

# REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA



## Valoración de las capacidades superiores en las tareas matemáticas

Costa Rica  
2018

# Contenidos

Modelos para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad.....	3
<i>El lugar de los procesos.....</i>	3
<i>Modelo completo para valorar grados de los procesos .....</i>	5
<i>Estructura de intervención de procesos usando el modelo completo .....</i>	16
<i>Algunas observaciones sobre grados de procesos.....</i>	17
<i>Cinco criterios para valorar niveles de complejidad en el modelo completo .....</i>	18
<i>Ejemplos teóricos de valoración de niveles de complejidad con el modelo completo .....</i>	20
<i>Modelo simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad.....</i>	21
Referencias bibliográficas.....	25
Créditos .....	26

Introduciremos aquí modelos teóricos que establecen tres grados distintos en que pueden intervenir los procesos o capacidades superiores en una tarea matemática, y se aportan en un caso 61 indicadores precisos para permitir la identificación de esos grados de cada proceso. También, mediante los procesos se formularán cinco criterios para identificar los tres niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Un modelo simplificado que plantea 30 indicadores también se incluye (un subconjunto de los 61) y un criterio para valorar niveles de complejidad.

## **Modelos para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad**

Las capacidades superiores participan de manera múltiple y sinérgica en el currículo costarricense de matemáticas, a veces todas ellas actúan y a veces solo algunas. Puesto de otra manera: existe una intersección no vacía entre las diversas capacidades superiores.

### **El lugar de los procesos**

La realización de procesos matemáticos es un mecanismo privilegiado para construir las capacidades superiores. MEP (2012) los describe:

#### *Razonar y argumentar*

... se activa en todas las áreas de múltiples maneras, por ejemplo en el estudio de regularidades y patrones, en la justificación de la congruencia de triángulos, la elección de una representación matemática y su manipulación, en la solución de ecuaciones, entre otros. La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar. (p. 25)

#### *Plantear y resolver problemas*

Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales.

Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas.

El énfasis que se desea dar a los contextos reales también impulsa una asociación con el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa. (p. 25)

Uno de los aspectos que se desea subrayar en esta visión es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes. (p. 29)

Además: "... el propósito de desarrollar competencia en los recursos y métodos para resolver problemas también se incorpora en las distintas áreas matemáticas que organizan estos programas (p. 29).

#### *Comunicar*

Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes.

Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas.

Por la gran presencia de simbolizaciones en las Matemáticas en ocasiones se piensa que no es relevante la comunicación verbal y escrita, es común que no se incluya en la acción de aula ni tampoco en las formas de evaluación. No obstante, es un proceso central para la generación de la competencia matemática, pues permite esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil activa. (p. 25)

#### *Conectar*

Este proceso transversal pretende el entrenamiento estudiantil en primer lugar en la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, lo cual se deriva de las características centrales de los quehaceres matemáticos: el carácter integrado de los mismos. Los matemáticos profesionales aplican métodos y objetos matemáticos de unas áreas en otras. Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas.

Con esta multiplicidad de conexiones se comprenden mejor los límites y el significado de muchos de los objetos matemáticos. En el contexto escolar, entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad.

Este proceso busca que se cultiven las relaciones entre las distintas partes de las Matemáticas escolares, además del desarrollo de acciones para identificar dentro de situaciones no matemáticas aquellas en las cuales es posible un tratamiento matemático. Y de igual manera persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos (p. 25).

#### *Representar*

Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares).

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada. (p. 26)

El dominio de conocimientos o el desarrollo de habilidades aunque necesarios no son suficientes para avanzar en la competencia matemática que define el currículo, es decir: se requieren otras acciones y por eso se plantean los procesos.

Las competencias o capacidades superiores no son usadas operativamente para organizar el currículo: “sólo se usan como una perspectiva general que busca la formación matemática, pero se reconoce su relevancia. Las competencias dentro de un currículo escolar ofrecen visiones renovadoras que permiten redireccionar el significado de los aprendizajes y sustentar premisas constructivistas cruciales, apoyando que la educación aporte al progreso social” (pp. 489-491). Además: “se usan las competencias de una manera precisa en atención a los fines educativos nacionales y las posibilidades de docentes y estudiantes en el actual momento histórico” (pp. 489-491). Ahora bien, la forma como se introducen es por medio de procesos matemáticos: “que poco a poco se vayan introduciendo en los quehaceres educativos. Se considera más eficaz trabajar con procesos y no con competencias directamente, pues en primer lugar, se desea enfatizar las acciones por desarrollar en la acción de aula” (pp. 489-491).

Por simplicidad y conveniencia los procesos matemáticos se asocian de manera *biunívoca* con las cinco capacidades superiores. Es decir: el proceso *Razonar y argumentar* se asociaría con una capacidad para *Razonar y argumentar*, el proceso *Plantear y Resolver* problemas con la competencia para *Plantear y resolver problemas*, y así igualmente para los cinco procesos. Hay una conexión de las capacidades consignadas por el currículo costarricense con las capacidades fundamentales o competencias que plantea PISA de la OCDE en el 2012, sin embargo en el caso de Costa Rica no se adoptan estas capacidades de igual manera.<sup>1</sup> Para efectos

---

<sup>1</sup> En el currículo costarricense se plantea que las capacidades estimuladas por los cinco procesos pueden ser, por ejemplo, las siete competencias que señala PISA de la OCDE (MEP, 2012, pp. 492-493).

de este currículo lo relevante es que intervengan los procesos-capacidades en el aula, se incluyan también en la evaluación y en general se tomen en cuenta en todas las dimensiones educativas. En lo que sigue se hablará indistintamente del proceso como acción o como capacidad superior.

En lo que sigue, vamos a proponer en primer lugar, un modelo completo que permitirá valorar los niveles de complejidad a partir de los procesos. El modelo está compuesto por dos elementos:

- 61 *indicadores* que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres *grados* distintos
- 5 *criterios* para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración.

Una vez que describamos este modelo, ofreceremos una versión simplificada del mismo.

### Modelo completo para valorar grados de los procesos

La premisa que podemos establecer es que una tarea matemática demanda la participación de las capacidades superiores de diferente manera: por un lado debido a combinaciones distintas de las mismas, pero por el otro como resultado de que cada una podría intervenir con grados distintos. Aquí, para consignar esa diferencia en la acción cognitiva se propone, por simplicidad y aplicabilidad, una escala de tres grados, siendo el grado 1 el menos complejo y el grado 3 el más complejo.

En lo que sigue se brindan indicadores para cada grado en relación con los cinco procesos matemáticos que consigna el currículo.

	Grado 1	Grado 2	Grado 3
Razonar y argumentar	[Barra de gradación]		
Plantear y resolver problemas	[Barra de gradación]		
Conectar	[Barra de gradación]		
Comunicar	[Barra de gradación]		
Representar	[Barra de gradación]		

Figura 1. Grados de procesos / capacidades superiores

La descripción de estos grados constituye un marco para la elaboración de un instrumento o una guía general que permita visualizar las características de una tarea matemática determinada y valorar, en particular, la pertinencia y características de su inclusión en la acción de aula o en la evaluación. Al precisarse el grado de intervención de cada proceso se abren posibilidades importantes para sostener una estrategia para obtener progresos en las capacidades matemáticas. De otra manera: se puede ir ajustando el grado de los procesos en las tareas matemáticas para nutrir el fortalecimiento de la competencia matemática.

En el caso de la evaluación, los resultados que se obtengan al disponer de esta precisión, aportaría información muy clara sobre la realidad de los rendimientos estudiantiles, y permitir definir acciones educativas.

La introducción en el currículo costarricense de los niveles de complejidad de los problemas, por otro lado, pretendió favorecer el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y por lo tanto estos niveles están estrechamente asociados a los procesos. En las tablas que siguen se identifican algunas de las características en términos de acciones o capacidades, se trata de *indicadores*.

Debe insistirse en que los procesos y las capacidades que estos invocan poseen múltiples puntos de contacto; no pueden considerarse simplemente separados. Por eso algunos indicadores de un proceso poseen intersección con indicadores de otros procesos.

A la hora de valorar el grado del proceso que una tarea matemática supone deben tomarse en cuenta las características que aquí se sugieren de una manera flexible; en algunos casos algunas de ellas aparecerán con claridad, en otras no aparecerán de esa manera o no estarán del todo.

Luego de los indicadores de cada proceso, se ofrecerán algunas observaciones breves que mostrarán de cierta forma la lógica seguida para el establecimiento de los indicadores de los distintos grados.

Los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas*, ocupan un lugar preponderante para valorar el estímulo de capacidades cognitivas superiores y la competencia matemática. Por eso, se aportarán más indicadores en estos procesos que en los otros tres.

Debe advertirse que los elementos y ejemplos teóricos que se introducen aquí se pueden aplicar en la acción y en la evaluación de aula o en pruebas nacionales. Por eso no se debe pensar que las tareas matemáticas que pueden proponerse deben ser por ejemplo de selección única, múltiple o de respuesta cerrada, tipos de ítems que se han privilegiado en las pruebas de Bachillerato. Sin duda la intervención de procesos en ciertos grados supone ítems de desarrollo. Este marco teórico se puede aplicar a tareas matemáticas de las cinco áreas matemáticas del currículo en todos los niveles educativos.

Otro elemento por tomar en cuenta es que las diversas áreas matemáticas poseen características propias, lo que se traduce en que algunos indicadores pueden aparecer más en una que en otra.

En la utilización de este instrumento (es decir en el análisis de una tarea matemática), si bien es posible que un indicador de un grado aparezca solitariamente, es más probable que aparezcan varios del mismo grado, especialmente en los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas*.

Los indicadores usan la siguiente codificación:

- RAi.j: indicador j del proceso *Razonar y argumentar* en el grado valorado como i.
- PRPi.j: indicador j del proceso *Plantear y resolver problemas* en el grado valorado como i.
- Ci.j: indicador j del proceso *Conectar* en el grado valorado como i.
- COMi.j: indicador j del proceso *Comunicar* en el grado valorado como i.
- Ri.j: indicador j del proceso *Representar* en el grado valorado como i.

**Tabla 1**  
*Indicadores de grados del proceso Razonar y argumentar*

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>
RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i>	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i>  RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o

<p>RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).</p> <p>RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.</p> <p>RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.</p>	<p>RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real.</p> <p>RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).</p> <p>RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc.</p> <p>RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición).</p> <p>RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.</p>	<p>describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos.</p> <p>RA3.2 Desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema.</p> <p>RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p> <p>RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos desarrollados y de los procedimientos desarrollados.</p> <p>RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).</p> <p>RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.</p> <p>RA3.7 Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida.</p> <p>RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.</p>
---	--	--

En general, los grados de intervención de este proceso se establecen con base en el nivel de complejidad del razonamiento matemático que se efectúa; en el grado 3 se plantea en relación con dimensiones y objetos más abstractos, con un grado mayor de precisión matemática. Sin duda, los problemas que se diseñan para poder trabajar en este grado 3 son de mayor demanda cognitiva, por lo que en el proceso *Plantear y resolver problemas* se esperaría también grados 2 o 3, aunque no siempre resulte así. También es posible que en los otros procesos (*Conectar, Comunicar y Representar*) los indicadores aparezcan en esos grados, pero no necesariamente.

Los indicadores RA1.1 y el RA2.1 poseen una relación clara pues refieren a la información dentro de un problema, la diferencia reside en que en el primer grado se trata de información explícita mientras en el segundo grado no está dada de forma explícita.

Los indicadores RA1.2, RA1.3 y RA1.4 refieren en esencia a procedimientos, cálculos, acciones directas. El RA1.5 plantea una justificación pero de ese tipo de procedimientos o cálculos rutinarios, y no más.

Los indicadores RA2.5 y RA3.1 abordan el hacer razonamientos, pero en el grado 2 esto se hace en situaciones similares a los problemas ya estudiados, mientras que en el grado 3 en situaciones no estudiadas y complejas.

Los indicadores RA1.3 y RA2.2 poseen relación, lo que cambia es el tipo de preguntas. En el grado 1 las preguntas refieren a respuestas directas, cortas; en el grado 2 se plantean preguntas que implican un nivel de argumentación mayor.

El indicador RA2.3 plantea el uso de diversas representaciones en las soluciones, lo que se relaciona estrechamente con el proceso *Representar*.

En el RA2.4 se plantea poder seguir una secuencia de razonamientos y revisar si la misma es válida; no significa que el sujeto la realiza, puede ser un texto escrito por otra persona lo que se estudia.

Los indicadores RA3.2 y RA3.3 muestran dos formas de razonar que son más complejas: usar integradamente conceptos y generalizar acciones o resultados.

El indicador RA3.4 refiere a poder identificar las condiciones y límites de los objetos matemáticos que se usan, y el RA3.5 al uso de elementos novedosos.

Los indicadores RA3.6 y RA3.7 refieren a condiciones de la estrategia de solución, el RA3.6 a valorar las dimensiones del problema y el RA3.7 a los pasos de la estrategia.

El indicador RA3.8 refiere al desarrollo de los razonamientos pero identificando los tipos de razonamiento o de pensamiento matemático (teorema, definición, conjeturas, ...).

**Tabla 2**  
*Indicadores de grados del proceso Plantear y resolver problemas*

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>
<p>PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución.</p> <p>PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.</p> <p>PRP1.3 Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada.</p> <p>PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.</p> <p>PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar.</p> <p>PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.</p> <p>PRP2.3 Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación.</p> <p>PRP2.4 Plantear problemas a partir de una situación dada matemática o de contexto real que implique una estrategia de solución.</p> <p>PRP2.5 Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias.</p> <p>PRP3.2 Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p> <p>PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.</p> <p>PTP3.4 Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.</p>

En el indicador PRP1.1 de este proceso se consigna que se trata de una sola solución. En el indicador PRP1.2 se subraya el uso de procedimientos rutinarios sencillos en la resolución de un problema. Es muy probable que ambos indicadores aparezcan en un ítem, pero se prefiere distinguir por separado ambas dimensiones.



El indicador PRP1.3 refiere a que dada una situación se pueda identificar que un problema determinado puede plantearse, es decir que tiene sentido plantear ese problema para esa situación. No se pide elaborar el problema, solo ver si posee la correspondencia.

El indicador PRP1.4 refiere a modelos ya estudiados y formulados explícitamente, donde solo se realiza un acción de identificación. Mientras en el indicador PRP1.5 se resuelve problemas utilizando un modelo estudiado y formulado explícitamente.

En el grado 2 se consigna acciones como plantear una estrategia correcta con evidencia de los procedimientos a seguir para resolver un problema no estudiado, aunque no se pide resolverlo (PRP2.1) o que el problema se resuelva (PRP2.2) ejecutando todos los pasos.

Los indicadores PRP2.2 y PRP2.3 en el grado 2 se relaciona con los indicadores PRP3.1 y PRP3.2 en el grado 3. La diferencia más significativa es que en el grado 3 se demanda selección, comparación, evaluación del procedimiento usado (PRP3.1) y además se generalizan los resultados de la solución o estrategia (PRP3.2).

En el indicador PRP2.3 se hace referencia a la conexión entre áreas o el uso de varias representaciones. Aquí hay clara relación con los procesos de *Conectar y Representar*.

Los indicadores PRP2.4 y PRP3.3 poseen relación en la acción de plantear problemas, la diferencia es que en el grado 2 se plantea para proporcionar una situación en donde haya una sola solución, mientras que en el grado 3 que haya varias soluciones o sea de solución abierta. Hay un nivel de mayor complejidad en el grado 3.

Los indicadores PRP1.3, PRP1.4, PRP2.5 y PRP3.4 refieren a los modelos. En el grado 1 se pide identificarlos (PRP1.3) aunque estén ya formulados explícitamente y en un contexto ya estudiado, o resolver usando un modelo estudiado y formulado explícitamente (PRP1.4); en el grado 2 además de identificar se deben usar y aunque ya estudiados los modelos no se encuentran explícitamente formulados. En el grado 3 los modelos no han sido estudiados, se usan en situaciones diversas y se deben consignar las condiciones y los límites de los mismos.

**Tabla 3**  
*Indicadores de grados del proceso Conectar*

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>
<p>C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas.</p> <p>C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.</p> <p>C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos.</p> <p>C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognitivas diferentes en la resolución de un problema.</p>

Los indicadores C1.1, C2.1 y C3.1 hacen referencia a la conexión entre matemáticas y contextos reales. En el grado 1 solo se pide que se puedan identificar las conexiones, en el grado 2 que se use la conexión en la resolución de un problema similar a uno ya estudiado, en el grado 3 que se use la conexión en problemas no estudiados y relativamente complejos.

Los indicadores C1.2, C2.2 y C3.2 hacen referencia a las conexiones dentro de un área matemática (C1.2), dos o más áreas matemáticas (C2.2), o con otras asignaturas (C3.2).

Los indicadores C1.2, C2.2 y C3.2 son algo generales. Es posible que el problema deba valorarse con mucha más precisión cuando aparecen.

Se debe comentar que en un problema que no establece conexiones fuera del área o la asignatura, este puede tener una gran complejidad en la intervención de los otros procesos. Por ejemplo, un problema dentro de Geometría (o Relaciones y álgebra u otra área) puede demandar una acción cognitiva muy fuerte en *Razonar y argumentar* o en *Plantear y resolver problemas*. Algo similar se podría decir cuando aparecen los indicadores C2.2 o el C3.2.

El número de indicadores en este proceso *Conectar* es menor que en los otros procesos, por lo que abre más posibilidades a tomar en cuenta al juzgar su intervención en un ítem.

**Tabla 4**  
*Indicadores de grados del proceso Comunicar*

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>
<p>COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).</p> <p>COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.</p> <p>COM1.3 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados.</p> <p>COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).</p> <p>COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema.</p> <p>COM2.3 Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema.</p> <p>COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos.</p> <p>COM3.2 Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática.</p> <p>COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).</p>

Los indicadores COM1.1 y COM2.1 refieren a la identificación de expresiones matemáticas estudiadas en textos expresados por escrito o verbalmente, la diferencia es que en el grado 1 estos textos son similares a los estudiados mientras que en el grado 2 no lo son.

En los indicadores COM1.2, COM2.2 y COM3.1 se plantea interpretación de objetos matemáticos, no obstante en el grado 1 es solo la interpretación de una expresión (para buscar una estrategia de solución), en el grado 2 se plantea una interpretación de una secuencia de razonamientos con conceptos o procedimientos estudiados (indicador COM2.2), en el grado 3 el indicador COM3.1 refiere a interpretar y seguir una secuencia de razonamientos abstractos, no estudiados y complejos. En esta secuencia desde el grado 1 al 3 hay un incremento en la complejidad de la acción de comunicación que se plantea.

Los indicadores COM1.4, COM2.4 y COM3.3 tienen relación pero en diversos niveles de complejidad: en el grado 1 se comunican de manera breve mediante representaciones matemáticas resultados de procedimientos rutinarios en problemas estudiados, en el grado 2 se pide que se describa con un lenguaje matemáticamente no

preciso las acciones, resultados y razonamientos (en este caso no rutinarios), en el grado 3 la comunicación es usando relaciones más abstractas.

La comunicación que se plantea en el indicador COM1.4 no permite incluir respuestas que se dan por medio de un ítem de selección única, aun a pesar de que se da un cierto nivel de comunicación al expresar una respuesta.

Los indicadores COM2.3 y COM3.2 refieren a la comunicación, pero hay diferencias: en el indicador 2.3 es mediante lenguaje natural mientras que en el indicador COM3.2 es usando relaciones abstractas entre los conceptos, métodos o resultados matemáticos.

Los indicadores COM3.2 y COM3.3 consignan una intervención del proceso *Comunicar* donde participan precisión y lenguaje matemáticos así como relaciones más abstractas.

**Tabla 5**  
*Indicadores de grados del proceso representar*

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>
<p>R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones* ya estudiadas de objetos matemáticos.</p> <p>R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas.</p> <p>R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada.</p> <p>R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.</p> <p>R2.3 Elaborar una representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada.</p> <p>R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>R3.1 Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas.</p> <p>R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos.</p> <p>R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real.</p> <p>R3.4 Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas.</p> <p>R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.</p>

\*En esta tabla las representaciones matemáticas pueden ser visuales, gráficas, numéricas, estadísticas, simbólicas o tabulares. Se acepta que al hablar de dos o mas representaciones matemáticas estas pueden ser tanto del mismo tipo de representación (visual, gráfico, numérico, estadístico, simbólico, tabular) como de diferentes.

Los indicadores R1.1 y R2.1 refieren a la información que se codifica en representaciones. Sin embargo en el grado 1 la información está dada de forma explícita y se trata de representaciones estudiadas. En el grado 2 se pasa a interpretar y razonar sobre la información consignada en una representación dada.

El identificador R1.2 plantea que se pueda señalar la presencia de varias representaciones de objetos matemáticos, no plantea traducir una en otra (como hace el indicador R2.2) o usar dos representaciones como plantea R2.4.

El indicador R2.4 plantea solo usar 2 representaciones pero no pasar de una a otra (traducir una en términos de otra).

Los indicadores R1.2, R2.3, R2.4 y R3.2 poseen relación en el uso de representaciones, pero en el grado 1 se trata de una representación en situaciones ya estudiadas, mientras en el grado 2 se usa en situaciones no estudiadas. En el indicador R2.3 se plantea elaborar la representación y no solo interpretar y razonar a partir de ella. En el grado R2.4 se plantean el uso de dos representaciones en problemas estudiados, en el grado 3 el indicador R3.2 plantea usar más de dos representaciones y en situaciones no estudiadas y complejas. Es decir, en el grado 3 el indicador R3.2 va más lejos de lo que plantean los indicadores R2.3 y R2.4. Se cuantifica el número de representaciones para que quede aun más claro el instrumento.

Los indicadores R2.2 y R3.1 tienen relación pues plantean el paso de una representación a otras, pero en el grado 2 se plantea una sola traducción o conversión, en el grado 3 el paso se plantea de una a dos o más representaciones.

Los indicadores R3.3 y R3.4 refieren a un uso de las representaciones: combinaciones de representaciones de manera novedosa o creativas, o a evidenciar que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación.

El indicador R3.5 refiere a la consignación de las ventajas de una representación en la resolución de problemas. Este es un indicador que expresa un dominio muy grande del uso de representaciones.

Los diversos indicadores se colocan en la tabla siguiente:

**Tabla 6**  
**61 indicadores de los grados de procesos matemáticos**

<b>Grado1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>	
<p>RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.</p> <p>RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.</p> <p>RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).</p> <p>RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.</p> <p>RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.</p>	<p>RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto.</p> <p>RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación ( por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).</p> <p>RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc.</p> <p>RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición).</p> <p>RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.</p>	<p>RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos.</p> <p>RA3.2 Desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema.</p> <p>RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p> <p>RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.</p> <p>RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).</p> <p>RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.</p> <p>RA3.7 Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida.</p> <p>RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.</p>	<p>18                      indicadores  <i>Razonar y argumentar</i></p>
<p>PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución.</p> <p>PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas,</p>	<p>PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar.</p> <p>PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a</p>	<p>PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias.</p> <p>PRP3.2 Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p>	<p>14                      indicadores  <i>Plantear y resolver problemas</i></p>

<p>procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.  PRP1.3 Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada.  PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.  PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.</p>	<p>partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.  PRP2.3 Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación.  PRP2.4 Plantear problemas a partir de una situación dada matemática o de contexto real que implique una estrategia de solución.  PRP2.5 Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.</p>	<p>PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.  PRP3.4 Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.</p>	
<p>C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas.  C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.</p>	<p>C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.  C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.</p>	<p>C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos.  C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.</p>	<p>6  indicadores  <i>Conectar</i></p>
<p>COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).  COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.  COM1.3 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados.  COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que</p>	<p>COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).  COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema.  COM2.3 Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema.  COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.</p>	<p>COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos.  COM3.2 Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática.  COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).</p>	<p>11  indicadores  <i>Comunicar</i></p>

ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.			
<p>R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) ya estudiadas de objetos matemáticos.</p> <p>R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas.</p> <p>R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.</p>	<p>R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada.</p> <p>R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.</p> <p>2.3 Elaborar una representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada.</p> <p>R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.</p>	<p>R3.1 Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas.</p> <p>R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos.</p> <p>R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real.</p> <p>R3.4 Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas.</p> <p>R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.</p>	<p>12 indicadores</p> <p><i>Representar</i></p>
<p>19 indicadores</p> <p>Grado 1</p>	<p>20 indicadores</p> <p>Grado 2</p>	<p>22 indicadores</p> <p>Grado 3</p>	<p><b>61 indicadores en total</b></p>

## Estructura de intervención de procesos usando el modelo completo

La colección de indicadores de los procesos que participan en un problema se puede convencionalmente llamar: *Estructura de intervención de procesos en un problema* (EIPP). Esta se podría representar al menos de tres maneras que describimos a continuación.

### Primera representación

Una tabla con dos columnas: en la primera se colocan los nombres de los procesos ocupando cada uno una celda, en la segunda se consignan los códigos junto al enunciado de los indicadores de cada proceso dentro de la celda ubicada en la misma fila en que se encuentra el proceso, cada indicador ocupará un párrafo dentro de la celda. Por ejemplo:

Tabla 7

#### Primera representación de la estructura de intervención de procesos en un problema

Procesos-capacidades	Indicadores
<i>Razonar y argumentar</i>	RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas. RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).
<i>Plantear y resolver problemas</i>	PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.
<i>Conectar</i>	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.
<i>Comunicar</i>	COM1.2 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados, mencionando cálculos y resultados.
<i>Representar</i>	R2.2 Pasar de una forma de representación matemática a otra en la resolución de problemas.

### Segunda representación

Los códigos junto al enunciado de los indicadores de cada proceso ocupando cada indicador un párrafo, si se desea pueden colocarse como un listado. Por ejemplo:

EIIP:

- RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real
- RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
- RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).
- PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.

### Tercera representación

Los códigos de los indicadores seguidos, separados por comas. Por ejemplo:

EIPP: RA1.1, RA1.2, RA1.3, PRP1.5, C2.1, COM1.2, R2.2.

La EIPP permite consignar la intervención de los cinco procesos en un problema. Más adelante se verá cómo esta estructura se puede asociar a niveles de complejidad.

Las representaciones son equivalentes y la utilización de cada una de ellas es cuestión de conveniencia, en ocasiones la primera o la segunda pueden resultar más adecuadas para poder tener “muy cerca” los



indicadores dentro de un discurso, la tercera representación puede ser la más adecuada si lo que se busca es tener rápidamente de forma visual los indicadores para derivar una conclusión.

### Algunas observaciones sobre grados de procesos

En la aplicación de este modelo conviene tomar en cuenta las siguientes observaciones.

1. Se va a aceptar **por convención** que con solo un indicador del grado mayor de un proceso, el grado del proceso es precisamente el del indicador de ese grado mayor. Por ejemplo, siempre que no haya indicadores del grado 3: a) si en un ítem se identifica en el proceso *Razonar y argumentar* el indicador RA2.4 el grado del proceso sería 2, b) si se identifica en el proceso *Conectar* el indicador C2.2 entonces el grado del proceso *Conectar* en el problema es 2. Con un solo indicador del grado 3, por ejemplo 3.2 en cualquier proceso, se valora la intervención del proceso con grado 3.
2. En este modelo, la presencia de un indicador de grado 2 no implica que todos los indicadores de grado 1 deban aparecer. Si aparece un indicador en un proceso de grado 2 este indicador es el que se señalaría para valorar el grado de intervención del proceso. Es decir, si el indicador de *Comunicar* es COM2.2 entonces no se deberían colocar los indicadores del grado 1 en ese proceso. Sí se deben colocar otros indicadores de grado 2 (COM2.3, COM2.4, etc.) si esto fuera pertinente. Los indicadores de cada grado están definidos de tal manera que un indicador similar en el grado 1 estaría incluido de alguna manera en el indicador del grado 2 correspondiente.
3. En este modelo la presencia de un indicador de grado 3 no implica que todos los indicadores de grado 1 o 2 deban aparecer. Si aparece un indicador en un proceso de grado 3 este indicador es el que se señalaría para valorar el grado de intervención del proceso. Es decir, si el indicador de *Comunicar* es COM3.2 entonces no se deberían colocar los indicadores del grado 1 o 2 en ese proceso. Sí se deben colocar otros indicadores de grado 3 (COM3.3, COM3.4, etc.) si esto fuera pertinente. Los indicadores de cada grado están definidos de tal manera que un indicador similar en el grado 1 o 2 estaría incluido de alguna manera en el indicador del grado 3 correspondiente.
4. Es importante tomar en cuenta siempre el nivel educativo, la habilidad general y las habilidades específicas que están en juego para poder valorar el grado de intervención del proceso-capacidad.
5. También es crucial subrayar que cuando se incluyen en los indicadores situaciones o métodos con los términos “ya estudiados” o “similares a los ya estudiados”, se consigna algo que es relativo. Para un estudiante un objeto o una situación puede haber sido estudiada y en otro caso no. En la acción de aula se podría identificar la situación; sin embargo, en pruebas nacionales es algo distinto, el criterio debe ajustarse en esencia a lo que el currículo establece que debe haberse estudiado. Este elemento de “relatividad” obliga en todo caso a una aproximación flexible.
6. Los grados de los procesos se pueden aplicar en todos los niveles educativos. Los conocimientos y habilidades involucradas, sin embargo, pueden determinar que un grado sea 1 en el año lectivo 6 pero 2 en el año lectivo 3. Por ejemplo, en el proceso *Plantear y resolver problemas* tenemos el indicador PRP2.4 y el PRP3.4: aquí se provoca una diferencia si se han estudiado o no los modelos. Si se trata de una tarea que implica que los modelos ya fueron estudiados el grado sería 2, pero si no lo fueron entonces sería de grado 3.
7. A la hora de determinar el grado de un proceso en un ítem de una prueba nacional de Bachillerato se acepta que se debe *aproximar la complejidad de la tarea* de acuerdo con el currículo para el Ciclo Diversificado. Por ejemplo, el indicador para el grado del proceso *Representar* R2.2 se debe entender en relación con los conocimientos y habilidades de ese ciclo según están en el currículo.
8. Se debe entender además que al tomar como base los conocimientos y habilidades del ciclo para establecer el grado del proceso, no se debe perder de vista que *en la realidad de aula* en el país puede que estos contenidos no se hayan estudiado plenamente. Y eso significa que es posible que con base en el currículo el grado del proceso sea por ejemplo 1, en la realidad de aula la complejidad sea de grado 2. Eso plantea como política general que en la construcción de una prueba nacional se deben modular con inteligencia los grados que incluyan sus ítems.
9. El potente instrumento que nos aportan los grados de los procesos permite analizar muchos problemas e ítems de manera más fácil, pero siempre habrá situaciones donde la valoración específica del ítem será la esencial; se obliga a un análisis más complejo e integrador.

10. La colección de indicadores de grados de procesos que se ofrece en este trabajo no puede concebirse de manera absoluta y definitiva: los indicadores podrán ajustarse en próximos años con base en acciones de validación tanto con docentes como con estudiantes.

### Cinco criterios para valorar niveles de complejidad en el modelo completo

En el currículo costarricense de Matemáticas se introdujeron tres niveles de complejidad con el propósito de que en la acción educativa se estimularan capacidades cognitivas superiores de manera creciente dentro de una estrategia nacional. Los términos que se usaron fueron tomados del marco teórico de las pruebas PISA de la OCDE en el 2003, aunque no corresponden enteramente a lo que PISA entendía por ellos. Podrían haberse denominado de otra manera, por ejemplo: *Nivel de complejidad A*, *Nivel de complejidad B*, *Nivel de complejidad C*. Lo importante es comprender la asociación estrecha que tienen esos niveles con los procesos.

Con base en los textos del programa de estudios, es posible sistematizar algunos indicadores para consignar el nivel de complejidad de un problema.

**Tabla 8**

*Niveles de complejidad de un problema: indicadores en el currículo*

<b>Nivel A: Reproducción</b>	<b>Nivel B: Conexión</b>	<b>Nivel C: Reflexión</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Reconocer objetos o métodos matemáticos equivalentes.</li> <li>2. Identificar objetos matemáticos o propiedades matemáticas sencillas dentro de una situación familiar dada.</li> <li>3. Realizar procedimientos rutinarios y aplicar algoritmos estándar, en ambientes familiares al estudiante.</li> <li>4. Identificar y escribir de manera sencilla aunque coherente matemáticamente, expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cálculos no complicados.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Interpretar una situación matemática con exigencia mayor que en el nivel de reproducción.</li> <li>2. Resolver problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante.</li> <li>3. Conectar distintas representaciones de una situación (algebraicas, numéricas, gráficas, etc.).</li> <li>4. Conectar elementos matemáticos dentro de un área o que relacionan dos o más áreas matemáticas.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Plantear y resolver problemas complejos.</li> <li>2. Argumentar, justificar, y generalizar la resolución de problemas complejos.</li> <li>3. Comprobar si los resultados obtenidos corresponden a las condiciones de partida del problema.</li> <li>4. Comunicar los resultados de la aplicación de estrategias con lenguaje matemático y precisión matemática.</li> <li>5. Conectar elementos matemáticos de dos o más asignaturas.</li> </ol>
Fuente: MEP, 2012.		

Estos indicadores constituyen una guía pero es posible ofrecer ahora una mejor orientación con base en la identificación de los grados de los procesos que se ha consignado en este documento. No es difícil darse cuenta que estos indicadores para *reproducción* tienen una estrecha relación con los indicadores del grado 1 de procesos, aquellos para *conexión* con el grado 2 y los de *reflexión* con el grado 3.

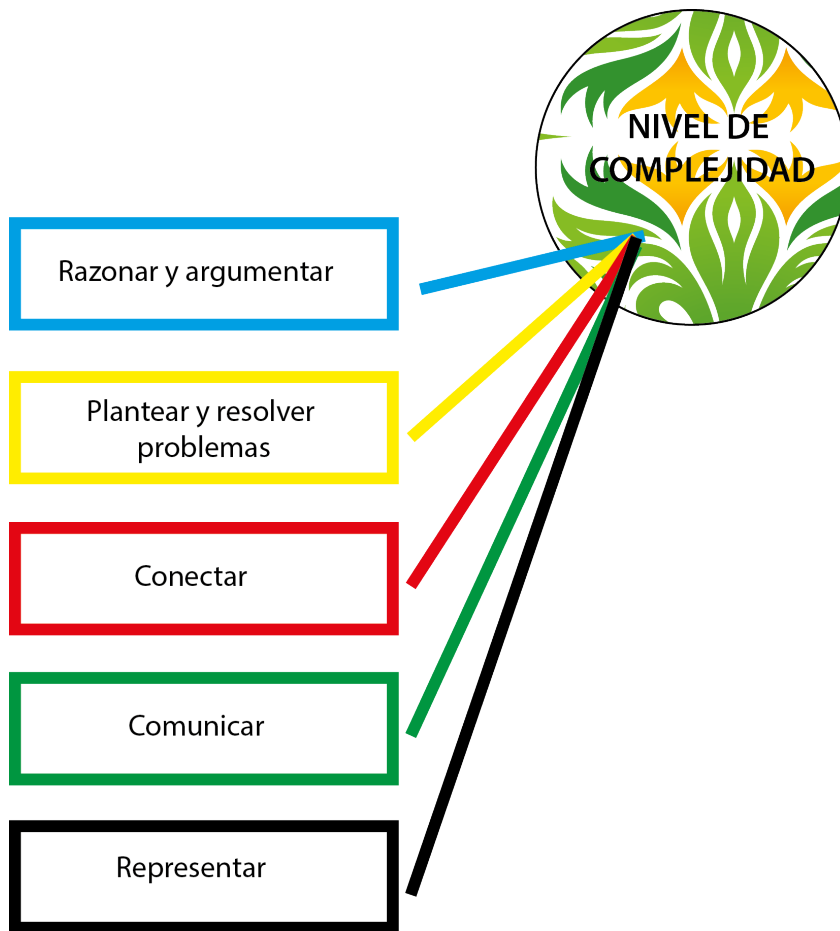


Figura 2. Los procesos-capacidades determinan el nivel de complejidad

El punto teórico de partida es que los procesos (o capacidades que implican) determinan los niveles de complejidad. Si se establece el papel preciso de intervención de esos procesos en un problema, será posible identificar el nivel de complejidad. Puesto en los términos introducidos en este documento: la *estructura de intervención de los procesos en un problema* (colección de indicadores en los tres grados en los cinco procesos) nos ayuda a identificar el nivel de complejidad de este.

Luego de comprender esa relación, lo que procede es establecer un modelo **por conveniencia y convención**, y aportar criterios funcionales. Aquí se usarán los siguientes criterios:

- NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.
- NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de *conexión*.
- NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de *reflexión*.

Cuando no se puedan aplicar directamente los criterios NC1, NC2 y NC3 se propone realizar una valoración específica del ítem que, en general, dependerá de los indicadores del grado mayor:

- NC4: cuando en un problema la intervención de procesos es de grados 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 2 es menor que tres, se requerirá hacer una valoración más específica para establecer si es de *reproducción* o *conexión*. Dependerá de la “fuerza” del indicador o indicadores de grado 2 para poder valorar el problema como de *conexión*.

También este criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 2 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan el grado 1.

- NC5: cuando en un problema la intervención de procesos es de grado 3, 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 3 es menor que tres, se requerirá hacer una valoración más específica para establecer si es de *reproducción*, *conexión* o *reflexión*. Dependerá de la “fuerza” del indicador o indicadores de grado 3 para poder valorar el problema como de *reflexión*.

También este criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 3 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan los grados 1 o 2.

En la valoración de un problema se propone seguir la secuencia representada en el diagrama:



**Figura 3. Secuencia para valorar grados de procesos y niveles de complejidad**

Entonces, la aplicación de este modelo propone que el primer paso es valorar los grados de los procesos.

Estos criterios o este modelo, busca facilitar y hasta cierto punto “automatizar” el reconocimiento de los niveles de complejidad con base en un análisis de los grados de intervención de los procesos matemáticos. Es importante comprender, no obstante, que debe aplicarse de una manera flexible, y que siempre habrá problemas o ítems donde será complejo identificar su nivel.

Es necesario señalar que los procesos-capacidades no tienen el mismo impacto en un problema o ítem. Los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas* puede decirse que son más decisivos en la valoración global de la complejidad de un problema.

Por ejemplo, podría ser que en un problema o ítem donde un indicador de un proceso permita valorar el nivel de complejidad como el de *conexión*.

Es importante insistir en que se debe tener *flexibilidad* en la aplicación de este modelo.

### Ejemplos teóricos de valoración de niveles de complejidad con el modelo completo

En lo que sigue se presenta algunos ejemplos, donde se aporta la estructura de intervención de procesos (EIPP) del problema y el nivel de complejidad o una consideración sobre el mismo, para mostrar cómo se aplicaría este modelo.

#### **Nivel de reproducción mediante criterio NC1**

La EIPP de un problema es:

Procesos-capacidades	Indicadores
<i>Razonar y argumentar</i>	RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real. 1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
<i>Plantear y resolver problemas</i>	PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.
<i>Conectar</i>	
<i>Comunicar</i>	COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.
<i>Representar</i>	R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones ya estudiadas de objetos matemáticos.

Todos los indicadores de los procesos en el ejemplo 1 son de grado 1. Y no se plantea indicador en el proceso *Conectar*. Es de *reproducción*.

### **Nivel de conexión mediante criterio NC2**

En una tarea matemática se tiene EIPP: RA2.6, PRP1.4, C2.1, COM1.2, R2.3. En este ejemplo hay tres indicadores de grado 2 en tres procesos *Razonar y argumentar*, *Conectar* y *Representar*. Cumple con el criterio NC2.

### **Nivel de reflexión mediante criterio NC3**

En una tarea matemática se tiene EIPP: RA3.4, PRP3.3, C2.1, C2.2, COM2.2, R3.2. En este ejemplo hay tres procesos con indicadores de grado 3: *Razonar y argumentar*, *Plantear y resolver problemas*, *Representar*. Cumple con el criterio NC3. El ejemplo es de *reflexión*.

### **El criterio NC4**

EIPP:

- RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.
- RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
- RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como *¿cuántos?* *¿cuánto es?*).
- PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.
- C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.
- COM1.2 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados, mencionando cálculos y resultados.
- R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.

Hay dos indicadores en grado 2 en el ejemplo 2 en los procesos *Conectar* y *Representar*. No se cumple con el criterio NC2 que pide no solo dos procesos con indicadores de grado 2, sino, al menos tres indicadores. Se debe utilizar el criterio NC4.

## **Modelo simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad**

En esta sección vamos a ofrecer un modelo simplificado para apoyar la valoración del nivel de complejidad de un problema o tarea matemática con base en los indicadores de grados de procesos que hemos introducido en este trabajo<sup>2</sup>. Este modelo incluye:

- 30 indicadores de la intervención de los procesos.
- 1 criterio para la valoración de niveles de complejidad a partir de la EIPP.

En ciertas tareas esta versión puede favorecer rápidamente una valoración sin tener que acudir al conjunto de los 61 indicadores y 5 criterios ya formulados. Se usa un subconjunto de los indicadores de los grados de los procesos, y solo un criterio; el cual no es ninguno de los criterios que se incluyen en el modelo completo.

---

<sup>2</sup> Este modelo fue validado con base en el trabajo de Hugo Barrantes, Johanna Mena y Edwin Chaves.

**Tabla 9**  
**30 indicadores de grados de procesos**

<b>Grado 1</b>	<b>Grado 2</b>	<b>Grado 3</b>	
<p>RA1.3<sup>3</sup> Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).</p> <p>RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.</p>	<p>RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto.</p> <p>RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).</p>	<p>RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos.</p> <p>RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.</p>	6 indicadores <i>Razonar y argumentar</i>
<p>PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución.</p> <p>PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.</p>	<p>PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar.</p> <p>PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.</p>	<p>PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias.</p> <p>PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.</p>	6 indicadores <i>Plantear y resolver problemas</i>
<p>C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas.</p> <p>C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.</p>	<p>C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.</p> <p>C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.</p>	<p>C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos.</p> <p>C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.</p>	6 indicadores <i>Conectar</i>
<p>COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).</p> <p>COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.</p>	<p>COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema.</p> <p>COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.</p>	<p>COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos.</p> <p>COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).</p>	6 indicadores <i>Comunicar</i>

<sup>3</sup> Se usa la misma codificación de los indicadores de grados de procesos del modelo completo.

R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.	R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.	6 indicadores <i>Representar</i>
10 indicadores Grado 1	10 indicadores Grado 2	10 indicadores Grado 3	<b>30 indicadores en total</b>

En general se propone que al seleccionar los indicadores de un problema se establezca el indicador del grado superior que refiera a una dimensión similar que se está valorando y por lo tanto no tenga el indicador del grado precedente. Por ejemplo en un problema donde se identifica “C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados” podría ser que también se involucre “C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas”. La idea es que solo se quede el indicador C2.1.

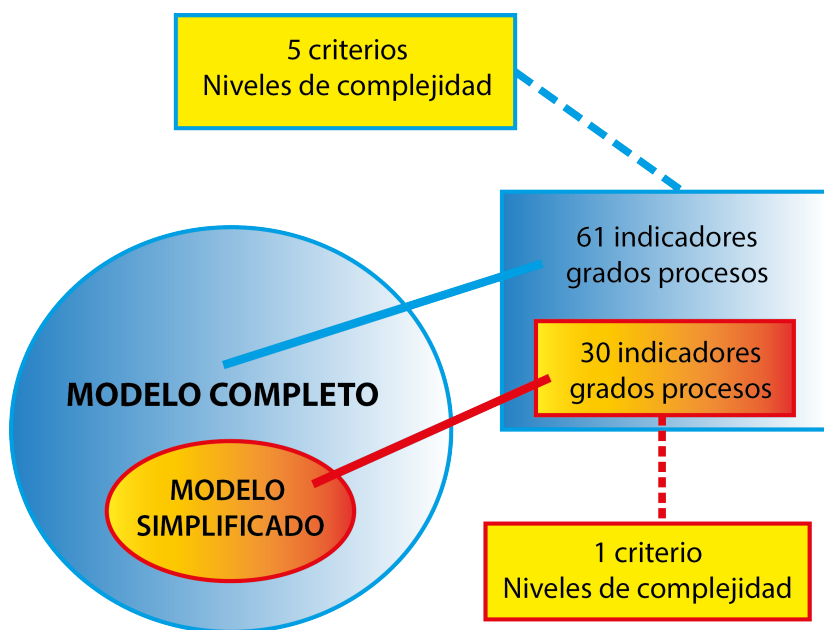


Figura 4. Modelos completo y simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad

## Criterio simplificado para valorar niveles de complejidad

Este criterio plantea dos opciones:

- NCS1. Cuando en un problema hay al menos 3 indicadores de un grado N en los procesos se valorará el nivel de complejidad del problema de la siguiente manera:
  - N=1, nivel de complejidad *reproducción*.
  - N=2, nivel de complejidad *conexión*.
  - N=3, nivel de complejidad *reflexión*.

Si hubiera un problema en que los indicadores “empatan” en grados distintos, se asumirá el nivel de complejidad superior, por ejemplo: si se tuvieran 3 indicadores de grado 1 y 3 de grado 2 en dos procesos en cada caso, se valora el problema de *conexión*.

- NCS2. Cuando no se cumple NCS1 (de los 3 indicadores): se debe valorar la situación especial y tomar una decisión con base en los indicadores que se juzguen más decisivos para establecer el nivel de complejidad; por ejemplo, cuando en un problema no sea posible identificar 3 indicadores de un grado N.

Con este modelo, la EIPP se puede consignar de la misma manera que se hace con el completo.

Este modelo simplificado podría ser instrumental para valorar niveles de complejidad en una cantidad de problemas, sin embargo inevitablemente es menos potente que el modelo completo. Puede verse también como un paso preliminar: cuando su utilización no aporte suficientes elementos para la valoración, se deberá acudir al modelo general.

En la figura anterior se representa el modelo completo y el simplificado, para valorar procesos y niveles de complejidad.



## Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Descargado de <http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>

Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622>

## Créditos

*Valoración de las capacidades superiores en las tareas matemáticas* es un documento elaborado en el marco del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

### Autor

Angel Ruiz

*Valoración de las capacidades superiores en las tareas matemáticas* fue elaborado con base en textos contenidos en la publicación: Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622>

### Revisión

Comisión central del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

### Director del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

### Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2018). *Valoración de las capacidades superiores en las tareas matemáticas*. San José, Costa Rica: autor.



*Valoración de las capacidades superiores en las tareas matemáticas*, Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/).