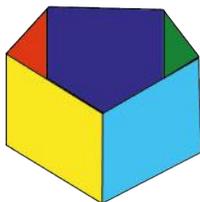


Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



www.reformamatematica.net



Documento de integración de habilidades para Décimo año

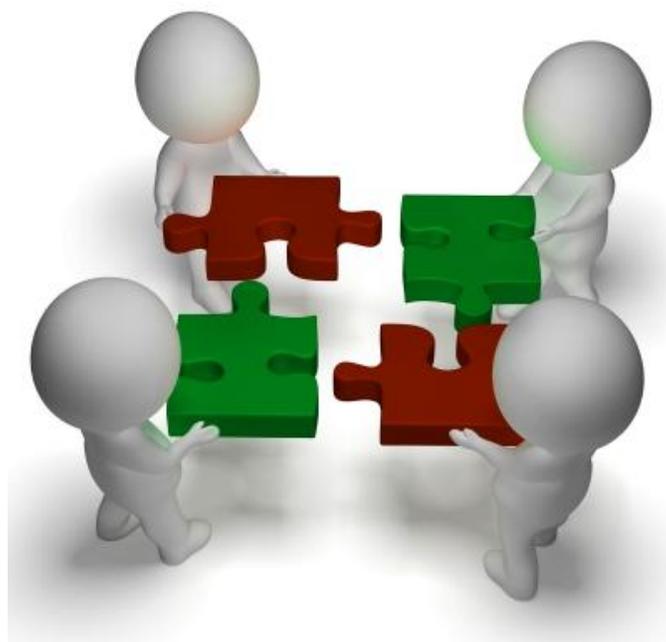


Imagen cortesía de Stuart Miles en Freedigitalphotos.net

**Costa Rica
2014**

Tabla de contenidos

PRIMERA PARTE: ELEMENTOS PREVIOS	3
SEGUNDA PARTE: INTEGRACIÓN DE HABILIDADES	4
GEOMETRÍA	4
RELACIONES Y ÁLGEBRA.....	18
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	27
CRÉDITOS	37

Primera parte: Elementos previos

A continuación se presenta la propuesta de distribución de las áreas para el Décimo año, que también será considerada en la segunda parte de este documento.

Tabla 1. Distribución de áreas Matemáticas para Décimo año según lo estipulado en los programas de estudio

Nivel	Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Décimo año	Geometría Relaciones y Álgebra	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad

Nota:

- *Medidas y Números* son áreas transversales en el Ciclo diversificado.

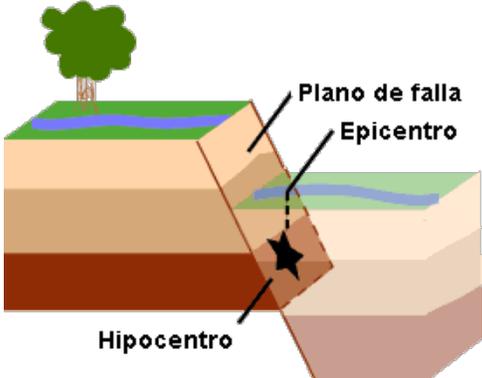
Aquí se ofrece un recuento aproximado del número de lecciones que supondría en este nivel el trabajo usando la estrategia sugerida de integración de habilidades por área mediante problemas.

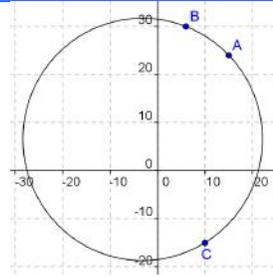
Tabla 2. Conteo de lecciones por área y periodo en el Décimo año

Décimo año		
Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Geometría 43	Relaciones y Álgebra 50	Estadística y Probabilidad 32
Relaciones y Álgebra 7		
Suma total de lecciones por periodo		
50	50	32

Segunda parte: Integración de habilidades

Geometría

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Geometría Analítica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Circunferencia <ul style="list-style-type: none"> - Centro - Radio - Recta secante - Recta tangente • Recta exterior • Rectas paralelas • Rectas perpendiculares 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio. 2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio. 3. Aplicar traslaciones a una circunferencia. 4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones. 5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia. 10. Utilizar software para representar circunferencias con condiciones dadas, representar traslaciones de circunferencias y clasificar rectas en secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia. 	<p>▲ Se puede introducir la ecuación de la circunferencia utilizando como herramienta la fórmula de distancia entre dos puntos, la cual se desarrolló en 9º Año:</p> $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ <p>☺ Un movimiento sísmico es un movimiento vibratorio producido por la pérdida de estabilidad de masas de corteza. Cuando el movimiento llega a la superficie y se propaga por ésta se le llama terremoto.</p>  <p>El movimiento sísmico se propaga concéntricamente y de forma tridimensional a partir de ese punto de la Litósfera al hipocentro. Cuando las ondas procedentes del hipocentro llegan a la superficie terrestre se convierten en bidimensionales y se propagan de forma concéntrica a partir del primer punto de contacto con ella. Este punto se llama epicentro.</p> <p>Fuente: Proyecto bisfera, España. http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm</p> <p>Hay un sismo y en tres estaciones se reportan ondas secundarias de similar intensidad. Tomando como punto de referencia la estación central sismológica las tres estaciones se ubican así:</p> <p>A: 24 millas al Norte y 15 millas al Este B: 30 millas al Norte y 6 millas al Este C: 15 millas al Sur y 10 millas al Este</p> <ol style="list-style-type: none"> a. ¿Cuál es la ubicación del epicentro con respecto a la estación central? b. ¿Cuál fue el radio de alcance de la onda sísmica? c. ¿Cómo se podría representar el comportamiento sísmico mediante una relación algebraica? <p>Lo que se quiere es que se plantee el problema en un eje de coordenadas.</p>



Luego se obtiene la ecuación de la circunferencia por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

▲ Es importante describir la circunferencia como una relación entre las coordenadas de los puntos que la forman. También, conociendo las coordenadas de un punto, se deberá reconocer si éste se encuentra dentro, fuera o en la circunferencia.

Es interesante señalar, en el problema anterior, que las personas del pueblo que están 10 millas al Sur y 20 millas al Este de la estación central no deberían haber sentido el sismo; en cambio los habitantes de un pueblo que está a 5 millas al Oeste de la estación central sí lo sintieron ya que el pueblo está dentro del radio de la onda sísmica.



El problema anterior corresponde a un modelo que tiene conexión con otras disciplinas.

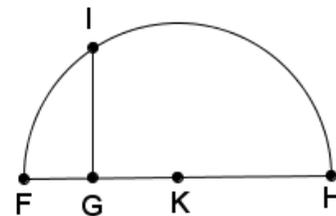


Un modelo como el anterior propicia la confianza en la utilidad de las Matemáticas.



Un elemento histórico con fines pedagógicos que puede utilizarse es la descripción realizada por el filósofo y matemático francés Descartes (1596-1650) de un método para obtener raíz cuadrada utilizando geometría. El siguiente texto es un fragmento tomado de *La Géométrie* (uno de los tres apéndices de su obra filosófica *Discours de la méthode*) sobre la extracción de la raíz cuadrada:

Si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG,



que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada.

Recuadro N° 1

Número sugerido de lecciones:	7 (Etapa I: 4, Etapa II: 3)
--------------------------------------	-----------------------------

Indicaciones y ejemplos

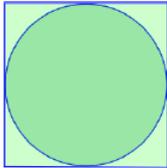
Para el estudio de la circunferencia, en este año, se establece una relación estrecha entre la representación geométrica y la analítica, por lo que habrá muchas conexiones con el área de Relaciones y Álgebra en este bloque de habilidades.

Se recomienda para la Etapa I desarrollar actividades donde se busque establecer relación entre la representación gráfica y algebraica de una circunferencia, así como las traslaciones de estas. Conviene preparar el trabajo con software dinámico con las construcciones utilizando instrumentos geométricos, manipulables y luego pasar al uso del software.

Sin dejar de lado el pensamiento intuitivo en los problemas, hay que tener claro que el grado de rigor propio de la disciplina deberá ser mayor que en el Tercer ciclo. Además, el manejo algebraico se potenciará en estos temas, por ejemplo al determinar si una recta dada es tangente o secante o exterior a una circunferencia dada.

Hay que recordar que para sexto año se estudiaron los elementos básicos de la circunferencia (radio, diámetro, ángulo central, cuerda, centro, etc)

 Carlos dibujó un círculo del tamaño exacto de una hoja cuadrada de 28 cm de lado, luego lo recortó. ¿Cuál es el área del sobrante de la hoja y el área del círculo recortado?



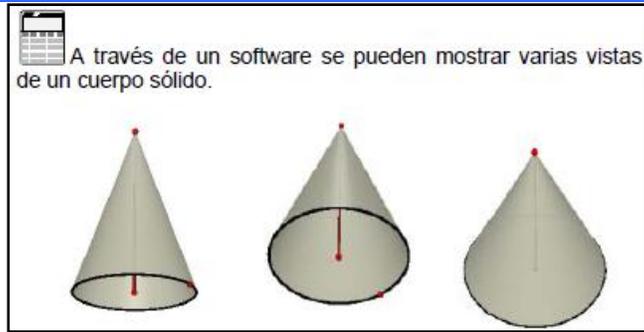
 Se puede solicitar que construyan un problema con base en el siguiente artículo del Reglamento de la Ley No. 7600 sobre la igualdad de oportunidades para la persona con discapacidad:

ARTICULO 110.- Dormitorio principal
El dormitorio principal de la vivienda deberá disponer de por lo menos un espacio libre de maniobra con un diámetro mínimo de 1,50 m.
Idealmente, esta área debería estar ubicada enfrente de los armarios de los dormitorios. Un espacio libre con un ancho mínimo de 0,90 m debe proporcionarse por lo menos a un lado de la cama. Un pasadizo de 1,20 m de ancho debe proporcionarse entre los pies de la cama y la pared opuesta.

Este tema está relacionado con el eje transversal *Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz.*

Sexto año (MEP, 2012, p. 210)

En años posteriores se han utilizado estos elementos en diversos problemas, sobre todo en el análisis de cuerpos tridimensionales como la esfera, el cilindro y el cono:



Sexto año (MEP, 2012, p. 2012)

Asimismo, para este momento se ha trabajado en la representación de figuras y funciones en el plano cartesiano.

También, en Octavo año se estudiaron las ecuaciones de 1er grado con una incógnita y las ecuaciones literales, en noveno año las ecuaciones de 2do grado con una incógnita.

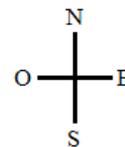
Todos, estos conocimientos previos son en los que debe apoyarse el docente para la creación de problemas y el desarrollo de las habilidades específicas propuestas para este bloque.

6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.
8. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad.
9. Aplicar la propiedad que establece que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.
10. Utilizar software para representar circunferencias con condiciones dadas, representar traslaciones de circunferencias y clasificar rectas en secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia.

▲ Se puede proponer un problema como el siguiente:



A partir del carro número 1, en la siguiente figura, el carro 2 se encuentra a 60 m al Este y 40 m al Norte, y el carro 3 a 24 m Oeste y X m al Norte, si las carreteras se cortan formando ángulo recto, ¿cuál es el valor de X?



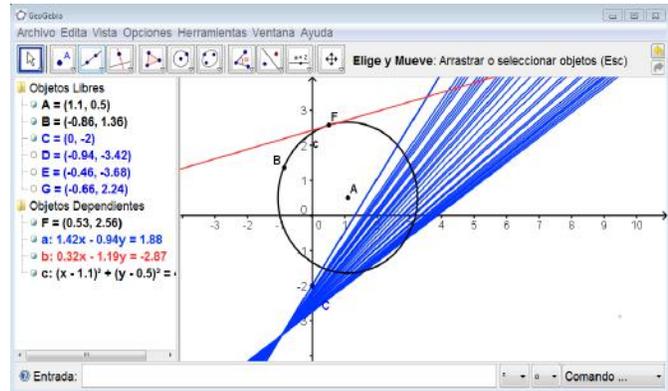
Elaboración propia

Se persigue que se desarrolle una exposición de las diversas estrategias. Esto llevará a la modelización mediante un sistema de coordenadas con origen en el carro 1 y, a partir de ahí, se trabajará la relación entre las ecuaciones de rectas perpendiculares.

▲ Se puede proponer un problema para introducir la relación entre las ecuaciones de rectas paralelas.



Utilizando la tecnología se puede plantear una actividad donde se visualice, mediante la manipulación dinámica, si una recta es secante, tangente o exterior a una determinada circunferencia.



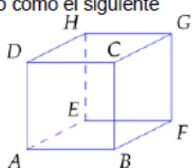
Recuadro N° 2

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 4, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Como se indicó, en niveles anteriores se dio un tratamiento de problemas que ameritaban representaciones gráficas en el plano cartesiano, tanto en el área de Geometría como en el área de Relaciones y Álgebra.

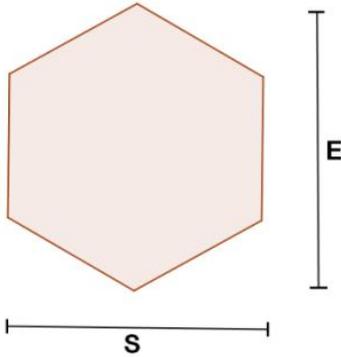
También, en años anteriores se trabajó a nivel sintético los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, incluso a nivel tridimensional. Por ejemplo en séptimo año (MEP, 2012, p.303):

<p>Visualización espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Caras • Aristas • Vértices • Rectas y segmentos paralelos • Rectas y segmentos perpendiculares • Planos paralelos • Planos perpendiculares 	<p>6. Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices.</p> <p>7. Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares.</p>	<p>▲ Esto sigue a lo estudiado previamente, incluso puede idearse una actividad que permita introducir los conceptos básicos de la geometría plana en el contexto del repaso de los elementos del cubo que fueron estudiados en ciclos anteriores.</p> <p>▲ A partir de un cubo como el siguiente</p>  <p>se pueden realizar preguntas como éstas:</p> <ol style="list-style-type: none"> ¿Qué aristas comparten el punto (vértice) C? ¿Qué pares de planos son paralelos? ¿Qué pares de planos son perpendiculares? Señale un par de rectas paralelas. Señale un par de rectas perpendiculares. <p>Estas preguntas pueden responderse de manera intuitiva y permitirán establecer los conceptos apropiados y la notación correspondiente.</p>
---	--	---

Además, hay que tener presente que en octavo año en el área de Relaciones y Álgebra se estudió la función lineal con sus diferentes representaciones (tabular, gráfica, algebraica) y se realizaron problemas correspondientes a esta

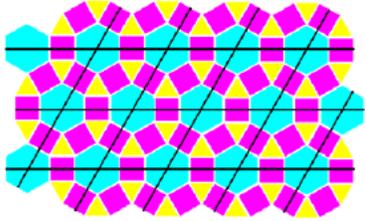
temática que pueden servir de soporte para el planteo de problemas que introduzcan estos conceptos y propiedades nuevas.

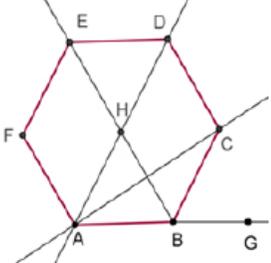
Nota: La habilidad específica 10, acerca del uso de la tecnología, no debe ser desarrollada por separado a las habilidades anteriores; esto debe hacerse simultáneamente de acuerdo a los recursos de cada institución. Se recomienda un software dinámico donde se pueda graficar en el plano cartesiano diferentes rectas que permita visualizar cuándo éstas son secantes, tangentes o exteriores a la circunferencia, o bien cuándo son paralelas o perpendiculares.

<p>Polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lado • Radio • Apotema • Ángulo central • Ángulo interno • Ángulo externo • Diagonal • Perímetro • Área • Relaciones métricas 	<p>11. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.</p> <p>12. Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.</p> <p>13. Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.</p> <p>17. Utilizar software de geometría dinámica para estudiar propiedades y realizar conjeturas sobre las figuras geométricas.</p>	<p>▲ Para iniciar el tema, se puede proponer el siguiente problema:</p> <p>😊 La siguiente figura representa la cabeza de un tornillo de forma hexagonal.</p>  <p>De acuerdo con los estándares internacionales, el fabricante presenta la siguiente tabla de medidas en milímetros.</p> <table border="1" data-bbox="857 1129 1339 1201"> <tr> <td>S</td> <td>4,00</td> <td>5,50</td> <td>7,00</td> <td>8,00</td> <td>10,00</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>4,38</td> <td>6,08</td> <td>7,74</td> <td>8,87</td> <td>11,05</td> </tr> </table> <p>Considerando las medidas anteriores:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. ¿Se puede concluir que la cabeza del tornillo es un hexágono regular? b. Si fuera así, ¿cuáles serían los valores aproximados de E para $S = 13$, $S = 17$, $S = 19$ y $S = 24$ respectivamente? c. ¿Qué medida tendría el lado de la cabeza del tornillo si $S = 7,00$ mm.? d. ¿Cuál sería su perímetro si $E = 18,90$? e. ¿Cuál sería el área de la cabeza del tornillo si $E = 21,10$? <p>▲ La idea es que exploren ciertas relaciones métricas y propiedades del polígono regular antes de llevar a cabo la etapa de clausura.</p> <p>⚙️ Problemas como éste conectan de forma natural con unidades de medida y su utilidad en muchos oficios y campos de la Mecánica.</p> <p>▲ Es importante que para trabajar con polígonos no regulares se repase la fórmula conocida desde primaria (base por altura entre 2) para calcular áreas de triángulos.</p>	S	4,00	5,50	7,00	8,00	10,00	E	4,38	6,08	7,74	8,87	11,05
S	4,00	5,50	7,00	8,00	10,00									
E	4,38	6,08	7,74	8,87	11,05									

		<p>▲ Hay que tener presente que el cálculo de la medida de la apotema de un polígono puede requerir el uso de las razones trigonométricas.</p> <p>⚙️ Un problema como el siguiente está relacionado con la indicación anterior y además hace conexión con el área de <i>Estadística y Probabilidad</i>.</p> <p>😊 Un objetivo de tiro al blanco tiene la forma de un octágono regular con lados de 14 centímetros de longitud y tiene una diana circular con un diámetro de 3 centímetros.</p>  <p>a. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo que da en el blanco vaya a dar en la diana?</p> <p>b. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo dé en la diana si el radio de la diana se duplica?</p>
--	--	---

Recuadro Nº 3

Número sugerido de lecciones: 10 (Etapa I: 4, Etapa II: 6)		
<p>Indicaciones y ejemplos</p> <p>El tema de polígonos regulares se viene trabajando desde cuarto año de primaria y ampliado en sexto año con la conceptualización de elementos como ángulo central, radio, apotema, área y perímetro.</p>		
<p>Polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Regulares • Irregulares 	<p>15. Reconocer en dibujos u objetos del entorno si una línea corresponde o no a un polígono.</p> <p>16. Reconocer en dibujos u objetos del entorno polígonos regulares e irregulares.</p>	<p>▲ Se pretende que el estudiantado pueda determinar si una línea corresponde o no a un polígono, o bien si un polígono dado (dibujado o presente en un objeto) es regular o no.</p> <p>▲ Puede ampliar el tema con ilustraciones de mosaicos y trazando hexágonos regulares con la ayuda del compás. Por ejemplo, identificar polígonos regulares e irregulares en la siguiente figura:</p> 
Cuarto año (MEP, 2012, p.203)		
<p>Posteriormente en secundaria, se han venido utilizando estos conceptos en la formulación de problemas geométricos y en representación de secciones planas de cuerpos tridimensionales como prismas, pirámides, etc.</p>		

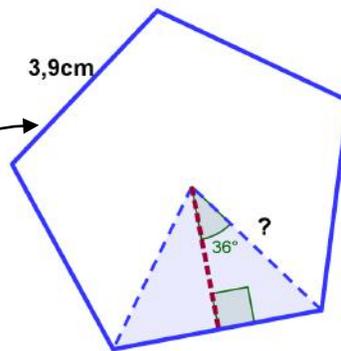
<p>Ángulos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Llano • Adyacentes • Par lineal • Opuestos por el vértice • Congruentes • Complementarios • Suplementarios 	<p>8. Reconocer en diferentes contextos ángulos llanos, adyacentes, los que forman par lineal y los opuestos por el vértice.</p> <p>9. Identificar ángulos congruentes, complementarios, suplementarios en diferentes contextos.</p> <p>10. Determinar medidas de ángulos sabiendo que son congruentes, complementarios o suplementarios con otros ángulos dados.</p> <p>11. Aplicar la relación entre las medidas de ángulos determinados por tres rectas coplanares dadas.</p>	<p>▲ Se deben aprovechar estos contenidos para repasar el concepto de ángulo y la clasificación de los mismos ya estudiados en primaria. Se agregará el ángulo llano.</p> <p>▲ Se pueden utilizar algunos conceptos desarrollados en primaria (polígonos regulares) para proponer problemas. Por ejemplo:</p> <p>😊 Si el hexágono que se le presenta a continuación es regular, entonces determine las medidas de los ángulos: EHB, EHD, DAB, ABC, CBG.</p> 
--	--	--

Séptimo año (MEP, 2012, p. 203)

Hay que recordar que en noveno año se desarrolló el tema de **trigonometría**, el cual es muy útil para encontrar medidas en problemas concernientes a polígonos regulares:



Imagen con derechos adquiridos por el MEP



Por lo que se pretende, sustentarse en estos conocimientos para representar estos polígonos en el plano cartesiano y resolver problemas que involucren este tipo de polígonos.

Con el uso de un software apropiado o un sitio web específico se podrían deducir propiedades de los polígonos regulares utilizando la técnica de interrogación para generar exploración y conjetura. También se podría hacer comprobaciones visuales de sus propiedades y características. Por ejemplo, en el siguiente sitio web se estudia los diferentes elementos de los polígonos regulares de manera dinámica cambiando el número de lados del polígono:

L = Longitud del lado
a = longitud apotema.

OCTÓGONO REGULAR

N=8

Angulo Central = $\hat{O} = 360/8 = 45,0^\circ$

Angulo Interior = $\hat{A} = 180 - 360/8 = 135,00$

Lado = 2,50 cm

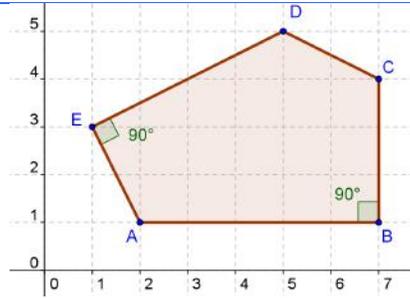
Apotema = 3,02 cm

Area = $8 * 2,50 \text{ cm} * 3,02 \text{ cm} / 2 = 30,18 \text{ cm}^2$

La construcción de estos polígonos, no está realizada con regla y compás, sino por calculo de ángulos.

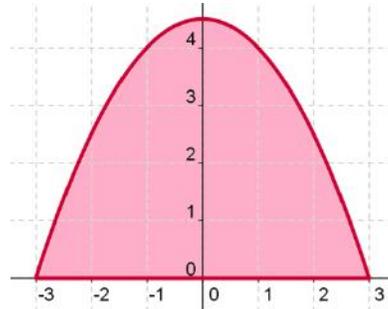
Imagen tomada de <http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/polireg.htm>

<p>Polígonos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lado • Radio • Apotema • Ángulo central • Ángulo interno • Ángulo externo • Diagonal • Perímetro • Área <p>Relaciones métricas</p>	<p>14. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.</p> <p>15. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.</p>	<p>▲ Se pueden proponer problemas en donde se tenga que calcular el área de un polígono irregular conociendo las longitudes de sus lados o se ubique en una cuadrícula que indique sus dimensiones. Se recomienda descomponer el polígono irregular en triángulos en los que se conozca la medida de sus lados o se puedan averiguar para luego utilizar la fórmula básica del área, por ejemplo:</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>El siguiente paso sería averiguar el área de un polígono irregular en un sistema de coordenadas, por ejemplo:</p>
--	---	---

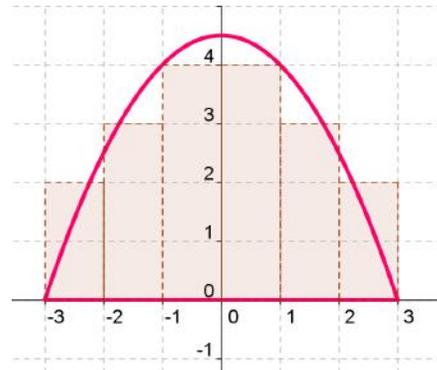


16. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

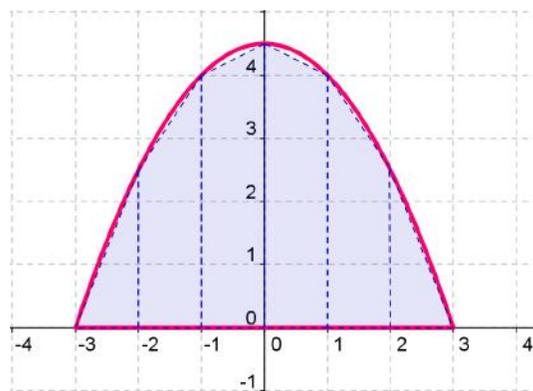
▲ Por ejemplo, estime el área de la siguiente figura representada en el plano cartesiano.



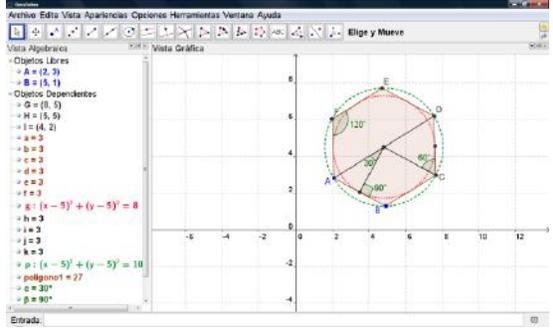
Una primera aproximación se podría hacer utilizando rectángulos:



Una mejor aproximación se haría con trapecios:



Se podría calcular el área de dos triángulos rectángulos y cuatro trapecios rectángulos de una unidad de altura. Podría señalarse intuitivamente la simetría de la figura y sólo calcular el área de una parte y multiplicarla por 2.

		<p> Al final de la actividad, se puede brindar la ecuación de la parábola, con lo cual se obtienen las coordenadas de los puntos y el cálculo del área puede mejorarse. Esto permite establecer conexiones con <i>Relaciones y Álgebra</i>.</p> <p> Este tipo de razonamientos, en el que se aproximan líneas curvas y áreas de figuras no poligonales con polígonos de áreas conocidas, es un método que ha sido aplicado por varios matemáticos en diferentes momentos de la historia se puede ver en Eudoxo y Arquímedes.</p>
<p>17. Utilizar software de geometría dinámica para estudiar propiedades y realizar conjeturas sobre las figuras geométricas.</p>	<p> Con el uso de un software de geometría dinámica se pueden comprobar varias propiedades de los polígonos regulares, como por ejemplo las relaciones métricas del hexágono regular en un sistema de coordenadas. También se puede aproximar el área de un círculo con polígonos regulares y observar que a mayor cantidad de lados mejor aproximación.</p>	

Recuadro Nº 4

Número sugerido de lecciones: 9 (Etapa I: 3, Etapa II: 6)

Indicaciones y ejemplos

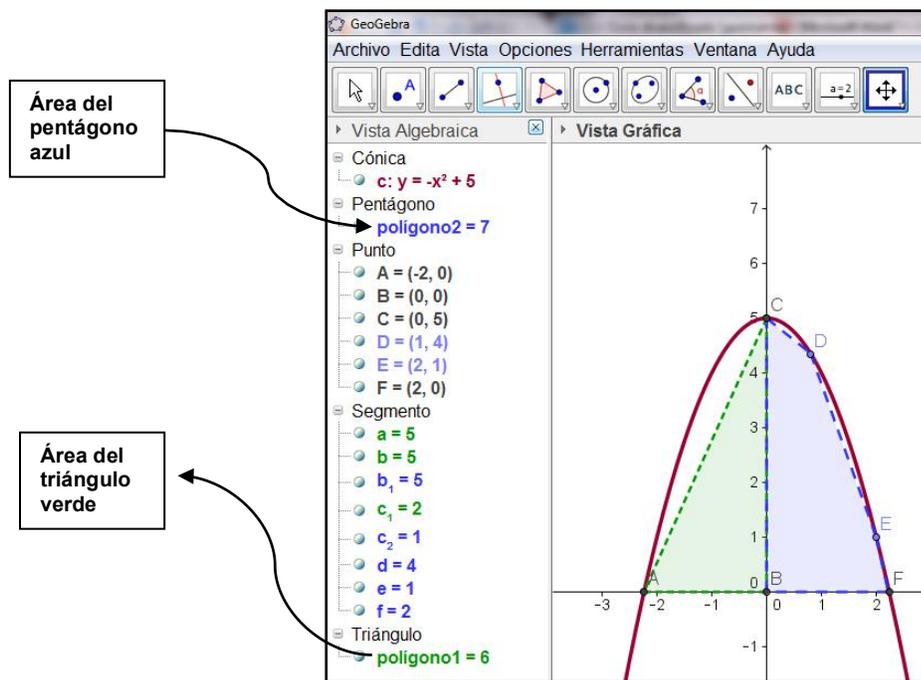
Como se sabe, no hay una fórmula definida para calcular el perímetro y el área de polígonos irregulares, por lo que se quiere en las habilidades específicas 14, 15 y 16 desarrollar en el estudiante diversas estrategias para resolver problemas de este tipo. Primero se puede trabajar con problemas de geometría sintética y luego ampliar los problemas al plano cartesiano.

Es importante tomar en cuenta que las áreas y perímetros a encontrar no deben estar reducidos a problemas con resultados exactos; la habilidad específica 16 promueve la aproximación de perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares. Esto no debería ser algo nuevo para el estudiante, ya que a lo largo del currículo se le da una especial atención a la aproximación y estimación; por ejemplo en séptimo año uno de los problemas que se propone en la columna de indicaciones puntuales es aproximar el área de la superficie de la Isla del Coco (figura no poligonal) utilizando cuadriláteros:

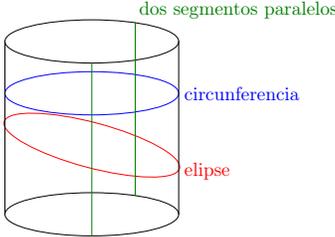
<p>Cuadriláteros</p> <ul style="list-style-type: none"> • Áreas • Suma de medidas de ángulos internos • Suma de medidas de ángulos externos 	<p>16. Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo.</p> <p>17. Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos externos de un cuadrilátero convexo.</p> <p>18. Resolver problemas que involucren ángulos, triángulos, cuadriláteros, sus propiedades y cálculo de áreas.</p>	<p>▲ Debe iniciarse con un repaso del cálculo de áreas de cuadriláteros mediante un problema como el siguiente:</p> <p>😊 Calcule el área aproximada de la Isla del Coco, utilizando algún mapa de Costa Rica.</p> <p>La idea es que se visualice la Isla del Coco como un cuadrilátero (por ejemplo: rectángulo) y, tomando en cuenta la escala del mapa, se aproxime su área. También, para una mejor estimación se podría dividir el mapa en varias figuras de áreas conocidas (triángulos, trapecios, cuadrados, rectángulos, etc.) y comparar los diferentes resultados del grupo. Con este ejercicio se estimula la creatividad.</p> <p>▲ Se puede trabajar en subgrupos de la clase y comparar las medidas para ver quiénes dan la mejor aproximación. Nota: La isla del Coco tiene aproximadamente 7,6 km de largo y 4,4 km de ancho, por lo tanto su área es aproximadamente 33,44 km².</p>
---	--	--

(MEP, 2012, p. 305)

Una actividad asistida por la computadora y algún software dinámico puede enriquecer y profundizar los conocimientos que se quieren generar en las habilidades 14, 15 y 16.



La parte de estimación de áreas y perímetros se puede ubicar en la etapa de movilización y dado su novedad conviene darle tiempo al estudiantado para que busque varias formas de estimar.

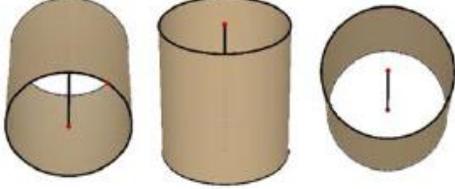
<p>Visualización espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Esfera • Cilindro circular recto • Base • Superficie lateral • Radio • Diámetro • Sección plana • Elipse 	<p>18. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.</p> <p>19. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.</p> <p>20. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.</p> <p>21. Reconocer elipses en diferentes contextos.</p>	<p>▲ Para introducir el estudio de los cilindros se puede proponer un problema como el siguiente:</p> <p>😊 De una tuca cilíndrica cuyo radio mide 10 cm se quiere obtener una viga de base cuadrada, mediante cuatro secciones planas. ¿Cuál es la medida máxima del lado del cuadrado de la base que se puede obtener?</p>  <p>Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net</p> <p>Luego del trabajo grupal, la etapa de clausura permite establecer qué figuras se obtienen al realizar secciones planas en un cilindro. Aquí se indica que la figura que se obtiene cuando se corta el cilindro con un plano que no es ni perpendicular ni paralelo al plano de la base se llama elipse (o es un arco de elipse).</p>  <p>No se trata de hacer un estudio detallado de la elipse, solamente se busca reconocer su forma al realizar cortes de un cilindro y evidenciar que aparece también en otros contextos. Se podrá conceptualizar el cilindro con una o dos bases según el contexto.</p> <p>😊 En cuanto a los rectángulos y circunferencias que se obtienen al cortar cilindros o esferas, se pueden establecer sus dimensiones conociendo algunas de las medidas de los sólidos considerados. Por ejemplo, en una esfera de radio 8 cm, determinar el radio de la circunferencia que se obtiene al cortarla con un plano que dista 4 cm del centro de la esfera.</p> <p>👥 El problema anterior sirve para hacer conciencia sobre el uso apropiado de los árboles como madera, y la necesidad de privilegiar la utilización de especies que se cultivan específicamente para ese uso.</p> <p>⚙️ La elipse puede conectarse con varias aplicaciones científicas que pueden al menos ser mencionadas aquí; por ejemplo, la órbita de los planetas.</p>
--	---	---

Recuadro N° 5

Número sugerido de lecciones: 9 (Etapa I: 4, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

A lo largo del currículo se ha trabajado con cuerpos tridimensionales. Por ejemplo, ya para quinto año de primaria se estudiaba el cilindro y sus elementos:

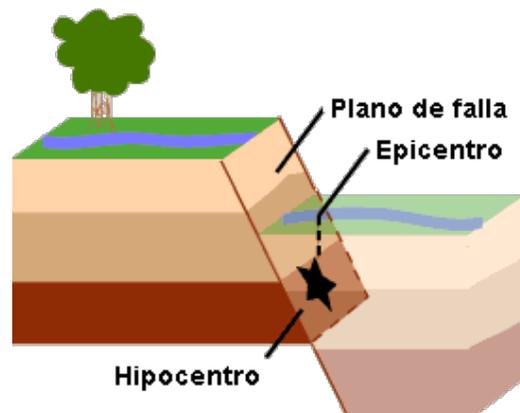
<p>Cuerpos sólidos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Prismas • Cilindros • Altura 	<p>9. Reconocer prismas y algunos de sus elementos y propiedades (caras, bases, altura).</p> <p>10. Reconocer cilindros y algunos de sus elementos y propiedades (bases, superficie lateral, eje, altura, radio y diámetro de la base).</p>	<p>▲ Muchos objetos tienen estas formas. Se puede solicitar como tarea llevar a la clase objetos que tengan esas formas. La y el docente debe saber que se trata de cilindros circulares rectos, aunque a las y los estudiantes solo se les dirá que son cilindros.</p> <p> A través de un software se pueden mostrar varias vistas de un cuerpo sólido.</p> 
--	---	--

(MEP, 2012, p.209)

Además, el docente debe considerar que en años anteriores se impulsa la utilización de cuerpos sólidos en la formulación de problemas de diferentes temáticas que no necesariamente están directamente ligadas al estudio de objetos tridimensionales. Por lo que el docente debe diagnosticar cuáles conocimientos relacionados a la esfera y el cilindro poseen los estudiantes y pueden aplicarse al aprendizaje de las características y propiedades de estos dos cuerpos.

Asimismo, se puede enlazar el estudio de la esfera y el cilindro con las habilidades referentes al estudio de la circunferencia que fueron desarrolladas en este mismo nivel.

Por ejemplo, hay que recordar que un movimiento sísmico se propaga concéntricamente de **forma tridimensional** (en forma aproximadamente esférica) desde el hipocentro y que es hasta que las ondas llegan a la superficie cuando se convierten en bidimensionales.



Por lo que esta situación planteada para introducir la circunferencia se puede adaptar para explorar elementos y propiedades de la esfera.

Relaciones y Álgebra

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Conjuntos numéricos <ul style="list-style-type: none"> • Unión • Intersección • Pertenencia • Subconjunto • Complemento • Intervalos 	1. Analizar subconjuntos de los números reales. 2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto. 3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión. 4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos. 5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.	▲ Utilizar subconjuntos finitos o infinitos de los números reales, en particular el conjunto de los números naturales \mathbf{N} , el de los números enteros \mathbf{Z} , los decimales \mathbf{D} , los racionales \mathbf{Q} , los irracionales \mathbf{I} , \mathbf{Z}^+ , \mathbf{Z}^- para los enteros positivos y los negativos respectivamente, \mathbf{Q}^+ , \mathbf{Q}^- para los racionales positivos y los negativos respectivamente. Otros conjuntos de interés son el de los números pares, el de los impares y el de los números primos. ▲ El análisis de subconjuntos contempla identificar, describir y caracterizar subconjuntos de los números reales. Lo que se busca es utilizar estos conocimientos como lenguaje para el tratamiento de funciones y ecuaciones.

Recuadro N° 6

Número sugerido de lecciones: 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

Indicaciones y ejemplos

El estudio de teoría de conjuntos se desarrollará de modo instrumental para precisar el estudio de funciones, algunas propiedades en *Probabilidad* y establecer el conjunto solución de ecuaciones, por lo que no se quiere un estudio exhaustivo de operaciones con conjuntos y un enfoque abstracto.

Este conjunto de habilidades puede desarrollarse mediante el uso de la pregunta dirigida y la clase magistral. En la etapa de movilización debe buscarse la apropiación, utilización y representación de dicho lenguaje sobre conjuntos numéricos.

Funciones <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de función y de gráfica de una función 	6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función. 7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.	▲ Cada estudiante ya ha trabajado con funciones lineales y cuadráticas, ha desarrollado habilidades relacionadas con la identificación de variables independientes, dependientes y sus diversas representaciones. De lo que se trata es de ampliar estos conocimientos. ▲ Proponer un problema donde se establezca una relación entre variables.  Durante una hora, se monitorea la posición de un objeto que se mueve rectilíneamente a razón de 1,25 m por segundo en sentido Este-Oeste con respecto a un punto de referencia dado. El monitoreo empezó cuando el objeto estaba ubicado a 140 m al Este de dicho punto de referencia. <ol style="list-style-type: none"> a. Determine una expresión matemática que indique la posición "P" del objeto conforme transcurre el tiempo "t" medido en segundos. b. Represente gráficamente en un sistema de ejes carte-
--	---	---

sianos dicha situación.

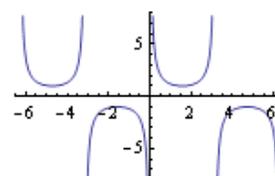
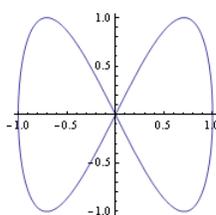
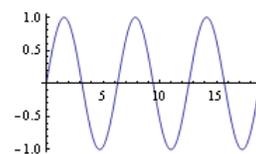
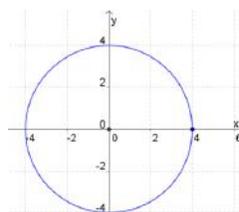
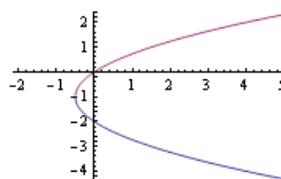
▲ En la etapa de cierre se sugiere presentar el concepto de función como una relación entre variables, mencionando los elementos involucrados y sus representaciones, para luego formalizar dicho concepto como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos. Aquí se debe introducir un tratamiento abstracto que no se había hecho en los ciclos anteriores.

▲ Las funciones establecidas en el programa son funciones reales de variable real. Como codominio de la función se utilizará su ámbito o rango. Esta estrategia simplificará el tratamiento de funciones inversas, pues exigirá únicamente analizar la inyectividad de la función. Utilizar un conjunto más amplio que el rango exigiría comprobar la sobreyectividad para garantizar la existencia de la inversa de una función.

▲ Se recomienda aportar algunas tablas, gráficas y ecuaciones relacionando a dos variables para que cada estudiante indique, con la respectiva justificación, cuáles corresponden a función y cuáles no.



¿Cuáles representaciones gráficas corresponden a una función? La variable representada en el eje horizontal es la independiente y la del eje vertical es la dependiente.



▲ Las gráficas anteriores fueron generadas con software graficador a partir de los criterios de las relaciones. Es recomendable que cada docente utilice, en la medida de lo posible, software para generar gráficas como las anteriores.



Es útil mencionar algunos aspectos del desarrollo del concepto de función a través de la historia.

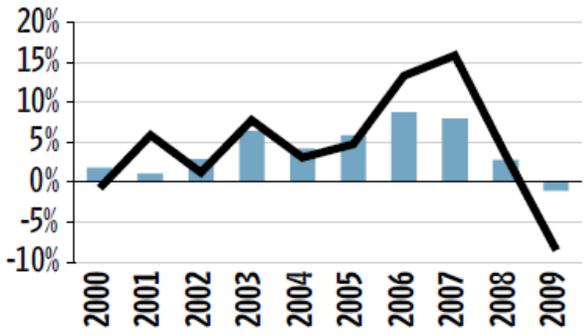
Recuadro N° 7

Número sugerido de lecciones: 5 (Etapa I: 2, Etapa II: 3)

Indicaciones y ejemplos

El evaluar una función gráfica o algebraicamente es una habilidad que los estudiantes han desarrollado en años anteriores, sobre todo cuando de construcción de gráficas se trata. Aquí donde hay que trabajar más es en el reconocimiento de relaciones que son o no son funciones en las diversas representaciones que se puedan dar.

Para la movilización hay que propiciar en los estudiantes el trabajo con los diferentes tipos de representaciones: de la ventana algebraica, a la gráfica o a la numérica o a la verbal.

<p>Funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elementos para el análisis de una función - Dominio - Imagen - Preimagen - Ámbito - Inyectividad - Crecimiento - Decrecimiento - Ceros - Máximo y mínimo - Análisis de gráficas de funciones 	<p>8. Analizar una función a partir de sus representaciones.</p>	<div style="text-align: center;">  <p>La curva en la gráfica siguiente representa los ingresos del Gobierno Central durante los años 2000 hasta el 2009 (líneas quebradas negras).</p> </div> <h3 style="text-align: center;">Crecimiento del PIB e ingresos del Gobierno Central</h3> <div style="text-align: center;">  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <caption>Datos estimados del gráfico</caption> <thead> <tr> <th>Año</th> <th>PIB (%)</th> <th>Ingresos del Gobierno Central (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2000</td><td>1.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>2001</td><td>1.0</td><td>6.0</td></tr> <tr><td>2002</td><td>1.0</td><td>1.0</td></tr> <tr><td>2003</td><td>6.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>2004</td><td>3.0</td><td>2.0</td></tr> <tr><td>2005</td><td>5.0</td><td>4.0</td></tr> <tr><td>2006</td><td>8.0</td><td>13.0</td></tr> <tr><td>2007</td><td>8.0</td><td>16.0</td></tr> <tr><td>2008</td><td>3.0</td><td>2.0</td></tr> <tr><td>2009</td><td>-1.0</td><td>-9.0</td></tr> </tbody> </table> <p>■ PIB — Ingresos del Gobierno Central</p> </div> <p style="text-align: center;">Imagen tomada de: Estado de la Nación 2010, capítulo 3, página 158</p> <ol style="list-style-type: none"> a. ¿En qué intervalos la función es creciente? b. ¿En qué intervalos la función es decreciente? c. ¿Cuál es el dominio de la función? d. ¿Cuál es su ámbito (aproximado)? e. ¿Es inyectiva la función? f. ¿Cuáles son los ceros (aproximados) de la función? g. ¿Cuál es la imagen (aproximada) de 2007? h. ¿En cuáles intervalos la función es negativa? i. ¿Cuál es el valor máximo (aproximado) de la función? j. ¿Cuál es el valor mínimo (aproximado) de la función? <p>▲ Para evaluar una función en distintos puntos de su dominio, utilice distintas representaciones.</p>	Año	PIB (%)	Ingresos del Gobierno Central (%)	2000	1.0	0.0	2001	1.0	6.0	2002	1.0	1.0	2003	6.0	8.0	2004	3.0	2.0	2005	5.0	4.0	2006	8.0	13.0	2007	8.0	16.0	2008	3.0	2.0	2009	-1.0	-9.0
Año	PIB (%)	Ingresos del Gobierno Central (%)																																	
2000	1.0	0.0																																	
2001	1.0	6.0																																	
2002	1.0	1.0																																	
2003	6.0	8.0																																	
2004	3.0	2.0																																	
2005	5.0	4.0																																	
2006	8.0	13.0																																	
2007	8.0	16.0																																	
2008	3.0	2.0																																	
2009	-1.0	-9.0																																	

Algebraica

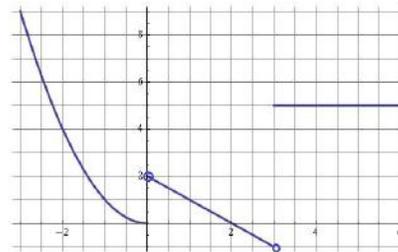
Sea $f(x) = 2x^3 + 5x - 8$, con dominio \mathbf{R} . Complete la tabla:

x	$f(x)$
-2	
t	
$\frac{1}{a^2}$	
	-8

Para la última entrada de la tabla el problema consiste en resolver una ecuación algebraica para encontrar las preimágenes de -8.

Gráficamente

A continuación se muestra la representación gráfica de una función f cuyo dominio es el intervalo $[-3, 6]$.



Complete la siguiente tabla:

x	$f(x)$
-2	
1	
π	
$\sqrt{20}$	
7	
2	

¿Cuál es el ámbito de la función?

▲ Para el análisis de la función a partir de su gráfica tome en cuenta los siguientes elementos: dominio, ceros, signo de la función, ámbito, inyectividad, crecimiento o decrecimiento, máximos y mínimos.

▲ No se utilizarán términos como estrictamente creciente o estrictamente decreciente, sino conceptos como creciente o decreciente que incluyen a los anteriores.



Para la inyectividad es pertinente utilizar varias representaciones de una función, para que cada estudiante identifique cuál es inyectiva y argumente su respuesta.

Recuadro N° 8

Número sugerido de lecciones: 10 (Etapa I: 4, Etapa II: 6)

Indicaciones y ejemplos

Aunque es una sola habilidad, se debe buscar la forma de integrar en una sola actividad todos esos elementos que interesa analizar en una función. Al inicio de la columna de indicaciones puntuales se propone un problema en el cual se pueden abordar de forma natural estos elementos, solamente se recomienda que las preguntas que ahí se plantean se reformulen de forma diferente para el estudiante. Por ejemplo, donde se pregunta ¿en qué intervalos la función es creciente?, se puede replantear para preguntar: ¿en qué periodos el PIB mostró un crecimiento? O bien, en la pregunta ¿cuál es el dominio de la función? Preguntar ¿qué años fueron los considerados para realizar este estudio? Al final se pueden formalizar los conceptos estudiados en la etapa de cierre o clausura.

<p>Funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Composición de funciones 	<p>9. Calcular la composición de dos funciones.</p>	<p>▲ La composición de funciones es muy importante pues permite conectar una función invertible con su inversa, tema que será analizado en 11° Año. Es importante calcular composición de funciones con distintas representaciones.</p> <p>😊 Complete la tabla que sigue sin conocer los criterios para las funciones f_1 y f_2:</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f_1(x)$</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f_2(x)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$(f_1 \circ f_2)(x)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$(f_2 \circ f_1)(x)$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-top: 10px;">Este es un problema correspondiente al nivel de reflexión.</p>	x	0	1	2	3	4	$f_1(x)$	3		0	1		$f_2(x)$		4	1		3	$(f_1 \circ f_2)(x)$		2	4			$(f_2 \circ f_1)(x)$	0				
x	0	1	2	3	4																											
$f_1(x)$	3		0	1																												
$f_2(x)$		4	1		3																											
$(f_1 \circ f_2)(x)$		2	4																													
$(f_2 \circ f_1)(x)$	0																															

Recuadro N° 9

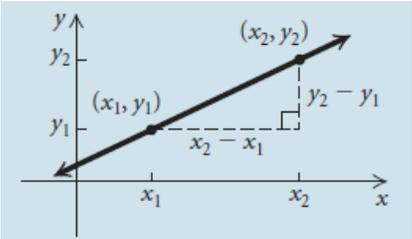
Número sugerido de lecciones: 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad será trabajada de forma independiente.

Se requiere de una formalización de la composición de funciones, donde el estudiante comprenda cuáles son las condiciones que se deben dar para poder operar con ellas.

Esto se podría realizar por medio de la pregunta dirigida partiendo de un reto matemático.

<p>Funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Función lineal 	<p>10. Representar gráficamente una función lineal.</p> <p>11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.</p> <p>12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.</p>	<p>▲ Se puede comenzar implementando un problema que involucre función lineal como repaso de lo trabajado en 8° Año.</p> <p>😊 La empresa “Pura Vida S. A.” produce juegos de mesa que promueven la conservación del medio ambiente. Dado que el costo de producir cada juego fue de ₡1250 y se hizo una inversión inicial de ₡3 500 000, se proyecta que el precio de venta para cada juego sea de ₡2750.</p> <ol style="list-style-type: none"> Determine la expresión algebraica que brinda la utilidad “U” que genera la empresa en función de la cantidad de artículos producidos. Grafique dicha relación en un sistema de ejes cartesianos. Determine cuántos artículos es necesario vender para que la empresa empiece a generar ganancias. <p>👤 Un problema como éste favorece una cultura ambiental para el desarrollo sostenible, un valor transversal en el sistema educativo costarricense.</p> <p>▲ Mencionar que la función identidad, expresada algebraicamente por $f(x) = x$, es un caso particular de la función lineal. Esta función será muy útil en la definición de la inversa de una función.</p> <p>▲ En la etapa de cierre desarrolle los conceptos de pendiente de una recta, intersección con el eje de las abscisas e intersección con el eje de las ordenadas. Además, se puede solicitar a cada estudiante que analice el problema anterior desde una perspectiva funcional, determinando su dominio, ceros, signo de la función, ámbito, inyectividad, crecimiento o decrecimiento, estableciendo conexiones con el problema y los elementos anteriores.</p> <p>▲ Puede proponerse que se determine la pendiente y la <i>intersección con el eje de las ordenadas</i> de una determinada recta representada por el criterio $y = mx + b$, dados dos puntos de ella.</p>  <p>La idea es que cada estudiante pueda deducir la fórmula para la pendiente m de la recta, como la razón entre el cambio de y con respecto al de x:</p> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ <p>y que siga utilizándola para calcular la pendiente de una forma más fácil.</p>
--	--	--

		 Se recomienda usar software matemático para conjeturar acerca de la influencia de los parámetros a , b en la representación gráfica de $y = ax + b$.
--	--	---

Recuadro N° 10

Número sugerido de lecciones: 10 (Etapa I: 3, Etapa II: 7)

Indicaciones y ejemplos

Como este tema fue abarcado en octavo año, se pueden plantear problemas como el sugerido al inicio de las indicaciones puntuales para que pueda ser modelado y representado gráficamente. A partir de ahí, se espera que los estudiantes puedan interpretar los ceros, la pendiente y la intersección con el eje y en el contexto del problema. Por ejemplo, se podría preguntar al estudiante cuánto aumenta la utilidad conforme se vende cada juego y en la etapa de clausura formalizar por medio de esta experiencia el concepto de pendiente y la fórmula que permite calcularla.

La pendiente se puede obtener estableciendo la relación de dos puntos con los modelos trabajados en Octavo año y por medio de la tangente del ángulo determinado por la recta y el eje x visto en noveno. Esta formalización conllevaría un trabajo de al menos tres lecciones.

Funciones <ul style="list-style-type: none"> • Función cuadrática 	<p>13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.</p>	<p>▲ La función cuadrática ya fue estudiada en 9° Año, de lo que se trata ahora es de precisar sus propiedades. Se sugiere hacer un estudio sistemático para la representación gráfica que incluya:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Punto de intersección con el eje de las ordenadas. b. Puntos de intersección con el eje de las abscisas. c. Intervalos de crecimiento o decrecimiento. d. Concavidad. e. Intervalo donde la función es positiva o negativa y su conexión con la solución de desigualdades cuadráticas. f. Máximo o mínimo de la función (vértice). g. Ámbito de la función. h. Eje de simetría. i. Intervalos máximos donde la función es inyectiva. <p>Los puntos anteriores deben verse en conjunto, en forma articulada, y no por separado.</p> <p>▲ Conviene analizar la influencia de los parámetros a, b y c en el tipo de gráfica. Una buena estrategia consiste en la técnica de completar cuadrado y utilizar transformaciones en el plano: homotecias y traslaciones.</p> <p style="text-align: center;">  Es recomendable usar software matemático para facilitar la observación de las características descritas para $y = ax^2 + bx + c$ y para aproximar soluciones de ecuaciones de segundo grado. </p>
	<p>14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.</p>	<p style="text-align: center;">  Una bola es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. Pasados t segundos, la altura h de la bola se representa algebraicamente por </p>

		$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ <p>con $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ la aceleración de la gravedad. Plantear un problema con esta situación y resolverlo.</p>
15.Relacionar la representación gráfica con la algebraica.		<p>▲ Se puede dar una serie de representaciones algebraicas y otra serie de representaciones gráficas, o bien una mezcla de ambas.</p> <p>▲ Se puede hacer lo mismo utilizando representaciones tabulares y algebraicas (o bien gráficas). Se presentan varias tablas y varios criterios.</p>

Recuadro N° 11

Número sugerido de lecciones: 11 (Etapa I: 4, Etapa II: 7)

Indicaciones y ejemplos

En este punto, los estudiantes ya han trabajado el análisis de gráficas de funciones y han tenido desde noveno año un acercamiento sobre cómo estudiar funciones cuadráticas. Se pueden plantear problemas que modelan mediante funciones cuadráticas para que por medio de su representación gráfica se estudien los elementos descritos en las indicaciones puntuales y se puedan comprender algunas de las fórmulas y procedimientos que permitirán su obtención cuando se trabajen con su representación algebraica.

El uso de software permitirá a los estudiantes realizar conjeturas sobre los parámetros a , b y c y su relación con la representación algebraica. Conviene un cierre para precisar sus propiedades y condiciones en las que se dan (tanto en forma general, cómo en condiciones particulares). Se puede trabajar con traslaciones de las gráficas.

<p>Sistemas de ecuaciones lineales</p> <ul style="list-style-type: none"> Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas 	<p>16.Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>17.Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.</p>	<p> El doble de la edad de Juan aumentado en la edad de Cinthia equivale a 100 años. Si la edad de Cinthia es la misma que la edad de Juan disminuida en 11 años, ¿cuál es la edad de ambos?</p> <p>▲ Por su naturaleza, este problema puede ser resuelto utilizando dos ecuaciones de primer grado, lo que sirve para justificar la importancia del conocimiento.</p> <p>▲ Se sugiere explicar brevemente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad en la resolución del problema anterior. Por ejemplo, en el método de igualación: $y = f(x)$; $y = g(x)$ entonces $f(x) = g(x)$ se utiliza la propiedad transitiva. En la etapa de cierre se formalizan dichos métodos.</p> <p>▲ Trabajar con sistemas de la forma</p> $a_1x + b_1y = c_1, a_2x + b_2y = c_2$ <p>y utilizar los métodos de sustitución, igualación, suma y resta y de forma gráfica.</p> <p>▲ Se sugiere proponer sistemas con solución única, solución vacía y con infinitas soluciones. Enfatizar el significado gráfico de cada uno de los tres casos: rectas que se intersecan en un</p>
--	---	---

		<p>punto, rectas paralelas que no se intersecan, rectas coincidentes.</p> <p> Usualmente el costo total de producción de x unidades de un producto tiene dos componentes: el costo inicial y el costo por unidad del producto. Cuando se han vendido suficientes unidades de tal forma que el ingreso total sea igual que el costo total, se dice que se llegó al punto de equilibrio. Suponiendo que el ingreso total es igual al número de unidades vendidas multiplicado por el precio de venta de cada unidad, plantee un problema que permita encontrar el punto de equilibrio para la situación dada.</p>
--	--	---

Recuadro N° 12

Número sugerido de lecciones:	7 (Etapa I: 3, Etapa II: 4)
--------------------------------------	-----------------------------

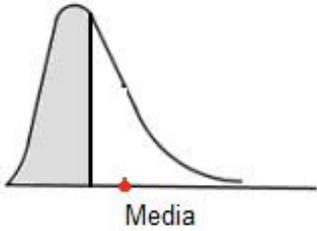
Indicaciones y ejemplos

Estas habilidades se pueden trabajar integradamente. La idea es que a partir de problemas o situaciones que el docente plantee a sus estudiantes, estos puedan ir recopilando y haciendo suyos los procedimientos que se vayan utilizando.

Por ejemplo, el problema que se presenta al final de las indicaciones puntuales sirve para potenciar el método de igualación de una forma natural. Además, se puede solicitar a los estudiantes que grafiquen ambas funciones (puede ser con software de geometría dinámica) y que establezcan relación entre el resultado obtenido y dicha representación gráfica.

Estadística y Probabilidad

Estadística																																																																				
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales																																																																		
Representaciones tabulares y gráficas	1. Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.	<p>▲ Debido a que este tema fue discutido en 7° y 8° Año, no se requiere entrar en mucho detalle. Sin embargo, para complementar el trabajo que se va a realizar tanto en el análisis estadístico de datos cuantitativos como en el cálculo de probabilidades, es necesario proponer algunos problemas que conecten con estos enfoques y diferentes áreas científicas. Un ejemplo de problemas que permiten realizar esta conexión es el siguiente:</p> <p> Utilizar la información del último Censo de Población para determinar los porcentajes de población indígena que mantienen su lengua autóctona y represente esta información en forma tabular o gráfica. De acuerdo con esta información, determine la probabilidad que un indígena aleatoriamente seleccionado pertenezca a los Cabécares y conserve su lengua autóctona.</p> <p> La información necesaria para resolver este problema puede ser consultada en la dirección electrónica ccp.ucr.ac.cr y puede ser resumida mediante el empleo de una hoja de cálculo.</p> <p> Este problema conecta con el eje transversal <i>Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz</i>. En este sentido, se puede promover el respeto hacia los diferentes grupos indígenas del país y la realización de esfuerzos por conservar las tradiciones de estos pueblos.</p> <p> Además de lo anterior, en este problema se ponen en ejecución todos los procesos que se proponen en este currículo.</p>																																																																		
Medidas de posición <ul style="list-style-type: none"> • Moda • Media aritmética • Mediana • Cuartiles • Extremos <ul style="list-style-type: none"> - Máximo - Mínimo 	2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas. 3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos. 4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.	<p>▲ Para analizar la importancia de las medidas de posición se puede recurrir a problemas que requieran resumir información por medio de valores concretos. Por ejemplo:</p> <p> La siguiente información corresponde a una muestra aleatoria de 20 partos producidos en cierto hospital. Se incluye el peso al nacer (en kg) y el número de hermanos de cada niño.</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr> <th>No</th> <th>Peso</th> <th>No. herm.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>3,33</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3,09</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2,72</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3,04</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>3,95</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>3,36</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>3,36</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>2,92</td><td>0</td></tr> <tr><td>9</td><td>2,69</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>3,74</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr> <th>No</th> <th>Peso</th> <th>No. herm.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>11</td><td>2,71</td><td>0</td></tr> <tr><td>12</td><td>3,02</td><td>1</td></tr> <tr><td>13</td><td>4,36</td><td>1</td></tr> <tr><td>14</td><td>3,62</td><td>2</td></tr> <tr><td>15</td><td>2,98</td><td>1</td></tr> <tr><td>16</td><td>3,34</td><td>0</td></tr> <tr><td>17</td><td>2,80</td><td>1</td></tr> <tr><td>18</td><td>3,00</td><td>1</td></tr> <tr><td>19</td><td>3,06</td><td>0</td></tr> <tr><td>20</td><td>3,51</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p>Observe que la unidad estadística es el recién nacido y se valoran las características: bajo peso al nacer y número de hermanos.</p>	No	Peso	No. herm.	1	3,33	1	2	3,09	2	3	2,72	2	4	3,04	1	5	3,95	0	6	3,36	0	7	3,36	1	8	2,92	0	9	2,69	2	10	3,74	1	No	Peso	No. herm.	11	2,71	0	12	3,02	1	13	4,36	1	14	3,62	2	15	2,98	1	16	3,34	0	17	2,80	1	18	3,00	1	19	3,06	0	20	3,51	3
No	Peso	No. herm.																																																																		
1	3,33	1																																																																		
2	3,09	2																																																																		
3	2,72	2																																																																		
4	3,04	1																																																																		
5	3,95	0																																																																		
6	3,36	0																																																																		
7	3,36	1																																																																		
8	2,92	0																																																																		
9	2,69	2																																																																		
10	3,74	1																																																																		
No	Peso	No. herm.																																																																		
11	2,71	0																																																																		
12	3,02	1																																																																		
13	4,36	1																																																																		
14	3,62	2																																																																		
15	2,98	1																																																																		
16	3,34	0																																																																		
17	2,80	1																																																																		
18	3,00	1																																																																		
19	3,06	0																																																																		
20	3,51	3																																																																		

		<p>a. Construya una distribución de frecuencias y el polígono de frecuencias correspondiente.</p> <p>b. De acuerdo con la gráfica anterior identifique el intervalo en el que se presenta la mayor concentración de niños.</p> <p>c. Si tuviera que caracterizar el peso de estos niños por medio de un solo valor ¿qué dato utilizaría? ¿Por qué?</p> <p>▲ En el proceso de clausura, se deben aprovechar las reflexiones realizadas para determinar la necesidad de emplear medidas específicas que caractericen el patrón de variabilidad de un grupo de datos cuantitativos. Es posible que en el grupo se tenga conocimiento sobre los conceptos de moda y media aritmética, pero ahora es necesario ampliar estas ideas.</p> <p> El cálculo de medidas estadísticas no puede considerarse como un fin en sí mismo, sino como un paso para continuar con el proceso de análisis. Por ello, para simplificarlo se puede recurrir a una calculadora con funciones estadísticas o a la computadora para utilizar una hoja de cálculo o algún programa especializado.</p> <p>▲ Se deben analizar problemas en los cuales la distribución de los datos sea asimétrica, con los efectos que esto genera para el análisis de datos.</p> <p> Suponga que el salario promedio de una empresa es de ₡1 500 000 mensuales. ¿Será posible que el 80% de los empleados gane menos de ₡500 000? Si la respuesta es positiva, justifique por qué ocurre eso.</p> <p>▲ Se debe identificar que efectivamente puede ocurrir que el salario promedio de todos los trabajadores sea de ₡1 500 000, mientras que el 80% de ellos gane menos de ₡500 000. Esto ocurre en el caso que unos pocos trabajadores tengan un salario muy alto respecto al salario común en la empresa; esto significa que la distribución de salarios presenta asimetría positiva, por lo que el salario promedio toma valores muy grandes por efecto de estos valores extremos. Si se desea caracterizar la distribución de salarios, es adecuado utilizar otras medidas como la mediana y la moda. La forma de la distribución de datos sería:</p> <p style="text-align: center;">Asimétrica positiva</p> 
<p>Media aritmética ponderada</p>	<p>5. Determinar la media aritmética en grupos de datos que tienen pesos relativos (o ponderación) diferentes entre sí.</p>	<p>▲ Para valorar la importancia de la media aritmética ponderada, se recomienda plantear problemas en donde los datos tengan diferente peso relativo. Por ejemplo:</p> <p> Una estudiante de la universidad obtuvo las siguientes calificaciones en un curso de Matemática, para una calificación de 0 a 10:</p>

6. Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.

Pruebas	Calificaciones
Primer examen corto	6,00
Segundo examen corto	5,50
Tercer examen corto	6,50
Proyecto	6,00
Primer parcial	7,50
Segundo parcial	8,50

- Los exámenes cortos tenían un valor de 5% cada uno, el proyecto valía 15% y los exámenes parciales 35% cada uno. Si la nota mínima de aprobación es un 7,00, ¿la estudiante aprobó el curso?
- Realice un análisis sobre la forma en que se ponderan las evaluaciones de la asignatura de Matemáticas y la forma de determinar su nota por trimestre.

▲ Es necesario que haya experimentación y se busquen alternativas. Se debe orientar hacia el cálculo de un promedio ponderado, pues el concepto puede ser complejo. Una vez resuelto el problema y sistematizado el concepto, se puede pedir resolver problemas donde se aplique el conocimiento adquirido.



Considere la siguiente distribución de frecuencias que corresponde a la cantidad de horas extra que trabajaron los empleados de cierta empresa el mes pasado. Determine el número promedio de horas extra por empleado para ese mes.

Distribución de horas extra para los empleados de cierta empresa durante el mes anterior

No. de horas	No. trabajadores	Porcentaje de trabajadores
De 0 a menos de 10	5	8,93
De 10 a menos de 20	14	25,00
De 20 a menos de 30	23	41,07
De 30 a menos de 40	10	17,86
De 40 a 50	4	7,14
Total	56	100



En *Estadística y Probabilidad* se presenta una serie de problemas como el anterior, donde cada estudiante debe elegir un modelo que lo ayude a obtener la respuesta de la pregunta planteada. Es fundamental que las y los estudiantes puedan argumentar sólidamente la validez del modelo elegido y las condiciones en las cuales resulta apropiado.

Recuadro N° 13

Número sugerido de lecciones: 16 (Etapa I: 4, Etapa II: 12)

Indicaciones y ejemplos

Este grupo de habilidades se pueden introducir con un problema donde se involucren conocimientos previos y los que se buscan aprender.

Hay que tener presente que desde la educación primaria se viene trabajando el análisis estadístico mediante la interpretación de diferentes representaciones y medidas de posición; por lo que es significativo apoyarse de las

habilidades desarrolladas preliminarmente para construir nuevos conocimientos.

Para séptimo año se refuerzan conceptos desarrollados en primaria con el propósito de ajustar y nivelar las bases académicas; y en octavo y noveno año se potencian los problemas vinculados con el manejo de información cuantitativa.

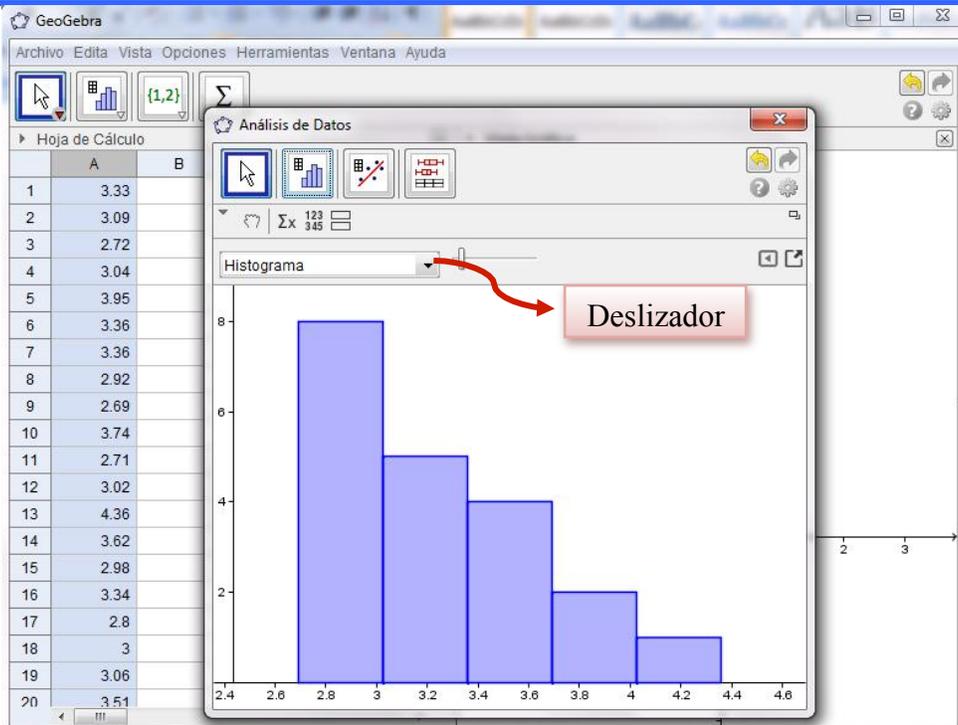
Asimismo, en octavo año se plantea la recolección de datos por medio de la experimentación, esto puede producir datos no enteros resultado de mediciones. Ya para noveno año, se establecen los conceptos de variable discreta y variable continua, que aunque se desarrollaron intuitivamente en primaria, acá se profundizan y se trabajan por medio de distribuciones de frecuencia y los gráficos correspondientes para los casos de variables continuas. La siguiente imagen muestra un fragmento de la malla curricular de noveno año en el área de Estadística y Probabilidad:

<p>Distribuciones de frecuencia</p> <ul style="list-style-type: none"> • Clases o intervalos • Frecuencia absoluta • Frecuencia relativa y porcentual • Representación tabular • Representación gráfica - Histogramas - Polígonos de frecuencia 	<ol style="list-style-type: none"> 3. Reconocer la importancia de agrupar datos cuantitativos en clases o intervalos. 4. Resumir un grupo de datos cuantitativos por medio de la elaboración de un cuadro de distribuciones de frecuencia absoluta y relativa (o porcentual). 5. Interpretar la información que proporciona un cuadro de distribución de frecuencias al resumir un grupo de datos cuantitativos. 6. Resumir la información proporcionada por una distribución de frecuencias mediante un histograma o un polígono de frecuencias (absolutas o relativas), e interpretar la información que proporcionan estas representaciones gráficas. 7. Utilizar algún software especializado o una hoja de cálculo para apoyar la construcción de las distribuciones de frecuencia y sus representaciones gráficas. 	<p>▲ Para continuar con el análisis de las variables continuas, se recomienda plantear la siguiente situación.</p> <p> En la Antigüedad se utilizaban unidades de medida que estaban relacionadas con el cuerpo humano, dos de ellas son el palmo y el codo. El palmo es la longitud entre el pulgar y el meñique con la mano abierta (también conocida como cuarta).</p> <div style="text-align: center;">  <p>1 palmo</p> <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> </div> <p>y el codo correspondía a la longitud desde el codo hasta el extremo de los dedos.</p> <div style="text-align: center;">  <p>1 codo</p> <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> </div>
---	---	--

(MEP, 2012, página 363)

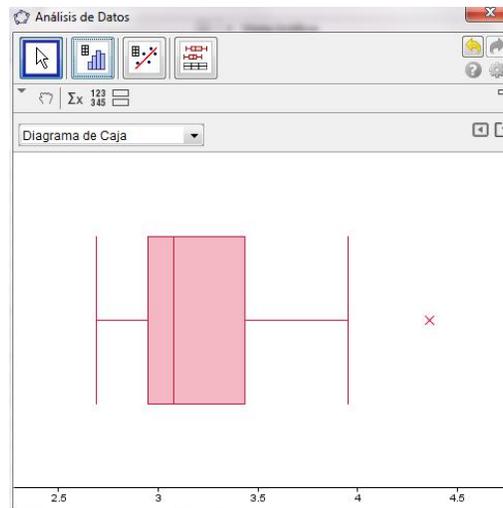
Todo esto hay que tomarlo en cuenta, ya que no se pretende “partir de cero” con estos conocimientos, sino más bien, apoyarse en ellos para desarrollar conceptos nuevos, como la media aritmética ponderada.

El uso de la tecnología puede ser muy útil para realizar representaciones tabulares y gráficas. Para esto pueden utilizar alguna hoja de cálculo; o también, las últimas versiones del software libre GeoGebra poseen este recurso. Por ejemplo, en el problema planteado en los programas de estudio (MEP, 2012, página 432) en el nivel de décimo año respecto a una muestra aleatoria de 20 partos producidos en un determinado hospital, se puede emplear GeoGebra de forma rápida y sencilla para visualizar las diferentes representaciones gráficas de la muestra y así dejar más tiempo para el análisis:



En la imagen anterior se muestra un histograma que tiene la ventaja que al mover el deslizador superior se cambia el tamaño de los intervalos.

También, aunque en este año no se trabaja con diagrama de cajas, esta es una opción que puede ser valorada por el docente para el análisis de una muestra:



Hay que recordar que lo importante aquí no es la construcción de las representaciones, sino la interpretación que se haga de ellas.

Probabilidad																																				
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales																																		
Eventos <ul style="list-style-type: none"> • Relaciones entre eventos - Unión \cup - Intersección \cap - Complemento • Eventos mutuamente excluyentes 	<p>1. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: unión “\cup”, intersección “\cap” y “complemento” e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.</p> <p>2. Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos.</p>	<p>▲ Para generar estas habilidades se pueden diseñar problemas con juegos de azar o problemas que involucren relaciones entre eventos de la vida real. Para ello, se requiere definir los conceptos de unión, intersección y complemento de un evento, correspondientes a un espacio muestral S.</p> <p> El siguiente cuadro presenta 107 sismos que fueron reportados por el Observatorio Vulcanológico y Sismológico de la Universidad Nacional (OVSICORI) para el año 2010, de acuerdo con la región del país donde se detectó el epicentro:</p> <p style="text-align: center;">Sismos más relevantes reportados por el OVSICORI en el 2010 por intensidad y ubicación del epicentro</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Región</th> <th colspan="2">Magnitud: escala Richter</th> <th rowspan="2">Total</th> </tr> <tr> <th>Menos de 4</th> <th>4 o más</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Central</td> <td>27</td> <td>7</td> <td>34</td> </tr> <tr> <td>H. Norte</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>H. Atlántica</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>Brunca</td> <td>13</td> <td>22</td> <td>35</td> </tr> <tr> <td>Chorotega</td> <td>13</td> <td>10</td> <td>23</td> </tr> <tr> <td>Pacífica C.</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>60</td> <td>47</td> <td>107</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">Tomado de: OVSICORI-UNA. www.ovsicori.una.ac.cr/</p> <p>Bajo el supuesto de que un investigador elige aleatoriamente uno de estos sismos, se definen los siguientes eventos:</p> <p>A: que el sismo escogido haya tenido epicentro en la Región Brunca. B: que el sismo haya tenido una magnitud de 4 o más en la escala Richter.</p> <p>Determine el número de sismos que incluye cada uno de los siguientes eventos, represéntelos en diagramas de Venn y ofrezca una interpretación.</p> <p>a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. A^c y B^c</p>	Región	Magnitud: escala Richter		Total	Menos de 4	4 o más	Central	27	7	34	H. Norte	3	1	4	H. Atlántica	2	1	3	Brunca	13	22	35	Chorotega	13	10	23	Pacífica C.	2	6	8	Total	60	47	107
	Región	Magnitud: escala Richter		Total																																
Menos de 4		4 o más																																		
Central	27	7	34																																	
H. Norte	3	1	4																																	
H. Atlántica	2	1	3																																	
Brunca	13	22	35																																	
Chorotega	13	10	23																																	
Pacífica C.	2	6	8																																	
Total	60	47	107																																	
	<p>3. Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.</p>	<p>▲ Para identificar eventos mutuamente excluyentes, se pueden presentar diversas situaciones relacionadas con eventos, en algunos de los cuales se cumple esta condición.</p> <p> Considere los eventos:</p> <p>C: que el sismo escogido haya tenido epicentro en la Región Chorotega. D: que la magnitud del sismo haya sido menor de 4 grados en la escala Richter.</p> <p>Analice los siguientes eventos y represéntelos gráficamente mediante diagramas de Venn:</p>																																		

		<p>a. $B \cap C$ b. $A \cap C$ c. $B \cap D$</p> <p>▲ Se sugiere aprovechar los resultados generados para favorecer el aprendizaje del concepto de eventos mutuamente excluyentes como aquellos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo, lo que equivale a que dicha relación genera el evento imposible.</p>
<p>Probabilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> Reglas básicas de las probabilidades: <p>- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A</p> <p>- Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0</p> <p>- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes</p> <ul style="list-style-type: none"> Otras Propiedades <p>- Probabilidad de la unión:</p> <p>$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$</p> <p>- Probabilidad del complemento:</p> <p>$P(A^c) = 1 - P(A)$</p>	<p>4. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.</p> <p>5. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.</p> <p>6. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados.</p> <p>7. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.</p>	<p>▲ Antes de iniciar el análisis sobre las reglas básicas de probabilidad es conveniente retomar el concepto de probabilidad de un evento tanto por la definición clásica (o laplaciana) como por medio de la aproximación por frecuencia relativa. Se puede plantear una situación similar a la siguiente:</p> <p> Se lanzan simultáneamente dos dados. Para la suma de los puntos de los dados:</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifique un evento seguro y su probabilidad. Identifique un evento imposible y su probabilidad. ¿Por qué se dice que la probabilidad de un evento es un valor entre el cero y el uno? <p>▲ Después de realizar el proceso de cierre se puede considerar la siguiente situación.</p> <p> Considere los eventos:</p> <p>A: Obtener un número primo B: Obtener un múltiplo de cuatro C: Obtener un múltiplo de tres</p> <ol style="list-style-type: none"> Compruebe que A y B son mutuamente excluyentes. Determine $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$. Determine el evento $A \cup B$ y calcule $P(A \cup B)$. ¿Se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$? Determine el evento $A \cup C$ y calcule $P(A \cup C)$. ¿Se cumple que $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$? ¿Qué se puede deducir de los resultados e y f? <p>▲ Con los resultados anteriores, es elemental proceder a formalizar los axiomas básicos de probabilidades que se han venido trabajando en los años previos. En realidad, el único resultado nuevo consiste en que la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples.</p> <p>▲ Para el logro de esta habilidad se puede continuar con el problema que se ha venido trabajando, por medio de las siguientes acciones:</p> <p> Resuelva lo siguiente:</p> <ol style="list-style-type: none"> Determine el evento $B \cap C$ y calcule $P(B \cap C)$. Relacione los términos $P(A \cup C)$, $P(B \cap C)$, $P(A)$ y $P(C)$. Determine los eventos $B \cup C$, $B \cap C$. Calcule $P(B \cup C)$ y $P(B \cap C)$. Relacione los términos $P(B \cup C)$, $P(B \cap C)$, $P(B)$ y

		<p>$P(C)$.</p> <p>f. Determine A^c, $P(A^c)$, B^c y $P(B^c)$.</p> <p>g. ¿Qué relación existe entre $P(A)$ y $P(A^c)$?</p> <p>h. ¿Qué relación existe entre $P(B)$ y $P(B^c)$?</p> <p>▲ Con las interrogantes anteriores se espera que las y los estudiantes puedan deducir que</p> $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ $P(A^c) = 1 - P(A)$ <p>así como que</p> $P(B^c) = 1 - P(B)$ <p>Se deben aprovechar los resultados para resumir las propiedades generales que se deducen.</p> <p>▲ Es adecuado introducir varios problemas con diferentes niveles de complejidad, para complementar el aprendizaje de las habilidades.</p> <p> Debido a que se menciona al matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), se debe aprovechar para efectuar una pequeña referencia histórica sobre los aportes de este matemático al campo de las <i>Probabilidades</i>. En este particular, Kolmogorov realizó una axiomatización de la teoría de probabilidades por medio de los siguientes axiomas:</p> <ol style="list-style-type: none"> Para cada suceso aleatorio B hay asociado un número no negativo $P(B)$ que se llama su probabilidad. $P(S) = 1$, donde S es el espacio muestral (evento cierto). Si los sucesos B_1, B_2, \dots, B_n son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces, $P(B_1 \cup B_2 \cup, \dots, \cup B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n)$ <p style="text-align: right;">Fuente: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf</p>
--	--	--

Recuadro N° 11

Número sugerido de lecciones:	16 (Etapa I: 4, Etapa II: 12)
-------------------------------	-------------------------------

Indicaciones y ejemplos

Un aspecto a tomar en cuenta es que el estudio de teoría de conjuntos se desarrollará en décimo año el área de Relaciones y álgebra de modo instrumental para precisar no sólo el estudio de funciones; sino también, para operacionalizar algunas propiedades de Probabilidad.

10° Año		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Conjuntos numéricos <ul style="list-style-type: none"> • Unión • Intersección • Pertenencia • Subconjunto • Complemento • Intervalos 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Analizar subconjuntos de los números reales. 2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto. 3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión. 4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos. 5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado. 	<p>▲ Utilizar subconjuntos finitos o infinitos de los números reales, en particular el conjunto de los números naturales \mathbb{N}, el de los números enteros \mathbb{Z}, los decimales \mathbb{D}, los racionales \mathbb{Q}, los irracionales \mathbb{I}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^- para los enteros positivos y los negativos respectivamente, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^- para los racionales positivos y los negativos respectivamente. Otros conjuntos de interés son el de los números pares, el de los impares y el de los números primos.</p> <p>▲ El análisis de subconjuntos contempla identificar, describir y caracterizar subconjuntos de los números reales. Lo que se busca es utilizar estos conocimientos como lenguaje para el tratamiento de funciones y ecuaciones.</p>

(MEP, 2012, página 406)

Es importante aclarar que no se quiere un estudio exhaustivo de operaciones con conjuntos y un enfoque abstracto de la probabilidad; sino más bien, sistematizar los conceptos y propiedades que han sido desarrolladas en años anteriores, incrementando el nivel de dificultad de los problemas planteados e incorporando nuevos asociados a los conceptos de un modo más sistemático.

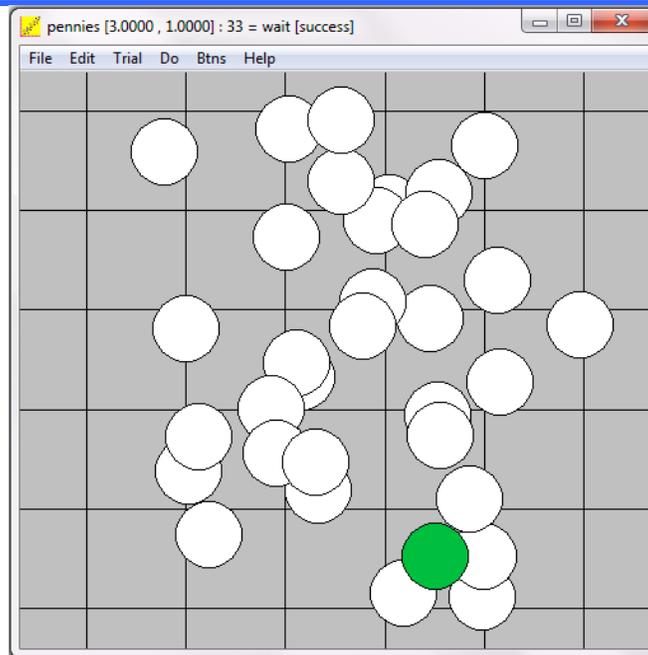
Por ejemplo, hay que tener presente que para octavo año se ajustaron y nivelaron las bases conceptuales de algunos conocimientos desarrollados en primaria: espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio, clasificación de eventos en simples o compuestos y en eventos seguros, probables e imposibles, eventos más probables, menos probables e igualmente probables, la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados, y algunas propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.

Para noveno año se introduce la definición empírica de probabilidad y su relación con la ley de los grandes números. A su vez, se identifica la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico y se estudian las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con evento seguro, probable e imposible y que también son válidas para la definición frecuencial.

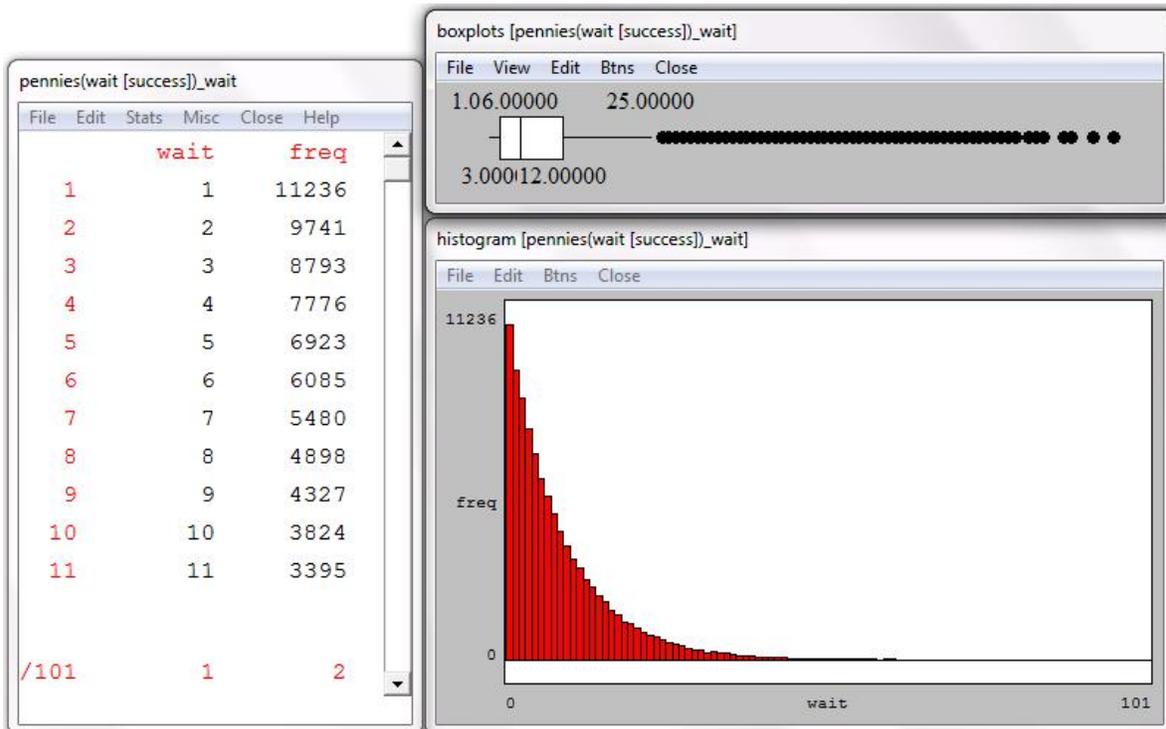
Es por esto que para desarrollar este grupo de habilidades se puede partir de un problema donde se involucren estos conocimientos previos, que se han venido desarrollando desde primaria, y los que se buscan aprender.

Asimismo, en el estudio de la Probabilidad es importante el uso de simulaciones ya sea con material concreto (monedas, datos, urna con esferas, entre otros) o también existen software y sitios web que de forma gratuita ponen a disposición de los docente diversas simulaciones de situaciones probabilísticas. Por ejemplo, en el software gratuito winstats.exe (descargable en <http://math.exeter.edu/rparris/winstats.html>) existen más de 20 simulaciones de situación probabilísticas que pueden desarrollarse en el aula (una computadora y video beam) o en un laboratorio de informática.

Una de las simulaciones es la de lanzar monedas de radio preestablecido (una por una) sobre una cuadrícula de lado preestablecido y considerar como "éxito" cuando la moneda no toca ninguna de las líneas (moneda verde). El experimento de lanzar una moneda se realizará hasta que haya un "éxito" y el software contabilizará la cantidad de lanzamientos que se tuvieron que "esperar".



En el caso de la imagen anterior el radio de la moneda es de 1 unidad y la cuadrícula tiene 3 unidades de lado, estos parámetros se pueden cambiar para generar nuevos problemas. Con esta simulación se pueden visualizar patrones de comportamiento ya que se tiene la ventaja de poder realizar más de 100 000 experimentos simultáneos y poder visualizar una tabla de frecuencias y diferentes formas gráficas de representación:



Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores

Luis Hernández Solís
Miguel González Ortega

Editor

Angel Ruiz

Editor gráfico

Miguel González

Revisores

Javier Barquero

Revisión filológica

Julián Ruiz

Director general del proyecto

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Décimo año*. San José, Costa Rica: autor.



Documento de integración de habilidades para Décimo año por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014) se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)