Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Documento de integración de habilidades para Octavo año

Imagen cortesía de Stuart Miles en Freedigitalphotos.net

Costa Rica
2014

Tabla de contenidos

Primera parte: Elementos previos

A continuación se presenta la propuesta de distribución de las áreas para el Octavo año, que también será considerada en la segunda parte de este documento.

Tabla 1. Distribución de áreas Matemáticas para Octavo año según lo estipulado en los programas de estudio

Nivel	Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Octavo año	Números Geometría	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad

Nota:

- *Medidas* es transversal en el Tercer ciclo.

Aquí se ofrece un recuento aproximado del número de lecciones que supondría en este nivel el trabajo usando la estrategia sugerida de integración de habilidades por área mediante problemas.

Tabla 2. Conteo de lecciones por área y periodo en el Octavo año

Octavo año		
Primer Periodo	**Segundo Periodo**	**Tercer Periodo**
Números 33 Geometría 27	Relaciones y Álgebra 54	Estadística y Probabilidad 36
Suma total de lecciones por periodo		
60	**54**	**36**

Segunda parte: Integración de habilidades

Números

Conocimientos

Números racionales

- Concepto de número racional
- Representaciones

Habilidades específicas

1.Identificar números racionales en diversos contextos.

Indicaciones puntuales

▲ Se pueden proponer problemas como el siguiente.

Aquí aparecen los precios de los combustibles.

PRECIOS NACIONALES (*)
LOCAL PRICES (*)

Precios en colones **al consumidor en estaciones de servicio**
Rigen a partir del 02 de Febrero del 2012

PRODUCTOS PRODUCTS	PRECIO / litro sin imp. Único cost / litre without tax	Imp. único Tax	Margen Promedio de Estaciones de Servicio Local Services stations Average Margin	Precio / litro total Total Cost / litre
Gasolina Super Super Gasoline	351,7460	213,0000	50,5548	615,0000
Gasolina Plus 91 Plus 91 Gasoline	346,3730	203,5000	50,5548	600,0000
Diesel 50 Diesel 50	403,7050	120,2500	50,5548	575,0000

Imagen tomada de:
http://www.recope.go.cr/info_clientes/precios_productos/

Si en la gasolinera pido que me vendan ₡10 000 en gasolina Plus 91, ¿cuántos litros me dan?

▲ Problemas como éste permiten introducir la necesidad de utilizar otros números diferentes a los enteros.

▲ Cada estudiante debe tener claro que los números enteros también son números racionales.

▲ Es importante que cada estudiante pueda resolver situaciones en contexto en las que se involucre la noción de división. Esto permitirá en la etapa de clausura establecer su representación por medio de fracciones. Se deben implementar ejemplos que originen números enteros y no enteros (no se debe olvidar contemplar situaciones que involucren números negativos). Por ejemplo:

Si camino 10 m en dirección Oeste y me devuelvo una cuarta parte de dicho recorrido, ¿cuánto me desplacé con respecto al lugar del que salí?

Juan contrajo una deuda de ₡17 500. Su padre, un hermano y un amigo deciden ayudarle a pagarla por lo que se reparten la deuda equitativamente entre ellos tres. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

	2.Realizar aproximaciones decimales de números racionales. 3.Identificar los números racionales representados con expansión decimal exacta y con expansión decimal periódica.	▲ Inicialmente, se debe procurar que el estudiante efectúe divisiones sin el uso de la calculadora. Esto permite enfatizar cómo es que se obtienen las representaciones decimales de los números racionales. De paso, se puede visualizar la infinitud de los decimales de algunos números racionales. $\frac{21}{4} = 21 \div 4 = 5{,}25$ $\frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1{,}33333\ldots = 1{,}\overline{3}$ $\frac{9}{11} = 9 \div 11 = 0{,}818181\ldots = 0{,}\overline{81}$ $\frac{7}{6} = 7 \div 6 = 1{,}166666\ldots = 1{,}1\overline{6}$ ▲ Esta noción de infinitud es fundamental en los números racionales e irracionales que se tratan en el próximo año escolar. ▲ Al aproximar fracciones por medio de su expansión decimal, se debe aclarar que la calculadora da una aproximación (en el caso de los decimales periódicos), por lo que la notación mediante el uso de la raya del periodo o bien la notación fraccionaria asegura la exactitud en la representación del número racional.
	4.Identificar y aportar ejemplos de representaciones distintas de un mismo número racional.	▲ Por ejemplo $\frac{7}{5} = 1{,}4 = 1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$. ▲ Se pueden idear problemas donde se haga uso de representaciones numéricas adecuadas para el desarrollo de actividades cotidianas. Por ejemplo: Ana encontró en Internet una receta cuyos ingredientes aparecen a continuación.  Gastronomía del Mundo OTRO PASTEL DE LIMÓN Ingredientes - Pasta: - 2 1/4 tazas de harina - 1 taza colmada de margarina - 1/8 cdta. de sal - - Relleno: - 2 3/4 tazas de azúcar - 1 taza de fécula de maíz - 3 tazas de agua - 4 yemas de huevo batidas - 4 cdas. de margarina derretida - 6 cdas. de jugo de limón - Ralladura de 3 limones - - Merengue: - 4 claras - 6 cdas. de azúcar **Imagen tomada de: http://www.arecetas.com** Ana manifiesta que no comprende la forma en que aparece la información pues no está descrita en la forma tradicional. ¿De qué forma se puede ayudar a Ana para que comprenda los datos de la receta?

Recuadro Nº 1

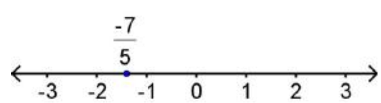
Número sugerido de lecciones:	8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Este tipo de números así como sus diferentes representaciones fueron trabajados por los estudiantes en forma paulatina durante el Segundo ciclo.

Como se especifica en lñas indicaciones puntuales, es importante que cada estudiante pueda resolver situaciones en contexto en las que se involucre la noción de división. Esto permitirá en la etapa de clausura establecer su representación por medio de fracciones. Se deben implementar ejemplos que originen números enteros y no enteros (no se debe olvidar contemplar situaciones que involucren números negativos).

Conviene realizar mini cierres partiendo de los conocimientos previos del estudiantado (lo trabajado en primaria) y la generalización para los racionales negativos. Para esto se pueden proponer retos y utilizar la pregunta dirigida para diagnosticar y ambientar preguntas generadoras para lo referente a los racionales negativos.

Números racionales • Relaciones de orden	5.Comparar y ordenar números racionales en notación decimal, fraccionaria y mixta. 6.Representar números racionales en la recta numérica, en cualquiera de sus representaciones.	Usar la estimación mental y la calculadora para realizar tal representación. ▲ Para ubicar $\frac{-7}{5}$ en la recta numérica se pueden utilizar algunas de sus representaciones: $\frac{-7}{5} = -1{,}4 = -1\frac{2}{5}$ 

Recuadro Nº 2

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 1, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Habilidades semejantes fueron desarrolladas durante el Segundo ciclo. Además, los estudiantes trabajaron las relaciones de orden para los números enteros durante el sétimo año. Esto facilita el trabajo cuando se aborda el tema de las relaciones de orden y ubicación en la recta numérica en el caso de los números racionales. Puede realizarse una actividad mediante el uso de la pregunta dirigida.

Operaciones, cálculos y estimaciones • Suma • Resta • Multiplicación • División	7.Aplicar la suma y resta de números racionales en diversos contextos. 8.Aplicar la multiplicación y división de números racionales en diversos contextos. 9.Utilizar las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y multiplicación para simplificar cálculos con números racionales. 10.Calcular el resultado de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números racionales en cualquiera de sus representaciones. 14.Desarrollar estrategias para el cálculo mental de resultados de operaciones con racionales. 15.Seleccionar métodos y herramientas adecuados para la resolución de cálculos, según el problema dado. 16.Plantear y resolver problemas en los que se requiera de la aplicación de operaciones con números racionales.	▲ Se puede formular problemas como el siguiente: Ademar compró 3 metros de plástico para forrar cuadernos. El necesitó $1\frac{1}{5}$ m para forrar algunos, su hermano Randall utilizó 0,6 m y su hermana Hellen usó $\frac{1}{3}$ m. a) ¿Cuánto plástico utilizaron para forrar los cuadernos? b) ¿Cuánto plástico sobró? ▲ Es importante retomar lo trabajado respecto al uso de diversas representaciones de un número, así como la amplificación y simplificación de fracciones para justificar el empleo del mínimo común múltiplo en el desarrollo de estas operaciones: Representaciones: $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5},\quad 0{,}6 = \frac{6}{10}$ Operación: $\frac{6}{5} + \frac{6}{10} + \frac{1}{3} =$ Mínimo Común Múltiplo de 5, 10 y 3 es 30. Amplificación de las fracciones por 6, por 3 y por 10 respectivamente: $\frac{36}{30} + \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = \frac{64}{30}$ Simplificación: $\frac{64}{30} = \frac{32}{15}$ Así ellos gastaron $\frac{32}{15}$ m (aproximadamente 2,13 m). ▲ En la etapa de clausura o cierre, se detalla el algoritmo que permite sumar y restar fracciones heterogéneas por medio del Mínimo Común Múltiplo de sus denominadores. ▲ Se debe trabajar con suma y resta de números racionales en cualquiera de sus notaciones. ▲ Deben usarse ejercicios apropiados, por ejemplo: $\frac{-8}{7} - \frac{5}{7}$ $\frac{-9}{4} + \frac{3}{4}$ $\frac{1}{6} - \frac{5}{6} + -3$ $\frac{-1}{5} \cdot -4$ Solicitar a cada estudiante juzgar si los resultados de las estimaciones son razonables y que argumente su posición. ▲ Dependiendo del problema se pueden utilizar diferentes estrategias de cálculo, por ejemplo:

Cálculo mental	1,5 kg a ₡2000 cada kilogramo.
Papel y lápiz	1,5 kg a ₡2450 cada kilogramo.
Calculadora	1,75 kg a ₡2225 cada kilogramo.

▲ Conviene proponer operaciones para que los estudiantes planteen problemas. Por ejemplo:

Se pide a las y los estudiantes que planteen un problema en el que se involucre la siguiente combinación de operaciones:

$$\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{2}{3}\cdot 3$$

Recuadro Nº 3

Número sugerido de lecciones:	12 (Etapa I: 4, Etapa II: 8)

Indicaciones y ejemplos

Este conjunto de habilidades se reduce básicamente a plantear y resolver problemas donde se apliquen operaciones con números racionales. Es conveniente que el docente aborde en una sola actividad, diferentes problemas que permitan trabajar lo correspondiente a simplificar, multiplicar y dividir números racionales.

En otra actividad abordar el conocimiento *suma y resta de fracciones heterogéneas* (como la del problema de Ademar). El utilizar la propiedad asociativa y conmutativa de la suma y el producto es una estrategia para el cálculo mental que puede recomendarse a los estudiantes durante la resolución de los problemas para determinar rápidamente el resultado de algunas operaciones que se presenten.

Las cuatro lecciones que se sugieren en la Etapa I son para mini cierres en diferentes momentos de las actividades sugeridas, que se harán para formalizar con el estudiantado por ejemplo la suma y resta de fracciones heterogéneas y la operatoria con números racionales en general.

Operaciones, cálculos y estimaciones • Potencias	11.Efectuar operaciones con potencias de base racional y exponente entero.	▲ Generalización de las propiedades verificadas en 7°Año. Es necesario formalizar las siguientes propiedades: a. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}, a\neq 0$ b. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, b\neq 0$ c. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n, a\neq 0, b\neq 0$

Recuadro Nº 4

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 1, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Para la formalización de las propiedades se puede plantear una actividad y en una lección hacer el cierre. En la siguiente lección se pueden realizar ejercicios de reproducción de estas propiedades y en las dos últimas lecciones de movilización con prácticas que integren todas las propiedades vistas hasta ahora (incluyendo las de Sétimo año).

Operaciones, cálculos y estimaciones • Raíces	12.Calcular raíces *n*-ésimas de un número racional.	▲ Las raíces calculadas deben dar como resultado un número racional. ▲ Si el número racional está representado en su forma fraccionaria, es fundamental el proceso de obtener la raíz sin el uso de la calculadora mediante la descomposición en factores primos del numerador y el denominador. El docente debe introducir el uso de la siguiente propiedad: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Recuadro Nº 5

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 1, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabaja de manera independiente, aplicando las estrategias que se estudiaron para sétimo año en el cálculo de raíces para números enteros.

Por medio de la pregunta dirigida se puede realizar un diagnóstico del cálculo de raíces de números enteros. Con base en este diagnóstico se prosigue con la búsqueda de relaciones que les permita introducir la propiedad presente en las indicaciones puntuales y realizar un cierre de cómo calcular raíces n-ésimas de un número racional a partir de las estrategias para calcular raíces n-ésimas de un número entero y la propiedad nueva aprendida.

Operaciones, cálculos y estimaciones • Combinación de operaciones	13.Calcular resultados de operaciones con números racionales de expresiones donde haya combinación de ellas con paréntesis o sin ellos.	▲ En la prioridad de operaciones, plantear operaciones que no excedan los dos términos. Por ejemplo: $-\frac{3}{4} + 5^{-1} \div -1{,}3 =$ ▲ Si se contempla el uso de paréntesis, las expresiones deberán contener como máximo dos y que cada uno de ellos contenga solamente dos términos (dos factores a lo sumo cada término). A continuación algunos ejemplos: $-2\left(\frac{-5}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2}\right)$ $2\frac{1}{3}\left(-1{,}4 - 2 \div \sqrt{\frac{1}{4}}\right) - 5\left(\frac{-2}{3} \cdot \frac{-1}{4} - 1\right)$

Recuadro Nº 6

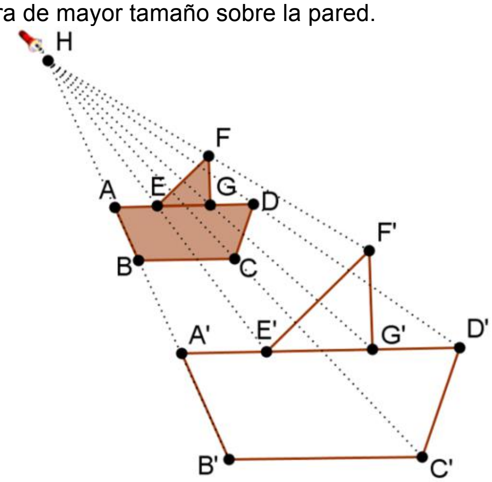
Número sugerido de lecciones:	4 (Etapa I: 1, Etapa II: 3)

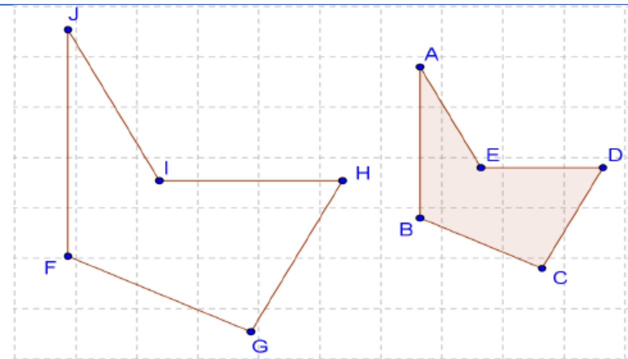
Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabaja de manera independiente, cuando ya se hayan visto todos los tipos de operaciones involucradas. Recordar que la prioridad en el orden de las operaciones es un tema ya trabajado con los estudiantes, en los diferentes tipos de números estudiados.

Se puede proponer al inicio de la lección una combinación de operaciones que involucre raíces para que sea resuelta por los estudiantes y ver cómo se ponen de acuerdo para su resolución. Así es probable que los estudiantes decidan resolver primero las raíces y continuar con la secuencia de operaciones como se ha estudiado. Esto serviría como insumo al docente para que en el cierre pueda dar forma a esta idea.

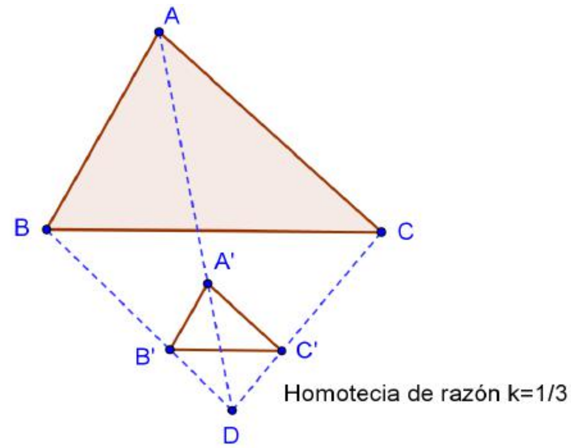
Geometría

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Transformaciones en el plano • Homotecias • Puntos homólogos • Segmentos homólogos	1. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una *homotecia*. 2. Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia.	▲Para iniciar, se puede plantear el siguiente problema: Un foco alumbra la figura de un barco y proyecta una sombra de mayor tamaño sobre la pared.  Se proponen las siguientes interrogantes: a. ¿Qué elementos permanecen invariantes? b. ¿Hay relaciones métricas entre los lados y ángulos de los dos barcos? c. ¿Hay relaciones métricas entre las distancias del foco a la figura y de la figura a la sombra? ▲ Por último, se realiza la etapa de cierre con el concepto de homotecia utilizando un foco para alumbrar un objeto (la mano, un basurero, etc.) en la pared del aula. Se coloca el objeto a cierta distancia del foco (por ejemplo a 1 m de distancia en línea recta), de tal forma que se proyecte la sombra del objeto en la pared. Luego, se cambia la distancia (por ejemplo a 50 cm de distancia) de él, y así sucesivamente se acerca y se aleja el objeto en línea recta. Es importante que se dialogue acerca de cuáles elementos permanecen invariantes y cuáles no. También es importante que se midan las distancias entre la lámpara y el objeto y entre la lámpara y la sombra. Se puede medir la longitud del objeto y la de la sombra para verificar que la razón entre las distancias es igual a la razón entre las longitudes. ▲ Se deberán reconocer los puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y su homotecia. Por ejemplo en la siguiente figura, JIHGF es la imagen bajo una homotecia del pentágono ABCDE. A y J son puntos homólogos, el ángulo ABC es homólogo al ángulo JFG y el lado ED es homólogo al lado IH.

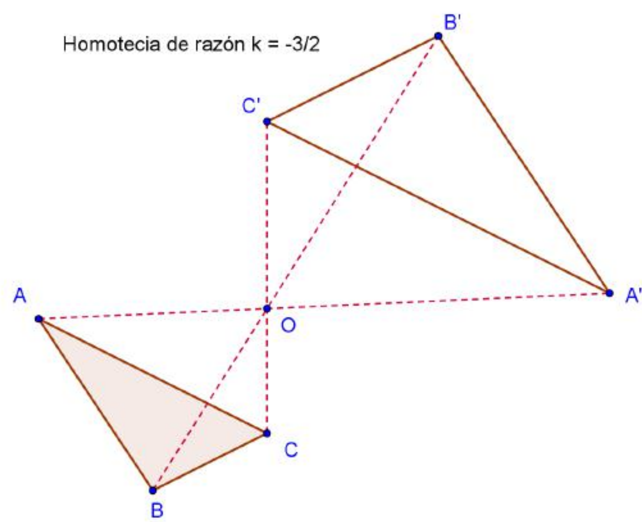


▲ Se deben desarrollar tanto homotecias directas ($k > 0$) como homotecias inversas ($k < 0$). Por ejemplo:

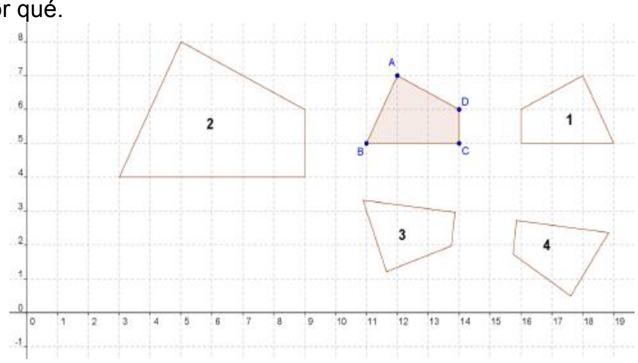
Homotecia directa



Homotecia inversa



Este tipo de problemas requiere de una actitud perseverante y activa del estudiantado y la apropiada intervención docente formulando preguntas generadoras que encaminen a la comprensión de los conceptos.

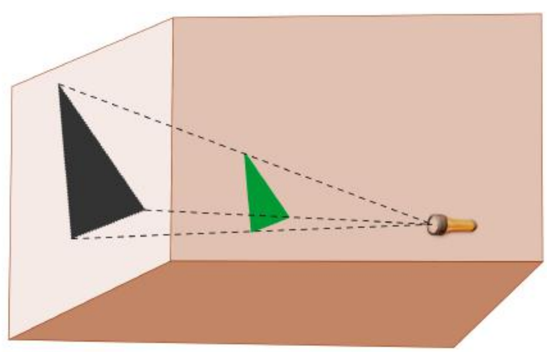
	3. Reconocer pares de figuras homotécicas en el plano de coordenadas.	▲ Como ya se ha estudiado el tema de homotecia se puede plantear el siguiente problema: Con base en la siguiente figura, se puede pedir que se identifique cuál o cuáles son homotecias del cuadrilátero ABCD, que se diga cuáles figuras son homotécicas y que se explique por qué. 

Recuadro Nº 7

Número sugerido de lecciones:	8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

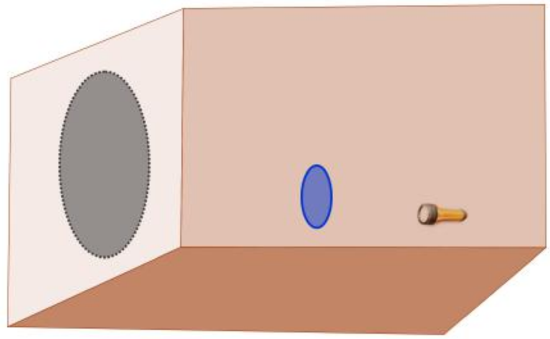
Este es un tema nuevo, por lo que es recomendable introducirlo primero de forma intuitiva mediante una actividad que utilice con material concreto. Por ejemplo, la proyección de la sombra de figuras geométricas en la pared utilizando un foco, en este caso un triángulo de cartón:



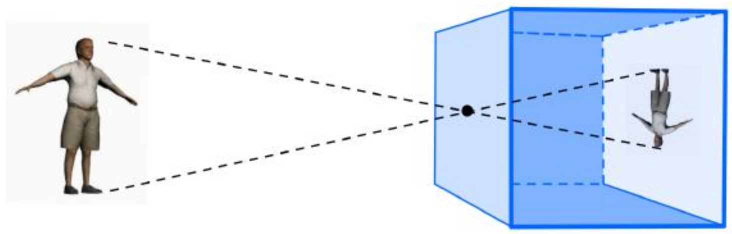
Luego, se proponen las siguientes interrogantes para generar conjeturas:

a. ¿Qué elementos permanecen invariantes?
b. ¿Hay relaciones métricas entre los lados y ángulos de los dos triángulos?
c. ¿Hay relaciones métricas entre las distancias del foco a la figura y de la figura a la sombra?

También, se puede hacer el experimento con otras figuras no poligonales como el círculo y ver las relaciones entre el diámetro de la figura y el diámetro de su sombra:



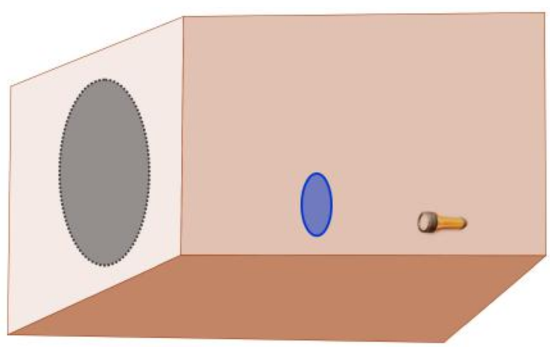
Para introducir la noción de *homotecia inversa* se puede utilizar la idea de la *cámara oscura*.



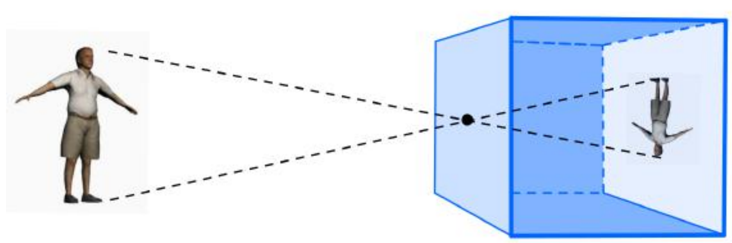
Esta es otra actividad que se puede realizar experimentalmente en el aula, ya que la “cámara oscura” puede ser construida por los estudiantes de dos formas:

- Haciendo del aula una cámara oscura, dejando en el aula apenas un orificio donde pueda entrar la luz. Esto con papel oscuro tapando cada espacio por donde puede ingresar la luz.
- De forma individual o grupal con una caja de cartón, goma, papel oscuro y tijeras.

Estas actividades ayudan a introducir de forma natural conceptos como puntos, segmentos y ángulos homólogos entre una figura y su homotética.



Para introducir la noción de *homotecia inversa* se puede utilizar la idea de la *cámara oscura*.



Esta es otra actividad que se puede realizar experimentalmente en el aula, ya que la "cámara oscura" puede ser construida por los estudiantes de dos formas:

- Haciendo del aula una cámara oscura, dejando en el aula apenas un orificio donde pueda entrar la luz. Esto con papel oscuro tapando cada espacio por donde puede ingresar la luz.
- De forma individual o grupal con una caja de cartón, goma, papel oscuro y tijeras.

Estas actividades ayudan a introducir de forma natural conceptos como puntos, segmentos y ángulos homólogos entre una figura y su homotética.

<table>
<tr>
<td>

Triángulos

- Semejanza
- Congruencias

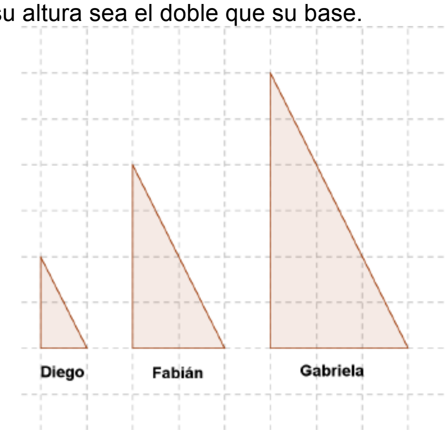
</td>
<td>

4. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1.
5. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1.
6. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos.
7. Identificar figuras congruentes en diferentes contextos.
8. Aplicar los criterios de semejanza: lado ladolado, lado ángulo lado y ángulo ánguloángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos.
9. Aplicar los criterios de congruencia: lado ladolado, lado ángulo lado y ángulo lado ángulo, para determinar y probar la congruencia de triángulos.
10. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.
11. Utilizar software de geometría dinámica para visualizar propiedades relacionadas con la congruencia y semejanza de triángulos.

</td>
<td>

Para introducir este tema se puede utilizar como elemento motivador una breve reseña sobre Thales de Mileto (siglo VI a. C.). Se le considera como el primer filósofo y como el primero de los Siete Sabios griegos. Aunque no existen evidencias claras, se ha dicho que Thales fue el primer matemático auténtico en el sentido de que fue el primero en preocuparse por la demostración de las propiedades de las figuras geométricas. Se cuenta que Thales midió la altura de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo clavado verticalmente era igual a su altura (uso de la semejanza de triángulos).

▲ Primero, es importante construir el concepto de congruencia y semejanza de figuras de forma intuitiva. Por ejemplo, se puede pedir que se dibuje en papel cuadriculado un triángulo rectángulo donde su altura sea el doble que su base.



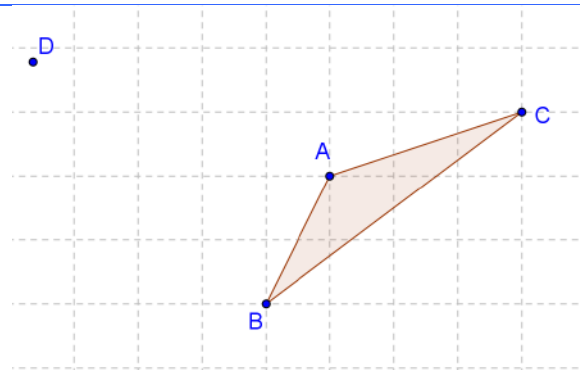
Se pide a cada estudiante comparar un triángulo con el del resto de la clase para buscar quiénes construyeron triángulos "iguales" (con las mismas dimensiones). Tomando en cuenta que hayan diversas respuestas correctas, se puede preguntar:

a. ¿Puede haber varios triángulos que cumplan estas condiciones?
b. Si es así, ¿cómo se podrían agrupar de acuerdo con sus características?
c. ¿Cuáles elementos de los triángulos construidos varían y cuáles no varían?

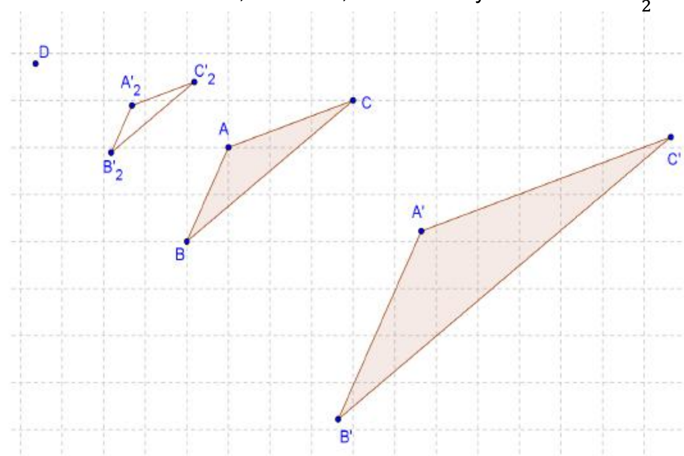
▲ Luego se introducen los conceptos de congruencia y semejanza mediante homotecias.

Se proporcionan triángulo ABC:

</td>
</tr>
</table>



Se pide que construyan dos triángulos sometiendo al triángulo ABC a una homotecia, desde D, de razón 2 y otra de razón $\frac{1}{2}$.



Luego, se proponen las siguientes interrogantes:

a. ¿Cuáles elementos permanecen invariantes y cuáles no?
b. ¿Qué razón existe entre las medidas de los lados de ambos triángulos?
c. ¿Qué razón existe entre las medidas de los ángulos de ambos triángulos?

Posteriormente se pide aplicarle dos homotecias, una de razón igual a 1 y otra de razón igual a -1. Tomar como centro para ambas homotecias el punto D.

Luego se realizan las mismas preguntas anteriores.

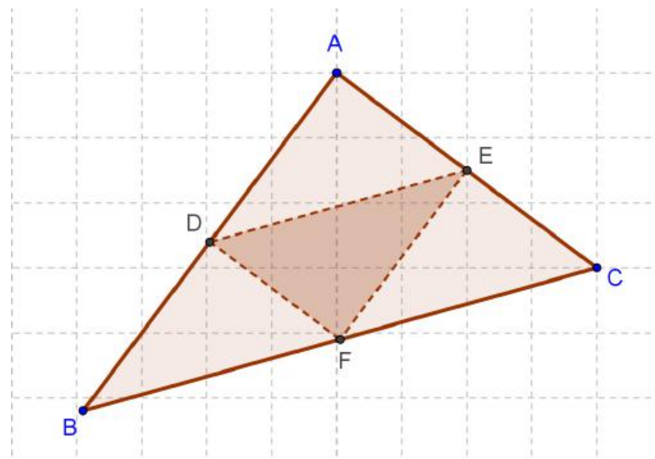
▲ Es importante que, mediante la observación de las medidas de los lados y de los ángulos, se puedan inferir las condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean congruentes y para que dos triángulos sean semejantes.

▲ Por último, se hace la clausura con los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos, así como sus respectivos criterios.

▲ La idea es hacer la relación y la diferenciación entre la congruencia y la semejanza de triángulos. No se quiere partir el tema en dos. Se debe entender que dos triángulos son congruentes si son homotécicos a través de una homotecia de razón 1 o -1 y que dos triángulos son semejantes si son homotécicos mediante una homotecia de razón diferente de 1.

Cada estudiante debe utilizar los criterios de congruencia y semejanza para argumentar sus conclusiones con respecto a un par de triángulos.

Si D, E y F son los puntos medios de los lados del triángulo ABC y AEFD es un rectángulo, encuentre un triángulo semejante al triángulo ABC y un triángulo congruente al triángulo DEF.



Existen varias alternativas correctas pero lo importante es la justificación que se realice para la solución. Es importante que se utilice vocabulario y simbología matemática en el proceso de argumentación, por ejemplo:

a. El Δ *ABC* ~ Δ *ADE* por criterio lado-ángulo-lado, ya que

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=2$$

y comparten el ángulo A que mide 90°.

b. El $\Delta DEF \sim \Delta EDA$ por criterio lado-lado-lado, ya que *AD=EF, AE=DF* por ser AEFD un rectángulo y comparten el segmento *DE* (diagonal del rectángulo).

Es conveniente utilizar un software de geometría dinámica o técnicas de doblado de papel (origami) para visualizar mejor estos conceptos.

Recuadro Nº 8

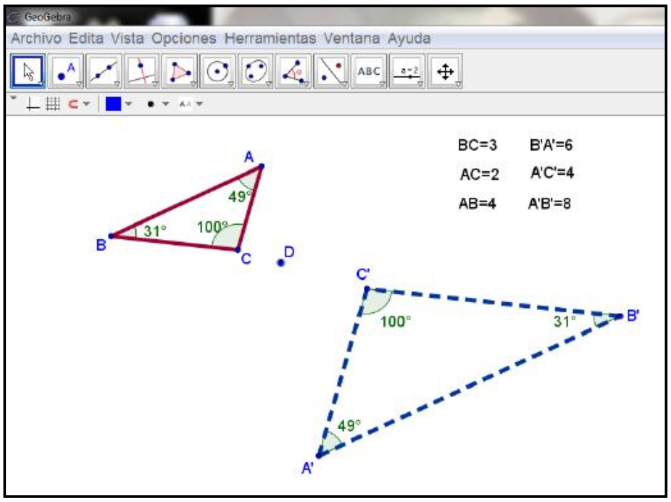
Número sugerido de lecciones:	9 (Etapa I: 4, Etapa II: 5)

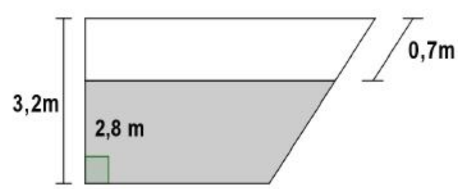
Indicaciones y ejemplos

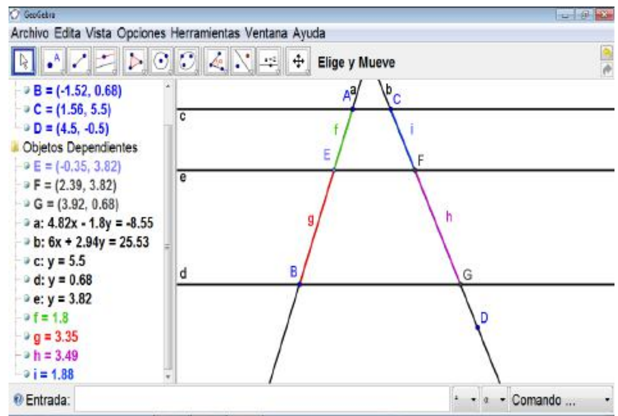
Aquí la idea es utilizar los conocimientos desarrollados de la homotecia para plantear la semejanza y congruencia de triángulos como casos particulares de la homotecia de un triángulo. Esto se puede introducir proponiendo un problema donde se tenga que aplicar una o varias homotecia a un triángulo determinado y poder observar la proporcionalidad de los lados de los triángulos y la congruencia de sus ángulos sin importar su posición y orientación.

El tema de congruencia de triángulos se definirá así: dos o más triángulos son congruentes si son homotéticos a través de una homotecia de razón 1 o -1. Posteriormente, se podrá enlazar la congruencia de triángulos como un caso particular de semejanza de triángulos donde la razón de semejanza es igual a 1.

Es deseable y enriquecedor poder introducir este tema con algún software dinámico de geometría donde le permita al estudiante explorar, conjeturar y deducir los criterios de semejanza y congruencia.



Triángulos • Teorema de Thales	12. Aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas en diversos contextos.	▲ Para empezar se puede proponer el siguiente problema: ☺ Una piscina tiene un máximo de 3,2 m de profundidad. El día de hoy se indica que hay apenas 2,8 m de altura del agua en la parte más profunda. Ana quiere entrar a la piscina pero no sabe nadar, así que no quiere llegar a la parte más profunda. Ella calcula que mide aproximadamente 1,5 m de los pies a los hombros. La zona para bajar poco a poco es la parte inclinada y ella baja hasta apenas tocar el agua con los pies y calcula que es aproximadamente de 0,7 m. ¿Cuánto más deberá bajar Ana para que el agua le llegue a los hombros? 

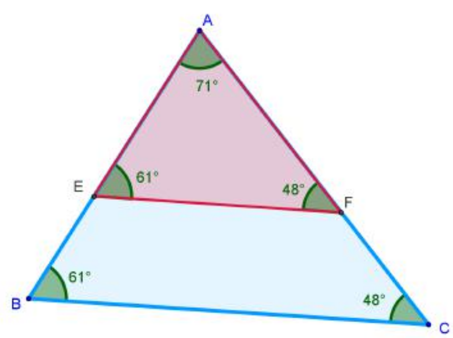
		Se debe realizar la etapa de clausura con el enunciado del teorema después de enfrentar el problema. Este problema puede destacar la importante relación que existe entre *Geometría y Medidas*. También, utilizando la tecnología, se puede presentar una actividad donde la o el estudiante compruebe, mediante la manipulación dinámica de las dos rectas transversales, las proporciones entre las longitudes de los segmentos que se forman entre dos o más rectas paralelas cortadas por estas transversales.  Otro problema es aplicar los conceptos adquiridos para deducir el teorema de la paralela media, como un caso particular del teorema de Thales.

Recuadro Nº 9

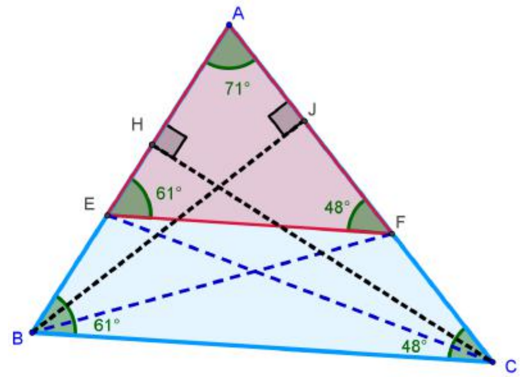
Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 2, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

Se puede introducir el tema enlazando los conocimientos previos de semejanza de triángulos con el teorema de Thales. La idea es no partir de cero, ya que con un problema apropiado de semejanza de triángulos se podrían deducir los requerimientos y resultados de este teorema. Por ejemplo, en un problema donde un triángulo esté superpuesto a otro semejante de mayor dimensión:



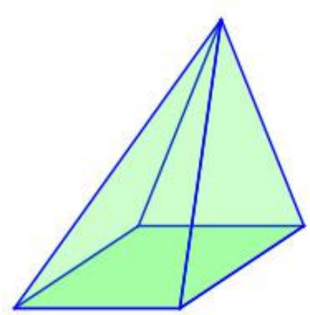
En este caso se podría deducir que los segmentos EF y BC son paralelos debido a que los ángulos homólogos de dos los triángulos ABC y AEF son congruentes (por definición de ángulos entre paralelas cortadas por una transversal). Además, las alturas de los triángulos BCE y BCF sobre la misma base BC son iguales. Por tanto, tienen la misma área que, con otras bases y alturas, permite escribir: BE · CH : 2 =CF · BJ : 2:



Luego, el área del triángulo AEC es igual al área del triángulo ABF: AE · CH : 2 = AF · BJ : 2

Eliminando las alturas CH y BJ de estas dos igualdades se concluye: AE : BE = AF : CF. Posteriormente, se hace la generalización del teorema.

Esta demostración podría hacerse de forma inductiva y más ágil mediante el uso de algún software dinámico en el cual se puedan construir los elementos y luego variar las dimensiones de los triángulos para generar conjeturas y resultados intuitivos.

Visualización espacial • Pirámide recta - Caras laterales - Base - Apotemas - Ápice (cúspide) - Altura • Sección plana • Prisma recto	13. Identificar la base, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide. 14. Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto. 15. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide de recta de base cuadrada, rectangular o triangular. 16. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.	▲Para introducir el tema se puede proponer un problema como el siguiente: Una pirámide recta de base cuadrada de 4 cm de lado tiene una altura de 6 cm. Si se hace un corte con un plano paralelo, ¿se puede obtener un triángulo como sección plana?, ¿un rectángulo no cuadrado?, ¿qué figuras se pueden obtener?  La discusión de este problema permite sistematizar los conocimientos propuestos, así como relacionarlos con otros vistos anteriormente.

Recuadro Nº 10

Número sugerido de lecciones:	5 (Etapa I: 3, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

La visualización espacial ha sido trabajada paulatinamente en educación primaria.

En sétimo año se repasaron conceptos como el de caras, planos paralelos, planos perpendiculares, bases, alturas, entre otros que ya han sido estudiados en primaria con diferentes cuerpos sólidos. Además, en este año se desarrollaron las siguientes habilidades específicas que pueden apoyar el proceso de enseñanza – aprendizaje en octavo año:

- Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices. (MEP, 2012, p. 303)
- Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares. (MEP, 2012, p. 303)

Por lo que es trascendental tomar en cuenta que los estudiantes ya han trabajado con objetos tridimensionales de forma concreta y abstracta, y por ende manejan conceptos que pueden ser útiles para el tratamiento de un problema introductorio que afiance conocimientos adquiridos e incorpore los nuevos de forma natural.

Relaciones y Álgebra

<table>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr>
<td>Expresiones algebraicas

• Concepto de expresión algebraica

• Valor numérico</td>
<td>3.Identificar una expresión algebraica.

4.Utilizar leyes de potencias para la simplificación de expresiones algebraicas.</td>
<td>▲ Repase las leyes de potencias para simplificar expresiones algebraicas y de variables. Se pueden implementar ejemplos numéricos para generalizar la idea con variables.
<table>
<tr><th>Numérico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr><td>$\frac{5^7}{5^{11}} = \frac{1}{5^4}$</td><td>$\frac{y^7}{y^{11}} = \frac{1}{y^4}$ si $y \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\left(3^7\right)^4 = 3^{7g4} = 3^{28}$</td><td>$\left(x^7\right)^4 = x^{7g4} = x^{28}$</td></tr>
</table>
Cada estudiante debe tener claro que una variable es un símbolo o letra que se utiliza para representar a un número desconocido, y que una expresión algebraica es una colección de variables y constantes (números) que son combinados con operaciones de suma, resta, división, multiplicación y potenciación. Ejemplos:
$$5x-1,\ 3x-5y^2, \frac{3+x}{1+2x^3}$$
</td>
</tr>
</table>

Recuadro Nº 11

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 1, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Se puede proponer la siguiente actividad:

Complete el siguiente cuadro con la potencia que resume el resultado de cada una de las siguientes operaciones. Suponga que "y" representa el valor de un número cualquiera.

$5^{13} \cdot 5^{23} = \_\_\_\_$	$(-3)^{27} \cdot (-3)^{34} = \_\_\_\_$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \_\_\_\_$	$y^{10} \cdot y^{53} = \_\_\_\_$
$\frac{7^{13}}{7^{23}} = \_\_\_\_$	$\frac{(-9)^{63}}{(-9)^{43}} = \_\_\_\_$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{100} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{90} = \_\_\_\_$	$\frac{y^{53}}{y^{27}} = \_\_\_\_$
$\left(11^{11}\right)^3 = \_\_\_\_$	$\left((-8)^{10}\right)^9 = \_\_\_\_$	$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^7\right]^8 = \_\_\_\_$	$\left(y^{100}\right)^5 = \_\_\_\_$

Con ella se pretende que mediante el reconocimiento de las leyes de potencias, los estudiantes puedan realizar una generalización de las mismas para el uso de variables y así el docente puede durante el cierre no sólo formalizar las leyes de potencias, sino el concepto de expresión algebraica.

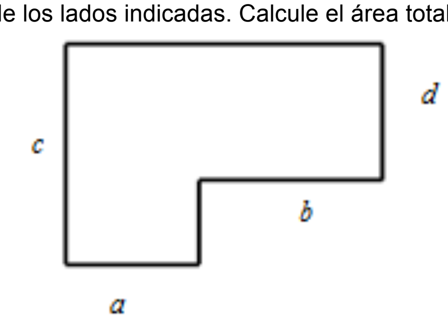
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Expresiones algebraicas • Valor numérico	5.Determinar el valor numérico de una expresión algebraica.	▲ Se pueden aprovechar las relaciones ya estudiadas para reforzar la noción de valor numérico de una expresión algebraica. El área *A* de un rectángulo de base *b* y altura *h* es modelada por ecuación $A = b \cdot h$. Calcule el valor de *A* cuando $b = 2{,}75$; $h = 1{,}39$. La ley de Boyle establece que en un recipiente cerrado con temperatura constante la presión de un gas es inversamente proporcional a su volumen. El modelo es: $$P = \frac{k}{V}$$ siendo *P* la presión en atmósfera y *V* el volumen en litros, *k* la constante de proporcionalidad. Calcule la presión cuando $V = 0{,}75$ L, $k = 30$ L·atm. Nota: Una atmósfera es una unidad equivalente a la presión que ejerce la atmosfera a nivel del mar. Es una unidad de presión que no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Este modelo tiene conexión con Química y Física. Por ejemplo, se utiliza para medir la presión en los neumáticos de los vehículos o en un cilindro que contiene gas.

Recuadro Nº 12

Número sugerido de lecciones:	3 (Etapa I: 1, Etapa II: 2)

Indicaciones y ejemplos

Se procede de acuerdo a lo especificado en las indicaciones puntuales.

Expresiones algebraicas • Monomios - Monomios Semejantes - Operaciones con monomios - Factor numérico y factor literal • Polinomios - Operaciones con polinomios	6.Reconocer monomios semejantes. 7.Efectuar operaciones con monomios: suma, resta, multiplicación y división. 8.Clasificar expresiones en monomios, binomios, trinomios y polinomios de más de tres términos. 9.Sumar, restar y multiplicar polinomios.	▲ Para reconocer los monomios semejantes es necesario identificar su coeficiente numérico y su factor literal. ▲ Muestre que las operaciones estudiadas son una generalización de las propiedades conocidas para los números naturales. Un terreno tiene la forma de la siguiente figura, con las medidas de los lados indicadas. Calcule el área total del terreno. 

- Productos notables		▲ El ejemplo anterior se puede aprovechar para hablar de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. ☺ El costo total de una pequeña empresa que produce lapiceros es la suma de los costos fijos y los costos variables. Suponga que cada lapicero le cuesta a la empresa ₡ 85,00, y que es vendido por ₡ 175,00. Si x es la cantidad de lapiceros producidos y vendidos, escriba la expresión que representa el costo total correspondiente, si los costos fijos de la empresa son de ₡ 2 500 000,00. Exprese los ingresos debidos a las ventas en términos de x, y calcule la ganancia de la empresa (ganancia = ingresos por ventas – costo total de producción). ▲ En la etapa de clausura se formalizan las operaciones con polinomios.
	10. Utilizar productos notables para desarrollar expresiones algebraicas.	▲ Considere únicamente los tres primeros productos notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$. Es importante evitar utilizar expresiones complicadas cuando se utilizan los productos notables. Utilice a lo sumo dos distintas operaciones de suma y/o resta dentro del paréntesis. Por ejemplo: $$\left(2a+3b-c^2\right)^2$$ La expresión dentro del paréntesis puede ser agrupada de distintas formas: $$\left(2a+3b\right)-c^2;\ \left(2a-c^2\right)+3b;\ 2a+\left(3b-c^2\right).$$ ☺ Calcule el área del cuadrado de lado $0{,}4a^3+5b^2$ centímetros, en términos de a, b. ⚙ Es relevante usar figuras geométricas para justificar los desarrollos, conforme se propone en las indicaciones metodológicas. Esto permite hacer conexión con *Geometría* y abre espacio para mencionar la historia del Álgebra.

Recuadro Nº 13

Número sugerido de lecciones:	22 (Etapa I: 10, Etapa II: 12)

Indicaciones y ejemplos

Algunas de estas 5 habilidades pueden verse de forma integrada. Este es el caso de las habilidades 6, 7, 8 y 9 pues el trabajo con sumas y restas de monomios y polinomios permiten clasificar expresiones algebraicas en monomios, binomios y trinomios. También, el de las habilidades 7, 9 y 10 pues es a partir de la comprensión del producto que se pueden deducir las fórmulas notables.

Se debe tener presente de que se deben realizar cierres y movilizaciones parciales durante el proceso y al final movilizaciones que integren todo lo propuesto.

Ecuaciones • Ecuaciones del primer grado con una incógnita	11.Identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación. 12.Comprobar si un número dado es solución de una ecuación. 13.Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella. 14.Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita. 16.Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.	▲ Se puede comenzar este tema proponiendo problemas en los que necesariamente una ecuación sea el medio por el cual se planteen y resuelvan. El monte Everest (la montaña más alta del mundo) es 5413 metros más alto que el volcán Irazú (uno de los puntos más altos de Costa Rica). Si la suma de sus alturas es 12 283 metros, plantee una ecuación que permita calcular la altura de cada uno de ellos.  **Imagen propiedad del MEP** ▲ Para reducir una ecuación a otra forma equivalente utilice operaciones aritméticas. La habilidad implica el reconocimiento de que ambas ecuaciones tienen la misma solución. La inflación es una situación económica en la cual se incrementa los precios de los bienes y servicios. Suponga que la gasolina aumenta la misma cantidad *I* de colones cada año. Si el costo de la gasolina en cierto año es C_0 entonces el costo *C* después de *t* años es dado por la siguiente representación algebraica: $C = C_0 + It$ Solicitar a cada estudiante que plantee un problema con esta situación. La ecuación anterior es un modelo de costos. Un posible problema sería: si la gasolina aumenta 15% cada año, ¿cuántos colones costará al final de 5 años? Otra posibilidad es: si la gasolina aumenta 15% cada año, ¿cuánto tiempo será necesario para que duplique de precio? Una pintura muy famosa es la Gioconda del artista Leonardo da Vinci. Esta pintura se encuentra en el Museo de Louvre en Paris, Francia. El cuadro tiene forma rectangular y su altura es 24 centímetros más que su ancho. El perímetro del cuadro es de 260 centímetros. Calcule la altura y el ancho del cuadro. Este tipo de problema tiene conexión con la *Geometría* (razón áurea), el arte, la historia, y confirma la utilidad de las matemáticas en diversos ámbitos de la vida.

Recuadro Nº 14

Número sugerido de lecciones:	10 (Etapa I: 4, Etapa II: 6)

Indicaciones y ejemplos

En la primera etapa, tanto en el proceso como en el cierre, se debe focalizar sobre lo propuesto en las habilidades 11, 12 ,13 y 16.Es claro que la habilidad 14 es el vehículo para esto.

Se puede trabajar integradamente este grupo de habilidades mediante la estrategia de *Pregunta dirigida.* En efecto, supongamos que el docente utiliza el problema del monte Everest y el volcán Irazú y propone al estudiantado una estrategia de resolución conjunta (docente-estudiante) (desarrollo de la habilidad 14). Él podría elaborar el siguiente diálogo:

Docente: ¿De qué forma puedo representar simbólicamente la altura de cada una de las montañas?
Estudiante: La del Irazú, con x.
Docente: Muy bien. Ahora, ¿cómo se podría representar simbólicamente que el Everest mide 5413 m más que el Irazú?
Estudiante: Escribiendo que el Everest mide lo que el Irazú sumándole 5413 m, o sea x + 5413.
Docente: Excelente. Ahora, ¿cómo escribirían simbólicamente la frase “la suma de sus alturas es 12 283”?
Estudiante: Pues escribiendo las expresiones que habíamos obtenido, o sea que la altura del Irazú más la del Everest es igual a 12 283, o sea

$$x + (x + 5413) = 12\ 283$$

Docente: Correcto. Ahora el problema se ha reducido a descubrir qué valor toma “x” para que la operación de la izquierda dé como resultado lo de la derecha. ¿cómo podríamos simplificar un poco la expresión de la izquierda?
Estudiante: Ahí hay dos monomios semejantes por lo que al realizar dicha suma quedaría la expresión:

$$2x + 5413 = 12\ 283 \text{ (desarrollo de la habilidad 13)}$$

Docente: Muy bien. ¿Qué operaciones sería necesario realizar para deducir el valor de la “x”?
Estudiante: Como 2x más 5413 da 12 283, entonces la resta de 12 283 y 5413 equivaldría a 2x. Quedaría así: (desarrollo de la habilidad 16)

$$2x = 12\ 283 - 5413$$
$$2x = 6\ 870$$

Ahora como dos veces “x” equivale a 6870, se realiza una división por 2 para obtener “x”: (desarrollo de la habilidad 16)

$$x = 6870 \div 2$$
$$x = 3435$$

Docente: Perfecto. ¿Qué valor acabamos de encontrar? ¿Qué falta aún por determinar y cómo se obtendría?
Estudiante: encontramos la medida de la altura del volcán Irazú. Falta obtener la del monte Everest, pero como Everest mide 5413 m más que el Irazú, basta sumar lo obtenido a esta última cantidad, lo cual daría como resultado 8848 m.
Docente: ¿Cómo podemos verificar que los resultados obtenidos son correctos?
Estudiante: Verificando los valores obtenidos en las representaciones simbólicas establecidas con anterioridad. Sobre todo si la suma de ambas alturas es de 12 283 (desarrollo de la habilidad 12).

Durante el cierre de la lección ya se pueden formalizar la noción de ecuación, solución o raíz de una ecuación, diferencia entre expresión algebraica y ecuación, y el método de resolución.

<table>
<tr>
<td>Funciones

• Función lineal</td>
<td>1.Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma y = ax + b.</td>
<td>
▲ Proponer un problema contextualizado que implique una relación del tipo $y = ax + b$.

☺ En el año 2011, para trasladarse en un taxi la tarifa era de ₡550 para el primer kilómetro y ₡200 para cada kilómetro adicional.
a. Represente mediante una tabla la cantidad de dinero a pagar por la distancia recorrida en kilómetros. Utilice como valor inicial el primer kilómetro.
b. Plantee una representación algebraica que sirva de modelo para esta situación.
c. Represente en un sistema de ejes cartesianos la función descrita en el problema anterior.

▲ La representación simbólica encontrada en el problema anterior es un modelo del comportamiento real del costo de un servicio de taxi.

Use números racionales para la representación tabular.

▲ Para la representación gráfica del problema anterior, es importante utilizar escalas diferentes en el eje horizontal (abscisas) y el vertical (ordenadas). Por ejemplo, cada centímetro puede representar un kilómetro en el eje de las abscisas mientras que cada centímetro puede representar ₡500 en el eje de las ordenadas.
Al trabajar con representaciones tabulares, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.

☺ La población de asalariados cubiertos por el seguro de salud de la Caja Costarricense de Seguro Social aparece indicada en la siguiente tabla:

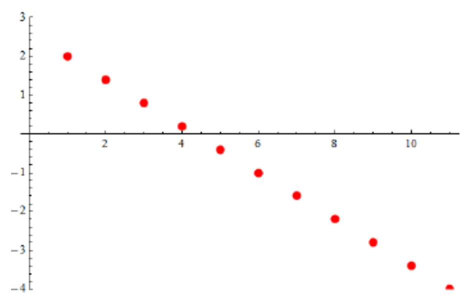
<table>
<tr><th>Año</th><th>Número de asalariados</th></tr>
<tr><td>2000</td><td>726 048</td></tr>
<tr><td>2001</td><td>727 603</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>754 731</td></tr>
<tr><td>2003</td><td>770 032</td></tr>
<tr><td>2004</td><td>800 123</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>842 139</td></tr>
<tr><td>2006</td><td>896 419</td></tr>
<tr><td>2007</td><td>972 208</td></tr>
<tr><td>2008</td><td>1 054 497</td></tr>
<tr><td>2009</td><td>1 038 237</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>1 075 528</td></tr>
</table>

Fuente: Programa Estado de la Nación 2011
http://www.estadonacion.or.cr/

La cantidad de asalariados A cubiertos por seguro de salud puede ser aproximada por la función

$A(t) = 39\,908t + 678420$

en donde t representa el año, con t = 0 correspondiente al año 2000. En este caso la gráfica correspondiente no pasa por los puntos que representan los datos de la tabla. La función anterior es un modelo lineal que aproxima los datos de la tabla.
</td>
</tr>
</table>

		¿En qué año la cantidad de asalariados cubiertos por el seguro de salud será 1 500 000 aproximadamente? Este tipo de pregunta plantea la necesidad de introducir las ecuaciones lineales y de trabajar con *expresiones algebraicas*. ▲ En particular, una ecuación de primer grado de la forma $ax+b=c$ se relaciona con la función lineal con representación algebraica $y = ax + b$. Resolver la ecuación $ax + b = c$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax + b$ sea igual a c. Esto debe quedar claro a cada estudiante. Se recomienda desarrollar un diálogo acerca de la importancia de la seguridad social y la solidaridad.
	2.Representar de forma tabular, algebraica y gráficamente una función lineal.	▲ La variable independiente x asume valores racionales pues estos son los números que se estudian en este año (no utilice números irracionales). La representación gráfica consistirá de puntos en el plano cartesiano.  ▲Al trabajar con representaciones gráficas, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.
Ecuaciones • Ecuaciones del primer grado con una incógnita - Cero de una función - Raíz de una ecuación	15.Relacionar una ecuación de primer grado con una incógnita de la forma $ax+ b = c$ con la función lineal cuya representación algebraica es $y = ax + b$.	▲ Resolver la ecuación $ax + b = c$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax + b$ sea igual a c. Este valor de x se conoce como raíz de la ecuación. Cada estudiante debe tener claro que cuando $c = 0$, la raíz de la ecuación $ax + b = 0$ también se conoce como cero de la función representada algebraicamente por $y = ax + b$. La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $ax + b - c = 0$, es decir que la raíz de $ax + b = c$ coincide con el cero de $y = ax + b - c$.

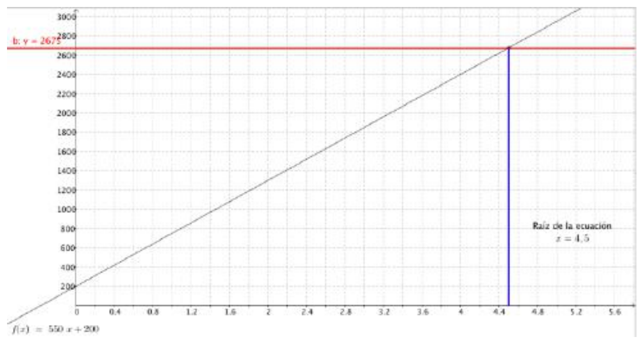
Recuadro Nº 15

Número sugerido de lecciones:	9 (Etapa : 4, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Al utilizar el problema de la tarifa de taxi (ver indicaciones puntuales), se puede potenciar el desarrollo de la habilidad 1 y 2. Como una pregunta adicional, se podría solicitar: *Si al término de un viaje “la María” marca 2675 colones, ¿cuántos kilómetros se recorrieron?* Esto permitirá no sólo que los estudiantes utilicen el modelo algebraico para resolver la ecuación correspondiente y así responder a la interrogante, sino que permitirá al docente en la etapa de discusión de los resultados o en el cierre utilizar la representación gráfica elaborada por ellos para establecer cómo se visualiza en ella la raíz de la ecuación y así evidenciar ese vínculo entre la ecuación y la función. (habilidad 15)

Para la segunda etapa sugiero el uso de Excell en algunas de las actividades propuestas que permitan invertir más tiempo en que el estudiantado pueda relacionar la ecuación de primer grado con la función lineal.



Ecuaciones • Ecuaciones literales	17.Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita. 18.Resolver ecuaciones literales para una de las letras.	▲ Las ecuaciones lineales a desarrollar deben ser de la forma que sigue, suponiendo que las expresiones están bien definidas: $ax = c, ax + b = c,\ ax + b = cx + d$ $ax \pm (cx \pm b) = d;\ a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$ $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$ $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d};\ \frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ ▲ Se recomienda implementar ejemplos donde se contemplen los casos en que la ecuación tenga solución vacía o que tenga infinitas soluciones.

Recuadro Nº 16

Número sugerido de lecciones:	7 (Etapa : 2, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

Para la Etapa I una situación con ecuaciones literales y otra con una incógnita para hacer un cierre considerando diferencias y semejanzas; tomar conciencia de que las expresiones estén bien definidas.

Luego, se pueden proponer ecuaciones fraccionarias que sean a la vez literales para ver integradamente cuáles procedimientos permiten resolverlas.

Estadística y Probabilidad

Estadística		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Recolección de información • La experimentación • Interrogación **Frecuencia** • Absoluta • Porcentual **Representación** • Tabular: cuadros de frecuencia absoluta y porcentual • Gráfica: barras, circulares, lineales y diagramas de puntos **Medidas de posición** • Moda • Media aritmética • Mínimo • Máximo • Recorrido	1. Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación. 2. Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas. 3. Utilizar un software especializado o una hoja de cálculo para favorecer la construcción de cuadros y gráficos. 4. Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.	▲ Se recomienda iniciar con el planteamiento de problemas similares a los siguientes: ☺ Identificar si existen diferencias en las estaturas entre hombres y mujeres dentro del grupo. ☺ ¿Cuál es el nivel de agrado que tienen las y los estudiantes por las frutas (mucho, regular, poco, nada)? ¿Hay diferencias por sexo? ▲ Para resolver el primer problema, hay que observar que la característica de interés es la estatura, por lo que se requiere realizar las mediciones. Para ello se puede utilizar una cinta métrica y una escuadra, tal como se muestra.  **Imagen con derechos adquiridos por el MEP** Los datos obtenidos deberán ser divididos en dos grupos según el sexo y luego resumidos. Por la gran variabilidad no es adecuado utilizar un cuadro de frecuencias simple, sino más bien es necesario orientar a las y los estudiantes hacia la construcción de diagramas de puntos. ▲ En este problema se puede recurrir al empleo de medidas de posición para resumir los datos, entre ellas la media aritmética, el mínimo y el máximo. ▲ Para el segundo problema, la unidad estadística también está construida por cada estudiante y la característica de interés es el agrado por las frutas, que se categoriza en cuatro valores: mucho, regular, poco o nada. Los datos pueden ser recolectados por medio de la interrogación o un cuestionario pequeño. Con ello se tendrá información para todo el grupo. Para responder la primera interrogante del problema se pueden utilizar técnicas similares a las empleadas en el primer problema. Para responder la segunda interrogante se hace necesario realizar un análisis comparativo entre hombres y mujeres. Esto se puede efectuar mediante cuadros o gráficos, pero debe ser mediante las frecuencias porcentuales, pues las frecuencias absolutas solamente son comparables si la cantidad de hombres y de mujeres son iguales.

		Observe que con este tipo de actividades se promueven varios procesos. En primer lugar, el uso de representaciones tabulares, gráficas o mediante datos concretos, la comunicación de ideas mediante el análisis de la información y la argumentación al momento de ofrecer una respuesta a un problema en función del comportamiento de los datos recolectados. Para el cálculo de la media aritmética se puede recurrir al uso de la calculadora. Pero además, debido a que el uso de cuadros y gráficos constituye una herramienta para resumir y presentar datos para su posterior análisis, su elaboración puede ser simplificada mediante el uso de la computadora.

Recuadro Nº 17

Número sugerido de lecciones:	14 (Etapa I: 6, Etapa II: 8)

Indicaciones y ejemplos

En la parte de estadística para octavo año lo que se busca es retomar los conocimientos desarrollados en sétimo año en problemas de mayor complejidad y potenciando el uso adecuado de recursos tecnológicos y el análisis comparativo de dos grupos de datos.

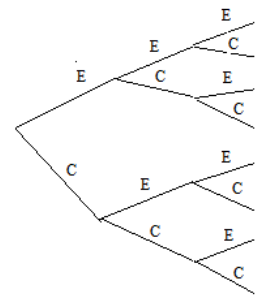
Por ejemplo, en el primer problema que se expone en las indicaciones puntuales, se quiere identificar si existen diferencias en las estaturas entre hombres y mujeres de la sección se debe elaborar una base de datos y separar los datos de acuerdo al sexo, también se recomienda recurrir a la calculadora para calcular la media aritmética; así como utilizar la computadora para la construcción de cuadros y gráficos de una forma más eficiente.

No. de cuestionario	Nombre del estudiante	Sexo	Estatura (metros)
1	Abarca Rojas Mafalda	F	1,45
2	Alvarado Pérez Manolito	M	1,62
3	Barrantes Mena Libertad	F	1,52
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
32	Zamora Jiménez Riguito	M	1,66

Además, cuando el docente plantee el problema o situación, debe brindar suficiente tiempo a los estudiantes para la recolección de la información y organización de la misma. Además es trascendental que el estudiante reflexione acerca de la necesidad de un software que le facilite la elaboración de cuadros y gráficos y le agilice el cálculo de las medidas de posición. Todo esto requiere tiempo ya que lo medular es caracterizar el conjunto de datos e interpretar la información obtenida.

Para la etapa de *Movilización y aplicación de los conocimientos* se requiere plantear situaciones que permitan caracterizar un conjunto de datos involucrando diferentes tipos de recolección de la información; en esta etapa es muy importante la discusión interactiva y comunicativa por la naturaleza del trabajo desarrollado. Se espera resolver al menos cinco situaciones.

Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
El azar • Aleatoriedad • Determinismo	1. Identificar la presencia del azar en situaciones aleatorias. 2. Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.	▲ Para iniciar la discusión sobre el rol del azar, conviene utilizar alguna técnica que permita identificar las ideas o creencias del grupo. Por ejemplo, se podría generar una lluvia de ideas para cumplir este propósito. Estas creencias deben servir como punto de referencia para los análisis siguientes. ▲ Seguidamente conviene plantear interrogantes para identificar fenómenos aleatorios y deterministas dentro del contexto estudiantil. Se deben identificar las diferencias entre ellos y plantear otros ejemplos. Se puede diseñar una actividad en la que se plantean dos juegos o situaciones: una determinista y una aleatoria que se repiten reiteradamente con el propósito de identificar el determinismo o la aleatoriedad según corresponda. Por ejemplo: Discuta junto con sus compañeros cuáles de las siguientes opciones representan situaciones deterministas y cuáles representan situaciones aleatorias, argumente las razones por la que clasifica cada situación. a. ¿En qué día de la semana nació el profesor de Matemáticas? b. ¿Qué día de la semana será pasado mañana? c. El próximo bebé que nazca en el Hospital de la Mujer será una mujer. d. Identificar el lugar exacto donde caerá una piedra al lanzarla fuertemente hacia arriba. e. Sacar una bola negra de una caja que contiene cinco bolas negras. f. En el próximo año lloverá menos en el mes de agosto que en el presente año. g. Determinar el ganador en el juego "*Zapatito cochinito cambia de piecito*". Esto se puede complementar con algunas situaciones históricas.
Espacio muestral • Espacio muestral, puntos muestrales y su representación	3. Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio y representarlos por medio de la numeración de sus elementos o de diagramas.	▲ Proponer situaciones aleatorias para que sean analizadas en función de las habilidades que se desean desarrollar. Por ejemplo: Considere un juego en el que se lanza una moneda tres veces. Determine todos los posibles resultados del experimento. Para identificar cada resultado puede emplear terna de datos, por ejemplo, ECC significa que se obtuvo escudo en el primer lanzamiento y corona en los otros dos. ▲ Se debe caracterizar cada terna como un elemento individual o resultado simple que se le llama *punto muestral* y la reunión de todos los resultados o puntos muestrales con el nombre de *espacio muestral*. Los espacios muestrales de experimentos que tienen un número pequeño de resultados se pueden representar entre llaves { } o mediante diagramas de otro tipo. Por ejemplo:

		{EEE, EEC, ECE, ECC, CEE, CEC, CCE, CCC} 
Eventos • Resultados favorables a un evento • Eventos simples y compuestos • Evento seguro, evento probable, evento imposible	4. Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria. 5. Clasificar eventos en simples o compuestos. 6. Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.	Las agrupaciones de puntos muestrales en un determinado espacio muestral se llaman *eventos* o *sucesos*. Considere nuevamente el juego en el que se lanza una moneda tres veces. a. Determine los resultados simples o puntos muestrales a favor de cada uno de los siguientes eventos: A: Obtener al menos un escudo (un escudo o más). B: Obtener tres coronas. C: Obtener menos de dos coronas. b. Identifique los puntos muestrales que incluye cada uno de los siguientes eventos: D: Obtener más de tres escudos. E: Obtener tres o menos coronas. c. De acuerdo con las posibilidades de ocurrencia de los eventos A, B, C, D y E anteriores, determine: i. ¿Cuál o cuáles se pueden considerar como situaciones deterministas o seguras? ii. ¿Cuál o cuáles se pueden considerar imposibles? ▲ Se requiere precisar los conceptos de eventos seguro, probable o imposible de acuerdo con las posibilidades de ocurrencia al realizar un experimento. Además, que se pueda diferenciar entre un evento simple para el cual solamente incluye un punto muestral y un evento compuesto que incluye dos o más puntos muestrales.

Recuadro Nº 18

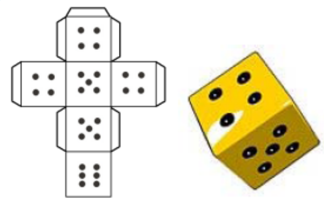
Número sugerido de lecciones:	10 (Etapa I: 4, Etapa II: 6)

Indicaciones y ejemplos

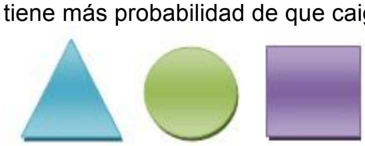
Se puede iniciar con el análisis de varias situaciones en las cuales se deba identificar en cuáles de estas hay presencia del azar. Luego de esto se deben establecer las diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.

Partiendo de las situaciones que ya han sido identificadas como aleatorias se pueden estudiar otros conceptos como espacio muestral, puntos muestrales, tipos de eventos y su representación.

Hay que aclarar que estos conceptos de probabilidad no deberían ser nuevos para los estudiantes, ya que se han trabajado en primaria. Por ejemplo, en cuarto año ya se habla de situaciones o eventos aleatorios, resultados a favor de un evento, representación de eventos, eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables.

4to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Situaciones o eventos aleatorios **Eventos** • Resultados a favor de un evento • Representación de eventos • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	1. Reconocer situaciones aleatorias en diferentes situaciones del contexto. 2. Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio. 3. Identificar los resultados a favor de la ocurrencia de un evento. 4. Representar eventos mediante la identificación de sus resultados simples. 5. Determinar eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	▲ Se puede pedir al grupo ofrecer ejemplos de situaciones aleatorias. Si se plantea el experimento de seleccionar una persona del grupo en forma aleatoria (por medio de una rifa), ¿cuáles serían los posibles resultados de esta selección? ¿Cuántos resultados son? ▲ Se pretende continuar con la identificación de los elementos que constituyen los resultados simples de un experimento y que se pueden resumir por medio de diagramas o del conteo simple. Además de juegos con dados o monedas se pueden plantear problemas que pudieran simular hechos reales, por ejemplo, permita que los estudiantes construyan un dado similar al siguiente:  Elaboración propia

(MEP, 2012, p.251)

Probabilidad • Eventos más probables, menos probables e igualmente probables • Definición clásica (o laplaciana)	7. Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento. 8. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados. 9. Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la teoría de probabilidad.	▲ Para el análisis del concepto de probabilidad se recomienda plantear un problema que permita valorar las percepciones o creencias que se traen. Así se pueden nivelar los conocimientos básicos del grupo. 1. Un juego trata de hacer caer una piedra sobre una figura geométrica desde una distancia de 5 metros. Las figuras geométricas son: un círculo de diámetro 20 cm, un cuadrado de 20 cm de lado y un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Si la piedra puede caer aleatoriamente en cualquier lugar, ¿en cuál figura tiene más probabilidad de que caiga la piedra?  Este problema permite conectar los conceptos de Probabilidad con el cálculo de áreas en *Geometría*. Se puede identificar que es más probable la figura que tiene mayor área. ▲ Conviene realizar un análisis sobre las ideas del grupo alrededor de los términos más probable o menos probable. Es importante que se vinculen estos términos con la frecuencia de puntos muestrales a favor de los eventos. Esto permite sentar las bases para repasar el concepto clásico de probabilidad. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo, para continuar con la discusión dada: Al lanzar dos dados Cindy y Karla realizan el siguiente juego: Cindy gana si la suma de los puntos es 2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12, mientras que Karla gana si la suma de los puntos es 6, 7, 8 o 9. Karla reclama que al tocarle menos números Cindy va a ganar el mayor número de veces; no obstante, proceden a jugar. Después de jugar 20 veces, Cindy únicamente ha ganado

		en 7 oportunidades. De acuerdo con lo anterior, responda las siguientes interrogantes. a. Para un juego particular, es decir un lanzamiento de los dados, ¿cuántos puntos tiene el espacio muestral? Se considera punto muestral un resultado simple al lanzar los dados, por ejemplo (3,5) significa que en el primer dado se obtuvo un tres y en el segundo un cinco. b. ¿Serán los puntos muestrales igualmente probables? ¿O existe duda de que unos resultados son más probables que otros? c. ¿Cuántos puntos muestrales están a favor del evento A: Cindy gana el juego y del evento B: Karla gana el juego? d. Determine la proporción de resultados a favor del evento A (es decir la razón entre el número de resultados a favor de A entre el total de resultados) y la proporción de resultados a favor de B. Con base en estos valores indique quién tiene más probabilidad de ganar, Cindy o Karla. e. ¿A qué conclusiones se llega respecto a la inquietud planteada por Karla, sobre que Cindy tiene más probabilidad de ganar el juego porque se le asignaron más números? Se requiere realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas. Además aprovechar las situaciones para precisar el concepto de probabilidad de un evento como la proporción de casos a favor del evento o sea la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales. Es importante hacer la indicación que para poder utilizar esta definición se debe cumplir que los resultados (del experimento) o puntos muestrales deben ser igualmente probables. Para valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la probabilidad, se puede mencionar el rol de Laplace en la definición clásica del concepto de probabilidad.
Reglas básicas de probabilidad • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0	10. Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible. 11. Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades. 12. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.	▲ A partir de la definición laplaciana o clásica de probabilidad, y de los conceptos de evento probable, imposible y seguro, es conveniente que la acción estudiantil esté dirigida hacia la deducción de algunas de las propiedades básicas que cumplen las probabilidades. Un problema que puede orientar el análisis es el siguiente: Considere el juego en el que se lanzan dos dados numerados de uno a seis. Se considera la diferencia absoluta entre los resultados de los dados. Determine: a. El número de puntos muestrales vinculados con el evento A: obtener un número menor de seis. b. El número de puntos muestrales vinculados con el evento B: el resultado es cero. c. El número de puntos muestrales a favor del evento C: obtener un seis. d. ¿Cuál de los posibles resultados de la diferencia absoluta de puntos es el más probable?

Con base en los resultados de este ejercicio responda:

a. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de los eventos A, B o C citados anteriormente?
b. En general, ¿cuál es la probabilidad de un evento seguro?
c. En general, ¿cuál es la probabilidad de un evento imposible?
d. Para un evento que resulta probable, ¿en qué rango numérico se puede decir que se encuentra su valor probabilístico?

▲ A partir de las respuestas se deben sistematizar las propiedades básicas, es decir que la probabilidad de un evento es un valor entre cero y uno, la probabilidad del evento imposible es cero y del evento seguro es uno.

▲ Se requiere dirigir la acción estudiantil hacia el planteo de problemas vinculados con el cálculo de probabilidades, para ello la acción docente debe motivar el planteamiento de situaciones genéricas como la lotería nacional, los juegos de dados, el Tico-Bingo, entre otros. Pero además, proponer problemas del contexto donde el análisis de probabilidades permita la toma de decisiones. Por ejemplo:

Se desea determinar cuál de tres candidatos tiene más probabilidad de salir ganador en las elecciones estudiantiles del colegio. Se realiza una encuesta una semana antes de realizar las elecciones para conocer la intención del voto, para ello se seleccionó una muestra de 10 estudiantes por nivel. Los resultados se presentan en el siguiente cuadro:

Intención de voto para las elecciones estudiantiles de una muestra de 10 estudiantes por nivel

	Candidatos		
Nivel	A	B	C
Sétimo	4	3	3
Octavo	2	5	3
Noveno	6	2	2
Décimo	1	5	4
Undécimo	0	0	10
Total	13	15	22

Se sigue el supuesto de que la muestra es representativa de la población total de estudiantes y de cada uno de los niveles.

Además, la intención de voto se mantendrá para la elección. De acuerdo con esta información responda las siguientes interrogantes:

a. ¿Cuál candidato tendría una mayor probabilidad de ganar las elecciones?
b. ¿Cuál o cuáles candidatos tendrían mayor probabilidad de ganar las elecciones si únicamente votaran estudiantes del Tercer ciclo?

▲ Para este problema es muy importante enfatizar los supuestos que se realizaron, pues para poder generalizar un resultado de una muestra hacia la población se requieren muchos más elementos de los que se han analizado hasta ahora.

El problema también es un buen ejemplo de la forma en que se pueden combinar técnicas estadísticas como el mues-

		treo y la aplicación de un cuestionario, para desarrollar probabilidades. Proceso involucrado: *Conectar.* Problemas relacionados con elecciones estudiantiles motivan a involucrarse en estos procesos, como una forma de realizar una vida estudiantil más allá del recibir lecciones. Así se promueve el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.*

Recuadro Nº 19

Número sugerido de lecciones:	12 (Etapa I: 2, Etapa II: 10)

Indicaciones y ejemplos

El docente debe tomar en cuenta que en quinto año se le da continuidad al tratamiento de eventos aleatorios y se discriminan los eventos en más probables, menos probables e igualmente probables tomando en cuenta para esto la cantidad de resultados favorables del evento.

5to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Eventos • Resultados a favor de un evento • Eventos seguros, probables o imposibles • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	1. Identificar el número de resultados favorables de un evento dado. 2. Determinar eventos seguros, probables o imposibles en situaciones aleatorias particulares. 3. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	▲ Se recomienda iniciar esta sección con el empleo de los resultados que se generaron previamente con problemas similares al siguiente. Considere nuevamente los resultados de la encuesta alimentaria que se realizó anteriormente. Si una o un estudiante del grupo es seleccionado aleatoriamente, de acuerdo con los resultados sobre el nivel de agrado por el consumo de ensalada determine: a. El número de resultados a favor de que le agraden mucho las ensaladas. b. ¿Qué es más probable, que le agraden poco o que le agraden mucho las ensaladas? ▲ Se requiere que identifiquen los resultados a favor de cada evento, de acuerdo con los resultados de la encuesta. Por medio de este problema se conectan los resultados de los análisis estadísticos con los contenidos sobre probabilidades.

(MEP, 2012, p. 256)

Ya para sexto año se precisa la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.

6to Año		
Probabilidad		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Probabilidades • Definición clásica o laplaciana de probabilidad	1. Determinar la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.	▲ Para generar las condiciones necesarias para definir el concepto de probabilidad, pueden realizarse actividades como las siguientes: El profesor plantea siguiente problema a Carlos y Ana. Se incluyen frutas dentro de dos bolsa tal como se muestra en las figuras:  Caso 1  Caso 2

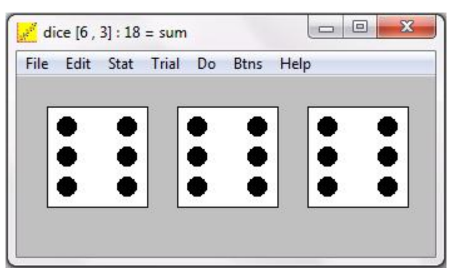
(MEP, 2012, p.260)

También en este año se trabajó mediante situaciones concretas en la deducción de los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, de un evento seguro y de un evento imposible. Además, se utilizaron las probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas determinados.

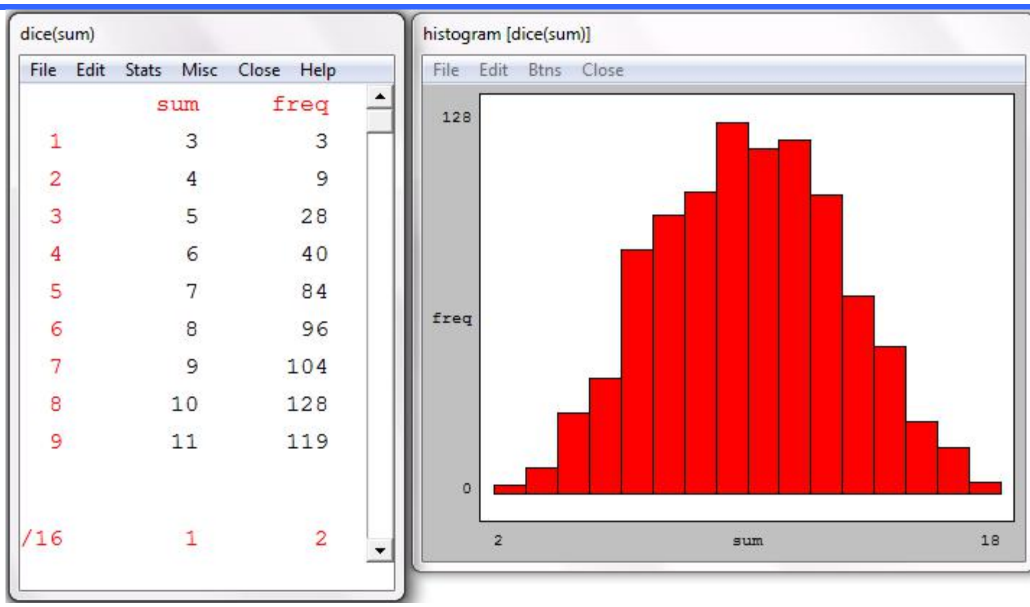
Por lo anterior, en octavo año lo que se pretende es beneficiarse de todos estos conceptos construidos paulatinamente en educación primaria y encaminarlos a un nivel de precisión mayor. Para esto, el problema introductorio puede ser una situación concreta que active los conocimientos previos y las nociones intuitivas que traen los estudiantes; para luego enlazar todos estos elementos en el desarrollo de las habilidades específicas de este nivel.

En el estudio de la Probabilidad es importante el uso de simulaciones ya sea con material concreto (monedas, datos, urna con esferas, entre otros) o también existen software y sitios web que de forma gratuita ponen a disposición de los docente diversas simulaciones de situaciones probabilísticas; aunque es importante que primero vivan la experiencia en forma concreta y luego la recreen con el software. Por ejemplo, en el software gratuito winstats.exe (descargable en http://math.exeter.edu/rparris/winstats.html) existen más de 20 simulaciones de situación probabilísticas que pueden desarrollarse en el aula (una computadora y video beam) o en un laboratorio de informática.

Una de las simulaciones es el lanzamiento de datos tomando en cuenta la suma, el rango, el máximo y el mínimo de los valores de las caras obtenidas. Esta simulación tiene la particularidad de que hay dos parámetros que pueden variar, la cantidad de dados y la cantidad de caras de los lados.



Esta versatilidad hace que puedan plantearse diversos problemas, y además debido a que se pueden hacer gran cantidad de experimentos simultáneamente se puede explorar el comportamiento de estas situaciones probabilísticas. Por ejemplo, al realizar el experimento de lanzar 1000 veces tres dados de seis caras y sumar los puntos de las caras obtenidas se puede visualizar el comportamiento mediante una tabla de frecuencias y un histograma:



Esta simulación por sí sola no es representativa para el estudiante. La misma debe estar ligada a un problema, por ejemplo esta situación calza muy bien con *el problema histórico del duque de Toscana (1560)*:

El duque de Toscana fue un jugador empedernido, y había observado que en un juego en el que se lanzan tres dados y se suman los puntos, el 10 aparecía más veces que el 9. Sin embargo, según el duque, ambos números se pueden obtener de las seis maneras que se listan a continuación:

1+2+6=9	**1+3+6=10**
1+3+5=9	**1+4+5=10**
1+4+4=9	**2+2+6=10**
2+2+5=9	**2+3+5=10**
2+3+4=9	**2+4+4=10**
3+3+3=9	**3+3+4=10**

¿Cuál es el error que comete el duque?
¿Será cierto que el 10 debería aparecer más veces que el 9? ¿Por qué?

Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores
Luis Hernández Solís
Miguel González Ortega

Editor
Angel Ruiz

Editor gráfico
Miguel González

Revisores
Javier Barquero

Revisión filológica
Julián Ruiz

Director general del proyecto
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Octavo año.* San José, Costa Rica: autor.