Tuijnman, A. & Postlethwaite, T. (eds) (1994). *Monitoring the Standards of Education*. London: Pergamon.
- UNESCO. (2008). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE): Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina el Caribe*. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001606/160660s.pdf>
- Valverde, G. & McKnight, C. (1997). Importancia del currículo y algunos temas comunes en la reforma educativa de la educación matemática y científica a nivel internacional. *Formas y Reformas de la Educación*, 3, 31–37.
- Valverde, G. & Schmidt, W. (2000). Greater expectations: Learning from other nations in the quest for world-class standards in US School Mathematics and Science. *Journal of Curriculum Studies*, 32 (5), 651–87.