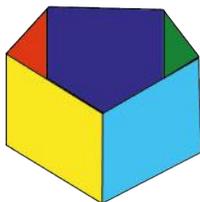


Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



www.reformamatematica.net



Documento de integración de habilidades para Sexto año



Imagen cortesía de Stuart Miles en Freedigitalphotos.net

**Costa Rica
2014**

Tabla de contenidos

PRIMERA PARTE: ELEMENTOS PREVIOS	3
SEGUNDA PARTE: INTEGRACIÓN DE HABILIDADES	4
NÚMEROS.....	4
<i>Primer periodo</i>	4
<i>Segundo periodo</i>	7
<i>Tercer periodo</i>	9
GEOMETRÍA.....	12
<i>Primer periodo</i>	12
<i>Segundo Periodo</i>	15
<i>Tercer Periodo</i>	17
MEDIDAS.....	21
<i>Primer periodo</i>	21
<i>Segundo Periodo</i>	21
<i>Tercer Periodo</i>	23
RELACIONES Y ÁLGEBRA.....	24
<i>Primer periodo</i>	24
<i>Segundo Periodo</i>	26
<i>Tercer Periodo</i>	29
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	31
<i>Primer periodo</i>	31
<i>Segundo Periodo</i>	32
<i>Tercer Periodo</i>	34
CRÉDITOS	37

Primera parte: Elementos previos

A continuación se presenta un recuento aproximado del número de lecciones que supondría el trabajo en este nivel escolar usando la estrategia sugerida de integración de habilidades por área mediante problemas.

Tabla 1. Conteo de lecciones por área y periodo en el Sexto año

Sexto año		
Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Números 14	Números 20	Números 12
Geometría 13	Geometría 8	Geometría 11
Medidas 7	Medidas 7	Medidas 0
Relaciones y Álgebra 12	Relaciones y Álgebra 12	Relaciones y Álgebra 16
Estadística y Probabilidad 5	Estadística y Probabilidad 6	Estadística y Probabilidad 11
Suma total de lecciones por periodo		
51	53	50

Segunda parte: Integración de habilidades

Números

Primer periodo

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Teoría de números <ul style="list-style-type: none"> Divisibilidad Factores 	1. Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas.	▲ Se le pueden proponer problemas tipo adivinanzas donde deben aplicarse estos conceptos para encontrar la cantidad, como por ejemplo:  Halle un número que sea divisible por 2, 3 y 11. ▲ Es importante la aplicación de estos conceptos a la hora de abarcar los conocimientos de amplificación y simplificación de fracciones.

Recuadro N° 1

Número sugerido de lecciones: 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabajará de manera independiente a través de problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Deben fortalecerse las habilidades mediante los problemas de reproducción y conexión.

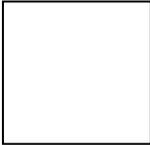
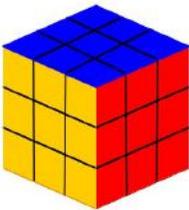
Teoría de números <ul style="list-style-type: none"> Números primos Números compuestos 	2. Identificar números primos y compuestos.	▲ Se solicita a cada estudiante que encuentre todos los factores o divisores de una serie de números primos y compuestos (sin mencionar estos conceptos). Luego, se clasifican según la cantidad de divisores. Después se formaliza los conceptos de números primos y compuestos.  Se sugiere utilizar la Criba de Eratóstenes (276 - 194 a.C.) para reforzar el tema y valorar su contexto histórico.  A este nivel aumenta la complejidad de los cálculos, por ello se debe estar atento a motivar para resolver problemas enfrentándolos; no debe ocurrir que se copie simplemente la respuesta sin comprenderse el razonamiento utilizado.
---	---	--

Recuadro N° 2

Número sugerido de lecciones: 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad debe fortalecerse mediante problemas de reproducción y conexión, además de establecerse una relación con la habilidad anterior.

<p>Números naturales</p> <ul style="list-style-type: none"> • Potencias • Cuadrados perfectos • Cubos perfectos • Potencias de base 10 	<p>3. Representar productos con factores iguales como potencia y viceversa.</p> <p>4. Calcular potencias cuya base y exponente sean números naturales no iguales a cero simultáneamente.</p>	 <p>Una forma interesante de introducir el concepto de potencia y la necesidad de su notación es mediante la historia del ajedrez que se encuentra en el libro <i>El hombre que calculaba</i> de Malba Tahan. En el capítulo XVI se relata la historia de un joven llamado Lahur Sessa quien obsequió al rey ladava un juego (el ajedrez) que le permitiría salir del dolor que le embargaba por la muerte de su hijo el príncipe Adjmir. El rey como muestra de agradecimiento le manifestó a Sessa que le daría lo que él deseara. Éste sin embargo no quería recompensa alguna, pero ante la insistencia de ladava accedió a recibir un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así doblando la cantidad de granos sucesivamente por cada una de las casillas siguientes. El rey creyó ridícula su petición, pero después de realizados los cálculos le comunicaron que dicha cantidad de granos era imposible de pagar.</p> <p>▲ Se solicita representar o describir la operación que se debe realizar para obtener dicho resultado. Después realizar una discusión sobre la necesidad de la notación de potencia y los inconvenientes que se presentan a la hora de realizar estos cálculos. Se formaliza así la noción de potencia como el producto sucesivo de factores iguales.</p>  <p>Con esta reseña histórica se puede fortalecer el aprecio y respeto por las Matemáticas.</p>
	<p>5. Identificar cuadrados y cubos perfectos de números naturales.</p>	 <p>El siguiente cuadrado tiene un área equivalente a 81 mm^2. ¿Cuánto mide su lado?</p>  <p>Se pretende que cada estudiante determine que el lado mide 9 mm y en consecuencia el área se puede expresar como una potencia de exponente 2.</p>  <p>A continuación se muestra una imagen del cubo Rubik:</p>  <p>Elaboración propia</p> <ol style="list-style-type: none"> ¿De cuántos cubitos está formado? ¿Qué relación tiene la medida de la arista (se puede suponer que cada arista mide 3 cm) con la cantidad de cubitos? <p>Se pretende que el estudiantado determine que el cubo grande se completa con 27 cubitos, en consecuencia esta cantidad se puede expresar como una potencia de exponente 3.</p>

		 Estos problemas promueven la conexión con <i>Geometría y Medidas</i> .
	<p>6. Expresar múltiplos de 10 como potencias de base 10.</p> <p>7. Expresar números naturales en notación desarrollada utilizando potencias de base diez.</p>	<p>▲ Proponer una cantidad en notación desarrollada, por ejemplo: $3782 = 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 2 \times 1$</p> <p>y pedirles que la escriban utilizando potencias de base 10: $3782 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2$</p>

Recuadro N° 3

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades puede trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales.

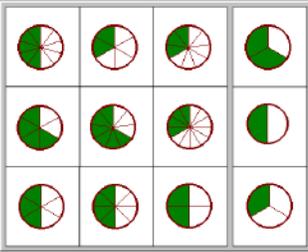
Asimismo, para fortalecer estas habilidades las actividades innovadoras y retos cobran importancia como estrategias metodológicas. Por ejemplo:

😊 Una máquina produce 4 bolas el primer minuto, 16 en dos minutos y 64 en tres minutos. ¿Cuántas bolas producirá la máquina en 6 minutos?



Con el problema planteado para propiciar las habilidades del área de Números, también se aplican conocimientos y se fortalecen habilidades del área de Medidas, una de ellas es la habilidad 5 porque propone la resolución de problemas ficticios o del entorno.

Segundo periodo

<p>Fraciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fracciones equivalentes • Simplificación y ampliación 	<p>8. Identificar fracciones equivalentes.</p> <p>9. Simplificar y ampliar fracciones.</p>	<p>▲ Se pueden utilizar problemas similares al siguiente, con el objetivo de justificar el algoritmo que permite simplificar y ampliar fracciones:</p>  <p>En el sitio web</p> <p>http://clic.xtec.cat/db/jclicApplet.jsp?project=http://clic.xtec.cat/projects/divfrace/jclic/divfrace.jclic.zip&lang=es&title=Fracciones,+múltiplos+y+divisores</p> <p>se encuentran algunas actividades con fracciones por lo que se puede aprovechar para un repaso y estudiar la noción de fracciones equivalentes a través de gráficos. A continuación se describe una de ellas:</p>  <p style="text-align: center;">Relaciona con sus equivalentes</p> <p>▲ Para el proceso de simplificación, es necesario presentar fracciones cuyo numerador y denominador sean números que tengan a lo sumo tres dígitos. Enfatizar el uso de las reglas de divisibilidad vistas con anterioridad.</p>
--	--	---

Recuadro N° 4

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Ambas habilidades pueden trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Por ejemplo:

😊 Francisco decidió dividir el pastel de la siguiente manera: 2 porciones y $\frac{1}{3}$ de porción para él y 2 porciones y $\frac{1}{3}$ de porción a su primo Mario. ¿Cuánto pastel queda aún?

Fraciones <ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación • División • Inverso multiplicativo 	10. Multiplicar y dividir fracciones.	<p>▲ Es necesario enfatizar que las fracciones son simplemente una forma para representar los números y que se utilizan porque nos ayudan a simplificar los cálculos.</p>
	11. Identificar el inverso multiplicativo de un número natural y/o fraccionario.	<p>▲ Se propone el siguiente problema:</p> <p> ¿Qué valores hacen verdaderas las siguientes igualdades?</p> $\frac{3}{4} \times [\quad] = 1$ $\frac{5}{7} \times [\quad] = 1$ $11 \times [\quad] = 1$ $9 \times [\quad] = 1$ <p>¿Qué características presentan dichos valores con respecto al primer valor?</p> <p>▲ Después de que se ha realizado la comunicación de respuestas y su pertinencia, es importante precisar el concepto de inverso multiplicativo de un número. Aprovechar la actividad anterior para concluir que cero no tiene inverso multiplicativo.</p>

Recuadro N° 5

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 4, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades puede trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales.

El docente debe enfatizar el proceso de discriminación sobre el tipo de operación que debe efectuarse. Establecer diferencias entre la resta y la multiplicación, por ejemplo, ya que al enfrentar un problema como el siguiente, algunos estudiantes dudan sobre la operación a utilizar (resta o multiplicación).

 Karina desea hacer su casa y una bodega en una quinta parte del terreno de la familia. Si la casa ocupará $\frac{6}{10}$ de esa quinta parte, ¿qué parte del terreno estará ocupado por la casa?

Fraciones <ul style="list-style-type: none"> • Suma • Resta 	12. Sumar y restar fracciones homogéneas y heterogéneas.	<p>▲ Iniciar sumando y restando fracciones homogéneas, para lo cual se plantean problemas semejantes al siguiente:</p> <p> Hugo es un veterinario que tiene un terreno cerca de la playa, el cual está constituido por zonas boscosas. Él ha decidido que $\frac{3}{10}$ partes del mismo las utilizará para construir una casa en armonía con el medio ambiente, $\frac{2}{10}$ lo dedicará a la construcción de un lugar donde se atenderá animales nativos del lugar que estén enfermos o hayan sido objeto de maltrato. El resto lo conservará como área protegida para preservar las especies del lugar.</p> <p>a. Determine la fracción de terreno que abarcará la casa y la estancia para animales enfermos o maltratados.</p>
---	--	--

		<p>b. Determine la fracción de terreno que corresponde al área protegida.</p>  <p>Es importante que la acción docente esté dirigida a discutir y crear conciencia en el estudiantado acerca de la importancia de conservar nuestra biodiversidad y vivir una <i>Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible</i>.</p>  <p>Para introducir el concepto de suma o resta de fracciones heterogéneas se puede trabajar gráficamente. Se puede proponer un problema que permita potenciar las representaciones numéricas.</p> <p>Después se formaliza el algoritmo para la homogenización de las fracciones por medio de la amplificación o simplificación de fracciones.</p> <p>▲ Analizar ejemplos como</p> $3 + \frac{2}{7}$ <p>y relacionarlo con la notación mixta de una fracción.</p> <p>▲ Para trabajar la suma o resta de forma algorítmica se trabajará sin utilizar el concepto de Mínimo Común Múltiplo, por lo que se recomienda, después de que se haya entendido el concepto, realizar sumas o restas, como el siguiente ejemplo:</p> $\frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{5 \times 6 + 7 \times 4}{24} = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$
--	--	---

Recuadro N° 6

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se puede trabajar de manera independiente mediante problemas y ejercicios similares a los propuestos en las indicaciones puntuales.

Tercer periodo

<p>Operaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Prioridad • Combinación 	<p>13. Resolver problemas donde se requiera el uso de la combinación de operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales y con decimales.</p>	<p>▲ Se propone una combinación de operaciones para que se generalicen los conocimientos establecidos en 5° Año. Por ejemplo:</p> <p>a. $642,4 \div 12,56 - 1,2 \times 10,23 =$</p> <p>b. $110 \times (263,7 - 4 \times 20,36) =$</p>
--	--	---

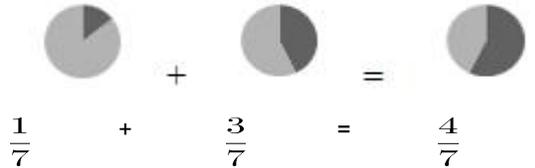
Recuadro N° 7

Número sugerido de lecciones: 4 (Etapa I: 1, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabajará sola con problemas o ejercicios de reproducción que le permitan al estudiante aplicar correctamente la prioridad de las operaciones.

Igualmente, es notable destacar que esta habilidad se ha venido desarrollando en conjunto con las habilidades anteriores debido a que la estrategia metodológica es la resolución de problemas. Sin embargo, en este punto específico se promueve la combinación de operaciones.

<p>Cálculos y estimaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Suma • Resta • Multiplicación • División • Potencias 	<p>14. Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales.</p>	<p>▲ Los problemas propuestos deben ser similares a los estudiados cuando se formalizó este tipo de operaciones en habilidades anteriores.</p> <p> Para establecer conexiones con <i>Medidas</i>, se pueden utilizar problemas vinculados a la obtención de distancias entre varias ciudades en un mapa haciendo uso de su escala, indicando al estudiantado que sus mediciones se hagan con una precisión de hasta milímetros.</p> <p> Se brinda alguna representación gráfica de una suma de fracciones:</p> <div style="text-align: center;">  $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ </div> <p>A partir de estos datos, cada estudiante debe plantear algún problema o situación donde los utilice.</p>
	<p>15. Calcular mentalmente potencias mediante diferentes estrategias.</p>	<p>▲ Es importante que cada estudiante trabaje mentalmente las potencias de 10 y los cuadrados perfectos.</p> <p> Se puede buscar una conexión con <i>Medidas</i> y sirve de repaso para algunos temas de esta área, por ejemplo:</p> $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$
	<p>16. Aplicar el cálculo mental de los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.</p>	<p>▲ Proponer juegos, rallyes y otras actividades que permitan favorecer el cálculo mental.</p>
	<p>17. Determinar el resultado de operaciones con fracciones mediante el cálculo mental utilizando diferentes estrategias.</p>	<p>▲ Deben usarse ejercicios simples como por ejemplo:</p> $\frac{3}{4} + 2$ $\frac{14}{5} - 1$ $\frac{3}{7} + \frac{6}{7}$ $\frac{13}{5} - \frac{3}{5}$

		$\frac{5}{6} \times 1$ <p>Entre las posibles estrategias que cada estudiante debe manifestar durante la resolución de estas operaciones se citan:</p> <ol style="list-style-type: none"> El resultado de sumar o restar una fracción y un número natural se obtiene al multiplicar el denominador de la fracción y el número natural, luego sumar o restar dicho resultado al numerador y conservar en el proceso el denominador original. Sumar o restar los numeradores y conservar el denominador para el caso de fracciones homogéneas. Al multiplicar una fracción por 1 el resultado corresponde a la misma fracción.
	<p>18. Utilizar la calculadora para resolver problemas y ejercicios numéricos con cálculos complejos.</p>	<p> Se puede proponer problemas como el siguiente:</p> <p> Determine la cifra de las unidades del resultado de la operación:</p> 3^{2011} <p> Aquí la calculadora contribuye a agilizar el reconocimiento de un patrón presente en la cifra de las unidades que se obtienen al desarrollar algunas potencias. Este problema permite establecer conexiones con <i>Relaciones y Álgebra</i>.</p>

Recuadro Nº 8

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 0, Etapa II: 8)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades puede trabajarse simultáneamente mediante problemas de reproducción y conexión para fortalecer las habilidades en la etapa de movilización y aplicación de los conocimientos. Además, se deben buscar estrategias para favorecer el cálculo mental.

Un ejemplo de problema para la habilidad 14 es:

 Edwin sembró lechuga en $\frac{1}{6}$ de su huerta y apio en $\frac{4}{6}$ de la misma. ¿Qué parte de la huerta queda aún sin sembrar?

Geometría

Primer periodo

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Circunferencia <ul style="list-style-type: none"> Área 	1. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de diversas figuras.	

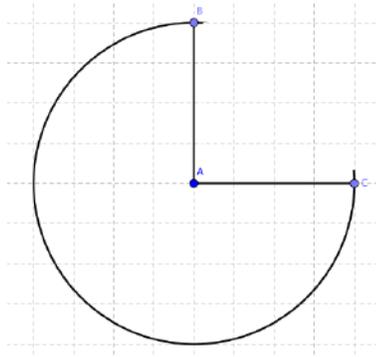
Recuadro N° 9

Número sugerido de lecciones: 3 (Etapa I: 0, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

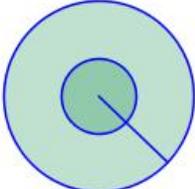
Esta habilidad puede trabajarse mediante problemas de reproducción y conexión como el siguiente:

😊 Observe la siguiente figura, que tiene centro en A ¿Cuál es el área de la siguiente figura si su radio mide 4 cm?



Con el problema planteado para propiciar la habilidad del área de Geometría, también se aplican conocimientos y se fortalecen habilidades del área de Medidas, entre ellas la habilidad 5 y 6, sobre la resolución de problemas y las estimaciones de diversas medidas.

Circunferencia <ul style="list-style-type: none"> Diámetro Radio Centro Cuerda Ángulo central Cuadrante 	2. Identificar circunferencias en dibujos y objetos del entorno. 3. Identificar elementos de una circunferencia (diámetro, radio, centro, cuerda, ángulo central, cuadrante). 4. Estimar la medida de la circunferencia conociendo su diámetro.	▲ Utilizando lana, cintas de papel y objetos cilíndricos puede darse una idea del significado de π , así como de su valor aproximado. Se solicita previamente a cada estudiante traer un objeto de forma circular o cilíndrica y varias tiras largas de papel. Cada quien tomará la cinta de papel y la colocará de tal modo que coincida con la circunferencia que se puede identificar en el objeto. Es probable que deba cortar o añadir parte de la cinta con el propósito de que ésta se ajuste lo mejor posible al borde o forma circular. Hecho lo anterior, se retira momentáneamente la cinta y se procede a tomar otra que se extienda lo correspondiente al diámetro de la forma circular utilizada con anterioridad. Se pide a la clase que comparen la longitud de las dos cintas para buscar una relación. Se espera que manifiesten que sin importar su longitud, la circunferencia es aproximada-
---	---	---

<ul style="list-style-type: none"> • Número π • Longitud • Área 	<p>5. Identificar π como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.</p> <p>6. Utilizar el número π para calcular la medida de circunferencias.</p>	<p>mente el triple del diámetro respectivo. Luego se busca reflexionar sobre la exactitud de dicha afirmación y se procede a la clausura con la sistematización del concepto del número π y de la fórmula que permite el cálculo de la circunferencia.</p> <p>▲ Proponer problemas para hallar la medida de la circunferencia utilizando el diámetro, como por ejemplo:</p> <p>😊 El fondo de un plato tiene un radio de 6 cm. Si el diámetro de todo el plato es de 30 cm, ¿cuál es la circunferencia del fondo del plato y la del borde del plato?</p> 
---	--	---

Recuadro N° 10

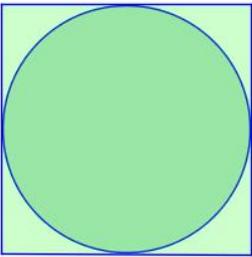
Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Se trabajarán en un orden lógico, primero debe presentarse un problema orientado por las indicaciones puntuales para introducir los conocimientos, posteriormente estas habilidades deben ser fortalecidas en la Etapa II mediante problemas de reproducción y conexión. Por ejemplo:

1. Mónica tiene un reloj cuya carátula mide 3 cm de diámetro. ¿Cuál es la medida de la carátula del reloj?
2. Si se tiene una lámina de cartulina cuyas dimensiones son 80 cm de ancho y 120 cm de largo, ¿cuántos círculos de 20 cm de radio se pueden obtener de la lámina?

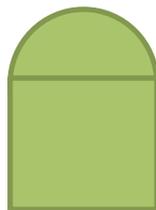
<p>Circunferencia</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diámetro • Radio • Centro • Cuerda • Ángulo central • Cuadrante • Número π • Longitud 	<p>7. Calcular el área de círculos.</p> <p>8. Calcular el área de figuras compuestas por círculos, triángulos y cuadriláteros.</p>	<p>▲ Se puede estimar el área de círculos y luego proporcionar la fórmula.</p> <p>▲ Proponer problemas para hallar la medida del área de diferentes figuras, como por ejemplo:</p> <p>😊 Carlos dibujó un círculo del tamaño exacto de una hoja cuadrada de 28 cm de lado, luego lo recortó. ¿Cuál es el área del sobrante de la hoja y el área del círculo recortado?</p>
--	--	---

<ul style="list-style-type: none"> • Área 		<div style="text-align: center;">  </div> <p>  Se puede solicitar que construyan un problema con base en el siguiente artículo del Reglamento de la Ley No. 7600 sobre la igualdad de oportunidades para la persona con discapacidad: </p> <p style="text-align: center;"> ARTICULO 110.- Dormitorio principal El dormitorio principal de la vivienda deberá disponer de por lo menos un espacio libre de maniobra con un diámetro mínimo de 1,50 m. Idealmente, esta área debería estar ubicada enfrente de los armarios de los dormitorios. Un espacio libre con un ancho mínimo de 0,90 m debe proporcionarse por lo menos a un lado de la cama. Un pasadizo de 1,20 m de ancho debe proporcionarse entre los pies de la cama y la pared opuesta. </p> <p> Este tema está relacionado con el eje transversal <i>Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz</i>. </p> <p>  Un detalle histórico que puede introducirse como medio para conectar <i>Geometría</i> con Geografía es la forma como Eratóstenes realizó una medida aproximada del radio terrestre. </p> <p>  Es muy importante que se generen los espacios apropiados para escuchar las respuestas y los razonamientos utilizados por las y los estudiantes. Sólo de esta forma se podrá corregir a tiempo los errores de aprendizaje y aplicar las medidas correctivas. Procesos involucrados directamente: <i>Comunicar, Razonar y argumentar</i>. </p>
--	--	--

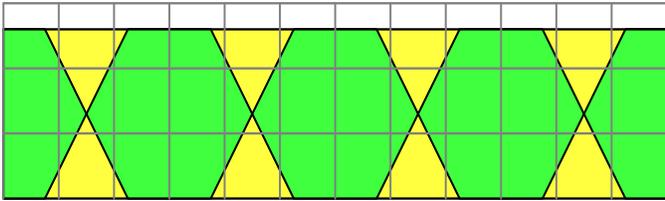
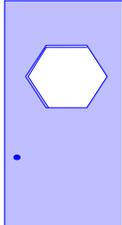
Recuadro N° 11

<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Número sugerido de lecciones:</td> <td style="padding: 2px;">4 (Etapa I: 1, Etapa II: 3)</td> </tr> </table>	Número sugerido de lecciones:	4 (Etapa I: 1, Etapa II: 3)
Número sugerido de lecciones:	4 (Etapa I: 1, Etapa II: 3)	
<p>Indicaciones y ejemplos</p> <p>Estas habilidades deben ser fortalecidas en la Etapa II mediante problemas de reproducción y conexión. Por ejemplo este problema permite desarrollar ambas habilidades:</p>		

😊 ¿Cuál es el área de una ventana que está formada por un semicírculo y un cuadrado, si se sabe que la medida de los lados del cuadrado corresponde a 90 cm?



Segundo Periodo

<p>Polígonos regulares</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ángulo central • Radio • Apotema • Área • Perímetro 	<p>9. Identificar diversos elementos en un polígono regular.</p> <p>10. Trazar polígonos regulares utilizando regla, compás, transportador.</p> <p>11. Identificar elementos de un polígono inscrito en una circunferencia (ángulos centrales, radio, apotema).</p> <p>12. Calcular el perímetro de polígonos regulares.</p> <p>13. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de diversas figuras relacionadas con polígonos y circunferencias.</p>	<p>▲ Para iniciar el estudio de los polígonos regulares y sus áreas se puede proponer inicialmente un problema como el siguiente:</p> <p>😊 Un muro tiene el siguiente diseño:</p>  <p>Se va a pintar utilizando dos colores: verde y amarillo, tal como se indica en el dibujo (cada cuadrado mide un metro de lado). Generalmente la pintura se vende por galones, cada galón cubre aproximadamente 30 metros cuadrados. Realice un estimado de la cantidad de pintura de cada color que se requiere si se le va a dar una sola mano de pintura al muro.</p> <p>▲ Se estudiarán polígonos regulares de máximo diez lados.</p> <p>▲ Con regla y compás se puede construir fácilmente el triángulo equilátero y el hexágono regular. Otros polígonos pueden ser trazados utilizando regla y transportador.</p> <p>▲ Al construir polígonos inscritos en una circunferencia se les puede indicar que identifiquen con colores diferentes la apotema, los ángulos centrales y el radio.</p> <p>▲ Proponer problemas donde se debe encontrar el área de polígonos regulares, como por ejemplo:</p> <p>😊 Una puerta mide 95 cm de ancho y 220 cm de alto. En la parte superior tiene un vidrio en forma hexagonal de 30 cm de lado. ¿Cuál es el área de la puerta sin el vidrio?</p> 
---	--	--

		<p> Los problemas referidos a situaciones cotidianas desarrollan en la o el estudiante la confianza en la utilidad de las Matemáticas.</p> <p> Problemas como el anterior hacen conexiones con el área de <i>Medidas</i> y con situaciones cotidianas.</p>
--	--	--

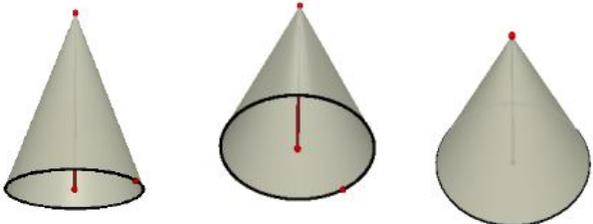
Recuadro N° 12

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades puede trabajarse simultáneamente a través de problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales y fortalecerse en la Etapa II mediante problemas de reproducción y conexión que tengan sentido para el estudiante.

Tercer Periodo

<p>Cuerpos sólidos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cubo • Prismas • Cilindros • Conos • Pirámides • Esfera 	<p>14. Clasificar cuerpos sólidos por su forma.</p>	<p>▲ Brindar material fotocopiado con figuras que representan partes de ciertos cuerpos para que ellos los puedan observar, reconocer, recortar y pegar para formar cuerpos geométricos.</p> <p> Se puede pedir al grupo que elabore una tabla que indique la cantidad de objetos de esas formas que hay en el aula o en la institución y organice la información de acuerdo con sus características. Esto conecta con el área de <i>Estadística y Probabilidad</i>.</p> <p> Los trabajos y descubrimientos de Arquímedes concernientes a la comprensión de las relaciones entre los cuerpos sólidos pueden constituir un elemento motivador para la o el estudiante. Él demostró que si se tiene un cilindro y una esfera inscrita en él, entonces tanto las superficies como los volúmenes de estos cuerpos sólidos están en razón 3:2. Como detalle curioso: un día Arquímedes estaba muy concentrado estudiando una figura geométrica que había dibujado en la arena, uno de los soldados romanos que habían invadido Siracusa le pidió varias veces que lo acompañara; sin embargo, Arquímedes no le hizo caso, por lo que el soldado sacó su espada y lo mató.</p> <p> A través de un software se pueden mostrar varias vistas de un cuerpo sólido.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
	<p>15. Calcular el volumen de los cuerpos sólidos simples: cubo, prisma, cilindro, cono, pirámide y esfera.</p>	<p>▲ Se puede introducir el tema de volúmenes con el caso particular del cubo de una unidad de arista y así poder construir el concepto de unidad cúbica. Por ejemplo:</p> <p> En un "kinder" se tienen 64 cubos de madera de diferente color y de un decímetro de arista. Si se desea guardarlos en una caja de madera, entonces ¿cuáles podrían ser las dimensiones de la caja?</p>



Imágenes cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Lo interesante de este problema es que hay varias soluciones correctas. Por ejemplo, una de ellas puede ser una caja en forma de cubo de 4 dm de arista, otra solución puede ser una caja de 8 dm de largo, 4 dm de ancho y 2 dm de altura.

Es importante en este problema poder llevar al concepto de volumen de un cuerpo sólido por medio de la unidad cúbica. Además con este ejemplo se puede construir la fórmula del volumen de un prisma.

▲ Sobre el volumen de cilindros, conos, pirámides y esferas se hacen algunas observaciones en la sección de indicaciones metodológicas.



La siguiente situación refiere a los ejes transversales:

El compostaje es el procesamiento controlado de residuos orgánicos para que sean descompuestos por microorganismos aeróbicos y se obtenga un producto llamado compost que se puede utilizar como abono orgánico.

Es una práctica utilizada tanto para reducir el efecto contaminante de residuos orgánicos de la actividad agropecuaria como para aprovechar materiales orgánicos tales como vegetales y boñiga de animales, los cuales se transforman rápidamente en abono orgánico, mejorando así la fertilidad del suelo.

La siguiente es una forma sencilla y práctica de hacer compost. Se escoge un lugar lo suficientemente despejado, plano y limpio, de manera que facilite la preparación de la mezcla.

Primero se coloca una capa de 10 centímetros de espesor de estiércol (boñiga) ya sea de vaca, caballo, conejo, cabra, oveja o gallina. Esta capa se humedece con agua de melaza proveniente de la mezcla de 1 parte de melaza con 5 partes de agua.

Luego se coloca encima una capa de 20 cm de espesor de material vegetal picado en pequeños trozos, pueden ser residuos de frutas, ramas, etc.

Esta segunda capa también se riega con agua de melaza. Se pueden ir colocando varias capas alternativamente de estiércol y material vegetal, una sobre otra sin que la altura total sobrepase un metro.

Fuente: Ministerio de Agricultura y Ganadería. Recuperado de http://www.mag.go.cr/bibliotecavirtual/index.html#HERMES_TABS_6_1

		<p>▲ Esta lectura tiene un contenido matemático importante que puede ser utilizado para redactar diversos problemas. Por ejemplo, ¿cuál es el volumen de la mezcla si se ponen 2 capas de estiércol y dos de material vegetal sobre una superficie rectangular de 5 dm por 1,2 m? Esto conecta con el área de <i>Medidas</i> y está relacionado con los ejes transversales.</p> <p>⚙ También se puede hacer una conexión con <i>Relaciones y Álgebra</i> en la parte de proporciones (melaza/agua).</p>
--	--	---

Recuadro N° 13

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 4, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades deben ser fortalecidas en la Etapa II a través de problemas de reproducción y conexión. En las indicaciones metodológicas correspondientes al II Ciclo del programa oficial del MEP (2012, p.220) se sugiere cómo plantear un problema para determinar el volumen de la esfera mediante la comparación del volumen de un cilindro del que se conoce su capacidad, que tiene una cantidad de agua considerable y donde se introduce la esfera.

Puede considerarse un problema para el volumen de la pirámide al emplear una pregunta como la siguiente:

😊 ¿Cuántas veces cabe la cantidad de arena que contiene un prisma rectangular en una pirámide cuya base sea igual a la base del prisma y que además tenga la misma altura?

Hay otras alternativas:

1. Con un cono y un prisma, con las condiciones dadas, se puede ver cuántas veces debe llenar el cono para llenar la pirámide; para más practicidad y seguridad puede utilizarse arena, alpiste o linaza.
2. Se puede solicitar a los estudiantes material de reciclaje para construir en el aula prismas y pirámides que guarden la relación antes descrita y que mediante la experimentación determinen la relación entre el volumen del prisma y la pirámide.

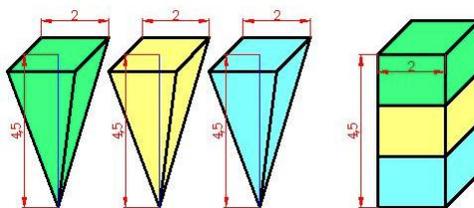
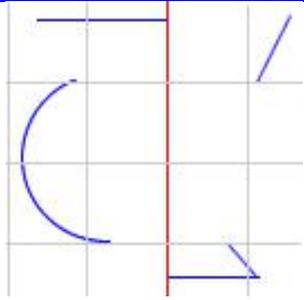
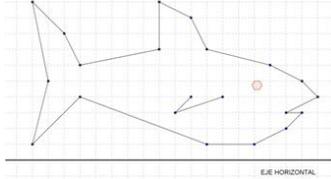
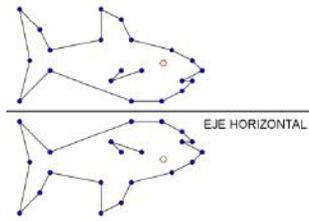


Imagen recuperada de <http://www.aulafacil.com/matematicas-volumenes/curso/Lecc-12.htm>

<p>Simetría</p>	<p>16. Reconocer, reproducir y trazar figuras simétricas.</p> <p>17. Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.</p>	<p>▲ Se trata del reconocimiento de figuras simétricas con un mayor nivel de complejidad que en el 4° Año, además de la reproducción de figuras simétricas y el trazado de figuras simétricas con características dadas.</p> <p>▲ Una actividad que puede mejorar la comprensión del concepto es dar un eje y algunas partes de una figura simétrica para que la o el estudiante complete la figura.</p>
------------------------	---	--

		 <p>  Se puede pedir que se dibuje una figura en papel cuadrículado y se proponga como ejercicio su reproducción tomando en cuenta un eje de simetría previamente escogido. Proceso: <i>Plantear y resolver problemas</i>. </p> <p>Por ejemplo, alguien puede proponer el siguiente ejercicio:</p> <p>Reproduzca la siguiente figura al otro lado del eje horizontal, de tal forma que cada punto de la nueva imagen esté a la misma distancia del eje de simetría que los puntos de la figura original.</p>  <p>Entonces los dos peces forman una figura simétrica con respecto al eje horizontal:</p> 
--	--	---

Recuadro N° 14

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 0, Etapa II: 3)
--------------------------------------	-----------------------------

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades deben ser fortalecidas en la Etapa II mediante problemas de reproducción y conexión.

Medidas

Primer periodo

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Volumen <ul style="list-style-type: none"> • Metro cúbico • Múltiplos • Submúltiplos • Conversiones • Relación decímetro cúbico - litro 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar el metro cúbico, sus múltiplos y submúltiplos en diversas situaciones ficticias o del entorno. 2. Realizar conversiones de unidades cúbicas. 3. Establecer relaciones entre el decímetro cúbico y el litro, así como múltiplos y submúltiplos de ellos. 4. Aplicar esas relaciones en situaciones ficticias o del entorno. 	<p>▲ Plantear problemas como:</p> <p> En la comunidad en que vive Francisco se está racionando el agua todos los lunes, por lo que su mamá, el día anterior, llena 3 envases de 2 dm^3 cada uno. ¿Cuántos litros de agua recoge en total la mamá de Francisco?</p> <p> Este ejemplo muestra cómo utilizamos las Matemáticas en situaciones cotidianas. Se puede llevar el problema aun más allá y poner a cada estudiante a razonar sobre cuánta cantidad de agua necesita su familia diariamente y de esta forma concientizar sobre la importancia de racionar.</p>

Recuadro N° 15

Número sugerido de lecciones: 7 (Etapa I: 4, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades pueden trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales; la relación entre todos los conocimientos permite que el estudiante los utilice conjuntamente al resolver un problema. En el momento del trabajo independiente y la comunicación interactiva se debe proporcionar el tiempo apropiado para que los estudiantes adquieran las habilidades.

Conviene propiciar espacios para que el estudiantado pueda establecer las relaciones del metro cúbico partiendo de sus conocimientos previos y pueda además comprobar la relación entre el decímetro cúbico y el litro.

Segundo Periodo

Diversas medidas <ul style="list-style-type: none"> • Longitud - Nanómetro • Masa • Capacidad • Superficie • Tiempo • Temperatura 	<ol style="list-style-type: none"> 5. Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas dados en situaciones ficticias o del entorno. 6. Realizar estimaciones de diversas medidas. 7. Realizar conversiones monetarias: colones a dólares, colones a euros y viceversa. 	<p>▲ Se introduce la unidad de medida de longitud denominada nanómetro, y se repasan las demás, utilizando problemas de mayor complejidad, con conversiones entre nanómetros (nm) y milímetros (mm). Por ejemplo, si un chip actualmente puede medir 30 nm, ¿cuál sería la medida de ese chip en mm? Se pide investigar los tipos de cambio y realizar conversiones en situaciones reales o ficticias; por ejemplo, de precios de artículos que aparecen en Internet, en periódicos u otros medios.</p> <p> El 23 de diciembre de 2011, el periódico <i>La Nación</i> publicó una noticia que decía “En este 2011 se dio una reducción del 50% del área afectada por incendios forestales en el país. En otras palabras, el área quemada pasó de 18 683 hectáreas en el 2010 a 9 500 en el 2011.”</p>
--	--	--

<ul style="list-style-type: none"> Moneda: colones, dólares, euros 		<p>Esta información puede servir para redactar un problema que conecta con situaciones de la vida real y que además puede hacer conexión con el área de <i>Relaciones y Álgebra</i>. Puede utilizarse para explicar que existe otro tipo de unidades para medir superficie e indicar la relación entre esta unidad y el kilómetro cuadrado.</p> <p> Lo anterior conecta con uno de los ejes transversales: <i>Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible</i>.</p> <p> Se plantean problemas como el siguiente, de forma tal que la atención se centre en la estrategia de resolución y no en la labor de cálculo:</p> <p> Una pequeña empresa tiene una cuenta en colones en la que hay ₡ 6 568 535. Para realizar transacciones en el extranjero necesita abrir una cuenta en dólares, para ello decide tomar una octava parte del monto depositado en la primera cuenta. Además, debe transferir a otra empresa la suma de 1370 euros. Después de esto, ¿cuánto dinero le queda a la empresa en su cuenta en colones? (Es importante que cada estudiante investigue el tipo de cambio del dólar y el euro con respecto al colón en ese día o semana).</p>								
	<p>8. Plantear problemas contextualizados que involucren, para su solución, diversos tipos de medidas y sus respectivas conversiones.</p>	<p>▲ Se busca el planteo de problemas contextualizados que requieran el uso de diferentes tipos de medidas. Se puede presentar a la clase una información determinada para que la contextualicen y puedan así enunciar un problema.</p> <p> Se les proporciona el siguiente cuadro de información acerca de la capacidad de tres recipientes:</p> <table border="1" data-bbox="764 1146 1414 1287"> <tr> <td>Recipiente</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Capacidad</td> <td>1,7 litros</td> <td>1600 cm³</td> <td>1,8 dm³</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">Elaboración propia</p> <p>Luego, se les propone formular un problema donde se tome en cuenta uno o más de los datos proporcionados en el cuadro.</p> <p>Un ejemplo de problema:</p> <p>Pedro irá de gira educativa con sus compañeros a una empresa que fabrica confites, para esto se pide que cada estudiante lleve a la gira un recipiente vacío para guardar los confites que regalará la empresa. Pedro tiene tres recipientes: dos cilíndricos y uno cúbico, las indicaciones de los recipientes muestran que tienen respectivamente las siguientes capacidades 1,7 litros, 1600 cm³ y 1,8 dm³. ¿Cuál recipiente debe escoger Pedro para poder recoger más confites?</p>	Recipiente				Capacidad	1,7 litros	1600 cm ³	1,8 dm ³
Recipiente										
Capacidad	1,7 litros	1600 cm ³	1,8 dm ³							

Recuadro N° 16

Número sugerido de lecciones:	7 (Etapa I: 3, Etapa II: 4)
--------------------------------------	-----------------------------

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades pueden trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Así, pueden desarrollarse conjuntamente por medio de diversas actividades atractivas que supongan reto para los estudiantes y que favorezcan el uso de la tecnología, la estimación y el cálculo mental para obtener la solución.

Tercer Periodo

En este periodo no se trabajan conocimientos de esta área.

Relaciones y Álgebra

Primer periodo

<p>Relaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razón • Proporción directa • Porcentaje • Regla de tres 	<p>1. Analizar la proporción entre cantidades numéricas.</p> <p>2. Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.</p>	<p>▲ Ilustre el tema con ejemplos donde compara cantidades con cien. Por ejemplo, si un estudiante obtuvo un 85 de 100 puntos en el examen de matemática, entonces su rendimiento en el examen fue de $85 \div 100$, es decir, 0,85 o bien 85%.</p> <p>😊 Fabio desea comprarse un celular. Su costo sin el impuesto de ventas es de 53 000 colones en la tienda Súper Ganga y en la tienda Garantía el valor es de 62 000 colones con un 15% de descuento. ¿Cuál de las dos tiendas le ofrece un mejor precio?</p> <p>▲ Para formular los problemas, utilice datos obtenidos en periódicos o en los informes del Estado de la Nación.</p> <p>▲ Enfatique al estudiante una fracción propia como una proporción.</p> <p>▲ Puede ilustrar el tema con una representación gráfica donde cada estudiante deduzca la representación fraccionaria de un porcentaje.</p> <p>⚙️ Escriba porcentajes en diferentes notaciones. Presente tablas para que completen, con la notación que falta. Esto favorece el proceso <i>Representar</i>.</p> <p>😊 En la figura que sigue aparecen los precios de promoción de un supermercado para algunos productos. Los datos que aparecen son: el precio normal del producto, el porcentaje de descuento y la cantidad economizada por el comprador.</p> <ol style="list-style-type: none"> Compruebe si la cantidad economizada corresponde al porcentaje de descuento que aparece en el anuncio. ¿Cuál es el porcentaje de mi ahorro si compro 2 ½ kg de aguacates y 8 chiles dulce? (Considerando el precio normal y la cantidad a pagar) <div data-bbox="764 1360 1414 1520" style="text-align: center;"> </div> <p>Imagen tomada del periódico La Nación, 19 de junio de 2012</p> <p>Una página importante para conseguir precios de frutas y verduras, sugeridos para las ferias del agricultor es http://web.cnp.go.cr/. En ella usted encontrará lista de precios en formato Excel.</p> <p>👤 Utilice material concreto, principalmente los que son reciclables, para reforzar esta idea de totalidad. Esto favorecerá el desarrollo de una <i>Cultura ambiental para el desarrollo sostenible</i>.</p>
---	---	--

		<p>☺ En el año 2003 Costa Rica emitió 6474,64 toneladas de dióxido de carbono a la atmósfera y en el 2004 fue de 6405,10. ¿Qué porcentaje de toneladas de dióxido de carbono bajó Costa Rica en el año 2004?</p> <p>👤 Se recomienda aprovechar la oportunidad para hablar acerca de las consecuencias del dióxido de carbono en la salud. Esto favorece una <i>Educación para la salud</i> y una <i>Cultura ambiental para el desarrollo sostenible</i>.</p>  <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> <p>⚙️ El impuesto general sobre las ventas es un impuesto sobre el valor agregado en la venta de mercancías y en la prestación de algunos servicios específicamente indicados en la Ley No. 6826 del 8 de noviembre de 1982 y sus reformas. El monto del impuesto se determina sobre el precio neto de la venta y actualmente es de 13%. Que cada estudiante plantee un problema utilizando esta situación.</p>
<p>3. Plantear y resolver problemas aplicando proporcionalidad directa.</p>		<p>▲ Proponer ejemplos donde cada estudiante establezca la razón entre dos cantidades. Por ejemplo, comparar el área de un rectángulo dado con su altura, o la calificación obtenida en Matemática con la calificación en Español.</p> <p>☺ Fernando por cada 8 horas diarias de trabajo gana 16 650 colones. Si hasta el momento ha ganado 333 000 colones, ¿cuántas horas ha trabajado?</p> <p>▲ Sugerir ejemplos relacionados con un contexto donde el estudiante deduce la proporcionalidad directa al observar que si una cantidad aumenta la otra aumenta o si disminuye la otra disminuye proporcionalmente.</p> <p>☺</p>  <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> <p>En el Restaurante Coma Saludable una familia de 6 personas gastó 19 645 colones en un almuerzo. ¿Cuánto dinero gastaría una familia de 4 personas si consumen la misma proporción y el mismo tipo de comida que la primera familia?</p>

Recuadro N° 17

Número sugerido de lecciones: 12 (Etapa I: 6, Etapa II: 6)

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades pueden trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Pueden trabajarse por medio de diversas actividades atractivas que supongan reto para los estudiantes y que favorezcan el uso de la tecnología, la estimación y el cálculo mental para obtener la solución.

En la segunda etapa, se puede sugerir al estudiantado explorar algunas páginas web donde pueda mecanizar algunos conocimientos como *la regla de tres*; en la siguiente dirección el docente puede encontrar algunos problemas de reproducción para este mismo fin: http://www.vitutor.com/di/p/ejercicios_regla.html

Ejercicios y problemas resueltos de regla de tres

Ejercicios Soluciones

- 1 Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?
- 2 Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por 792 €. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?
- 3 Con 12 botes conteniendo cada uno 1/2 kg de pintura se han pintado 90 m de verja de 80 cm de altura. Calcular cuántos botes de 2 kg de pintura serán necesarios para pintar una verja similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.
- 4 11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?
- 5 Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 m³ de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 depósitos de 500 m³ cada uno?

Soluciones ▶

Segundo Periodo

Sucesiones	<p>4. Analizar sucesiones y patrones con números, figuras y representaciones geométricas.</p>	<p>▲ Para este nivel las sucesiones deben llevar un grado mayor de complejidad donde la ley de formación (o patrón) puede incluir dos operaciones, además del simbolismo matemático apropiado.</p> <p style="text-align: center;"></p> <p>a. Para la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, L$ solicitar el término número 15.</p> <p>b. $a(n) = \frac{n+2}{n^2}$ es el término número n de una sucesión. Solicite a cada estudiante construir una tabla con los primeros 10 términos. ¿Cuál es el término número 35?</p> <p style="text-align: center;"> Use la calculadora para la parte b.</p> <p style="text-align: center;"> Este tipo de actividades son poco frecuentes, ya que implican un mayor esfuerzo cognitivo. El educador debe insistir</p>
-------------------	---	--

		en la importancia de que cada estudiante enfrente el problema que se le plantea, dado que esto le ayuda a reforzar la manipulación de instrumentos matemáticos y promueve el razonamiento, lo cual favorece la perseverancia y aumenta la autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.
	5. Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.	 Una colonia de bacterias cuenta inicialmente con 8 bacterias. Si la cantidad de bacterias es duplicada cada 24 horas, ¿qué cantidad de bacterias tendrá la colonia al final de 1 semana?

Recuadro N° 18

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades puede trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales y que generen el gusto por los retos.

En la II Etapa se requiere de una mayor cantidad de lecciones, se debe tener presente que la movilización integra resolución de sucesiones dadas, resolver problemas aplicando sucesiones y el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes, lo cual requiere tiempo.

Cabe indicar que respecto a las indicaciones puntuales (el problema de la colonia de bacterias), con el objetivo de que la situación sea real se puede modificar de la siguiente forma:



Una colonia de bacterias cuenta inicialmente con 8 bacterias. Si la cantidad de bacterias se duplica cada 20 minutos, ¿qué cantidad de bacterias tendrá la colonia al cabo de 2 horas?

Representaciones <ul style="list-style-type: none"> Algebraica Plano de coordenadas 	6. Representar algebraicamente una expresión matemática dada verbalmente.	<p>▲ Puede dictar frases como:</p> <ol style="list-style-type: none"> El doble de la suma de un número y tres es ciento treinta y tres. El triple de la diferencia de un número y cinco es quince. El trece por ciento de un número es restado de cien El siete por ciento de un número es adicionado al número. La velocidad de un objeto es cinco veces su desplazamiento. <p>Que cada estudiante las escriba utilizando números, operaciones y símbolos matemáticos.</p>
--	---	--

Recuadro N° 19

Número sugerido de lecciones: 3 (Etapa I: 0, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

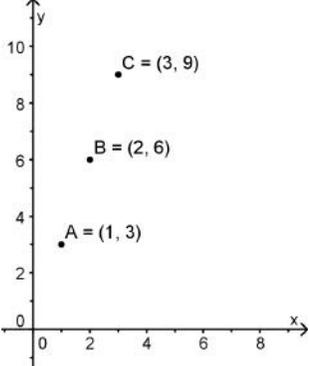
Esta habilidad puede trabajarse de manera independiente. Solicitar al estudiantado escribir en una tarjeta lo siguiente: por un lado un problema y por el otro la solución. Después que el docente haya revisado los planteamientos y las respuestas se pueden intercambiar sus problemas con otros estudiantes, autorevisando sus soluciones con las tarjetas. La base de problemas puede ser utilizada con todo el grupo.

Por otra parte, respecto a las indicaciones puntuales, se debe indicar que, es conveniente proponer frases que puedan ser verificadas por el estudiante con sus conocimientos previos. Respecto a la frase:

- El doble de la suma de un número y tres es ciento treinta y tres, el estudiantado tendrá mayor dificultad en verificar la respuesta mediante el cálculo mental, aunque esta no es la habilidad que se persigue.

Puede ser conveniente plantear la frase de la siguiente forma:

- El doble de la suma de un número y tres es ciento treinta y dos, entonces rápidamente el estudiante verificará que el valor oculto es 63.

<p>Representaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Algebraica • Plano de coordenadas 	<p>7. Identificar y representar en un plano de coordenadas puntos que satisfacen una relación entre dos cantidades que varían simultáneamente.</p>	<p>▲ Presente pares ordenados con una ley de formación o patrón oculto que cada estudiante encuentra, conforme localiza los puntos en el plano.</p> <p>Por ejemplo:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>▲ Se podría utilizar un geoplano en lugar de un plano de coordenadas.</p>
---	--	---

Recuadro N° 20

Número sugerido de lecciones: 3 (Etapa I: 0, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad puede trabajarse de manera independiente y se brinda el tiempo adecuado para que el docente pueda verificar la construcción correcta del plano cartesiano en el primer cuadrante y la ubicación de los puntos por parte de cada estudiante.

Tercer Periodo

<p>Ecuaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> Ecuaciones de primer grado 	<p>8. Identificar si un número es solución de una ecuación dada.</p> <p>9. Plantear y resolver problemas aplicando ecuaciones de primer grado.</p>	<p> Carlos tiene que empacar 64 mandarinas en bolsas de 4 unidades. ¿Cuántos paquetes logró formar?</p> <p>▲ Se busca que cada estudiante deduzca el concepto de ecuación y de incógnita y comparta con su clase la estrategia que utilizó para resolverlo.</p> <p>▲ Las ecuaciones son del tipo:</p> <p>a. $a \times m = b$ b. $n + a = b$ c. $a + m = b$ d. $m + a = b$ e. $a - n = b$ f. $m - a = b$</p> <p>con a y b números dados, m, n incógnitas.</p> <p>▲ También es conveniente manejar la resolución de una ecuación como una especie de adivinanza matemática en la que se pretende encontrar un número desconocido. Esto permite ir afinando un algoritmo.</p> <p>▲ Solicite a cada estudiante que proponga ejemplos que involucren ecuaciones del tipo mencionado.</p> <p>▲ Modele matemáticamente situaciones sencillas que sean adecuadas para el nivel.</p> <p> El tipo de cambio del dólar, el cual puede ser modelado mediante la relación $C = d \times p$ donde C es la cantidad de colones, d representa la cantidad de dólares y p es el precio en colones del dólar.</p> <p> El Cine Vista Bella, cobra 1250 colones por cada entrada en los días martes y miércoles, lo que corresponde a la mitad del precio normal. Solicite que cada estudiante proponga un problema con esta situación.</p> <p> Aquí cabe resaltar los aportes del matemático griego Diofanto de Alejandría (aproximadamente 200-284 d.C.), considerado el padre del álgebra, en relación con el tratamiento de las ecuaciones. En efecto, Diofanto introdujo un simbolismo algebraico para las ecuaciones (notación sincopada), por cierto un simbolismo bastante complicado si lo comparamos con el actual. Pero él también estableció reglas para multiplicar expresiones algebraicas, las leyes de signos (más por menos es menos, etc.) y reglas para multiplicar potencias, además de proponer y resolver varios problemas.</p>
---	--	---

Recuadro N° 21

Número sugerido de lecciones: 10 (Etapa I: 5, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Las habilidades pueden desarrollarse a través de problemas como los presentados en las indicaciones puntuales. Igualmente, se deben fortalecer esas habilidades mediante problemas de reproducción y conexión en la Etapa II.

Un problema puede ser el siguiente:

😊 Determine tres números consecutivos que sumen 63.

Al realizar este tipo de problema en Primaria, los estudiantes pasan por un proceso de experimentación basado en el ensayo y error, lo que constituye un reto.

Por otra parte, respecto a las indicaciones puntuales, en el problema de las mandarinas el docente puede aumentar el nivel de dificultad del problema propuesto con el objetivo de obligar al estudiantado a recurrir a otra estrategia de trabajo además del cálculo mental, favoreciendo así acceder a la noción de ecuación e incógnita, con las siguientes modificaciones:

😊 Carlos tiene que empacar 261 mandarinas en bolsas de 9 unidades. ¿Cuántos paquetes logró formar?

Ecuaciones <ul style="list-style-type: none"> • Inecuación de primer grado 	10. Identificar si un número es solución de una inecuación dada. 11. Plantear y resolver problemas aplicando inecuaciones de primer grado.	▲ Se puede vincular las relaciones de dependencia entre las variables y las ecuaciones mediante el planteo de problemas donde haya una situación de compra de un artículo a un precio dado, y con ello determinar cuántas unidades se pueden comprar con cierta cantidad de dinero; o bien, ¿cuál es la mayor cantidad de unidades que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero?
---	---	---

Recuadro N° 22

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Estas dos habilidades pueden desarrollarse mediante problemas de reproducción y conexión en la Etapa II. En la I Etapa se requiere de un cierre del proceso de la noción intuitiva de inecuación, analizando que hay varias respuestas posibles y que dependiendo de la situación hay una cantidad máxima que satisface o una cantidad mínima. Un ejemplo puede ser el siguiente:

😊 ¿Cuál es la cantidad máxima de naranjas que se pueden comprar con 2 000 colones si cada naranja cuesta 375 colones?

El docente debe verificar que las habilidades previas hayan sido adquiridas de manera apropiada o de lo contrario puede emplear los problemas relacionados con estas habilidades para fortalecerlas, debido a su relación.

Estadística y Probabilidad

Primer periodo

Estadística																																																								
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales																																																						
Porcentajes <ul style="list-style-type: none"> Frecuencias porcentuales Comparaciones entre grupos 	<ol style="list-style-type: none"> Resumir y clasificar grupos de datos utilizando la frecuencia porcentual. Identificar la frecuencia porcentual como herramienta fundamental para los análisis comparativos entre dos o más grupos de datos. 	<p>▲ La frecuencia absoluta no siempre es una buena estrategia para analizar los datos. Plantee el siguiente problema:</p> <p> Suponga que se realizó una encuesta para determinar el nivel de agrado por el consumo de frutas (mucho, regular, poco) entre los hombres y mujeres de un grupo de sexto grado y los resultados se resumen en el siguiente cuadro:</p> <p style="text-align: center;">Relación con el agrado de las y los estudiantes por las frutas según el sexo</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Agrado</th> <th>Hombres</th> <th>Mujeres</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mucho</td> <td>9</td> <td>7</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>Regular</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Poco</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>18</td> <td>12</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table> <p>De acuerdo con esta información, ¿quiénes tienen más preferencia por el consumo de frutas, los hombres o las mujeres?</p> <p>Considerando los conocimientos previos, se espera que perciban que los hombres tienen una mayor predilección por las frutas, pues es mayor el número de hombres que prefieren las frutas. No obstante, dicha afirmación es falsa, pues el número total de hombres en el grupo es muy superior al de mujeres.</p> <p>Hay que orientar el proceso. Para ello se podría consultar ¿quién tiene menos preferencia por el consumo de frutas? En este sentido se pide reflexionar que los hombres tienen menos preferencia, lo cual les lleva a una contradicción y a la necesidad de replantear el problema.</p> <p>Es necesario orientar hacia la necesidad de que consideren el cálculo de porcentajes para cada sexo tal como se indica.</p> <p style="text-align: center;">Distribución absoluta y porcentual en relación con el agrado de las y los estudiantes por las frutas según el sexo</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Agrado</th> <th colspan="2">Hombres</th> <th colspan="2">Mujeres</th> <th rowspan="2">Total</th> </tr> <tr> <th>Abso-luto</th> <th>%</th> <th>Abso-luto</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mucho</td> <td>9</td> <td>50,0</td> <td>7</td> <td>58,3</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>Regular</td> <td>5</td> <td>27,8</td> <td>3</td> <td>25,0</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Poco</td> <td>4</td> <td>22,2</td> <td>2</td> <td>16,7</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>18</td> <td>100,0</td> <td>12</td> <td>100,0</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table> <p>Con esta información se puede concluir que las mujeres tienen una mayor preferencia por el consumo de frutas. En la etapa de clausura, se debe señalar la importancia de usar los porcentajes en los análisis comparativos entre las frecuencias de dos o más grupos de datos, pues los valores absolutos pueden engañar.</p>	Agrado	Hombres	Mujeres	Total	Mucho	9	7	16	Regular	5	3	8	Poco	4	2	6	Total	18	12	30	Agrado	Hombres		Mujeres		Total	Abso-luto	%	Abso-luto	%	Mucho	9	50,0	7	58,3	16	Regular	5	27,8	3	25,0	8	Poco	4	22,2	2	16,7	6	Total	18	100,0	12	100,0	30
Agrado	Hombres	Mujeres	Total																																																					
Mucho	9	7	16																																																					
Regular	5	3	8																																																					
Poco	4	2	6																																																					
Total	18	12	30																																																					
Agrado	Hombres		Mujeres		Total																																																			
	Abso-luto	%	Abso-luto	%																																																				
Mucho	9	50,0	7	58,3	16																																																			
Regular	5	27,8	3	25,0	8																																																			
Poco	4	22,2	2	16,7	6																																																			
Total	18	100,0	12	100,0	30																																																			

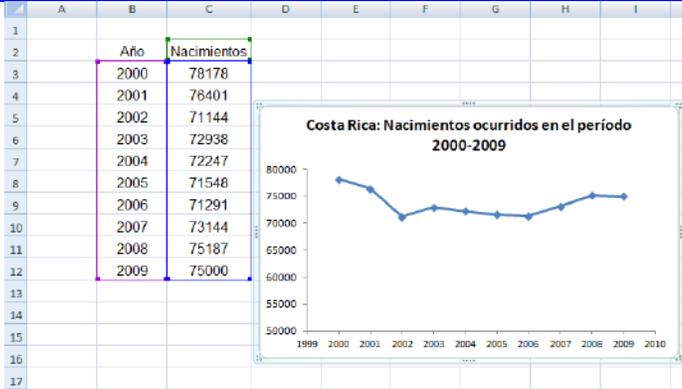
		 <p>Para este problema el uso de la calculadora permite determinar los porcentajes de una manera muy simple y rápida. Hay que recordar que en este tipo de problemas los cálculos no son el fin, sino el medio para resolver el problema y argumentar las respuestas.</p>
--	--	--

Recuadro N° 23

<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>Número sugerido de lecciones:</td> <td>5 (Etapa I: 3, Etapa II: 2)</td> </tr> </table>	Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 3, Etapa II: 2)
Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 3, Etapa II: 2)	
<p>Indicaciones y ejemplos</p> <p>Estas habilidades pueden trabajarse simultáneamente mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales.</p>		

Segundo Periodo

<p>Diagramas lineales</p>	<p>3. Utilizar diagramas lineales para representar tendencias en series de tiempo.</p>	<p>▲ Los gráficos lineales se utilizan fundamentalmente para representar series de tiempo, las cuales constituyen un grupo de datos ordenados de acuerdo con el tiempo de ocurrencia.</p> <p> Utilice los datos que se proporcionan para resumir gráficamente la información correspondiente a la cantidad de nacimientos de hombres y mujeres en el país entre el año 2000 y el 2009 empleando una escala apropiada (una unidad por diez mil nacimientos). Comente los resultados.</p> <p style="text-align: center;">Nacimientos en Costa Rica, 2000-2009</p> <table border="1" style="margin: auto; width: 80%;"> <tr> <td>Año</td> <td>2000</td> <td>2001</td> <td>2002</td> <td>2003</td> <td>2004</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>78 178</td> <td>76 401</td> <td>71 144</td> <td>72 938</td> <td>72 247</td> </tr> </table> <table border="1" style="margin: auto; width: 80%;"> <tr> <td>Año</td> <td>2005</td> <td>2006</td> <td>2007</td> <td>2008</td> <td>2009</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>71 548</td> <td>71 291</td> <td>73 144</td> <td>75 187</td> <td>75 000</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">Fuente: Centro Centroamericano de Población</p> <p> Aunque estos gráficos se pueden construir en forma manual, si se tiene acceso a computadoras el proceso se simplifica y cada estudiante puede concentrarse en el mensaje que los datos proporcionan.</p>	Año	2000	2001	2002	2003	2004	Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247	Año	2005	2006	2007	2008	2009	Total	71 548	71 291	73 144	75 187	75 000
Año	2000	2001	2002	2003	2004																					
Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247																					
Año	2005	2006	2007	2008	2009																					
Total	71 548	71 291	73 144	75 187	75 000																					

		 <p>▲ Es esencial que el análisis que se realice esté centrado en la tendencia de los datos, de modo que identifiquen el descenso de los nacimientos que se experimentó entre los años 2000 y 2002 y que después de ese año el número de nacimientos no varió de forma significativa entre un año y otro.</p> <p>⚙️ Se debe evidenciar la importante conexión que existe entre la <i>Estadística</i>, <i>Relaciones</i> y <i>Álgebra</i> (plano cartesiano) y las Ciencias Sociales. Este vínculo no sólo contribuye a facilitar el entendimiento de las formas de representación gráfica de la información, sino que permite llenar de significado los conceptos aprendidos en las lecciones.</p>
<p>Planteamiento y resolución de problemas</p>	<p>4. Plantear y resolver problemas vinculados con diferentes contextos utilizando análisis estadísticos.</p>	<p>▲ Se busca que las y los estudiantes puedan plantear problemas dentro del contexto del colegio o de la comunidad y diseñar estrategias que podrían ser implementadas para resolver la problemática (aunque no es necesario llevarlas a la práctica).</p> <p>⚙️ En este ciclo es fundamental enfatizar en las distintas fases que comprende la resolución de problemas.</p>

Recuadro N° 24

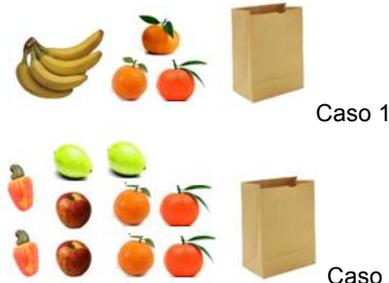
Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 3, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Ambas habilidades deben trabajarse mediante problemas como los que se proponen en las indicaciones puntuales. Asimismo, se debe brindar la cantidad de tiempo necesaria para que los estudiantes logren las habilidades a través de la II Etapa.

Dentro de los problemas que se pueden plantear se encuentra la posibilidad de ofrecer a los estudiantes un diagrama lineal para que elaboren un cuestionamiento en subgrupos y después de ser revisado por el docente trasladarlo a otro subgrupo para que sea resuelto.

Tercer Periodo

Probabilidad		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Probabilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> Definición clásica o laplaciana de probabilidad 	<p>1. Determinar la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.</p>	<p>▲ Para generar las condiciones necesarias para definir el concepto de probabilidad, pueden realizarse actividades como las siguientes:</p> <p>😊 El profesor plantea siguiente problema a Carlos y Ana. Se incluyen frutas dentro de dos bolsa tal como se muestra en las figuras:</p> <div style="text-align: center;">  <p>Caso 1</p> <p>Caso 2</p> </div> <p>Se plantea la interrogante que si se seleccionaran aleatoriamente una fruta de la bolsa en cada caso, ¿en cuál sería más probable seleccionar una naranja?. Carlos le dice a Ana que de acuerdo con lo que se ha venido estudiando entre más resultados hay a favor de un evento, mayor es la probabilidad, por ello en el caso 2 sería más probable obtener una naranja. ¿Está usted de acuerdo con el argumento de Carlos? Justifique matemáticamente su respuesta.</p> <p>▲ Se pretende que identifiquen el concepto de probabilidad como una medida relativa, para el problema anterior deben identificar que en mayor tres de siete que cuatro de diez.</p> <p>▲ Para complementar el problema anterior, introduzca en una caja o en una tómbola cuatro bolas de color rojo, tres azules y tres blancas (o cualesquiera otros colores, pero trate de mantener la relación). Luego proponga el siguiente problema:</p> <p>😊 Determinar cada uno de los siguientes valores:</p> <ol style="list-style-type: none"> Proporción de bolas rojas que hay en la caja (equivalente a la razón de bolas rojas entre el total de bolas). Proporción de bolas azules que hay en la caja (equivalente a la razón de bolas azules entre el total de bolas). Proporción de bolas blancas que hay en la caja (equivalente a la razón de bolas blancas entre el total de bolas). <p>Si se extrae una bola aleatoriamente, ¿qué evento es más probable para cada una de las siguientes parejas?</p> <ol style="list-style-type: none"> La bola extraída es roja; la bola extraída es azul. La bola extraída es blanca; la bola extraída es azul. <p>Compare los resultados de las proporciones con los eventos más probables y menos probables anteriores. ¿Qué conclusión se puede extraer?</p>

		<p>▲ En el proceso de clausura o cierre de esta actividad se propone realizar un foro de discusión donde se expongan las ideas más importantes.</p> <p>Después de esta actividad se debe definir el concepto de probabilidad como la proporción de casos favorables de un evento entre el total de casos. Aquí debe quedar claro que esta definición es válida siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Presentar nuevas situaciones que les ayuden a reafirmar el concepto.</p>
--	--	---

Recuadro N° 25

Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 3, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Se trabajará sola a través de problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Asimismo, se debe brindar la cantidad de tiempo necesaria para que los estudiantes logren las habilidades.

Por otra parte, cabe indicar que respecto al primer problema planteado en las indicaciones puntuales, el docente puede hacer modificaciones entre ellas cambiar el problema con confites similares pero de diferentes sabores, o con otros objetos que no se pueden distinguir con el simple tacto.

<p>Propiedades de las probabilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0 	<ol style="list-style-type: none"> 2. Deducir mediante situaciones concretas los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, de un evento seguro y de un evento imposible. 3. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones. 	<p>▲ Para la misma situación establecida al inicio del tema, mediante trabajo en subgrupos pedir que se resuelva el siguiente problema.</p> <p> Determine un evento imposible y un evento seguro y responda las siguiente preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? b. ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? c. Si se suman las probabilidades de obtener una bola roja, de obtener una bola azul y de obtener una bola blanca, ¿cuál es el resultado? d. ¿Podría ocurrir que un evento cualquiera tenga una probabilidad mayor que la unidad? e. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la probabilidad de un evento? <p>▲ Con los resultados generados en cada subgrupo plantear una lluvia de ideas para determinar las principales conclusiones sobre el estudio.</p> <p>Finalmente se requiere precisar las propiedades básicas, en el sentido que una probabilidad es un valor entre cero y uno, además que la probabilidad de un evento seguro es uno y la de un evento imposible es cero.</p> <p>Seguidamente, para reforzar el conocimiento adquirido, proporcionar algunos problemas adicionales.</p> <p> Las probabilidades se pueden utilizar para representar situaciones aleatorias. Al final del ciclo, debe quedar claro que en las situaciones aleatorias no es posible conocer el resultado que se va a obtener, caso contrario de las situaciones deterministas. No obstante, por medio de las probabilidades se puede modelar cuáles resultados tienen mayor posibilidad de ocurrencia, lo cual facilita la toma de decisiones.</p>
--	--	---

Recuadro N° 26

Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 3, Etapa II: 2)
--------------------------------------	-----------------------------

Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades pueden trabajarse en conjunto mediante problemas similares a los propuestos en las indicaciones puntuales. Asimismo, se debe brindar la cantidad de tiempo necesaria para que los estudiantes logren las habilidades.

Los problemas con urnas y bolitas, dominos, naipes y el uso del dado son algunos recursos que pueden emplearse para proponer problemas interesantes sobre la posibilidad de un evento. Es primordial propiciar actividades que impliquen la toma de decisiones de acuerdo a las posibilidades.

Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autoras

Damaris Oviedo
Marianela Zumbado

Autoras de la sección de *Elementos previos*

Grace Vargas
Marianela Zumbado

Editor

Angel Ruiz

Editor gráfico

Miguel González

Revisores

Christiane Valdy
Damaris Oviedo Arce
Grace Vargas
Javier Barquero
Susanne Blais
Magda Mora

Revisión filológica

Julián Ruiz

Director general del proyecto

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Sexto año*. San José, Costa Rica: autor.



Documento de integración de habilidades para Sexto año por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014) se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)