REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

mep
Ministerio
de Educación Pública

www.reformamatematica.net

La selección, diseño y valoración de tareas matemáticas

Costa Rica
2018

Contenidos

La estrategia "4 + 6" para la valoración de tareas matemáticas

La selección o diseño de las tareas matemáticas de acuerdo con el currículo es un proceso crucial. Ahora bien, lo que esto implica se puede beneficiar si se tiene a mano una estrategia para determinar la naturaleza de la tarea o el problema en términos del currículo; es lo que llamamos "valoración". Ya sea que se haya encontrado la tarea en un texto, en un medio audiovisual, o se haya inventado o elaborado, la misma debe ser objeto de una valoración que permita establecer su pertinencia curricular. Esta valoración permite aportar elementos para seleccionar o incorporar la tarea en la acción educativa en la forma o en el momento adecuado, o brindar insumos para avanzar en el diseño de la tarea.

Empecemos por una clarificación de términos. Introducimos aquí una distinción entre "tarea matemática" y "problema". Podemos afirmar que en un problema matemático aparece una o varias tareas matemáticas de menor complejidad; es decir: "tarea" matemática" puede verse como un componente de un problema, aunque el lenguaje puede permitir considerar un problema completo como si fuera una sola tarea. En general, nos inclinamos por la primera aproximación. La valoración usando los elementos curriculares se podría efectuar incluyendo una o varias tareas. Si en una situación hay varias tareas, representadas por T_1, T_2, T_3, …T_n, es posible agruparlas de diversas maneras para diseñar un problema (T_1, T_2 y T_3, o T_2 con T_8, o solo T_5). La decisión sobre qué tareas matemáticas juntar y a las cuales aplicar la valoración debe ser decidida con base en las necesidades o los propósitos educativos y también con base en el sentido y pertinencia que posea en relación con la situación, no todo agrupamiento es válido.

Una representación de la posibilidad de manipular las tareas, lo representamos con la figura siguiente.

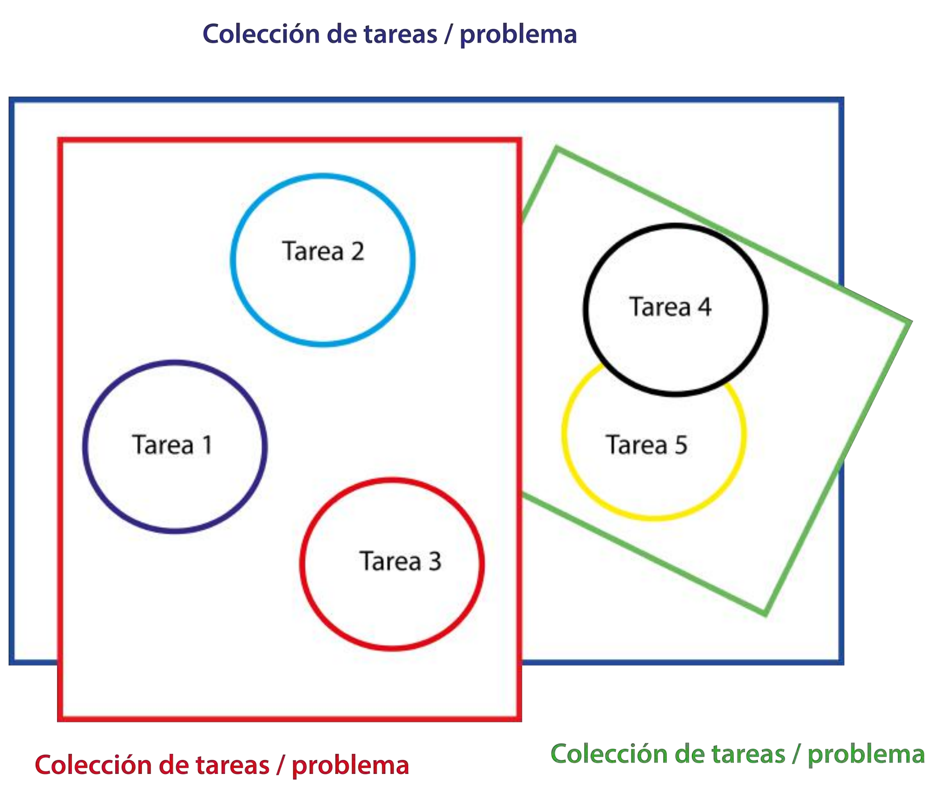


Figura 1. Agrupación de tareas matemáticas como problemas

Propuesta de la estrategia

Los elementos curriculares principales que deben ser considerados en el diseño-valoración de tareas matemáticas o problemas, se pueden resumir con base en las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los *conocimientos* y *áreas matemáticas*?
2. ¿A cuál categoría pertenece el *contexto utilizado*? Cuándo sea pertinente, ¿hay *contextualización activa*?
3. ¿Cuáles son las *habilidades generales* involucradas? ¿Cuál es el escenario de interacción de las habilidades?
4. ¿Cuáles son las *habilidades específicas* que participan?
5. ¿Cuál es la *intervención de los procesos* en el problema o tareas matemáticas?
6. ¿Cuál el *nivel de complejidad*?

Estos elementos se pueden representar con una figura.

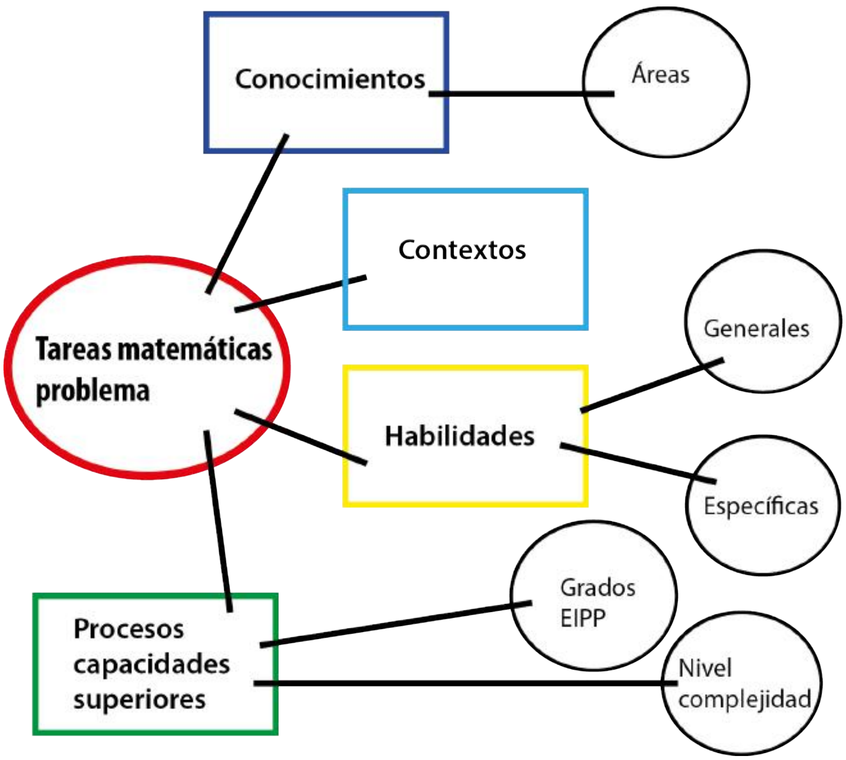


Figura 2. Componentes para la valoración de tareas matemáticas

Obsérvese que los cuatro elementos curriculares generales que se apuntan son: conocimientos, contextos, habilidades y procesos.

La valoración inicia con “enunciar” la tarea (una vez que se ha seleccionado, diseñado). En segundo término “resolver” la tarea que invoca ofrecer una o varias soluciones de esta. Este paso es muy importante pues permite ver la argumentación que se realiza y pone en movimiento los objetos curriculares que luego se procederá a precisar. El tercer paso es “identificar” algunos de los elementos curriculares que participan en la tarea: conocimientos, contextos y habilidades. Al hacerlo se muestran en detalle: los conocimientos y las áreas a los que pertenecen (según el currículo), el tipo de contexto que usa la tarea (de acuerdo a las cinco categorías que señalamos en este trabajo) y si este plantea la contextualización activa o no. Finalmente: “valorar”, que refiere a analizar los procesos y niveles de complejidad, de acuerdo con los 61 indicadores de grados de procesos y cinco criterios para establecer los niveles de complejidad consignados en este documento.

Dos observaciones:

- Responder si la tarea incluye la contextualización activa se requiere un cierto nivel de valoración, pero en aras de simplificar este modelo hemos preferido dejar “contextos” en el paso “identificar”.
- Este modelo no constituye un procedimiento para construir o diseñar las tareas matemáticas, solamente para valorarlas, pero puede ayudar significativamente en dicho diseño.

El modelo que se seguirá para realizar un análisis o la valoración de tareas matemáticas se podría representar por la siguiente figura.

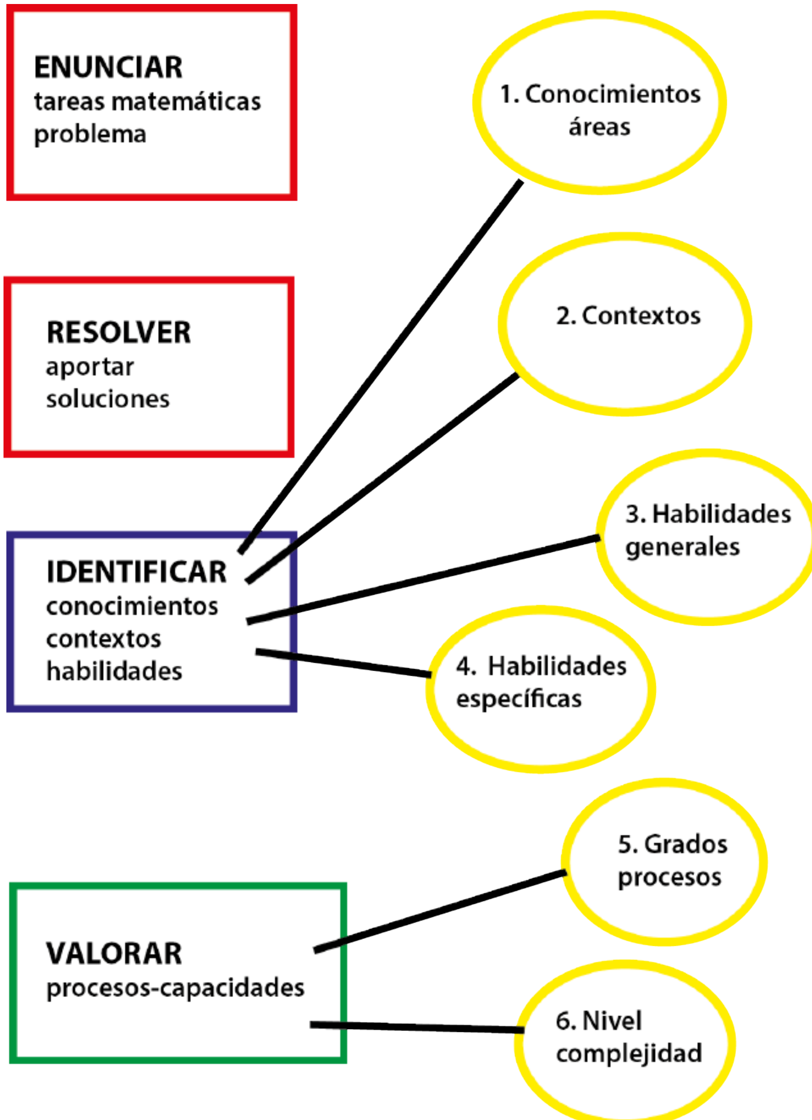


Figura 3. 4 + 6: Estrategia para la valoración de tareas matemáticas: cuatro pasos y seis elementos

En esta valoración no se incluyen directamente las cinco actitudes positivas que se proponen promover en el currículo debido a que, al valorar los otros elementos curriculares, de alguna manera se aporta alimentación sobre el eje disciplinar asociado a las actitudes y creencias. Por ejemplo, la valoración sobre contextos y contextualización activa contribuye a brindar información sobre el potencial de una tarea para favorecer la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas* y *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.* Una valoración de los procesos y niveles de complejidad permite visualizar indirectamente que una tarea permite potenciar *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas* o por otro lado *Perseverancia*.

En general, las actitudes son difíciles de instrumentalizar en la valoración de un problema o una tarea aislada. El eje disciplinar es un componente curricular muy importante pero que se plasma de una manera global, y mucho se obtiene en la estrategia de desarrollo de la lección. En una prueba, por ejemplo, colocar en una gran medida ítems de conexión y reflexión si bien permitiría suponer potenciar la *persistencia*, también podría provocar pérdida de *autoestima* (una demanda cognitiva no equilibrada). Algo similar sucede con los ejes disciplinares relacionados con el uso de historia de las Matemáticas y las tecnologías: en los tres ejes su incorporación en el currículo y su implementación deben verse de manera global con múltiples elementos.

Vamos a ofrecer a continuación cuatro ejemplos de cómo este modelo teórico se puede aplicar. En estos se incluyen algunos códigos:

- E10.1, p. 432: habilidad específica 1 de Estadística, nivel educativo 10, en la página 432 de MEP (2012)
- G8.8, p. 311: habilidad específica 8 de Geometría, nivel educativo 8, en la página 311 de MEP (2012)
- G10.6, p. 386: habilidad específica 1 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 386 de MEP (2012)
- G10.11, p. 389: habilidad específica 11 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 389 de MEP (2012)
- G10.13, p. 389: habilidad específica 13 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 389 de MEP (2012)
- G10.14, p. 389: habilidad específica 14 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 389 de MEP (2012)
- G10.15, p. 389: habilidad específica 15 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 389 de MEP (2012)
- G10.16, p. 391: habilidad específica 16 de Geometría, nivel educativo 10, en la página 391 de MEP (2012)
- G11.4, p. 399: habilidad específica 4 de Geometría, nivel educativo 11, en la página 399 de MEP (2012)
- G11.17, p. 399: habilidad específica 17 de Geometría, nivel educativo 11, en la página 399 de MEP (2012)
- P10.6, p. 436: habilidad específica 6 de Probabilidad, nivel educativo 10, en la página 436 de MEP (2012)
- RyA7.3, p. 329: habilidad específica 3 de Relaciones y Álgebra, nivel educativo 7, en la página 329 de MEP (2012)
- RyA7.4, p. 330: habilidad específica 4 de Relaciones y Álgebra, nivel educativo 7, en la página 330 de MEP (2012)
- RyA10.12 p. 410: habilidad específica 12 de Relaciones y Álgebra, nivel educativo 10, en la página 410 de MEP (2012)

De manera general:

- Ei.j, p. 432: habilidad específica j de Estadística, nivel educativo i, en la página N de MEP (2012)
- Gi.j, p. N: habilidad específica j de Geometría, nivel educativo i, en la página N de MEP (2012)
- Pi.j, p. N: habilidad específica j de Probabilidad, nivel educativo i en la página N de MEP (2012)
- RyAi.j p. N: habilidad específica J de Relaciones y Álgebra, nivel educativo I, en la página N de MEP (2012)

En el ejemplo 1 se involucra solo una habilidad general del área de Geometría, es decir se trata del escenario E_1. En el ejemplo 2, se incluye una habilidad general del área de Geometría y dos del área de Relaciones y Álgebra, es decir se trata del escenario E_5. En el ejemplo 3: dos de Estadística y probabilidad y una de Geometría, por lo que aplica E_5. En el ejemplo 4 tenemos un proyecto con un escenario E_4 (aparecen tres áreas cada una con una habilidad), y dos sub-problemas con E_5 pues se trata en los dos casos de dos áreas, en una de ellas más de una habilidad general, pero solo una de la otra. En este último caso, una situación da lugar a tres problemas: un general y otros más particulares que se pueden usar para otros tipos de acción de aula o evaluación. En cada caso se proporciona el análisis y valoración de las tareas matemáticas que se plantean.

Ejemplo 1: Construir un pinzón[1]

ENUNCIAR

Un carpintero requiere construir un punzón como el que se observa en la siguiente figura:

Para ello cuenta con dos piezas separadas, las que se observan a continuación:

El corte en la pieza de madera, donde debe unirse con la parte metálica, es una circunferencia de 1 cm de diámetro. La pieza metálica es un cono de 6 cm de altura y radio de la base igual a 1,5 cm, de modo que no calza con la parte de madera, por lo que hay que cortarlo. Indique al carpintero a qué distancia, en centímetros, del vértice del cono debe hacer el corte para que ambas piezas calcen y se pueda construir el punzón.

RESOLVER

Solución

Debe cortarse el cono de modo que el resultante tenga una altura x (distancia del vértice a la base) y una base circular de 1 cm de radio. El original tiene altura 6 y una base de 1,5 cm de radio. De tal manera, $\frac{x}{1} = \frac{6}{1,5}$ y por lo tanto $x = 4$ cm.

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Geometría

- Visualización espacial: base, radio, diámetro, sección plana, cono circular recto

2. Habilidades generales

Es decir es el escenario de interacción de habilidades es el E_2.

Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales (MEP, 2012, p. 385) del área de Geometría.

Aplicar diversas propiedades y transformaciones de las figuras geométricas (MEP, 2012, p. 301) del área de Geometría.

---

[1] Este ejemplo y su análisis fueron elaborados por Hugo Barrantes.

3. Habilidades específicas

Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto. (G11.4, p. 399).
Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base. (G11.17, p. 399).
Aplicar los criterios de semejanza: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos (G8.8, p. 311).

4. Contextos

Este problema posee un contexto “ocupacional”.

Las tareas matemáticas son necesarias para resolver el problema, hay claramente contextualización activa.

VALORAR

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar
Debe saber que el radio de la base del cono es 1 resultante del corte debe ser igual a 1, esta información no está dada explícitamente (indicador RA2.1). Por tal motivo el proceso se da en grado 2.

Plantear y resolver problemas
El problema se resuelve mediante un algoritmo que consiste en la aplicación de una semejanza de triángulos (indicador PRP1.2). Esto corresponde al grado 1 del proceso.

Conectar
Se conectan conceptos matemáticos (semejanza, cortes planos en un cono) y una situación de contexto real (indicador C2.1). El proceso se da en grado 2.

Comunicar
La información matemática que aparece en el texto es similar a la estudiada de modo que se puede identificar e interpretar fácilmente (indicadores COM1.1 y COM1.2), la respuesta se proporciona de forma breve. El proceso se da en grado 1.

Representar
La información sobre el radio de la base del cono resultante después del corte aparece codificada en el enunciado (indicador R2.1). El proceso aparece en grado 2.

6. Nivel de complejidad

Puesto que hay tres indicadores son de grado 2 en los diferentes procesos, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como "*Conexión*" (por criterio NC2).

Resumen de indicadores de los procesos y nivel de complejidad

EIPP: RA2.1, PRP1.2, C2.1, COM1.1, COM1.2, R2.1
Conexión (NC2)

Ejemplo 2: Una recta corta una circunferencia[2]

ENUNCIAR

La ecuación de una circunferencia C es $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2=\mathbf{9}$*. Una recta L pasa por los puntos* $\left(-\frac{2}{3},-\mathbf{3}\right)$ *y* $(\mathbf{6},\mathbf{2})$*.*

El número de puntos en que se cortan la circunferencia C y la recta L corresponde a ____

RESOLVER

Solución

La ecuación de L es $\boldsymbol{y}=\frac{3x-10}{4}$. Esta ecuación es equivalente a la forma usual: $\boldsymbol{y}=\frac{3}{4}\boldsymbol{x}-\frac{5}{2}$, pero puede resultar más sencillo utilizar la primera forma que dimos. La circunferencia y la recta se cortan en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}$ para el cual

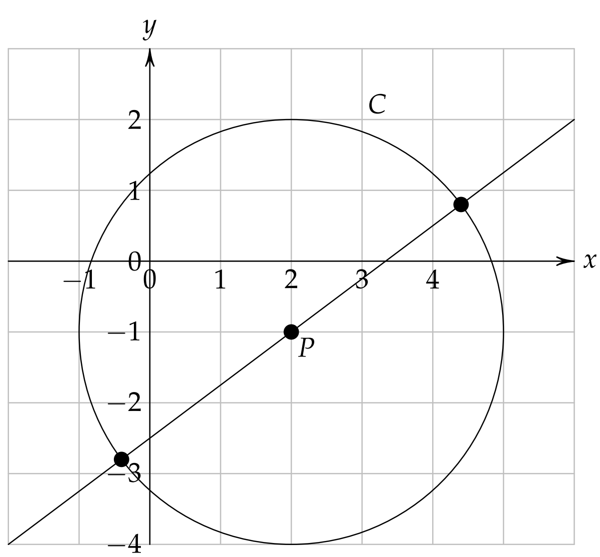
$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{10}}{\mathbf{4}}+\mathbf{1}\right)^2=\mathbf{9}$$

que es equivalente a $\mathbf{25}\boldsymbol{x}^2-\mathbf{100}\boldsymbol{x}-\mathbf{44}=\mathbf{0}$, cuyo discriminante es $\mathbf{14\,400}>\ \mathbf{0}$. Se concluye que la ecuación tiene dos soluciones en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, se cortan en dos puntos. Si no se observa que el discriminante es positivo y se sigue resolviendo la ecuación se llega a la solución mediante el uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\boldsymbol{x}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sustituyendo en este caso los valores correspondientes $\boldsymbol{a}=\mathbf{25},\boldsymbol{b}=-\mathbf{100},\boldsymbol{c}=-\mathbf{44}$, y realizando los cálculos correspondientes, se obtiene dos valores para $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}_1=\frac{22}{5},\boldsymbol{x}_2=\frac{-2}{5}$. Luego, se cortan en dos puntos. Respuesta: **2,00**

Otra posible estrategia consiste en trazar la recta y la circunferencia en un sistema de ejes. Recordamos que esta estrategia puede complicarse según sean los datos del centro y el radio de la circunferencia y de la recta involucrados.



[2] Este ejemplo y su análisis fueron elaborados por Hugo Barrantes.

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Geometría
- Centro - radio - recta secante - recta tangente - recta exterior

Relaciones y Álgebra
- función lineal

2. Habilidades generales

Geometría:
- Analizar relaciones de posición relativa entre rectas y circunferencias (MEP, 2012, p. 385).

Relaciones y Álgebra
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).
- Utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado para resolver problemas (MEP, 2012, p. 328).

3. Habilidades específicas

- Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia (G10.6, p. 386).
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (RyA10.12 p. 410).
- Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita (RyA9.12, p. 341), como conocimiento previo.

El escenario de interacción de las habilidades generales es el E_5.

4. Contextos

Es un contexto matemático.

VALORAR

5. Intervención de los procesos en el problema

Razonar y argumentar
Para resolver el ítem se debe identificar información matemática que no está dada explícitamente; en este caso, la ecuación de una recta. Por tal motivo el proceso se da en grado 2 (indicador RA2.1).

Plantear y resolver problemas
Por otra parte, una vez identificada la ecuación de la recta, lo que sigue es la aplicación de un algoritmo que consiste en sustituir el "y" de la ecuación de la circunferencia por el valor de "y" en términos de "x" dado por la ecuación de la recta y luego determinar el número de soluciones de la ecuación cuadrática que se obtiene. Esto corresponde al grado 1 (indicador PRP1.2).

Conectar
La solución relaciona claramente procedimientos matemáticos del área de Geometría (identificación de la ecuación de una circunferencia) con procedimientos del área de Relaciones y álgebra (determinación de la ecuación de una recta y resolución de ecuaciones de segundo grado -conocimientos previos). Esto corresponde al grado 2 (indicador C2.2).

Comunicar

En cuanto a "Comunicar", se da en el grado 1, pues se identifican e interpretan situaciones matemáticas similares a las ya estudiadas y los resultados se comunican de manera breve (indicadores COM1.1 y COM1.2). También se debe comunicar en forma breve el resultado (indicador COM1.4).

Representar
Este proceso aparece en el grado 2. Se debe razonar e interpretar sobre información codificada, particularmente la información que se puede obtener a partir del conocimiento de dos puntos de una recta (su pendiente y su y-intersección) (indicador R2.1). También se pasa de una representación a otra: de la información dada verbalmente para la recta a su representación algebraica (su ecuación) (indicador R2.2).

6. Nivel de complejidad

Se dan cuatro indicadores de grado 2, luego, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como "*Conexión*" (por criterio NC2).

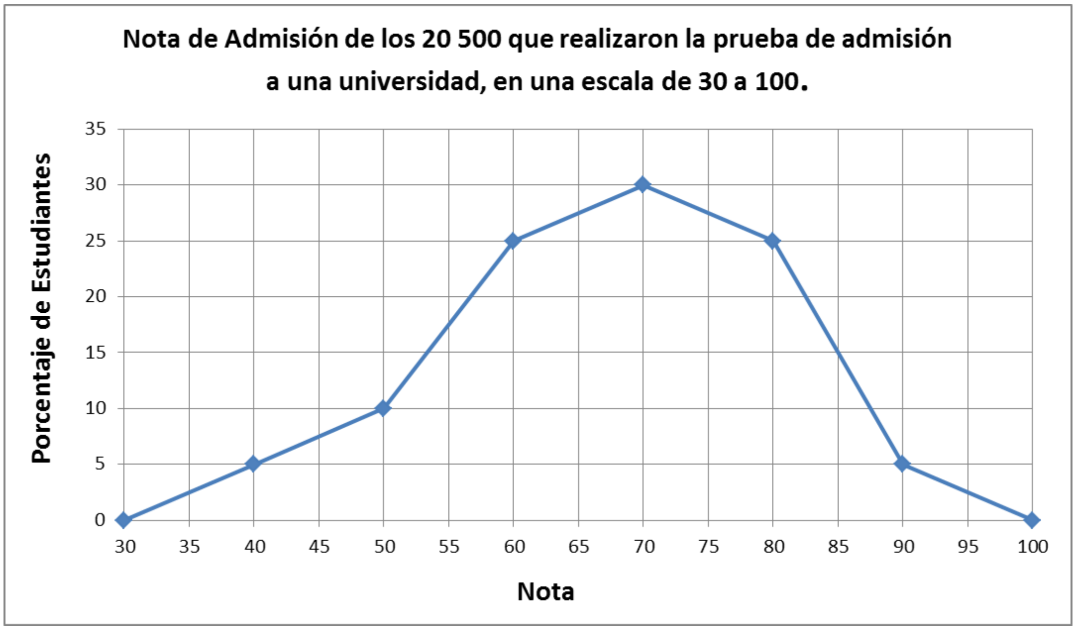
Resumen de indicadores de los procesos y nivel de complejidad

EIPP: RA2.1, PRP1.2, C2.2, COM1.1, COM1.2, COM1.4, R2.1, R2.2.
Conexión (NC2)

Ejemplo 3: Examen de admisión a una universidad[3]

ENUNCIAR

Supongamos que 20 500 estudiantes realizaron el examen de admisión a una universidad. Las calificaciones fueron resumidas en el siguiente polígono de frecuencias.



En el polígono de frecuencias, el área encerrada con el eje x representa el 100% de los estudiantes que realizaron el examen y la nota mínima de admisión es de un 70. Considere las siguientes proposiciones:

I. *El porcentaje de estudiantes que fue admitido fue aproximadamente 45%*
II. *Aproximadamente 9225 estudiantes no fueron admitidos*

De las proposiciones anteriores se sabe con certeza que son verdaderas:

a) *Ambas*
b) *Solo la II*
c) *Ninguna*
d) *Solo la I*

RESOLVER

Solución

La representación gráfica corresponde a un polígono de frecuencias porcentual, no se tiene información de los datos individuales, pero se sabe que el área total encerrada por el polígono con el eje x incluye el 100% de los estudiantes que realizaron el examen de admisión. La distribución de los datos es la siguiente:

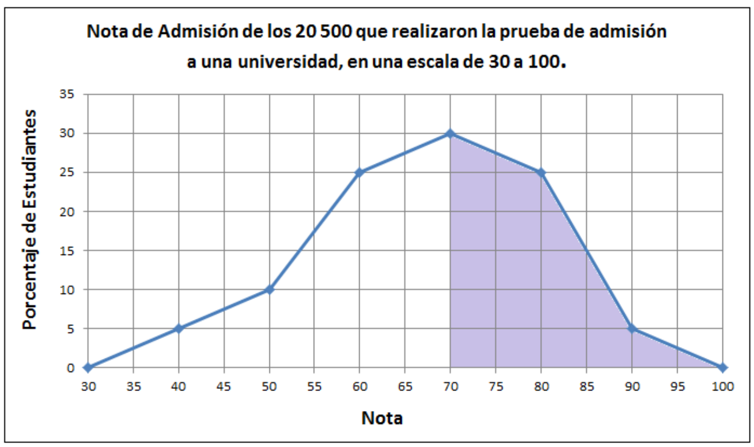
[3] Este ejemplo y su análisis fue aportado por Edwin Chaves.

Nota	Porcentaje de estudiantes
De 35 a menos de 45	5
De 45 a menos de 55	10
De 55 a menos de 65	25
De 65 a menos de 75	30
De 75 a menos de 85	25
De 85 a menos de 95	5
Total	**100**

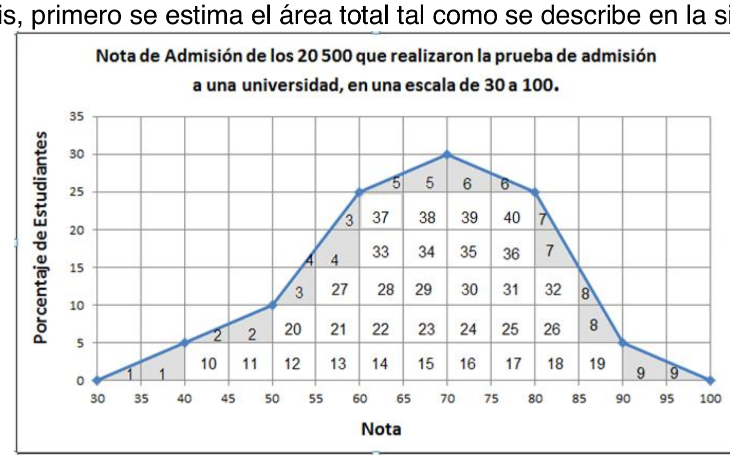
Si se acumulan los porcentajes, puede notarse que el 30% de los estudiantes tuvo notas superiores o iguales a 75 y un 60% tuvo notas mayores o iguales a 65. Esto quiere decir que el porcentaje de estudiantes que aprobó estaría entre el 30% y 60%. Lo que ocurre es que esto es muy poco preciso, pues se requiere estimar el porcentaje aproximado de estudiantes que tuvo notas superiores a 70. Esto debe realizarse mediante la estimación de áreas, tal como se describe seguidamente.

30

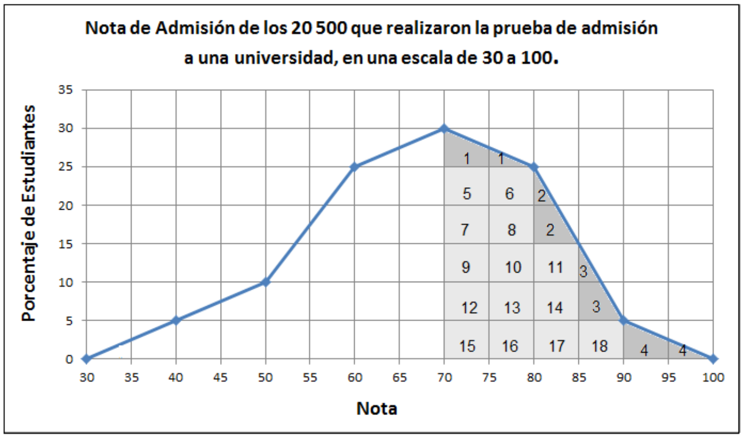
Como el área total representa el 100%, entonces el porcentaje del área de la región que se muestra, que representa la proporción de estudiantes con notas superiores o iguales a 70:



Para realizar este análisis, primero se estima el área total tal como se describe en la siguiente imagen:



El polígono en total incluye aproximadamente 40 cuadrados (de 25 unidades cuadradas cada uno), por su parte para la región de interés para el problema se tiene:



Incluye aproximadamente 18 cuadrados; por ello el porcentaje correspondiente los estudiantes que aprobaron el examen sería de $\frac{18}{40} \cdot 100\% = 45\%$. Entonces la proposición I es correcta.

Se tendría también que, aproximadamente el 55% de los estudiantes que aplicaron la prueba no obtuvo la nota mínima de admisión, esto equivale aproximadamente a $0{,}55 \cdot 20500 = 11\,275$. Por ello la proposición II es falsa, observe que 9225 sería el número estimado de estudiantes que aprobó el examen.

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad
- Representaciones tabulares y gráficas

Geometría
- Polígonos: área

2. Habilidades Generales

Estadística y Probabilidad.
- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos (MEP 2012, p. 431).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil (MEP 2012, p. 431).

Geometría**.**
- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP 2012, p. 431).

El escenario de interacción de las habilidades generales es el E_5.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad.
- Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas (E 10.1, MEP 2012, p. 432).

Geometría**.**
- Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (G10.14, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (G10.15, MEP 2012, p. 389).
- Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (G10.16, p. 391).

4. Contextos

Es un contexto social. Hay contextualización activa.

VALORAR

5. Intervención de los procesos

Razonar y argumentar
La información no está dada en forma explícita, se requiere interpretar muy bien la redacción del texto y del ítem para proceder a plantear la estrategia que ayuda a resolver el problema (RA2.1). Se requiere poner en práctica la estrategia establecida, la cual es novedosa e involucra diferentes aspectos que deben aplicarse secuencialmente: en primer lugar la estimación de áreas, en segundo lugar determinar el peso relativo del área de una región entre el área del polígono total. Este valor relativo debe utilizarse para estimar el número de personas que o fue no fue admitido (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas
Para la solución del ítem se implementa la conexión entre los procedimientos geométricos y los conceptos estadísticos para determinar el valor de verdad de las proposiciones (PRP3.1).

Conectar
Según el contexto que se plantea, se debe conectar el análisis gráfico correspondiente al polígono de frecuencias porcentuales del área de Estadística, con la estimación de áreas en polígonos de Geometría y un análisis algebraico relativo o porcentual (C3.1).

Comunicar
Debe identificar el significado del mensaje que comunica un polígono de frecuencias porcentual y contexto del problema, para utilizar la Geometría como herramienta en la resolución del ítem (COM2.1).

Representar
La representación matemática por medio del polígono de frecuencias porcentual que tiene un propósito gráfico, debe ser utilizada para estimar el porcentaje de estudiantes que ha sido admitido en la universidad y, a la vez, este valor debe permitir determinar el total de estudiantes que no fueron admitidas (R3.1).

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para los procesos se presentó una mayoría de indicadores en el grado 3, entonces el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como: reflexión (por criterio NC3).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad

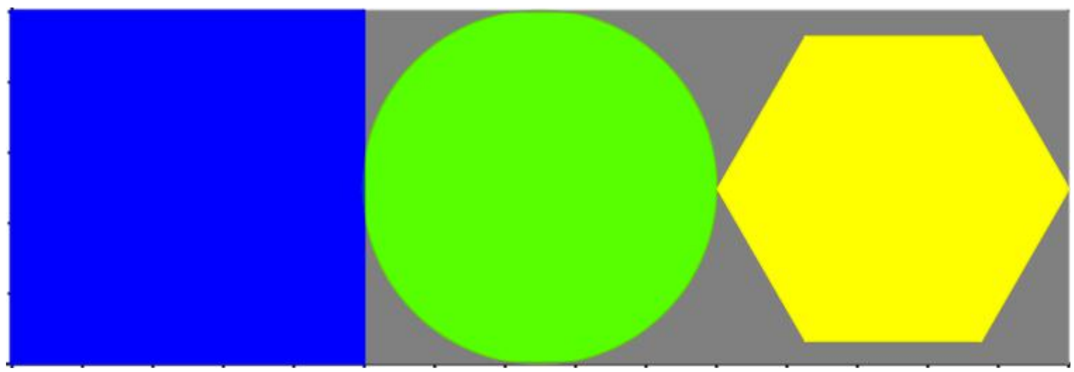
EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP3.1, C3.1, COM2.1, R3.1
Reflexión (NC3)

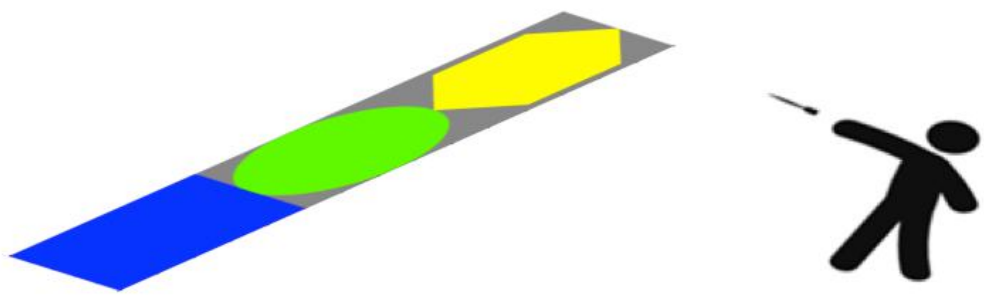
Ejemplo 4: Lanzamiento de un dardo[4]

ENUNCIAR

Esta situación o problema está concebido para desarrollarse mediante un proyecto.

Considere un juego que consiste en lanzar un dardo a la siguiente figura que se encuentra sobre el piso a una distancia de 10 metros. La figura está constituida por un rectángulo de 50 centímetros de ancho por 150 centímetros de largo. Las figuras internas son un hexágono regular, un círculo y un cuadrado.





Supuestos

1) *Si el dardo cae fuera de la figura se repite el lanzamiento*
2) *Es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del tablero (no se toma en cuenta la pericia de quien lanza)*

Si tuviera que establecer un puntaje (entre cero y cien) a cada color (o figura) dentro del rectángulo de manera que el juego sea equitativo (probabilísticamente honesto) para quienes jueguen, ¿cuáles serían los valores correspondientes?

RESOLVER

Solución

De acuerdo con las dimensiones dadas para las regiones y con los supuestos establecidos, para que exista equidad o justicia en el puntaje que se asigne a cada color (o región dentro del rectángulo), el mismo debe estar en una escala inversamente proporcional a la probabilidad de que el dardo caiga en cada una de las regiones o (lo que es equivalente) a la proporción de área que representa cada región. Por esta razón, para resolver el problema, primero se requiere determinar el área de cada una de las regiones.

[4] Este ejemplo y su análisis fue aportado por Edwin Chaves.

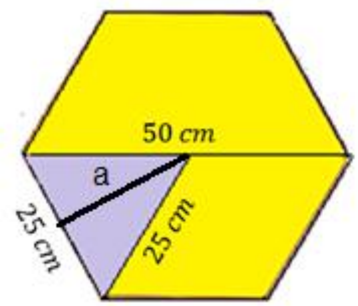
Las dimensiones del rectángulo son 50 cm de ancho y 150 cm de largo. Por esta razón, la figura de color azul corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado, por lo que su área viene dada por:

$$50\ cm \cdot 50\ cm = 2500\ cm^2$$

Por otro lado, la figura de color verde es un círculo de 50 cm de diámetro, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2 \mathrm{cm}^2 \approx 1963{,}49\ \mathrm{cm}^2$$

Para el hexágono se sabe que las diagonales miden $50\ \mathrm{cm}$, al tratarse de un hexágono regular, el lado del rectángulo mide $25\ \mathrm{cm}$



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$\mathrm{a} = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2}\ \mathrm{cm} \approx 21{,}65\ \mathrm{cm}$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\ \mathrm{cm} \cdot 21{,}65\mathrm{cm}}{2} = 1623{,}75\ \ \mathrm{cm}^2$$

Finalmente, el área de la región gris corresponde al complemento de la suma de las áreas de las tres figuras con respecto al área de la región rectangular que las incluye.

El área de las tres figuras (cuadrado, círculo y hexágono) mide aproximadamente:

$$2500\ \mathrm{cm}^2 + 1963{,}49\ \mathrm{cm}^2 + 1623{,}75\ \ \mathrm{cm}^2 = 6087{,}24\ \mathrm{cm}^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150\ \mathrm{cm} \cdot 50\ \mathrm{cm} = 7500\ \mathrm{cm}^2$$

El área de la región gris sería aproximadamente:

$$7500\ \mathrm{cm}^2 - 6087{,}24\ \mathrm{cm}^2 = 1412{,}76$$

De acuerdo con lo anterior y según establece la definición clásica de probabilidad, se tendría:

Región	**Área en *cm²***	**Probabilidad de ocurrencia** $\left(\frac{área\ de\ región}{Area\ total}\right)$
Azul (cuadrado)	2500,00	0,333
Verde (círculo)	1963,49	0,262
Amarilla (hexágono)	1623,75	0,217
Gris	1412,76	0,188
Total	7500,00	1,000

Seguidamente se deben utilizar estos valores para determinar los puntajes correspondientes a cada región, los cuales deben estar en relación inversa a las probabilidades:

Región	**Relación inversa a la probabilidad** $\left(\frac{1}{Probabilidad}\right)$	**Peso relativo por región**	**Puntaje por región en escala 0 a 100**

Azul (cuadrado)	3,00	0,179	17,9
Verde (círculo)	3,82	0,228	22,8
Amarilla (hexágono)	4,61	0,275	27,5
Gris	5,32	0,318	31,8
Suma	16,75	1,000	100

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad
- Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad.

Geometría
- Polígonos: área

Relaciones y Álgebra
- Proporcionalidad inversa

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP 2012, p. 431).

Geometría
- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP 2012, p. 431).

Relaciones y Álgebra
- Identificar y utilizar distintas representaciones para relaciones de proporcionalidad. (MEP, 2012, p. 328).

El escenario de interacción de áreas es E4.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad
- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P 10.6, p. 436).

Geometría
- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).
- Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos (G10.13, p. 389).

Relaciones y Álgebra
- Identificar relaciones de proporcionalidad inversa en diversos contextos reales. (RyA7.3, p. 329)
- Analizar relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica. (RyA 7.4, p. 330)

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

VALORAR

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar:
La información no está en forma explícita, esto obliga a los estudiantes a plantear e implementar diferentes argumentos vinculados con el cálculo de áreas y con la proporcionalidad inversa. En este sentido el problema la situación resulta novedosa para los estudiantes (RA3.1). Por esta misma razón, se requiere desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver el problema (RA3.2). Grado 3

Plantear y resolver problemas
El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas, la identificación de la probabilidad de las regiones, la identificación del inverso multiplicativo de las probabilidades y su uso para determinar como el peso relativo de cada región (PRP3.1). Grado 3

Conectar
Se debe realizar la conexión entre diferentes matemáticos y una situación de un contexto lúdico, para resolver un no estudiado y relativamente complejo (C3.1). Grado 3

Comunicar
Se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), el cálculo de las áreas para determinar directa o indirectamente la probabilidad que el dardo caiga en cada región, la identificación de que los valores buscados están en proporción inversa con estas probabilidades y su determinación posterior. Por ello, se requiere seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos y complejos que no han sido estudiados (COM 3.1), además expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática (COM3.2). Grado 3.

Representar
En el desarrollo del proyecto se debe hacer una adecuada lectura de la información textual y visual para la determinación de áreas de cada región, pasar luego a las probabilidades o las proporciones correspondientes del área de cada región en relación al rectángulo que las incluye, luego deben convertir estos valores en nuevas representaciones que son sus inversos multiplicativos y finalmente determinar los pesos relativos de cada región en la escala de 0 a 100. (R3.1 y R3.2) Grado 3.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para todos procesos los indicadores son de grado 3, por todo ello el problema es de Reflexión (NC3).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad proyecto completo

EIPP: RA3.1, RA3.2, PRP3.1, C3.1, COM3.1, COM3.2, R3.1, R3.2
Reflexión (NC3)

Acción de aula

El desarrollo de este proyecto mediante el trabajo colaborativo permite llegar a un nivel superior de razonamiento. Este es un claro ejemplo por medio del cual se relacionan conceptos geométricos, algebraicos y probabilísticos para resolver un problema que, aunque hipotético, ejemplifica una situación lúdica que requiere de mucha destreza matemática y del dominio de diferentes habilidades para encontrar la solución.

Aunque los cálculos no son complejos, el mayor reto se enfoca a la identificación y planificación de la estrategia matemática que se debe implementar para encontrar la solución. Por esta razón, es necesario otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes puedan debatir en la interpretación del problema y en la búsquela de una estrategia de solución. Es posible que inicien con estrategia de ensayo y error que les ayude a identificar la ruta correcta. El docente debe estar atento para apoyar este proceso.

Dada la complejidad del problema que se ha incluido en el proyecto, no es adecuado utilizarlo para la generación de conocimiento nuevo sino para una etapa posterior que permita la movilización y aplicación de las habilidades adquiridas en diferentes áreas matemáticas.

Descomposición del problema en dos sub-problemas

Si se desea evaluar un problema de esta naturaleza, el mismo debe ser descompuesto en problemas menores que puedan ser incluidos dentro de una prueba o examen. Seguidamente se presentan dos ítems que se vinculan directamente con el problema original, pero que son de un nivel de dificultar menor:

Sub-problema 1

ENUNCIAR

Considere el contexto "Lanzamiento de un dardo" y las siguientes proposiciones:

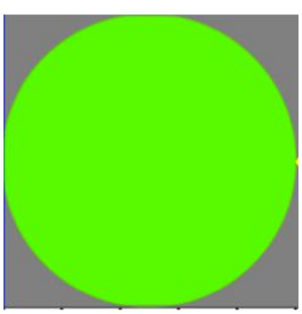
I. *Bajo el supuesto que el dardo cae en la figura, la probabilidad que el dardo caiga en la región circular es mayor a que lo haga en la región cuadrada.*
II. *Bajo el supuesto que el dardo cae en la figura, resulta más probable que el dardo no caiga en alguna de las regiones a que lo haga en la región hexagonal*

De las proposiciones anteriores se sabe con certeza que son verdaderas:

a) *Ambas*
b) *Solo la II*
c) *Solo la I*
d) *Ninguna*

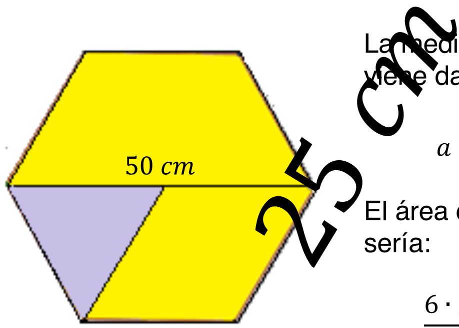
RESOLVER

Para determinar el valor de verdad de las proposiciones, en el entendido de que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto de la figura, se requiere valorar la medida de las áreas correspondientes. Para la proposición I simplemente basta con observar que la medida del lado del cuadrado es de 50 cm igual que el diámetro del círculo, en estas condiciones el círculo tiene menor área debido a que su circunferencia podría circunscribirse en el cuadrado. La proposición I es falsa.



Sin embargo, para la proposición II se requiere calcular el área de las tres figuras. En primer lugar el área del cuadrado es $50 \cdot 50\ cm^2 = 2500\ cm^2$. Para el círculo, debido a que el radio mide $25\ cm$, entonces su área es $\pi \cdot$

$25^2 cm^2 \approx 1963{,}49\ cm^2$. Para el hexágono se sabe que las diagonales miden $50\ cm$, al tratarse de un hexágono regular, el lado del rectángulo mide $25\ cm$



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2}\ cm \approx 21{,}65\ cm$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\ cm \cdot 21{,}65 cm}{2} = 1623{,}75\ \ cm^2$$

Entonces el área de las tres figuras mide aproximadamente:

$$2500\ cm^2 + 1963{,}49\ cm^2 + 1623{,}75\ \ cm^2 = 6087{,}24\ cm^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150\ cm \cdot 50\ cm = 7500\ cm^2$$

El área del rectángulo que no está incluida en las figuras sería aproximadamente:

$$7500\ cm^2 - 6087{,}24\ cm^2 = 1412{,}76$$

Entonces la proposición es falsa.

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad
- Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades

Geometría
- Polígonos: área

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP 2012, p. 431).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad.

Geometría
- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP 2012, p. 431).

El escenario de interacción de áreas es E5.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad
- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P10.6, MEP 2012, p. 436).

Geometría
- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).

- Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos (G10.13, p. 389).

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

VALORAR

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar
Para en análisis de la primera proposición basta con observar las regiones amarilla y verde para identificar que el área de la verde es mayor y por ende va a tener mayor probabilidad, pero para la segunda proposición se requiere realizar un cálculo de áreas en las diferentes regiones. En general, la información no está en forma explícita y además se requiere utilizar los cálculos de las áreas para deducir el análisis probabilístico (RA2.1). En la segunda proposición la respuesta al problema no es directa, se requiere realizar el análisis descrito en el punto anterior para proceder a determinar su valor de verdad (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas
El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas y la identificación de la probabilidad de las regiones como el peso relativo del área de cada región sobre el área total del rectángulo (PRP3.1). Grado 3.

Conectar
En el contexto del juego, se debe conectar el cálculo de áreas y el cálculo de probabilidades para llegar a la solución (C2.1). En la solución del ítem interviene el cálculo de áreas vinculado con geometría y la determinación probabilidades en eventos particulares (C2.2).Grado 2.

Comunicar
Desde el punto de vita de la redacción del ítem, se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), además el vínculo de la medida de las áreas con respecto al concepto clásico o laplaciana de probabilidad (COM2.1). Grado 2.

Representar
Lo que se tiene en este ítem son tres figuras geométricas incluidas en una figura mayor (un rectángulo con dimensiones dadas). La información proporcionada por estas figuras debe fundamentar la identificación de las probabilidades para determinar la validez de las proposiciones (R2.1). En la solución del ítem se requiere pasar de la identificación del área de las regiones con la representación de la probabilidad bajo el enfoque clásico o laplaciano (R2.2). Grado 2.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para los procesos la mayoría de los indicadores son de grado 2, aunque el indicador de plantear y resolver problemas es de grado tres. Sin embargo, se debe observar que la solución del ítem incluye una combinación de procedimientos que aumentan el nivel de dificultad, por ello se puede catalogar como un ítem de Reflexión (NC5).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad sub-problema 1

EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP3.1, C2.1, C2.2, COM2.1, R2.1, R2.2
Reflexión (NC5)

Sub-problema 2

ENUNCIAR

Considere el contexto "Lanzamiento de un dardo", la probabilidad aproximada que el dardo caiga en el círculo viene dada por:_____

RESOLVER

Solución

Debido a que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto de la figura, entonces la probabilidad de que el dardo caiga en el círculo viene se determina por medio del valor relativo que tiene el área de círculo en relación el área de la figura completa.

El diámetro del círculo es $50\ cm$, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2 cm^2 \approx 1963{,}49\ cm^2$$

Del mismo modo el área del rectángulo sería:

$$150\ cm \cdot 50\ cm = 7500\ cm^2$$

Entonces la probabilidad que el dardo caiga en el círculo es $\frac{1963{,}49\ cm^2}{7500\ cm^2} \approx 0{,}262$

IDENTIFICAR

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad
- Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades

Geometría
- Polígonos: área

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad.
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP 2012, p. 431).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil (MEP 2012, p. 431).

Área de Geometría**.**
- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP 2012, p. 431).

El escenario de interacción de áreas es E5.

3. Habilidades específicas

Estadística y probabilidad
- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P10.6, p. 436).

Geometría

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

VALORAR

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar
La información no está en forma explícita para el cálculo de la probabilidad, se requiere determinar las áreas correspondientes y luego determinar el valor relativo que corresponde a la probabilidad (RA2.1). La respuesta al problema no es directa, se requiere realizar el análisis descrito en el punto anterior para proceder a determinar el valor de la probabilidad (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas
Para encontrar el valor de la probabilidad se requiere plantear la estrategia descrita en el análisis del proceso anterior, el procedimiento podría ser novedoso, aunque de simple aplicación (PRP2.1). Grado 2.

Conectar
Se debe conectar el cálculo de áreas y el cálculo de probabilidades para llegar a la solución (C2.1). En la solución del ítem interviene el cálculo de áreas vinculado con geometría y la determinación probabilidades en eventos particulares (C2.2). Grado 2.

Comunicar
En este proceso el ítem se debe hacer una lectura del contexto y de la figura, se espera que el procedimiento por aplicar (COM1.1). Se debe interpretar la redacción del contexto y de la figura para establecer la estrategia de solución, como se indicó antes este procedimiento debería ser conocido por el estudiante (COM1.2). El ítem solicita que se comunique en forme breve la repuesta en forma de una probabilidad (COM1.4). Grado 1.

Representar
Para el desarrollo de ítem se requiere interpretar y razonar sobre la información que proporcionan las figuras geométricas y sus respectivas áreas (R2.1). Se requiere convertir de la información que proporcionan las figuras geométricas y sus respectivas áreas en la representación matemática de la probabilidad como un cociente de áreas (R2.2). Grado 2.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, la mayoría de los indicadores para los procesos son de grado 2, entonces el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como Conexión (NC2).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad sub-problema 2

EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP2.1, C2.1, C2.2, COM1.1, COM1.2, COM1.4, R2.1, R2.2
Conexión (NC2)

Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622

Créditos

La selección, diseño y valoración de tareas matemáticas es un documento elaborado en el marco del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Autor
Angel Ruiz

La selección, diseño y valoración de tareas matemáticas fue elaborado con base en textos contenidos en la publicación: Ruiz, A. (2017, diciembre). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, octubre. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622

Colaboradores
Hugo Barrantes, Edwin Chaves

Revisión
Comisión central del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Director del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2018). *La selección, diseño y valoración de tareas matemáticas.* San José, Costa Rica: autor.