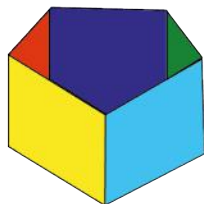


# Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



[www.reformamatematica.net](http://www.reformamatematica.net)



## Documento de integración de habilidades para Undécimo año

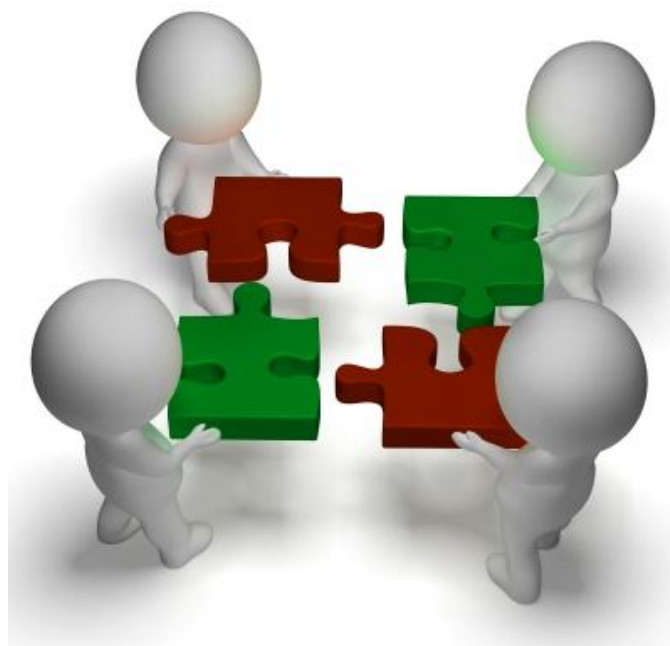


Imagen cortesía de Stuart Miles en Freedigitalphotos.net

**Costa Rica  
2014**

---

# Tabla de contenidos

<b>PRIMERA PARTE: ELEMENTOS PREVIOS .....</b>	<b>3</b>
<b>SEGUNDA PARTE: INTEGRACIÓN DE HABILIDADES .....</b>	<b>4</b>
RELACIONES Y ÁLGEBRA.....	4
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD .....	13
GEOMETRÍA .....	18
<b>CRÉDITOS .....</b>	<b>28</b>

---

## Primera parte: Elementos previos

A continuación se presenta la propuesta de distribución de las áreas para el Décimo año, que también será considerada en la segunda parte de este documento.

**Tabla 1. Distribución de áreas Matemáticas para Undécimo año según lo estipulado en los programas de estudio**

Nivel	Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Undécimo año	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad Geometría	Geometría

**Nota:**

- *Medidas y Números* es transversal en el Ciclo diversificado.

Aquí se ofrece un recuento aproximado del número de lecciones que supondría en este nivel el trabajo usando la estrategia sugerida de integración de habilidades por área mediante problemas.

**Tabla 2. Conteo de lecciones por área y periodo en el Undécimo año**

Undécimo año		
Primer Periodo	Segundo Periodo	Tercer Periodo
Relaciones y Álgebra 51	Estadística y Probabilidad 26  Geometría 20	Geometría 12
<b>Suma total de lecciones por periodo</b>		
<b>51</b>	<b>46</b>	<b>12</b>

# Segunda parte: Integración de habilidades

## Relaciones y Álgebra

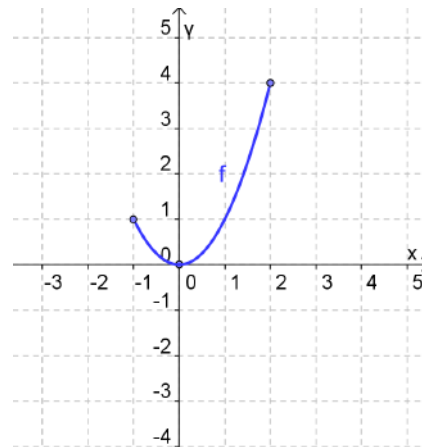
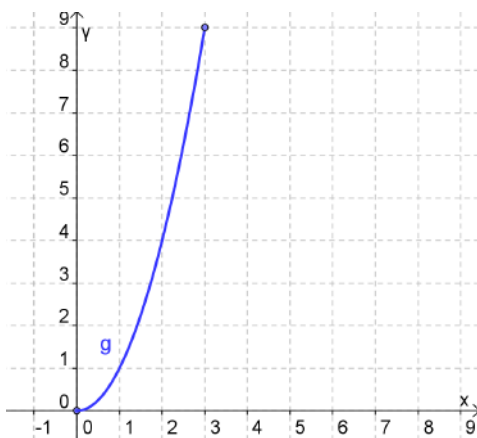
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<b>Funciones inversas</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Inversa de la función lineal</li> </ul>	1. Identificar las condiciones para que una función tenga inversa. 2. Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su inversa. 3. Determinar intervalos en los cuales una función representada gráficamente tiene inversa.	▲ Dada la gráfica de una función, que cada estudiante grafique su función inversa (si existe), tomando en cuenta que ambas son simétricas respecto a la recta con representación $y = x$ .

### Recuadro N° 1

**Número sugerido de lecciones:** 7 (Etapa I: 4, Etapa II: 3)

#### Indicaciones y ejemplos

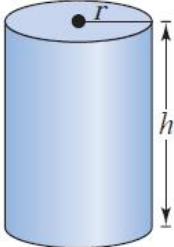

En vista de que estas tres habilidades hacen referencia al uso y análisis de la representación gráfica de una función (vistas durante el décimo año), se puede planificar una actividad que permita integrarlas. **Por ejemplo:** Dadas las siguientes gráficas (pueden ser más):




- Grafique para cada uno el conjunto de puntos  $(y,x)$  tal que  $(x,y) \in g$ . Proceda de la misma forma para  $(x,y) \in f$ .
- ¿Las gráficas construidas anteriormente corresponden a una función?. Justifique su respuesta

Durante la clausura se puede formalizar la noción de función inversa, qué condiciones debe tener una función para que tenga inversa y qué características presentan ambas si se grafican en un mismo plano cartesiano.

La utilización de software de geometría dinámica para restringir dominios puede apoyar bastante este proceso, graficando la función, construyendo los puntos  $(y,x)$  y analizando cuándo la gráfica construida corresponde a una función.

<p><b>Funciones inversas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Inversa de la función lineal</li> </ul>	<p>4. Determinar y graficar la función inversa de <math>f(x) = mx + b</math>, <math>m \neq 0</math>.</p>	<p>▲ Se puede plantear un problema en donde se observe la necesidad de estudiar la inversa de una función.</p> <p>☺ Una empresa quiere construir recipientes cilíndricos con volumen <math>V</math> y altura <math>h</math> conocidos, y quiere saber cuál es el radio de cada recipiente, para poder acomodarlos en cajas. El volumen de un cilindro de altura <math>h</math> dada es función del radio <math>r</math> del círculo de la base (o tapa), y está modelado por la ecuación <math>V(r) = \pi r^2 h</math>.</p>  <p>El problema consiste en expresar <math>r</math> como función del volumen <math>V</math>. En este caso la función <math>r(V)</math> es la inversa de la función <math>V(r)</math>.</p> <p>☺ La temperatura en grados Fahrenheit es función de la temperatura en grados Celsius y está modelada por la ecuación <math>F(C) = \frac{9}{5}C + 32</math>. Expresar <math>C</math> como función de <math>F</math>.</p>  <p><b>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</b></p> <p>▲ Para determinar la inversa de una función cuadrática hay que seleccionar el dominio que garantice la inyectividad, resolver una ecuación de segundo grado y seleccionar el signo de acuerdo al dominio seleccionado.</p> <p>La función <math>f(x) = x^2</math>, <math>x \in \mathbf{R}</math> no es inyectiva, pero si consideramos <math>x \geq 0</math> y el codominio como el ámbito, es decir <math>y \geq 0</math> entonces <math>f</math> tiene inversa. Su inversa es <math>g(x) = \sqrt{x}</math>. Cada estudiante podrá comprobar esto al hacer la composición</p> $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} =  x  = x$ <p>pues <math>x \geq 0</math>.</p>
---	--	--

		<p>▲ Al finalizar la actividad, defina el concepto de función inversa tomando como referencia lo desarrollado en la actividad anterior. Al estar utilizando como codominio el ámbito de la función entonces la condición para que <math>f : D_f \rightarrow R_f</math> tenga inversa es que <math>f</math> sea inyectiva, es decir,</p> $a, b \in D_f \text{ con } a \neq b \text{ entonces } f(a) \neq f(b).$ <p> Nótese la conexión con el área de <i>Geometría</i>.</p>
--	--	---


## Recuadro Nº 2

<b>Número sugerido de lecciones:</b> 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)
<p><b>Indicaciones y ejemplos</b></p> <p>El determinar la inversa de una función lineal es una procedimiento instrumental que puede ser comprendido fácilmente por el estudiante, además de que ya tiene experiencia en la elaboración de gráficas para este tipo de funciones.</p> <p>Es de vital importancia que se de un cierre de la etapa 1, donde con base en las habilidades precedentes se justifique la existencia de inversa y se formalice el procedimiento para obtenerla algebraicamente.</p>

<p><b>Funciones inversas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Función raíz cuadrada</li> </ul>	<p>5. Analizar gráfica y algebraicamente la función con criterio dado por</p> $f(x) = a\sqrt{x+b+c}.$	<p>▲ La gráfica de la función con criterio dado por <math>f(x) = a\sqrt{x+b+c}</math> se obtiene de la gráfica de <math>f_0(x) = \sqrt{x}</math> mediante transformaciones (traslaciones y homotecias).</p>
--	---	---

## Recuadro Nº 3

<b>Número sugerido de lecciones:</b> 4 (Etapa I: 2, Etapa II: 2)
<p><b>Indicaciones y ejemplos</b></p> <p>Esta habilidad se trabaja de forma independiente.</p> <p>Note que esta función no ha sido explícitamente trabajada, conviene encontrar la inversa de <math>\sqrt{x}</math> y luego trabajar con traslaciones horizontales, verticales y reflexiones, lo cual es un conocimiento previo del estudiante.</p>

<p><b>Funciones exponenciales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La función <math>a^x</math></li> <li>• Ecuaciones exponenciales</li> </ul>	<p>6. Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales.</p>	<p>▲ Para introducir el tema se sugiere proponer la siguiente situación:</p> <p> Federico hereda \$5 000 000. Desea depositar dicho dinero a plazos en un banco que paga un interés compuesto de un 6% y retirarlo hasta dentro de 10 años como una forma para solventar sus necesidades futuras. Aunque por lo general los bancos utilizan plazos anuales y semestrales, Federico quisiera saber cuánto ganaría al finalizar dicho periodo, si el dinero se capitalizará diariamente y compararlo con las ganancias obtenidas si se capitaliza anualmente.</p>
---	--	--

▲ Una vez abordado el problema se procede a precisar los conceptos y características de los conceptos concernientes a una función exponencial.

Se puede construir una tabla de valores para hacer una gráfica aproximada de una exponencial específica, y así familiarizar al estudiantado con algunas características de estas funciones.



Se recomienda usar calculadora científica para realizar los cálculos y software matemático para graficar funciones del tipo

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

▲ No es conveniente formalizar el concepto de asíntota, sino tratarlo de manera intuitiva como una recta que se aproxima arbitrariamente a la gráfica de la función (ver indicaciones metodológicas).

▲ El concepto de infinito no se introduce formalmente en este nivel educativo, sin embargo para la construcción y el estudio de gráficas se puede expresar de manera intuitiva su sentido.



La base más importante y conveniente para las funciones exponenciales es el número irracional  $e$ . El número  $e$  es conocido a veces como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo.

El número  $e$ , al igual que el número  $\pi$ , es un número trascendente, es decir que no puede ser obtenido directamente mediante la resolución de una ecuación algebraica. Su valor exacto no puede ser expresado como un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos.

Los números de la forma  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  se acercan al número  $e$  cuando  $n$  asume valores muy grandes. La siguiente tabla proporciona una idea de este acercamiento:

$n$	Valor aproximado de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$10^2$	2,70481382942
$10^4$	2,71814592683
$10^5$	2,71826823717
$10^{10}$	2,71828182832
$10^{12}$	2,71828182846

Su valor aproximado con 15 decimales es 2,718281828459045.



Es recomendable enfatizar la importante conexión que existe entre la función exponencial y la Economía, la Biología, la Física y otras ciencias, como los ejemplos que aparecen en las indicaciones metodológicas.

7.Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.

▲ Para la resolución de ecuaciones exponenciales, conviene repasar las leyes de potencias y utilizar la noción de inyectividad para la justificación del algoritmo que resuelve dichas ecuaciones.

	<p>▲ Las ecuaciones exponenciales se pueden expresar como <math>a^{f(x)} = a^{g(x)}</math>, donde <math>f</math> y <math>g</math> son funciones lineales o cuadráticas de <math>x</math>.</p>
8. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.	<p>▲ Para el desarrollo de esta habilidad no se debe pedir al grupo construir los modelos. Se trata de identificarlos y utilizarlos en el tratamiento de situaciones. Se propone el problema, se proporciona el modelo matemático (en forma algebraica, gráfica, tabular o verbal) y se solicita a cada estudiante resolverlo y analizarlo.</p> <p>▲ Al trabajar con representaciones gráficas, en varias ocasiones se utilizan datos numéricos pequeños para una de las variables y datos muy grandes para la otra variable. En tales casos se sugiere utilizar diferentes escalas en los ejes.</p>

### Recuadro N° 4


**Número sugerido de lecciones:** 8 (Etapa I: 4, Etapa II: 4)

#### Indicaciones y ejemplos

Se pueden trabajar las habilidades 6 y 8 en forma integrada. En efecto, una actividad semejante a la que se propone al inicio de las indicaciones puntuales permitirá al estudiante un acercamiento sobre cómo se desarrolla un proceso de modelización. Se puede trabajar con dos modelos uno creciente y el otro decreciente para que el cierre sea más natural (cada caso lo resuelven diferentes sub grupos).

Al realizar la clausura de la actividad el docente enfatiza a sus estudiantes en que el modelo desarrollado por ellos corresponde a un nuevo tipo de función denominado exponencial y luego brinda ejemplos de otras situaciones que suelen modelarse con este tipo de función. Como lo que interesa es trabajar con modelos (no crearlos) esto da pie para justificar y elaborar nuevas actividades que permitan introducir el concepto de ecuación exponencial a través de los modelos estudiados.

**Nota:** para las ecuaciones es necesario justificar utilizando la inyectividad de la función y realizar por medio de la pregunta dirigida un repaso de factorización y leyes de potencias.

<p><b>Funciones logarítmicas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La función <math>\log_a x</math></li> </ul>	<p>9. Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.</p> <p>10. Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.</p>	<p>▲ Para introducir el tema, conviene usar un problema en el que surja de forma natural la función logarítmica.</p> <p> Laura Marcela deposita 225 000 colones en su cuenta de ahorros en un banco y al final de <math>t</math> años recibe una notificación del banco indicando que en su cuenta tiene 375 000 colones. Si la tasa de interés es de un 6% compuesta mensualmente y si ella no hizo un nuevo depósito ni retiro durante esos años, ¿cuántos años han transcurrido desde el depósito hasta la notificación del banco?</p> <p>En este problema es importante proporcionar el modelo</p> $C(t) = C_0 \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^t$ <p>y a partir de él justificar la necesidad de introducir la función</p>
---	---	--



logarítmica.

▲ Durante la etapa de cierre introduzca la función logaritmo como inversa de la exponencial. Utilice la composición de funciones para justificar esta propiedad.

Cada estudiante debe saber que si  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , entonces  $\log_a y = x$  si y sólo si  $y = a^x$ . Por lo tanto  $\log_a y$ ,  $y > 0$  es el número al que se debe elevar la base  $a$  para obtener  $y$ .

▲ Cambiar de la forma exponencial a la forma logarítmica y de la logarítmica a la exponencial.



Se recomienda usar software matemático para visualizar la relación entre las gráficas de la función exponencial y la logarítmica. El uso de tablas también favorecerá la comprensión de la relación entre ambas funciones.

$x$	$3^x$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

En la tabla anterior, la segunda columna contiene las potencias con base 3 de los números que aparecen en la primera columna, mientras que en la primera columna aparecen los logaritmos en base 3 de los números que aparecen en la segunda columna, es decir,

$x$	$\log_3 x$
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Esto se observa mejor si unimos las dos tablas.

$x$	$3^x$	$\log_3 3^x$
0	1	0
1	3	1
2	9	2
3	27	3
4	81	4
5	243	5



Comparta aspectos del desarrollo histórico de los logaritmos. La historia de la escala logarítmica conecta *Relaciones y Álgebra* con *Medidas*.

## Recuadro N° 5

**Número sugerido de lecciones:** 7 (Etapa I: 3, Etapa II: 4)

### Indicaciones y ejemplos

Se puede seguir la sugerencia dada para la función exponencial y proponer una situación creciente y una decreciente para no forzar el cierre de los casos de este tipo de función.

La justificación de que corresponde a la inversa de la función exponencial se puede lograr con una serie de preguntas generadoras con base en sus conocimientos y habilidades previas.

<p><b>Funciones logarítmicas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La función <math>\log_a x</math></li> </ul>	<p>11. Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar expresiones algebraicas.</p>	<p>▲ Las propiedades son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Logaritmo de la unidad.</li> <li>Logaritmo de la base.</li> <li>Logaritmo de una expresión en notación exponencial.</li> <li>Logaritmo de una multiplicación.</li> <li>Logaritmo de una división.</li> <li>Cambio de base.</li> </ol> <p>Destáquese la deducción de las propiedades de logaritmos a partir de las propiedades de las exponenciales.</p>
---	--	--

## Recuadro N° 6

**Número sugerido de lecciones:** 6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)

### Indicaciones y ejemplos

Esta habilidad se trabajará de forma independiente. El dominio instrumental de estas propiedades es importante para la resolución de ecuaciones y la comprensión y análisis de modelos exponenciales y logarítmicos.

Conviene propiciar en el estudiante una comprensión relacional deduciendo cada una de las propiedades (esto correspondería a la Etapa I).

<p><b>Funciones logarítmicas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La función <math>\log_a x</math></li> <li>Ecuaciones logarítmicas</li> </ul>	<p>12. Resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones logarítmicas.</p>	<p>▲ Utilizar ecuaciones de la forma</p> $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ <p>donde <math>f</math> y <math>g</math> son funciones lineales o cuadráticas de <math>x</math>.</p> <p>▲ Use la noción de inyectividad de la función logaritmo para la justificación del algoritmo que permite resolver dichas ecuaciones.</p>
	<p>13. Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales de la forma <math>a^{f(x)} = b^{g(x)}</math>, <math>a, b</math> números reales positivos y distintos de 1, <math>f, g</math> polinomios de grado menor que 3.</p>	
	<p>14. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.</p>	<p>▲ Para el desarrollo de esta habilidad no se busca construir los modelos. Se trata de identificarlos y usarlos. Se propone el problema, se da el modelo matemático (en forma algebraica, gráfica, tabular o verbal) y se pide resolverlo, interpretarlo y analizarlo.</p> <p>▲ Se debe discutir cuál es el sentido del resultado en cada problema planteado.</p>

## Recuadro N° 7

**Número sugerido de lecciones:** 9 (Etapa I: 3, Etapa II: 6)

### Indicaciones y ejemplos

Se pueden utilizar situaciones que se modelizan mediante funciones logarítmicas y exponenciales para introducir:

- el uso de ecuaciones logarítmicas.
- el uso de propiedades de logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales.

A continuación un ejemplo que permitiría introducir el uso de ecuaciones logarítmicas:

La relación de Ehrenberg está dada por

$$\ln W = \ln 2,4 + 1,84h$$

Esta fórmula empírica relaciona la estatura  $h$  en metros con el peso promedio  $W$  para niños entre 5 y 13 años. Determine el peso promedio de un niño de 8 años que mide 1,4 m.

La idea es que los estudiantes vean en las ecuaciones una herramienta útil para el análisis de modelos matemáticos.

Se debe notar que el estudiante va a aprender dos tipos de ecuaciones logarítmicas aquellas que involucran logaritmos que se pueden reducir de la forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

y las exponenciales de la forma

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

$a, b$  números reales positivos y distintos de 1 y esto dentro de un contexto de identificación y aplicación de modelos.

<p><b>Funciones y modelización</b></p>	<p>15. Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.</p> <p>16. Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada.</p>	<p>▲ Esta sección articula el estudio de funciones que permea todo el currículo desde la enseñanza Primaria. Lo que se busca es una integración de las diferentes funciones estudiadas con el propósito de identificar y usar modelos matemáticos de situaciones reales.</p> <p>▲ Se sugiere que la o el docente proponga un problema en forma verbal o tabular y que cada estudiante interprete la información, la sistematice y establezca relaciones relevantes del problema para determinar el modelo que mejor refleje la situación. Además cada estudiante debe resolver el problema, analizar los resultados y verificar la factibilidad del modelo.</p> <p>▲ Es importante que sean utilizadas cada una de las funciones estudiadas para alguna modelización de la situación dada: lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial.</p>
--	---	--

## Recuadro N° 8

<b>Número sugerido de lecciones:</b>	6 (Etapa I: 2, Etapa II: 4)
--------------------------------------	-----------------------------



### **Indicaciones y ejemplos**


Estas habilidades representan un recuento de los tipos de funciones vistas durante el ciclo y los estudiantes ya han tenido la oportunidad de trabajar problemas o situaciones que utilizaban dichos modelos.

El uso de tecnología es vital para modelizar un conjunto de datos dados y analizar el tipo de función que permite dar respuesta a la situación planteada.

También conviene que el docente incluya problemas variados que se plantean y resuelven utilizando las funciones estudiadas.

# Estadística y Probabilidad

Estadística																																																																																																																													
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales																																																																																																																											
<b>Medidas de variabilidad</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Recorrido</li> <li>Recorrido intercuartílico</li> <li>Variancia</li> <li>Desviación estándar</li> </ul> <b>Representación gráfica</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Diagrama de cajas</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.</li> <li>Reconocer la importancia de la variabilidad de los datos dentro de los análisis estadísticos y la necesidad de cuantificarla.</li> <li>Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.</li> <li>Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.</li> <li>Emplear la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad.</li> <li>Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de variabilidad.</li> </ol>	<p>▲ Para favorecer una mejor comprensión de la variabilidad de los datos, se han definido algunas medidas estadísticas que permiten cuantificar su magnitud. Para valorar la importancia de estas técnicas es conveniente plantear problemas en los cuales se requiera realizar análisis comparativos entre dos o más grupos de datos.</p> <p> En la página <a href="http://www.meteored.com/">http://www.meteored.com/</a> se proyecta la temperatura máxima y mínima en diferentes ciudades del mundo. Para 12 días del mes de marzo del 2010, en la ciudad de Nicoya se proyectaron las siguientes temperaturas máximas en grados centígrados:</p> <table border="1" data-bbox="906 688 1295 743"> <tr> <td>36</td><td>35</td><td>35</td><td>35</td><td>34</td><td>34</td> </tr> <tr> <td>35</td><td>37</td><td>31</td><td>32</td><td>32</td><td>32</td> </tr> </table> <p>mientras que en San José para los mismos días las temperaturas máximas proyectadas fueron:</p> <table border="1" data-bbox="906 852 1295 907"> <tr> <td>27</td><td>28</td><td>27</td><td>25</td><td>29</td><td>25</td> </tr> <tr> <td>26</td><td>25</td><td>22</td><td>22</td><td>21</td><td>22</td> </tr> </table> <p>Realice un análisis estadístico con la información anterior, para comparar las temperaturas de las dos ciudades de acuerdo con esas muestras. ¿En cuál de las ciudades la temperatura es más variable?</p> <p>▲ Se puede iniciar con el empleo del recorrido y el recorrido intercuartílico, e incluso recurrir a la elaboración de un diagrama de cajas.</p> <p>▲ Posteriormente, se puede aprovechar el ejercicio para introducir el cálculo de la variancia y la desviación estándar, como medidas que tienen la virtud de utilizar todos los datos para su cálculo, considerando las diferencias entre cada dato con la media aritmética. Por lo complejo de estas medidas, se requiere definir los conceptos y además plantear interrogantes cuyas respuestas permitan valorar la importancia de estas medidas.</p> <p> Para agilizar los cálculos, tanto en los cuartiles como en la variancia y la desviación estándar se debe promover el uso de una calculadora que tenga funciones estadísticas, o bien de una computadora mediante una hoja de cálculo o de un programa especializado.</p> <table border="1" data-bbox="750 1591 1468 1877"> <thead> <tr> <th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>Edad</td><td>Peso</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>38</td><td>61</td><td></td><td></td><td>Varianza</td><td></td><td>=VAR(A3:A10)</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>46</td><td>55</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>VAR(number1; [number2];</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>29</td><td>79,1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>38</td><td>70,7</td><td></td><td></td><td>Desviación Estándar</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>46</td><td>70,8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>44</td><td>55,9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>63</td><td>72,2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>56</td><td>75,1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	36	35	35	35	34	34	35	37	31	32	32	32	27	28	27	25	29	25	26	25	22	22	21	22		A	B	C	D	E	F	G	H	1									2	Edad	Peso							3	38	61			Varianza		=VAR(A3:A10)		4	46	55					VAR(number1; [number2];		5	29	79,1							6	38	70,7			Desviación Estándar				7	46	70,8							8	44	55,9							9	63	72,2							10	56	75,1						
36	35	35	35	34	34																																																																																																																								
35	37	31	32	32	32																																																																																																																								
27	28	27	25	29	25																																																																																																																								
26	25	22	22	21	22																																																																																																																								
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																																																																					
1																																																																																																																													
2	Edad	Peso																																																																																																																											
3	38	61			Varianza		=VAR(A3:A10)																																																																																																																						
4	46	55					VAR(number1; [number2];																																																																																																																						
5	29	79,1																																																																																																																											
6	38	70,7			Desviación Estándar																																																																																																																								
7	46	70,8																																																																																																																											
8	44	55,9																																																																																																																											
9	63	72,2																																																																																																																											
10	56	75,1																																																																																																																											

		 <p>Se debe evidenciar la importancia de las medidas estadísticas tanto de posición como de variabilidad para representar características propias de los datos. Éstas se complementan con las representaciones tabulares y gráficas como estrategias para resumir la información que comunican los datos, para tener elementos suficientes que permitan argumentar sobre un problema particular.</p>
--	--	---

## Recuadro N° 9

<b>Número sugerido de lecciones:</b>	14 (Etapa I: 5, Etapa II: 9)
--------------------------------------	------------------------------

### Indicaciones y ejemplos

Desde la educación primaria se trabaja de forma intuitiva el concepto de variabilidad, por ejemplo en la siguiente imagen se muestra un problema planteado en los programas de estudio (MEP, 2012, página 152) para segundo grado:



Considere la siguiente imagen.



Imagen con derechos adquiridos por el MEP

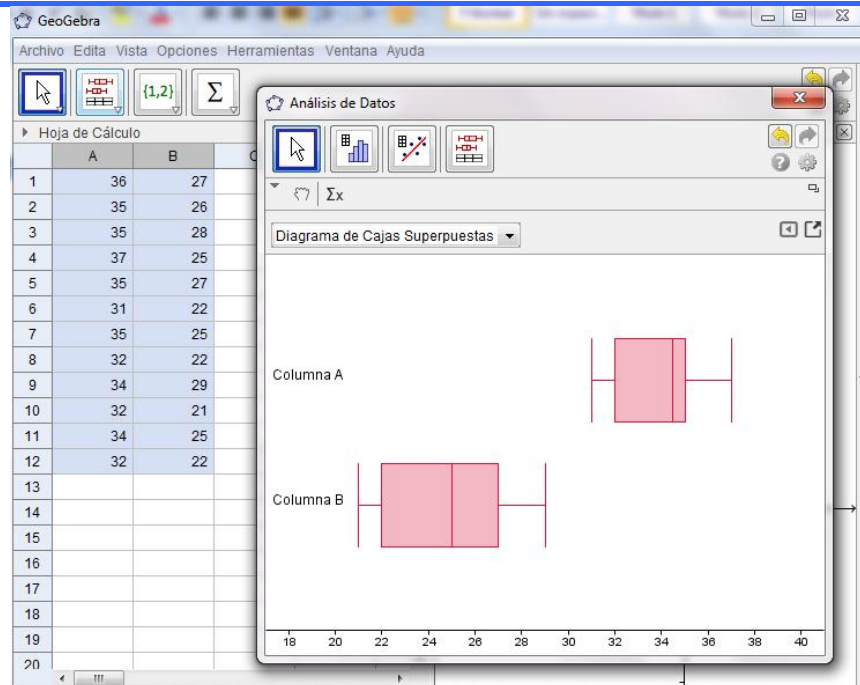
a. ¿Qué características o elementos son variables o diferentes entre estos seis niños y niñas?  
 b. ¿Qué elementos tienen en común?

Ya para cuarto grado se introduce una de las medidas de variabilidad, *el recorrido*. Para tercer ciclo, el recorrido se trabaja como una medida estadística de resumen, al igual que la moda, media aritmética, máximo, mínimo; con el objetivo de caracterizar un grupo de datos.

Por lo tanto, es importante apoyarse de los aprendizajes construidos en años anteriores para introducir otras medidas de variabilidad como el recorrido intercuartílico, la variancia y la desviación estándar. Es importante subrayar que la importancia de estas medidas no radica en su cómputo sino en su interpretación; es por esto que para su cálculo se puede utilizar algún tipo de calculadora científica, software especializado u hoja de cálculo. Es por esto que hay que dedicarle mayor tiempo a la interpretación de estas medidas que al cálculo de las mismas.

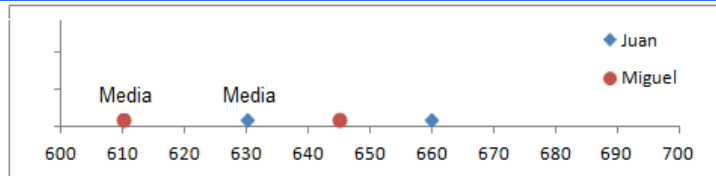
También, en este grupo de habilidades se introduce una nueva representación gráfica, el *diagrama de cajas*, muy útil para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos. Para la construcción de este tipo de representaciones se puede utilizar una hoja de cálculo o como se muestra a continuación el software libre GeoGebra.

Tomando en cuenta los datos del problema planteado en las indicaciones puntuales para undécimo año (MEP, 2012, página 438) referente a las temperaturas máxima y mínima para 12 días del mes de marzo del 2010, en la ciudad de Nicoya (columna A) y la ciudad de San José (columna B) se puede construir los diagramas de cajas respectivos:



La construcción de estos diagramas no es el principal objetivo del problema, lo que se quiere es realizar un análisis estadístico para comparar las temperaturas de las dos ciudades de acuerdo con esa muestra, y así poder responder ¿En cuál de las ciudades la temperatura es más variable? Es por esto que el uso de la tecnología es sustancial y útil para agilizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y así poder brindar más tiempo para la exploración, la conjetura y la interpretación.

<p><b>Medidas relativas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Posición relativa: estandarización</li> <li>• Variabilidad relativa</li> <li>- El coeficiente de variación</li> </ul>	<p>7. Reconocer la importancia de emplear medidas relativas al comparar la posición o la variabilidad entre dos o más grupos de datos.</p> <p>8. Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.</p>	<p>▲ No siempre las medidas absolutas permiten, tanto en posición como en variabilidad, realizar comparaciones de una manera eficiente. Por ello se deben plantear problemas que permitan determinar las limitaciones que tienen las medidas absolutas y la necesidad de buscar medidas relativas. Las siguientes situaciones son ejemplos que pueden orientar:</p> <p>😊 Dos hermanos discuten sobre quién obtuvo un mejor rendimiento en el examen de admisión a una universidad. Juan realizó el examen en el 2009 y obtuvo una calificación de 660, mientras que Miguel obtuvo 645 en el 2011, ambos en una escala de 800 puntos. Juan indica que no hay nada que discutir pues su calificación es más alta. Pero Miguel le indica que aunque eso es cierto, en el 2009 la calificación media fue de 630 con una desviación estándar de 30 puntos, mientras que en el 2011 la calificación media fue de 610 con una desviación estándar de 25 puntos. Por ello Miguel dice que fue él quien obtuvo un mejor rendimiento. ¿Quién cree que tiene la razón? ¿Por qué?</p> <p>▲ En este tipo de problemas se demuestra que el valor que toma un dato particular es muy relativo al momento de comparar con los datos de otro grupo. Seguidamente se representa en el eje coordenado la situación posicional de cada uno de los jóvenes.</p>
--	---	--



La discusión se centra en identificar cuál calificación se aleja positivamente más del promedio, pero para ello se requiere considerar la variabilidad presente en las notas de cada uno de los años, por lo que el análisis se debe realizar con la posición relativa que se obtiene dividiendo la diferencia obtenida entre la nota y la media entre la desviación estándar:

$$\text{Nota relativa de Juan: } \frac{660-630}{30} = 1,0$$

$$\text{Nota relativa de Miguel: } \frac{645-610}{25} = 1,4$$

De acuerdo con estos datos la posición relativa de Miguel es superior a la de Juan, por lo que si se compara la nota de cada uno de ellos con respecto a todo el estudiantado que realizó el examen en cada uno de los años, la nota de Miguel fue superior. Se debe aclarar que el supuesto básico para realizar este análisis es que la forma de la distribución de las calificaciones sea similar en ambos años.



Un zoólogo tiene como propósito recabar información para determinar el estado en que se encuentran los animales de un refugio de vida silvestre. Para ello espera que no exista mucha variabilidad entre los pesos de los animales adultos. Selecciona una muestra aleatoria de 10 jaguares machos y una muestra aleatoria de 10 tepezcuintes machos. Los pesos en kilogramos son:

Jaguar	80	66	72	76	76
Tepezcuinte	4,5	6,4	7,0	7,7	6,6

Jaguar	70	65	68	69	77
Tepezcuinte	7,5	8,1	6,3	7,7	6,9




Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

¿Para qué animal los pesos mostrados son relativamente más variables? ¿Qué aspectos se deben considerar para realizar este análisis?

▲ En este problema, la primera alternativa consiste en considerar la variación absoluta, lo cual significaría que los pesos de los jaguares son más variables. Si éste fuera el caso, se debe cuestionar que los jaguares pesan más que los tepezcuintes, por lo que se debe realizar una comparación relativa. La medida que



		<p>corresponde para realizar este análisis se denomina coeficiente de variación, y consiste en determinar la razón entre la desviación estándar y el promedio.</p> <p>Coeficiente de variación = <math>\frac{Desv.est.}{Media\ aritmética} \cdot 100</math></p> <p>Al utilizar esta medida se puede verificar que, en términos relativos, son más variables los pesos de los tepezcuintes.</p> <p> Aunque no sea de manera directa, el incorporar en los problemas elementos de flora y fauna del país permite no sólo conocer especies propias sino también sensibilizar sobre la importancia de la conservación, por lo que se promueve el eje transversal <i>Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible</i>.</p>
--	--	---

### Recuadro N° 10

Número sugerido de lecciones:	12 (Etapa I: 4, Etapa II: 8)
-------------------------------	------------------------------


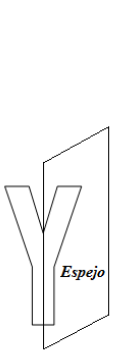
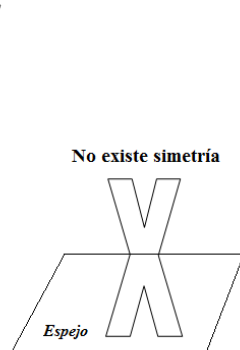
#### Indicaciones y ejemplos

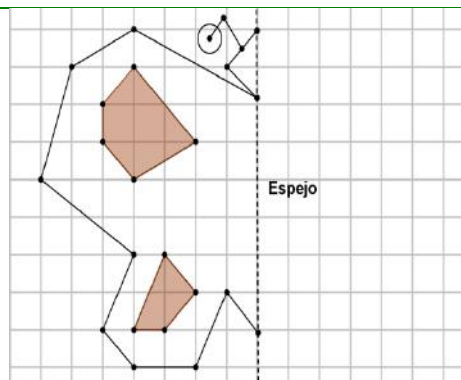
Hasta ahora se ha estudiado las medidas de posición y variabilidad de una muestra, y también para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos. Sin embargo, en este último caso, no siempre se pueden comparar dos muestras, ya que puede haber problemas con la dimensionalidad de las variables o una diferencia enorme entre las medias de ambas.

Partiendo de esta situación, este grupo de habilidades se debe introducir de manera integral mediante un problema que evidencie la necesidad de trabajar con medidas relativas, debido a las limitaciones que presentan las medidas absolutas para su abordaje.

Hay que tener presente que el coeficiente de variación soluciona la dimensionalidad de las variables y toma en cuenta la proporción existente entre medias y desviación estándar. No obstante, es importante destacar que los coeficientes de variación sirven para comparar las variabilidades de dos conjuntos de valores (muestras o poblaciones), mientras que si se desea comparar a dos individuos de cada uno de esos conjuntos, es necesario estandarizarlos.

# Geometría

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p><b>Geometría analítica</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Simetría axial</li> <li>• Imagen</li> <li>• Preimagen</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Determinar ejes de simetría en figuras simétricas.</li> <li>2. Identificar <i>elementos homólogos</i> en figuras que presentan <i>simetría axial</i>.</li> <li>3. Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano.</li> <li>4. Resolver problemas relacionados con la simetría axial.</li> </ol>	<p>▲ Se puede introducir el tema de forma intuitiva, con diferentes estrategias. Una de ellas es llevando a la clase diferentes imágenes y realizando dobleces de papel, para observar si coinciden todos los elementos.</p> <div style="text-align: center;">  <p><b>Doblez</b></p> </div> <p style="text-align: center;"><b>Imagen con derechos adquiridos por el MEP.</b></p> <p>Otra estrategia sería utilizar un espejo para mostrar la simetría de una figura, por ejemplo con la letra mayúscula Y:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>Existe simetría</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>No existe simetría</b></p> </div> </div> <p>▲ Otro tipo de actividad puede ser la siguiente:</p> <p>Si la línea punteada es un espejo, reflejar la imagen de la izquierda al lado derecho.</p>



Luego se pueden plantear las siguientes interrogantes:

- ¿Qué figura se forma?
- ¿Qué características encuentra en la figura?
- ¿Qué elementos homólogos hay entre el lado derecho y el izquierdo?
- ¿En la realidad la mariposa cumple con estas características?
- ¿Qué otras figuras tienen simetría?

Tome un punto cualquiera como origen de coordenadas. Escriba las coordenadas de los puntos marcados en la figura y diga cuáles son las coordenadas de los puntos homólogos correspondientes.

▲ La última parte de la actividad tiene muchas posibilidades, debe permitirse que cada estudiante escoja el punto que quiera.

▲ Lo que se quiere es que poco a poco se vaya construyendo el concepto de simetría y luego el de simetría axial, así como los conceptos de eje de simetría, preimagen e imagen, entre otros.

▲ Después de utilizar papel cuadriculado puede utilizar el sistema de coordenadas para profundizar la comprensión del concepto de simetría.



La simetría está muy ligada al arte y a la belleza de la naturaleza, es por esto que los ejercicios deben utilizar imágenes que motiven y fortalezcan la actitud de respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

## Recuadro N° 11


**Número sugerido de lecciones:** 8 (Etapa I: 3, Etapa II: 5)

### Indicaciones y ejemplos

La idea no es trabajar cada habilidad por separado. Con un problema apropiado se puede introducir de forma intuitiva la noción de simetría axial y precisar varios conceptos como ejes de simetría y elementos homólogos mediante preguntas generadoras.

Hay que recordar que en cuarto y sexto año de primaria se trabajó el tema de simetría, por lo que no debería ser totalmente nuevo para el estudiante, debería tener algunas nociones intuitivas.

En cuarto año se manipuló material concreto y luego en sexto año se trabajó el reconocimiento de figuras simétricas con un mayor nivel de complejidad, la reproducción de figuras simétricas y el trazado de figuras simétricas con características dadas. Por ejemplo, esta es una parte de la malla curricular de cuarto año:

<p><b>Simetría</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Figura simétrica</li> <li>• Eje de simetría</li> <li>• Puntos homólogos</li> <li>• Distancia de un punto al eje de simetría</li> </ul>	<p>22. Identificar los ejes de simetría de una figura.</p> <p>23. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta.</p> <p>24. Trazar una figura simétrica a otra respecto a una recta.</p> <p>25. Estimar la distancia de un punto al eje de simetría.</p>	<p>😊 Se puede presentar un dibujo como el siguiente y pedir a las y los estudiantes que coloreen las partes que faltan por colorear y que den una explicación de por qué utilizaron esos colores. Esto permitirá introducir el concepto de figura simétrica, eje de simetría y puntos homólogos.</p>  <p>Imagen con derechos adquiridos por el MEP</p> <p>⚙️ El proceso <i>Comunicar</i> se activa cuando se pide que se explique el porqué de los colores utilizados.</p> <p>▲ Manipulación con papel: con la mitad de una figura, por ejemplo una mariposa, se dobla y se dibuja la segunda mitad por transparencia. Se buscan puntos homólogos en las dos mitades simétricas.</p>
--	---	--

(MEP, 2012, p. 204)

Para introducir este tema se puede utilizar material concreto (papel cuadriculado, fotografías, etc.) y en las instituciones donde sea posible, es muy valioso observar la relación de la simetría con la naturaleza.



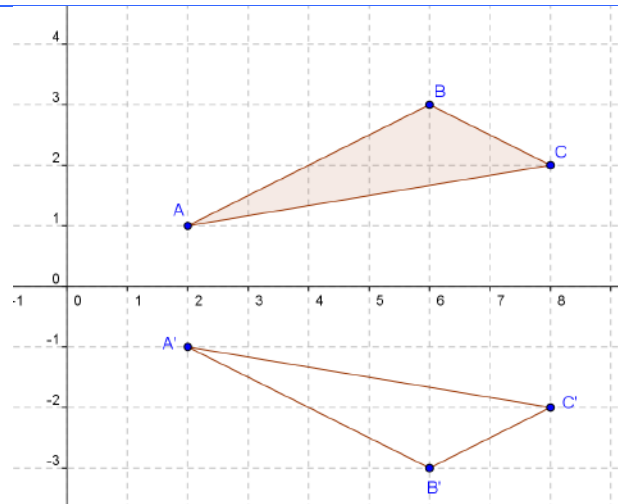
Imágenes con derechos adquirido por el MEP

También, la arquitectura y el arte pueden ayudar a potenciar este tema:



Imágenes con derechos adquirido por el MEP

<p><b>Transformaciones en el plano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslaciones</li> <li>• Reflexiones</li> <li>• Homotecias</li> <li>• Rotaciones</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas.</li> <li>6. Identificar elementos de las figuras geométricas que aparecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones.</li> <li>7. Trazar la imagen reflejada de una figura dada con respecto a una recta.</li> <li>8. Trazar la imagen de una figura dada si se la somete a una rotación.</li> <li>9. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter una figura a una traslación, rotación u homotecia o combinaciones de ellas.</li> <li>10. Determinar el punto imagen de puntos dados mediante una transformación.</li> <li>11. Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano.</li> </ol>	<p>▲ Para iniciar con el tema de transformaciones en el plano se puede plantear el siguiente problema:</p> <p>😊 De acuerdo con los siguientes triángulos, ¿cuál es el “movimiento” que sufre el triángulo ABC? Utilice indicaciones como unidades a la derecha, izquierda, arriba, abajo.</p> <p>Aquí no se está trabajando con coordenadas pues lo que se quiere es observar la traslación primero intuitivamente (“2 lugares hacia abajo y 4 lugares hacia la derecha”), luego se formulan problemas utilizando coordenadas.</p> <p>Para el caso de reflexiones es importante hacer una conexión con las habilidades relacionadas con la simetría axial (tema que ya se abordó anteriormente); por ejemplo, dado el triángulo ABC y el eje de las abscisas como “espejo” se obtiene el triángulo A'B'C'.</p>
--	--	--



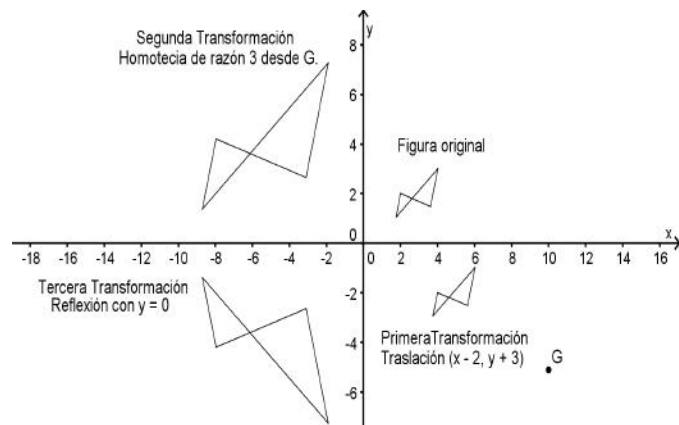
Es importante notar y discutir lo siguiente:

$$\begin{aligned} &A(2,1) \text{ y } A'(2,-1) \\ &B(6,3) \text{ y } B'(6,-3) \\ &C(8,2) \text{ y } C'(8,-2). \end{aligned}$$

Luego se realiza la etapa de cierre definiendo los conceptos de traslación y reflexión en el plano coordenado de manera formal.


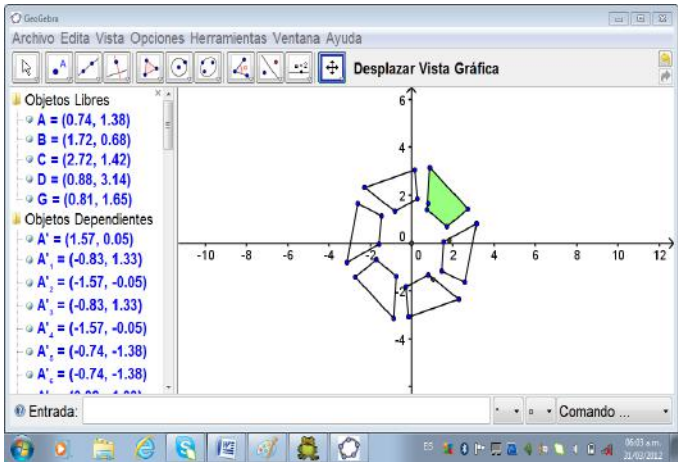



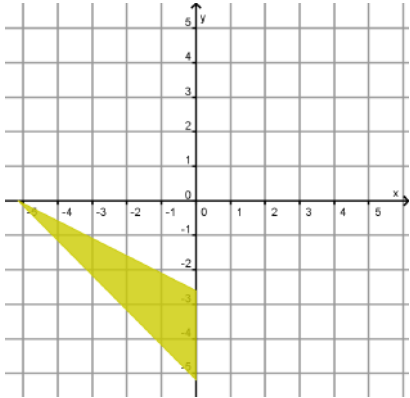
▲ En 8º Año se trabajó con la homotecia de un punto y una figura poligonal. En este año se busca seguir resolviendo ejercicios de este tema y complementarlo con las demás transformaciones. Por ejemplo, dada la figura ABCD y el punto E(8,-4) realice las siguientes transformaciones secuencialmente:

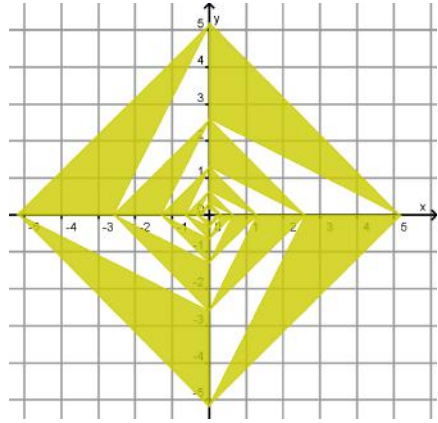


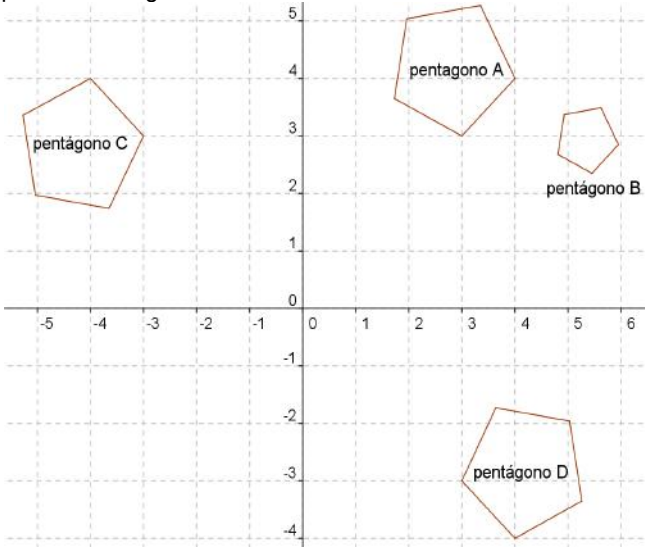
- Traslación  $(x - 2, y + 3)$ .
- A la figura obtenida en a., realice una homotecia de razón 3 desde el punto G(10,-5).
- A la figura obtenida en b. reflejarla con respecto a  $y = 0$ .



▲ Se utilizará la notación  $g(A)=A'$  para indicar la imagen de un punto A bajo una transformación g. Por ejemplo, para el caso de la traslación del ejemplo anterior, la imagen de  $A(x, y)$  es  $A'(x - 2, y + 3)$ .



		<p> Se pueden también plantear varios problemas en los cuales se necesita involucrar el "sentido dinámico" de las transformaciones. Para su resolución se puede utilizar la computadora y un software idóneo que permita realizar diferentes transformaciones. Gracias a este software se logrará la manipulación dinámica de la figura dada, generando cambios también en la figura resultante de la transformación.</p> <p>El uso de coordenadas permite profundizar en estos conceptos. Por ejemplo, el tema de rotaciones de figuras es recomendable explorarlo con un software dinámico.</p>  <p> Se debe enfatizar que las transformaciones aplicadas sobre las figuras son simplemente una forma de representación a conveniencia de las mismas formas geométricas.</p> <p> Una breve descripción sobre las geometrías no euclidianas puede proporcionar una idea apropiada de lo que es una teoría matemática.</p>
	<p>12. Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias y reflexiones.</p>	<p> El software permite la manipulación dinámica de una figura dada, se puede "jugar" con las transformaciones para crear figuras. Por ejemplo, a partir de la figura A, construir a través de transformaciones la figura B.</p> <p><b>Figura A</b></p> 

		<p><b>Figura B</b></p> 
	<p>13. Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.</p>	<p>  Se sugiere plantear un procedimiento inverso. En lugar de indicar que se realice una determinada transformación en una figura determinada, se puede presentar una serie de imágenes con varias transformaciones de la figura, y se pide plantear un problema que tenga como solución esas transformaciones.         </p> <p>  Por ejemplo, los siguientes pentágonos son regulares; plantear un ejercicio que tenga como solución la siguiente representación gráfica:         </p>  <p>Existen varios posibles ejercicios que tienen como solución la anterior imagen, por ejemplo se podría proponer lo siguiente:</p> <p>Primero, dado el pentágono A realice una homotecia de razón <math>\frac{1}{2}</math> y llámelo pentágono B.</p> <p>Luego, al pentágono C refléjelo con respecto a la recta <math>y = x</math> y llámelo pentágono D.</p>



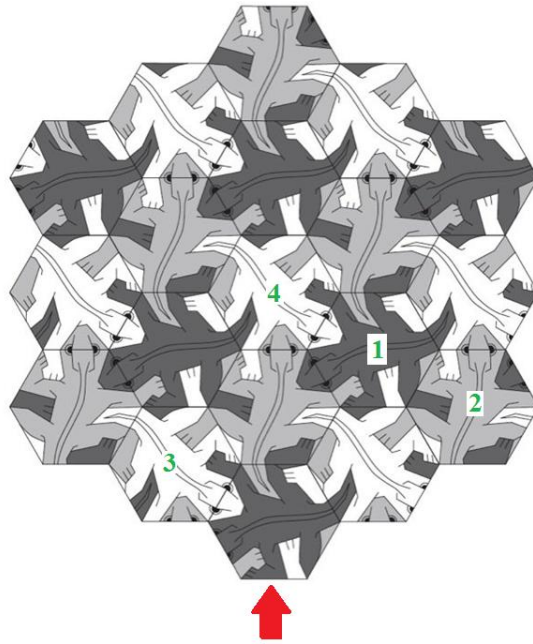
## Recuadro N° 12

**Número sugerido de lecciones:** 16 (Etapa I: 6, Etapa II: 10)

### Indicaciones y ejemplos

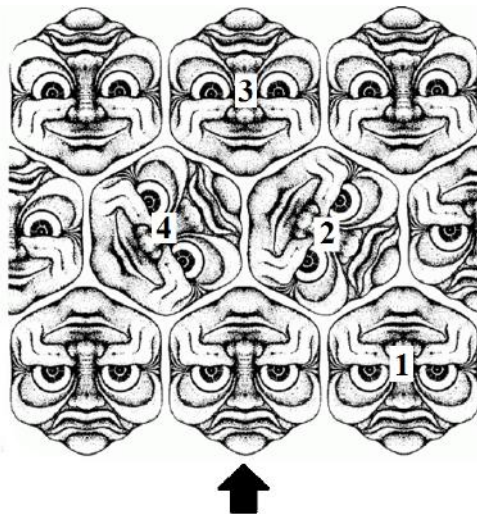
Es recomendable introducir todas las transformaciones de forma conjunta y a un nivel intuitivo, para luego ir definiéndolas una por una. El siguiente problema ejemplifica lo anterior:

Tome el mosaico de cocodrilos de la imagen y realice lo siguiente



Si el hexágono señalado por la flecha se le llama generador y se utiliza para construir todo del mosaico de cocodrilos, explique qué tipo de movimientos deben realizarse para colocar los hexágonos 1, 2, 3 y 4, partiendo del generador hexagonal.

Otro ejemplo similar es: En el siguiente dibujo, si el rostro señalado es la imagen generadora indique los movimientos que deben realizarse para colocar los rostros 1, 2, 3 y 4, partiendo de la imagen generadora.



Hay que tomar en cuenta que el tema de transformaciones se ha trabajado en años anteriores. Por ejemplo, en quinto año de primaria se hizo un reconocimiento de figuras que se obtienen mediante traslación de otras; este tipo de transformación isométrica se siguió utilizando en años posteriores.

En octavo año se estudió un tipo de transformación isomórfica, la homotecia; la misma se siguió utilizando en problemas de semejanza y congruencia de triángulos. Además, en décimo año se estudió el tema de simetría axial, el cual está muy relacionado con la reflexión.

Lo anterior indica que ya ha habido un tratamiento del tema de transformaciones, por lo que es trascendental que el docente se apoye en estos conocimientos previos y no parta desde “cero” en el desarrollo de estas habilidades.

**Nota:** Las habilidades específicas 12 y 13 no deben ser desarrolladas por separado a las habilidades precedentes; éstas se deben trabajar simultáneamente de acuerdo al planeamiento docente. Por ejemplo, una actividad bien preparada utilizando algún software dinámico o alguna aplicación de una página web puede contribuir para que el docente realice el cierre de estos conceptos, o bien profundizarlos aún más en la etapa de movilización.

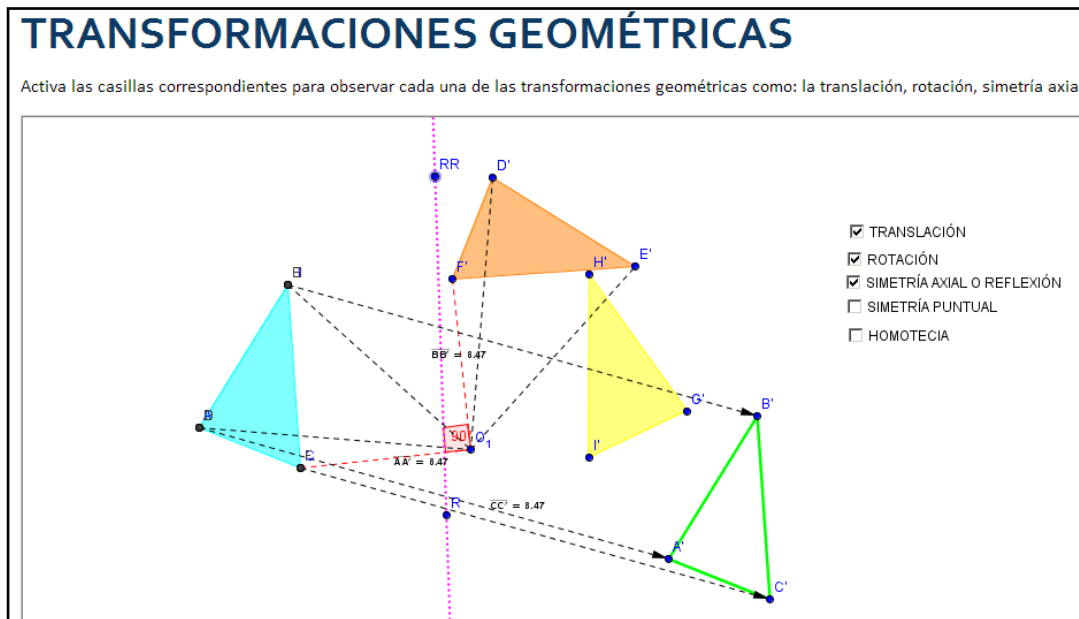



Imagen tomada de la dirección <http://www.geogebraTube.org/student/m19098>

Asimismo, la habilidad 13 se puede trabajar en cualquier momento de la acción de aula, ya que de un problema o ejercicio presentado por el docente pueden surgir por parte del estudiante diversas modificaciones o alguna forma de innovarlo.

<p><b>Visualización espacial</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cono circular recto</li> <li>• Vértice</li> <li>• Base</li> <li>• Superficie lateral</li> <li>• Radio</li> </ul>	<p>14. Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto.</p> <p>15. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un cono circular recto y características métricas de ellas.</p> <p>16. Reconocer elipses, parábolas e hipérbolas en diferentes contextos.</p>	<p>▲ Puede introducir el tema mediante una nota histórica como la siguiente:</p> <p> Se atribuye a Menecmo (alrededor de 350 antes de nuestra era) el descubrimiento de una familia de curvas que le sirvieron en sus investigaciones sobre el problema de la duplicación del cubo. Tales curvas pueden ser obtenidas mediante secciones planas de un cono, por ese motivo reciben el nombre de <b>secciones cónicas</b>. En el siglo III antes de nuestra era, Apolonio escribió el tratado <i>Las Cónicas</i> en el que sistematizó todo lo que se conocía hasta ese momento sobre estas curvas y amplió el conocimiento de ellas.</p> <p>▲ La idea es que se reconozcan circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas en el contexto de secciones planas de un</p>
--	--	---

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diámetro</li> <li>• Sección plana</li> <li>• Elipse</li> <li>• Parábola</li> <li>• Hipérbola</li> </ul>	<p>17. Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.</p>	<p>como circular recto. En cuanto a parábolas, elipses e hipérbolas, no se trata de hacer un estudio detallado de estas figuras, solamente se refiere a reconocer su forma en el contexto de cortes de un cono y evidenciar que aparecen también en otros contextos.</p> <p>😊 En cuanto a la relación de la circunferencia con el cono, se pueden establecer algunas relaciones métricas. Por ejemplo, dado un cono de altura 5 cm y radio de la base 2 cm, determinar el radio de la circunferencia que se obtiene si se hace un corte con un plano paralelo al plano de la base, que dista 2 cm del plano de la base.</p> <p>Este problema hace uso de conocimientos previos como la semejanza de triángulos.</p> <p>⚙️ Es conveniente puntualizar que la parábola como sección plana de un cono es otra forma de representación de dicha curva, además de las estudiadas en <i>Relaciones y Álgebra</i>.</p>
--	---	---

### Recuadro N° 13

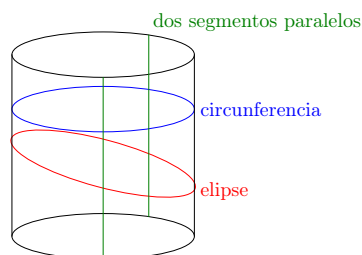
**Número sugerido de lecciones:** 8 (Etapa I: 4, Etapa II: 4)

#### Indicaciones y ejemplos

Con un problema y una serie de preguntas generadoras se puede introducir el estudio del cono circular recto, las habilidades no deben verse por separado.

Ahora bien, como se indica en las indicaciones puntuales, la idea es que se estudien las parábolas, elipses e hipérbolas a un nivel de identificación en el contexto de secciones planas de un cono circular recto. No se trata de hacer un estudio minucioso de estas curvas, sino solamente reconocer su forma en el contexto de cortes de un cono y evidenciar que aparecen también en otros contextos.

Hay que tomar en cuenta que en años anteriores el estudiante ha estudiado la forma y los elementos del cono circular recto y ha identificado secciones planas de otros objetos tridimensionales como el prisma recto, la pirámide recta, la esfera y el cilindro circular recto. Por ejemplo, en décimo año se estudiaron las secciones planas de la esfera y del cilindro circular recto:



(MEP, 2012, p.393)

**Importante:** La habilidad específica 17 se puede implementar en cualquier momento de la acción de aula, ya que de un problema o ejercicio presentado por el docente pueden surgir por parte del estudiante diversas modificaciones o alguna forma de innovarlo.

Se puede trabajar con material concreto, plastilina, barro, manipulables y luego pasar a un software dinámico como el CABRI 3D. Relacionar estas curvas con su utilidad para la vida cotidiana (por ejemplo en la confección de lentes en focos y faros. Esto propiciaría el respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.

---

# Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

## **Autores**

Luis Hernández Solís  
Miguel González Ortega

## **Editor**

Angel Ruiz

## **Editor gráfico**

Miguel González

## **Revisores**

Javier Barquero

## **Revisión filológica**

Julián Ruiz

## **Director general del proyecto**

Ángel Ruiz

## **Para referenciar este documento**

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Undécimo año*. San José, Costa Rica: autor.



*Documento de integración de habilidades para Undécimo año* por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014) se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)