Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

mep Ministerio de Educación Pública

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

www.reformamatematica.net

CRUSA Fundación para la cooperación

Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque en Resolución de problemas

Relaciones y Álgebra

2012

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Ciclo Diversificado posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, iniciar con *Relaciones y Álgebra* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. A continuación se sigue con *Estadística y Probabilidad*, que no estaba presente en el plan anterior. Y finalmente *Geometría*, cuyos contenidos son completamente distintos a los del programa anterior. Estas tres unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Ciclo Diversificado se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Relaciones y Álgebra

Habilidad general

- Aplicar el concepto de función en diversas situaciones.
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes.
- Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada.

Introducción

Históricamente, el principal valor de las Matemáticas ha sido el responder a preguntas básicas acerca de nuestro mundo físico, para comprender las complejas operaciones de la naturaleza y disipar gran parte del misterio que envuelve la vida. La humanidad, a lo largo de su existencia, ha sentido la necesidad de comprender y modelizar los fenómenos de su entorno para poder explicar y predecir situaciones relacionadas con su diario vivir. El ser humano ha buscado la mejor forma de representar estas situaciones utilizando para ello símbolos, fórmulas, tabulación y representación gráfica de datos e introduciendo variables para generalizar casos particulares.

Las aplicaciones y la modelización matemática han adquirido mucha importancia en las últimas décadas en vista del aumento mundial en el uso de matemáticas en la ciencia, la tecnología y la vida diaria. En el presente siglo es casi imposible encontrar un campo de estudio que no utiliza herramientas matemáticas: los biólogos utilizan ecuaciones diferencias para describir modelos de poblaciones, los químicos utilizan la geometría espacial para describir las moléculas, los diseñadores de escenarios digitales utilizan la trigonometría en la determinación de la mejor iluminación para una escena, los gobiernos, bancos y empresas utilizan las matemáticas para determinar la producción, los precios y la mejor forma de hacer inversiones.

Este material está dirigido a estudiantes del Ciclo Diversificado y pretende mostrar el potencial y utilidad de las matemáticas analizando algunos tópicos de *Relaciones y Álgebra* mediante la construcción de actividades didácticas y problemas bajo el enfoque de los nuevos programas de estudio de Matemáticas.

Las actividades que se describen en este material pueden ser desarrolladas en el salón de clase por los estudiantes y pueden ser adaptadas y mejoradas para tener una mayor relación con la realidad de la institución educativa donde se desarrollen.

I. Función inversa

Actividad 1

La criptología estudia cómo hacer y revelar códigos secretos que son utilizados para enviar mensajes. En la práctica se utilizan funciones inyectivas complicadas y su inversa para codificar y decodificar mensajes. Inicialmente asignaremos un número de dos dígitos a cada una de las 27 letras del alfabeto español, y a un espacio en blanco, conforme la tabla que sigue:

A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
G 16	H 17	I 18	J 19	K 20	L 21
M 22	N 23	Ñ 24	O 25	P 26	Q 27
R 28	S 29	T 30	U 31	V 32	W 33
X 34	Y 35	Z 36	37		

Tabla 1

El 37 fue asignado a un espacio en blanco.

Luis envía a Miguel por Internet el siguiente mensaje codificado:

37 31 59 31 29 39 23 77 27 23 47 55 31 53 49

Como el mensaje es secreto, Luis llama por teléfono a Miguel y le dice que la función codificadora que él utilizó para el mensaje es Esto significa que el mensaje anterior fue codificado con la función dada. Para que Miguel entienda el mensaje, tiene que decodificarlo utilizando , la inversa de la función , es decir, tiene que calcular y así sucesivamente. ¿Cuál fue el mensaje secreto que Miguel decodificó?

Análisis de la Actividad 1

Este tipo de actividad es como un juego que, por lo general, despierta la curiosidad y sirve de motivación para el estudio de las funciones inversas. La tarea fue simplificada debido a que el emisor utiliza otro canal (el teléfono) para dar la función codificadora. Lo ideal sería que el emisor enviara alguna clave indirecta para que el receptor pudiera decidir cuál fue la función codificadora, y de esta forma no correr el riesgo de que algún espía escuchara la llamada telefónica o la interceptara de alguna forma.

En la situación planteada hay que determinar la inversa de la función cuyo criterio es Empezando con , se intercambia x con y para obtener la ecuación . Se despeja el valor de y como función de x: para obtener la inversa . Esta es la función que Miguel tendrá que utilizar para decodificar el mensaje. Sea

17	14	28	14	13	18	10	37	12	10	22	26	14	25	23

Tabla 2

Basta buscar en la tabla 1 las letras correspondientes a los números de la segunda fila en la tabla 2 para descifrar el mensaje enviado por Luis.

Construya su propio mensaje codificado, con otra función lineal y solicite a un amigo o amiga que lo decodifique con la inversa de la función utilizada.

I. Modelos de funciones

Actividad 2

La cicatrización normal de heridas puede obtenerse por medio de una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es igual el área de la herida después de n días, entonces la cicatrización normal de heridas puede ser modelada por .

La mano de Ana Paola fue herida un domingo 26 de mayo a las 8 a.m. cuando jugaba en el parque cerca de su casa. Si el proceso de cicatrización de la herida de Ana Paola es normal, ¿qué día y aproximadamente a qué hora tendrá el 90% de su herida cicatrizada?

Análisis de la Actividad 2

Esta actividad permite ver la aplicabilidad de los modelos matemáticos a situaciones de un contexto real para el estudiante, particularmente aquellos modelos que utilizan las funciones estudiadas en el Tercer ciclo y en el Ciclo Diversificado.

En este programa, un modelo matemático es un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica, que permite explicar, describir y hacer predicciones. La modelización siempre aparecerá integrada a los cinco procesos centrales del programa: Plantear *y resolver problemas, Razonar y argumentar, Conectar, Representar y Comunicar.*

El modelo para esta actividad tiene conexiones con áreas de la salud y abre espacios para distintas representaciones matemáticas: simbólica o algebraica, gráfica y tabular. Inicialmente el docente puede leer o distribuir a cada subgrupo de estudiantes una hoja impresa acerca del proceso de cicatrización de una herida, como el que sigue:

La cicatrización es un proceso natural que posee el cuerpo para regenerar los tejidos de la dermis y epidermis que han sufrido una herida. Cuando una persona posee una herida en el proceso de recuperación se llevan a cabo una serie de complejos fenómenos bioquímicos que se suceden para reparar el daño. Estos fenómenos ocurren con cierto solapamiento temporal y pueden ser divididos para su estudio en las siguientes fases: inflamatoria, proliferativa, y de remodelación.

En la fase inflamatoria se eliminan las bacterias y suciedad, y se liberan factores que producen la migración y división de las células que toman parte en la fase proliferativa.

La fase proliferativa se caracteriza por la formación de tejido granular, y la contracción de la herida.

Las células epiteliales se desplazan sobre la herida cubriéndola y los miofibroblastos ayudan a reducir el tamaño la herida.

En la fase de maduración y remodelado, el colágeno es remodelado y realineado a lo largo de las líneas de tensión y las células que ya no son necesarias, son eliminadas.

Sin embargo, este proceso no solo es complejo sino que es frágil, y susceptible de ser interrumpido o fallar, lo que conduce a la formación de heridas crónicas con problemas de cicatrización. Algunos factores que pueden contribuir a este problema son la diabetes, enfermedades de las venas o arterias, edad avanzada e infecciones.

Solución de la situación presentada

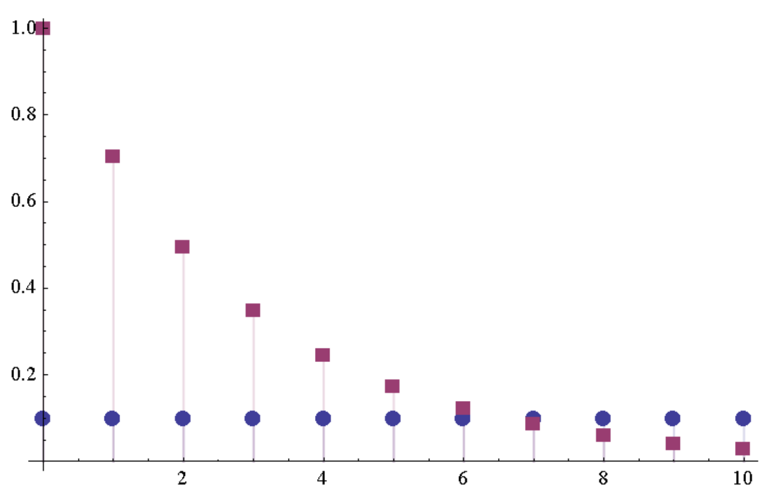
En la situación presentada, se espera que los estudiantes calculen el número de días *n* para que $A(n)=10\%\ A_0$, pues se pretende que el 90% de la herida haya sido cicatrizada. Utilizando el modelo para la cicatrización normal de heridas se tiene

, es decir, .

Representando tabularmente la cantidad en una hoja de Excel, se observa que existe un cambio de signo en la relación , entre los días 6 y 7, lo que lleva a conjeturar que el 90% de la cicatrización ocurrirá entre los días mencionados.

	A	B
1	N (días)	Exp(-0,35N) -0,1
2	**1**	0,60468809
3	**2**	0,396585304
4	**3**	0,249937749
5	**4**	0,146596964
6	**5**	0,073773943
7	**6**	0,022456428
8	7	-0,013706414
9	**8**	-0,039189937
10	**9**	-0,057147873
11	**10**	-0,069802617

Graficando la función discreta $f(n) = e^{-0,35n}$ y la función discreta constante $g(n) = 0{,}1$, también se observa que $f(n)$ coincide con $g(n)$ entre los días 6 y 7.



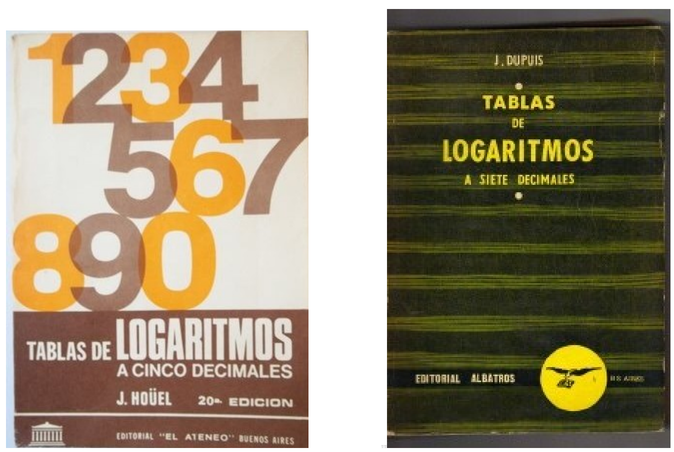
Finalmente, aplicando logaritmo y utilizando una calculadora o bien una hoja de cálculo tipo Excel, se obtiene

Por lo tanto días, es decir, aproximadamente 6 días y 14 horas. El sábado 01 de junio a las 8 a.m. se completan los 6 días, y este mismo sábado a las 10 p.m. se completa el tiempo para que el 90% de su herida haya sido cicatrizada.

Es necesario brindar espacios para que cada estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus aportes e ideas. El docente puede dirigir la discusión mediante preguntas que permitan a los estudiantes expresar sus estrategias utilizadas.

El modelo utilizado es empírico y bastante sencillo. Un posible error al utilizarlo consistiría en escribir $A(n)=90\%\ A_0$ creyendo ser la interpretación correspondiente al 90% de la herida cicatrizada.

Otro factor importante es la necesidad de utilizar tecnología digital para calcular el logaritmo de 0,1 o para las representaciones gráfica y tabular del modelo. Hace algunas décadas no se tenían calculadoras a disposición y se debían utilizar tablas de logaritmos para hacer estos cálculos. La situación era más compleja pues si el número no se encontraba en la tabla entonces había que hacer interpolaciones para obtener el valor aproximado de su logaritmo. Posteriormente, aparecieron las reglas de cálculo que simplificaban esta labor, pero ahora tenemos calculadoras y software que facilitan los cálculos de expresiones mucho más complejas que las que aparecen en esta situación.



Libros de tablas de logaritmos

Un poco de historia

Encontramos raíces del concepto de logaritmos en la obra de Arquímedes de Siracusa (c. 287-212 a. C.) denominada El arenario. En esta obra Arquímedes plantea un problema que consiste en calcular cuántos granos de arena son necesarios para llenar el universo. Para ello, Arquímedes comparó una sucesión aritmética con otra geométrica y proporcionó una regla que podemos traducir, actualmente, así: “para multiplicar entre sí dos números arbitrarios de la sucesión geométrica, hay que sumar los dos números correspondientes de la sucesión aritmética, y posteriormente buscar en la sucesión aritmética la suma encontrada. El número de la sucesión geométrica que corresponda a esta suma será el producto deseado”.

p. a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

p. g.	2	4	8	16	32	64	128	256	512	

Por ejemplo, si queremos multiplicar buscamos en la progresión aritmética los números correspondientes a 16 y 32 de la progresión geométrica. En este caso son 4 y 5. Sumamos y buscamos en la progresión geométrica el número correspondiente al 9 de la progresión aritmética, que en el ejemplo es 512. Por lo tanto

Otras fuentes para la idea de logaritmo se encuentran en los trabajos de algunos algebristas como Nicolas Chuquet (1430-1487) y Michael Stifel (1487-1567) que elaboraron tablas que relacionaban las potencias de 2 con sus exponentes, y demostraron que la multiplicación en una tabla correspondía a la suma en la otra.

Michael Stifel en su obra *Arithmetica integra* (1544) presentó la primera tabla de logaritmos que existe. Como Arquímedes, él comparó una sucesión aritmética con otra geométrica, agregando términos negativos en la primera sucesión.

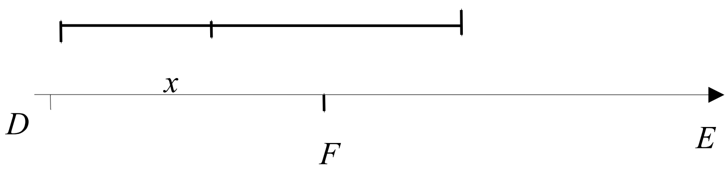
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión superior los denominó exponentes. Para efectuar una división de los números de la sucesión inferior, él realizaba una resta. Por ejemplo, , se hace y se lee debajo del número 6 el número 64 que es el resultado de la división. Para la potenciación, llamada por Stifel "multiplicación por sí mismo", se efectúa la "suma consigo mismo", lo que es equivalente a multiplicación del exponente por el número correspondiente de la progresión aritmética. Por ejemplo, para calcular , se calcula , y el resultado correspondiente en la progresión geométrica es 64, es decir, Por lo tanto, la potenciación se obtiene mediante sumas "consigo mismo" o bien multiplicación. De igual forma, la radicación se obtiene mediante "restas sucesivas" o bien división. Si queremos la raíz cúbica de 64, vemos que a 64 le corresponde el número 6 (en la p.a.) y al dividir 6 por 3 (por ser raíz cúbica) obtenemos 2, que corresponde al número 4 en la p.g. y así

En inicios del siglo XVII John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632), trabajando en forma independiente, construyeron tablas que permitían calcular multiplicaciones de números enteros (no sólo potencias de 2) mediante sumas, pero Napier fue el primero en publicar su trabajo.

En su obra Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Descripción del maravilloso canon de logaritmo), publicado en 1614, Napier introdujo brevemente las tablas de logaritmos y mostró cómo utilizarlas. Este trabajo contiene una tabla de logaritmos Neperianos de senos de ángulos para minutos de arcos. En su segundo trabajo Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (Construcción del maravilloso canon de logaritmos), publicado en 1619, él describió la teoría utilizada para construir las tablas. Para ello, Napier consideró un segmento y un rayo infinito (figura abajo).

A C v B



Los puntos C y *F* se mueven hacia la derecha, partiendo al mismo tiempo de los puntos *A* y *D* respectivamente, con igual velocidad (inicial). El punto C se mueve con rapidez numéricamente igual a la distancia *CB* mientras que *F* se mueve con velocidad constante. Napier definió la longitud *DF*, como el logaritmo de la longitud de *CB*. Denotaremos este logaritmo como Nap log (logaritmo de Napier):

Para evitar trabajar con fracciones, Napier tomó la longitud de *AB* como De la definición de Napier él dedujo que

lo que nos indica que el logaritmo Neperiano en realidad no es logaritmo natural (base *e*) como encontramos expresado en diversos textos de hoy. En realidad, el logaritmo Neperiano decrece cuando el argumento *y* crece, lo contrario de lo que ocurre con el logaritmo natural.

La publicación de la obra de Napier en 1614 logró despertar el interés de los matemáticos. En 1615 el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630) visitó a Napier en Edimburgo, y después de una discusión, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debería ser 0, mientras que el logaritmo de 10 debería ser igual a 1. De esta forma nacen los logaritmos en base 10 o *logaritmos de Briggs*. En el año 1617, año de la muerte de Napier, Briggs publicó su obra *Logarithmorum chilias prima* que contiene los logaritmos de los números 1 a 1000 con una precisión de 14 decimales, mientras que su obra *Arithmetica logarithmica* publicada en 1624 contiene los logaritmos de los números 1 a 20000 y de 90000 a 100000 con 14 cifras decimales de precisión. Con la ayuda de Adriaen Vlacq (1600-1666) Briggs completó la tabla para números entre 20000 y 90000.

El relojero y constructor de instrumentos, Jobst Bürgi (1552-1632), concibió la idea de logaritmos al mismo tiempo que Napier. Él construyó una tabla de logaritmos y la publicó en 1620, seis años después de la publicación de Napier. Los enfoques utilizados por Bürgi y por Napier fueron distintos. El de Napier fue geométrico y el de Bürgi fue algebraico.

Actividad 3

Ileana depositó ₡ 500 000,00 en una cuenta de ahorros de un banco que paga una tasa de interés anual del 8% compuesto. Si ella no retira dinero de su cuenta, determine cuánto tendrá depositado al finalizar cinco años de ahorro, si el banco capitaliza los intereses

a) Trimestralmente.
b) Mensualmente.
c) Diariamente.
d) Continuamente.

Análisis de la Actividad 3

Esta actividad tiene que ver con algo que es muy importante para todo ciudadano o ciudadana: el ahorro y la búsqueda de una mejor rentabilidad para el dinero ahorrado. Los conceptos importantes relacionados con el ahorro son el interés, el principal y el valor presente.

Interés es la cantidad que se paga por el uso de dinero. El interés es simple si es un porcentaje fijo, por periodo de tiempo, de la cantidad de dinero invertido.

La cantidad inicial de dinero invertido se conoce como *principal* o *valor presente*. Si el principal es de P colones y la tasa de *interés simple* es de $r\%$ (expresada en forma decimal) por año, entonces al finalizar t años se gana de interés $I = Prt$, y el *valor futuro*

(*principal* más intereses) después de los t años es

En algunas transacciones el interés es agregado al *principal* en intervalos regulares de tiempo, de tal forma que se paga interés sobre interés y sobre el *principal*. Este tipo de interés se conoce como *interés compuesto*.

Si la tasa de interés r anual es capitalizada n veces al año (compuesta en n períodos de

tiempo al año) entonces la tasa de interés por cada periodo es , y el número de períodos después de t años es igual a . Al finalizar el primer periodo el valor futuro correspondiente al principal P es

.

Para el segundo periodo el A_1 se convierte en valor presente. El valor futuro

, y así sucesivamente. Por lo tanto, al finalizar los periodos de capitalización, el valor futuro será:

Decimos que el *interés es compuesto continuamente* cuando el número de periodos de capitalización por año crece indefinidamente.

Si remplazamos por entonces y el valor futuro se puede escribir como:

La expresión se acerca al número e cuando k crece indefinidamente (y por lo tanto cuando el número de períodos de capitalización crece indefinidamente). En este caso el valor futuro obedece al siguiente modelo matemático:

En resumen:

Fórmula de interés compuesto

Si un valor presente (principal) P se invierte a una tasa de interés anual r (expresada en forma decimal) que es compuesta n veces al año, durante t años, entonces su valor futuro es

Fórmula de interés compuesto continuamente

Si un valor presente (principal) P se invierte a una tasa de interés anual r (expresada en forma decimal) que es compuesta continuamente, durante t años, entonces su valor futuro es

Para la situación presentada tenemos r = 0,08 (8%), t = 5 años, P = ₡ 500 000,00.

a) n = 4 pues el año tiene cuatro trimestres.

colones

b) Se utiliza $n = 12$ pues existen 12 meses en un año

colones

c) Como existen 365 días en un año, se utiliza $n=365$ (algunas instituciones financieras utilizan n=360)

colones

d) En este caso se tiene

colones

Se puede observar que entre las instituciones que pagan una tasa de interés anual r, vale la pena ahorrar en aquella que tenga un mayor número de periodos de capitalización, y la mejor de todas es la que utiliza interés compuesto continuo. Si dos instituciones tienen tasas de interés anual y capitalización de intereses distintas entonces hay que hacer los cálculos para ver cuál de ellas ofrece mayores ventajas.

En la tabla que sigue se hacen algunas comparaciones, utilizando ₡500 000,00 como principal y t = 5 años.

Instituci	Tasa de interés	Capitalización de	Valor futuro

ón	anual	interés	
1	8,5%	Semestral (n =2)	₡758 107,20
2	8,2%	Mensual (n = 12)	₡752 359,00
3	8%	Continua	₡745 912,30

Actividad 4

Un temblor con una intensidad I tiene magnitud Richter en donde I_0 es la intensidad de un temblor de nivel cero (la intensidad más baja que puede ser detectada por un sismógrafo cerca del epicentro del temblor).

El 22 de abril de 1991 un fuerte terremoto sacudió la zona de Limón en Costa Rica y Bocas del Toro en Panamá, con una intensidad de 7,6 en la escala de Richter, y una profundidad de 10 kilómetros.

El 4 de mayo de 1910 un terremoto destruyó Cartago. Su magnitud fue de 6,4 en la escala de Richter y se convirtió en el desastre natural más mortífero en la historia de Costa Rica.

El 8 de enero de 2009 un temblor de 6,2 destruyó gran parte de la Cinchona en Costa Rica. La falla Vara Blanca-Ángel fue la que originó el terremoto considerado como el de mayor magnitud en los últimos 157 años en esa zona.

Utilice el modelo de Richter para comparar la intensidad del terremoto de Limón de 1991 con el de Cartago de 1910, y con el de la Cinchona de 2009.

Análisis de la Actividad 4

Esta actividad permite valorar la importancia de los modelos matemáticos en situaciones que se relacionan directamente con el entorno de los estudiantes.

En Costa Rica son normales los temblores. Los acontecimientos más difíciles registrados fueron el terremoto del 10 de mayo de 1910, de 6,4 grados en la escala de Richter, que provocó bastantes daños y muerte en la ciudad de Cartago. El terremoto del 22 de abril de 1991, de 7,7 grados Richter que afectó enormemente la provincia de Limón. El 8 de enero de 2009 la zona cercana al Volcán Poás sufrió muchos daños debido a un terremoto de magnitud 6,2.

El modelo matemático desarrollado por Richter es útil para comparar intensidades sísmicas entre eventos independientes.

Un poco de historia

La escala Richter fue creada por el sismólogo Charles F. Richter en 1935. Un temblor

con una intensidad I tiene magnitud Richter en donde I_0 es la intensidad de un temblor de nivel cero, la intensidad más baja que puede ser detectada por un sismógrafo que se encuentra cerca del epicentro del temblor. El sismógrafo (sismómetro) es un instrumento que detecta las ondas sísmicas que los terremotos o explosiones generan en la tierra.

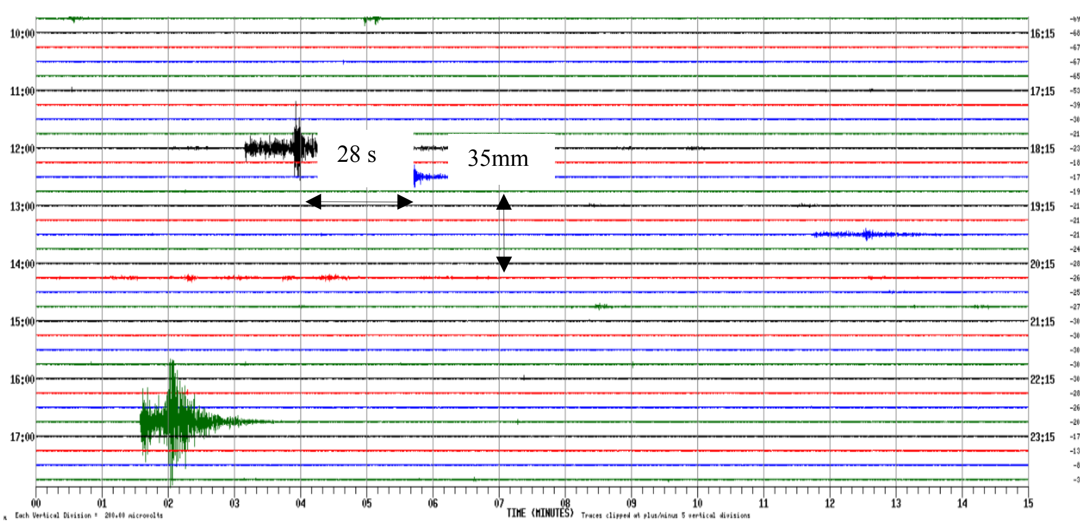
Por lo general los sismólogos determinan la magnitud en la escala Richter del temblor al examinar un sismógrafo.

La magnitud de un temblor no puede ser determinada por la amplitud que aparece en un sismógrafo debido a que tal amplitud disminuye con la distancia entre el epicentro del temblor y la estación de observación. Para medir esta distancia los sismólogos examinan las ondas *p* (primaria) de muy baja amplitud pero más rápidas y las ondas *s* (secundaria) de mayor amplitud que las *p* y más lentas. De esta forma la magnitud *M* en la escala Richter es función de la amplitud *A* de las ondas *s*, y de la diferencia en el tiempo entre la ocurrencia de ondas *s* y de ondas *p*.

En la década de 1950 Charles Richter desarrolló el siguiente modelo para determinar la magnitud de un temblor, utilizando los datos de un sismógrafo:

donde la amplitud *A* de las ondas *s* se mide en milímetros, directamente sobre el sismógrafo, y *t* es la diferencia en el tiempo, en segundos, entre la ocurrencia de las ondas *s* y las ondas *p*.

Por ejemplo, para la figura que sigue se supone que la distancia temporal entre la llegada de las ondas *p* y la de las ondas *s* es de 28 segundos mientras que la amplitud de las ondas *s* es de 35 mm, ambos datos tomados directamente del sismógrafo.



Sismograma: Red Sismológica Nacional (RSN) de Costa Rica, 22/07/2012, http://www.rsn.ucr.ac.cr/index.php/en/
http://163.178.105.93/gifs/BUS_SHZ_TC_--.2012072200.gif

En este caso la magnitud es de Por lo tanto el temblor tiene una magnitud de aproximadamente 5,7 en la escala Richter.

En la figura anterior se observan las ondas de superficie que son las que provocan más destrucción que las ondas p y s. Las ondas de superficie son conocidas como ondas L y R (Rayleigh), se propagan desde el epicentro del sismo y son más lentas que las ondas p y s.
Las ondas R (Rayleigh), llamadas así en honor a John William Strutt (1842-1919), tercer barón Rayleigh son ondas superficiales que provocan un movimiento elíptico retrógrado del suelo (similar al de las olas).

Las ondas L (Love), en honor al científico Augustus Edward Hough Love (1863-1940) que estudió sus propiedades, también son superficiales y provocan cortes horizontales en la tierra. Lo importante es que el modelo para calcular la magnitud del sismo no contempla las amplitudes de las ondas L y R.

Las comparaciones de intensidades para los terremotos de Limón (1991), Cartago (1910) y Cinchona (2009) se obtienen utilizando el modelo de Richter. Sean I_1 la intensidad del terremoto de Limón, I_2 la intensidad del terremoto de Cartago, I_3 la intensidad del terremoto de Cinchona.

Entonces, Utilizando la representación

en forma de potencia tenemos . Despejando la

intensidad tenemos

Entonces Por lo tanto el terremoto de Limón de 1991 tuvo una intensidad que fue aproximadamente 16 veces la intensidad del terremoto de Cartago de 1910, y fue aproximadamente 25 veces la intensidad del terremoto de Cinchona del 2009.

Uno de los peores terremotos ocurrió en Chile en 1960 y su magnitud Richter fue de 9,5, considerado el mayor registrado en la historia de la humanidad. Si comparamos el gran terremoto de Chile de 1960 con el de Limón de 1991,

El gran terremoto de Chile de 1960 fue aproximadamente 79 veces más intenso que el de Limón de 1991, y unas 1995 veces más intenso que el de Cinchona de 2009.

Los estudiantes pueden averiguar en Internet datos acerca de otros terremotos, para comparar sus intensidades con la del terremoto de Chile de 1960, y compartir sus hallazgos con el grupo.

Terremoto de Cinchona, 2009
http://www.aldia.cr/galerias/TerremotoVaraBlanca/index.html

Terremoto de Limón, 1991
http://www.nacion.com/2011-04-17/ElPais/NotaPrincipal/ElPais2748253.aspx

Actividad 5

Un grupo de arqueólogos utilizó piezas de madera quemada (carbón vegetal) que fueron encontradas en una caverna en Lascaux, Francia, para determinar fechas de pinturas prehistóricas y dibujos existentes en las paredes y techos de dicha caverna. Ellos encontraron, al comparar con la cantidad de carbono-14 encontrado en los árboles vivos del mismo tipo de las piezas de la madera quemada, que en éstas sólo había un 14,5% de carbono-14. Si la vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5 730 años, ¿cuál es la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si la cantidad de carbono-14 en un organismo se modela matemáticamente como ?

Nota: La vida media de un material radioactivo, es el tiempo requerido para que se desintegre la mitad de los átomos en una muestra del material, es decir, el valor de *t* para el cual En , es la cantidad inicial del material radioactivo, y *k* (número negativo) es la constante de decaimiento radioactivo.

Análisis de la Actividad 5

En esta actividad se utilizan modelos matemáticos aplicados a situaciones de un contexto real y hace conexión de las matemáticas con la química, física y ciencias sociales como la arqueología. Se enfatiza la utilidad de las funciones exponenciales y logarítmicas para resolver problemas que son muy importantes para la humanidad, como por ejemplo, la edad de fósiles encontrados o la fecha de escritura de un manuscrito antiguo.

Un poco de historia

El carbono-14, , o radiocarbono, es un isótopo radioactivo del carbono, descubierto por Martin Kamen y Sam Ruben en 1940. Alrededor del año 1950, el químico Willard Libby diseñó un método para usar el carbono-14 como un medio para determinar las edades aproximadas de fósiles. Por su trabajo, Libby ganó el premio Nobel de química en 1960. El carbono, por lo general, tiene una masa atómica de 12, pero la de su isótopo radioactivo es de 14, y por eso el método se conoce como del carbono 14.

La teoría de datación con carbono se basa en el hecho de que el isótopo carbono 14 se produce de forma continua en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La relación entre la cantidad de carbono-14 y el carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante, y como consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera.

Cuando un organismo muere, cesa la absorción del carbono-14, y la concentración del isótopo decrece conforme va transformándose en Nitrógeno-14, , por decaimiento radioactivo, y de esta forma, al comparar la cantidad proporcional de carbono-14 presente, por ejemplo, en un fósil con la relación constante encontrada en la atmósfera, es posible estimar la edad del fósil. El método se basa en el conocimiento de que la vida media del carbono-14 radioactivo es aproximadamente 5 730 años. Por lo tanto, a los 5730 años de la muerte de un ser vivo, la cantidad de carbono-14 en sus restos se ha reducido a la mitad. Así, al medir la cantidad de radioactividad en una muestra de origen orgánico, se calcula la cantidad de carbono-14 presente en el material, lo que permite calcular la fecha de la muerte del organismo correspondiente.

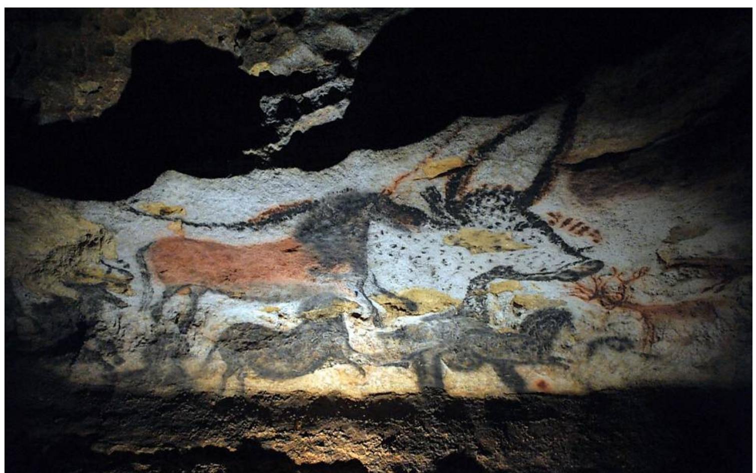
El método de Libby ha sido utilizado para datar muebles de madera encontrados en las tumbas egipcias, la tela del sudario de Turín y las envolturas de lino tejido de los manuscritos del Mar Muerto, y es la técnica basada en isótopos más fiable para conocer la edad de muestras orgánicas de menos de 35 000 años de antigüedad. Esto porque al cabo de dos vidas medias (cerca de 11 460 años) sólo queda una cuarta parte del carbono-14, y después de tres vidas medias (cerca de 17 190 años) queda apenas la octava parte, cantidades que son cada vez más difíciles de detectar.

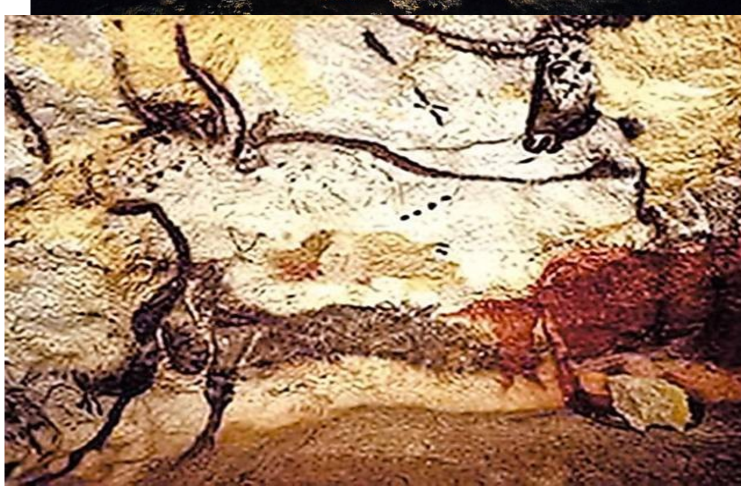
Existen otros materiales radioactivos cuya vida media son conocidas. Como mencionamos anteriormente, la vida media es el tiempo requerido para que se desintegre la mitad de los átomos en una muestra de material radioactivo. La tabla que sigue contiene la vida media de algunos isótopos.

Isótopo	Vida media

Carbono	5 730 años
Radio	1 660 años
Polonio	138 días
Fósforo	14 días
Polonio	de 1 segundo

La situación planteada ocurrió en la caverna de Lascaux, Francia, un sitio con unas extraordinarias pinturas prehistóricas. La caverna fue descubierta por algunos jóvenes el 12 de septiembre de 1940 y al finalizar la Segunda Guerra Mundial se facilitó la visita al público, pero en 1963, debido al deterioro ocasionado por la presencia del público, se cerró la caverna para proteger las pinturas. Posteriormente se restauraron las pinturas a su aspecto original.





Fotos: caverna de Lascaux. Periodico: Jornal Folha de Sao Paulo, 25/07/2011
http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/3849-gruta-de-lascaux

Para determinar la edad aproximada de una pieza de madera quemada encontrada en el sitio de la caverna, se puede calcular la constante de decaimiento radioactivo *k* a partir del conocimiento de la vida media del carbono-14:

Simplificando A_0 y tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad se obtiene

,

pues el logaritmo de 1 es igual a cero. Por lo tanto , y

.

Como la concentración de carbono-14 de la madera es 14,5% de encontrada en la materia viva (árboles vivos), entonces hay que encontrar *t* para que . Simplificando A_0 e tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad, se obtiene

y por lo tanto *t* es aproximadamente 15 963 años.

Ahora utilice la estrategia desarrollada para resolver el siguiente problema:

El papiro Rhind contiene mucho de lo que conocemos hoy acerca de la matemática de los antiguos Egipcios. Un análisis químico de una muestra del papiro determinó que él contiene aproximadamente el 64% de su carbono-14 original. Calcule la edad aproximada del papiro Rhind.

Actividad 6

El porcentaje de viviendas de Costa Rica que cuenta con únicamente un servicio telefónico celular (aunque pueden tener teléfono fijo) es dado en la tabla que sigue.

Año	Total de viviendas de Costa Rica	Con un servicio telefónico celular	Porcentaje (%)
2003	1 040 612	261 315	25,1
2004	1 082 662	300 337	27,7
2005	1 082 662	325 943	30,1
2006	1 155 926	371 475	32,14
2007	1 182 108	384 349	32,51
2008	1 223 129	398 575	32,59
2009	1 256 701	427 536	34,0

Si $t = 1$ *corresponde al año 2003, algunos modelos matemáticos para el porcentaje de viviendas de Costa Rica con sólo un servicio de teléfono celular son:*

1. Modelo Lineal

$$y_1(t) = 1.388928571t + 25.03571429$$

2. Modelo Cuadrático

$$y_2(t) = -0.2486904762t^2 + 3.378452381t + 22.05142857$$

3. Modelo Cúbico

$$y_3(t) = 0.0444444444t^3 - 0.7820238095t^2 + 5.200674603t + 20.45142857$$

4. Modelo Logarítmico

$$y_4(t) = 25.0062514 + 4.585982426\ln(t)$$

5. Modelo Potencia

$$y_5(t) = 25.15966787\,(t)^{0.1564949763}$$

¿Cuál de los cinco modelos anteriores se ajusta mejor a los datos de la tabla?

¿Aproximadamente cuántas viviendas tendrán acceso a un único teléfono celular en el año 2015?

Análisis de la Actividad 6

En esta actividad se utilizan distintos modelos matemáticos aplicados a situaciones de un contexto real. Hay que tomar una decisión razonada acerca del modelo que mejor se ajusta a los datos. Una de las habilidades del programa consiste en analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada.

La tabla fue obtenida de la página del Instituto Nacional de Estadística y Censos de Costa Rica, http://www.inec.go.cr, Tecnologías de Información, EHPM, y los datos que

serán utilizados corresponden a las viviendas que cuentan con un único teléfono celular (aunque pueden contar con un teléfono fijo).
El Sistema de Indicadores sobre las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) constituye un conjunto de indicadores con información sobre el uso y acceso de las TIC por parte de las viviendas y las personas desde el año 2000. Se incluyen únicamente indicadores obtenidos a partir de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples (EHPM) que se realiza en julio de cada año.

Los indicadores se basan en las recomendaciones dadas por el Observatorio para la Sociedad de la Información en Latinoamérica y el Caribe (OSILAC), organismo adscrito a CEPAL, que busca armonizar las estadísticas sobre TIC haciéndolas comparables internacionalmente.

Los cinco modelos dados fueron obtenidos con la calculadora TI-84 plus mediante regresiones. Con Excel también se puede obtener los modelos dados.

Las listas L1 y L2 contienen los datos de tiempo (año, con año 1 correspondiendo al 2003) y porcentaje. Las pantallas de salida de la calculadora son:

L1	L2
1	25.1
2	27.7
3	30.1
4	32.14
5	32.51
6	32.59
7	34

```
LinReg
 y=ax+b
 a=1.388928571
 b=25.03571429
```

```
QuadReg
 y=ax²+bx+c
 a=-.2486904762
 b=3.378452381
 c=22.05142857
```

```
CubicReg
 y=ax³+bx²+cx+d
 a=.0444444444
 b=-.7820238095
 c=5.200674603
 d=20.45142857
```

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=25.15966787
 b=.1564949763
```

```
LnReg
 y=a+blnx
 a=25.0062514
 b=4.585982426
```

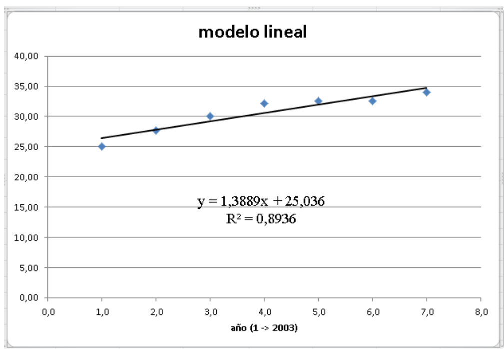
Algunas estrategias para decidir cuál es el mejor modelo para los datos son:

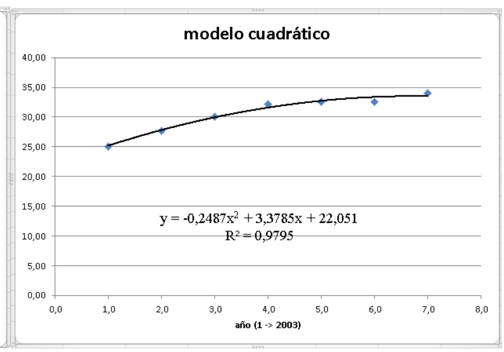
a. Gráfica.

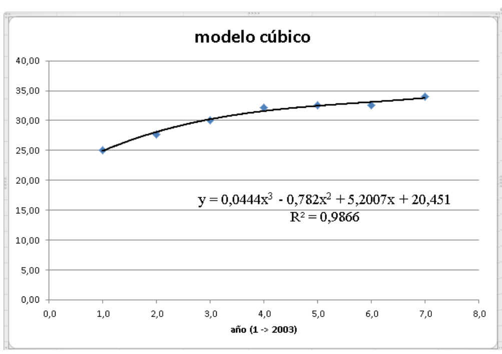
Utilizando un software graficador, se grafican los puntos de interés de la tabla, en este caso los pares ordenados (año, porcentaje) y las curvas correspondientes a los modelos dados, en un mismo sistema de coordenadas. Así se puede visualizar cuál de las curvas (modelos) se ajusta más a los datos de la tabla.

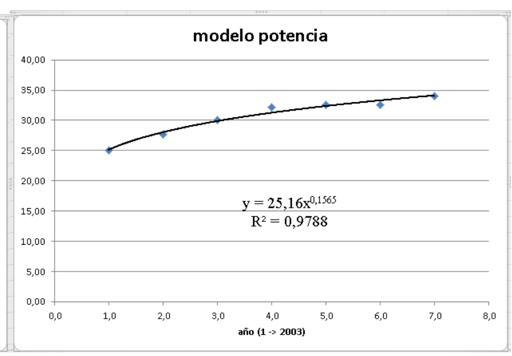
Con Excel podemos encontrar la “línea de tendencia” para los puntos correspondientes a los datos de la tabla. Esta “línea de tendencia” es una curva de regresión o curva de mejor ajuste a los datos. Con Excel se puede escoger entre regresión lineal, polinomial (seleccionando el grado del poliomio), logarítmica, potencial y exponencial.

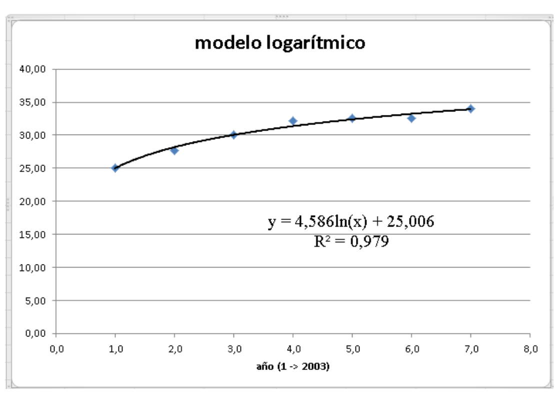
Las graficas generadas con Excel son:











La información visual puede no ser suficiente. Pareciera que, excepto el modelo lineal, los otros cuatro son equivalentes. Se hace necesario otro criterio que no dependa únicamente de la información visual.

b. Coeficiente de determinación.

En las gráficas generadas por Excel, aparece la ecuación del modelo y un número etiquetado con R^2. Este número se conoce como *coeficiente de determinación*, que mide la "bondad del ajuste realizado". La "bondad de predicción o de ajuste" depende de la relación entre las variables. Si dos variables no covarían, no se puede hacer predicciones válidas. La medida de la capacidad del modelo de regresión para obtener buenas predicciones es el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson, e indica la proporción de variación de la variable dependiente *y* que es explicada por la variable independiente *x* (variable predictora o explicativa).

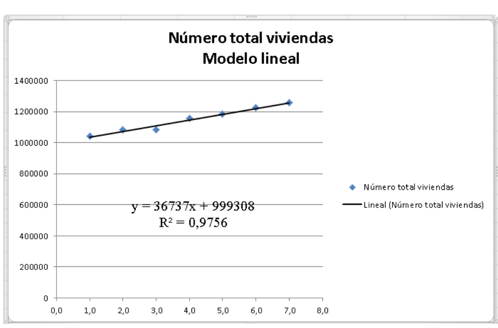
El coeficiente de determinación varia de 0 a 1. Un valor cero indica que la variable predictora tiene capacidad nula para explicar o predecir la variable *y*. Cuánto más cercano a 1 sea R^2, mejor será la predicción.

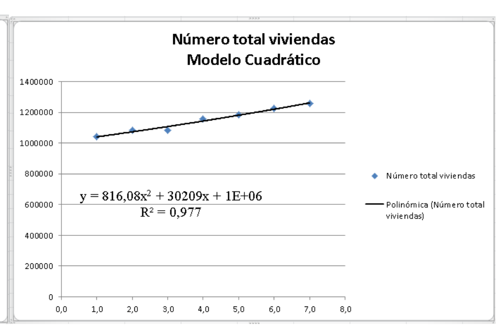
Para los cinco modelos dados tenemos:

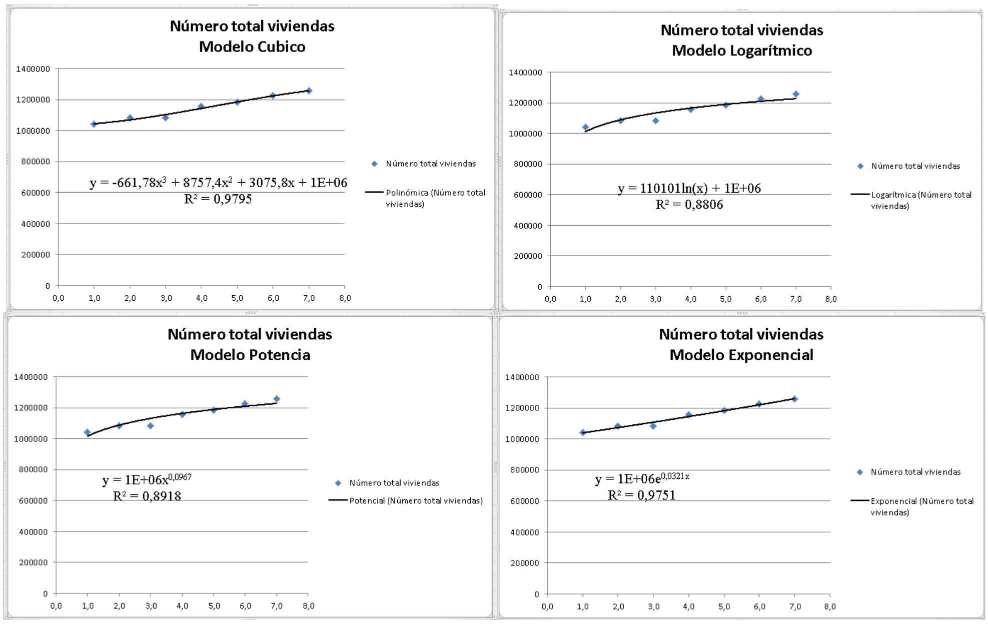
1. Modelo Lineal: $R^2 \approx 0{,}8936$
2. Modelo Cuadrático: $R^2 \approx 0{,}9795$
3. Modelo Cúbico: $R^2 \approx 0{,}9866$
4. Modelo Logarítmico: $R^2 \approx 0{,}979$
5. Modelo Potencia: $R^2 \approx 0{,}9788$

Por lo tanto, el mejor modelo, el que explica mejor los datos de la tabla, es el cúbico. ¿Cómo se puede predecir la cantidad de viviendas costarricenses que tendrán acceso a un único teléfono celular en el año 2015?

Con el modelo cúbico se predice el porcentaje de viviendas con acceso a un único celular en el año 2015, tomando t = 13, es decir, $y \approx 53.54$ %. El problema es que no se conoce el número total de viviendas costarricenses en el año 2015. Se puede buscar una mejor "línea de tendencia" para esta variable y utilizarla.







El mejor modelo, con R^2 más cerca de 1, es el cúbico. Pero el coeficiente negativo de la mayor potencia de *t*, nos indica que eventualmente el valor de *y* empezaría a decrecer y llegaría a ser negativo, lo que no corresponde a la realidad. Por ejemplo, para el año 2015 se predice que el número total de viviendas costarricenses será aproximadamente 1066055, un valor menor que el correspondiente del año 2004.

El modelo cuadrático, el mejor después del cúbico, predice cerca de 1 530 635 viviendas, lo que es más realista. El modelo lineal proyecta aproximadamente 1 476 889 viviendas, mientas que el exponencial una cantidad cerca de 1 517 858 viviendas.

Si utilizamos el modelo cuadrático entonces la cantidad de viviendas costarricenses que tendrán acceso a un único teléfono celular en el año 2015 será aproximadamente el 53.54% de 1 530 635, es decir, 819 502 viviendas.

Podemos concluir que la información visual no es suficiente para seleccionar un modelo. Tampoco el valor del coeficiente de determinación R^2, pues aunque en el intervalo de los datos proporciona un mayor poder de predicción, a la larga puede ser un mal modelo. El análisis del patrón de comportamiento de los datos sirve para descartar supuestos buenos modelos, cuando se consideran valores de la variable independiente que están fuera del rango de los datos.

III. Un modelo con relación

Actividad 7

El Estadio Nacional de Costa Rica es un recinto para usos deportivos y administrativos múltiples, siendo el principal para la práctica del fútbol de la Selección Nacional del país y para las competencias de atletismo. Algunas fotos del Estadio Nacional muestran un arco en forma de una cónica, que puede ser modelado por una relación entre las variables x (eje horizontal) y eje vertical del arco.

Foto del Estadio Nacional de Costa Rica
Tomada por Edison De Faria

Determinar una relación entre las variables x, y que modela el arco en forma de cónica del Estadio Nacional de Costa Rica.

Análisis de la Actividad 7

En esta actividad se busca encontrar un modelo algebraico para una curva relacionada con una situación del contexto real. Cada estudiante debe buscar su propia estrategia para resolver el problema.

La situación tiene que ver con el Estadio Nacional de Costa Rica, ubicado en el parque metropolitano La Sabana, en San José, Costa Rica.
El Estadio Nacional de Costa Rica es el más moderno y con mayor tecnología de Centroamérica y del Caribe. Tiene oficinas para 32 federaciones deportivas, dos pantallas gigantes de televisión de HD, un museo deportivo, pista de atletismo y salas para otros deportes como tenis de mesa, esgrima y ajedrez.

Tiene una capacidad de 35 175 lugares y es el tercero en tamaño de la región. El estadio Cuscatlán de El Salvador ocupa el primer lugar en capacidad (53 400 lugares) mientras que el Estadio Olímpico Metropolitano de Honduras ocupa el segundo lugar (37 325 lugares).

En mayo de 2008 se demolió el antiguo Estadio Nacional, y desde marzo de 2009 hasta diciembre de 2010 se edificó este moderno recinto deportivo en el mismo lugar. Su

inauguración fue el 10 de enero de 2001 con la presencia de diplomáticos de la Embajada de China en Costa Rica y autoridades del gobierno de Costa Rica.
Una estrategia para resolver el problema consiste en investigar las dimensiones de la base del arco y su altura. Al imprimir la foto del Estadio Nacional sobre un papel cuadriculado facilita la ubicación de varios puntos sobre el arco de la cónica, y al remplazar las coordenadas de los puntos en la ecuación general de una cónica:

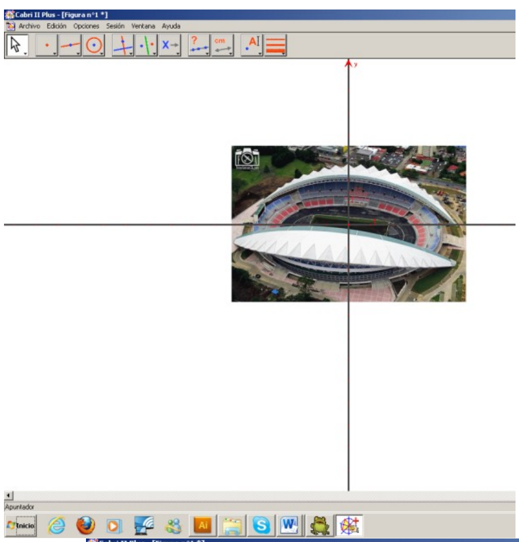
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h = 0$$

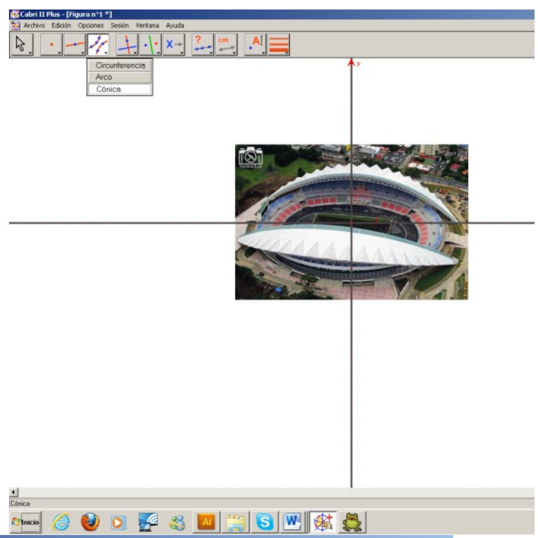
y, de esta forma, calcular los coeficientes *a, b, c, d, e, h* para obtener la ecuación de la cónica (posiblemente una parábola o un arco de hipérbola).

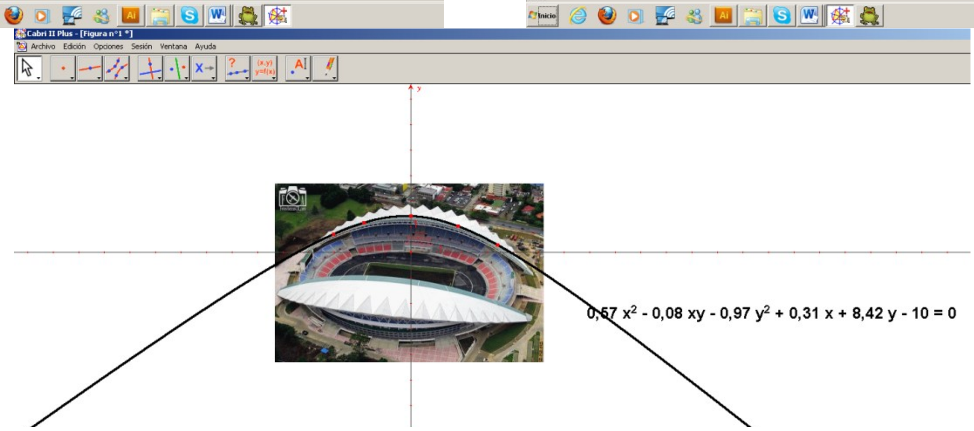
Otra estrategia consiste en utilizar un software de geometría dinámica como el Geogebra o el Cabri (entre otros).

Aquí se utilizará el Cabri, y una foto del Estadio Nacional como imagen de fondo, ubicando los ejes de coordenadas lo más simétrico posible respecto al arco de la cónica.

Posteriormente colocamos puntos sobre el arco y construimos la cónica que pasa por ellos. Finalmente se pide a Cabri que despliegue la ecuación de la cónica construida.







En este caso la ecuación de la cónica es una relación entre las variables *x*, *y*.

$$0{,}57x^2 - 0{,}08xy - 0{,}97y^2 + 0{,}31x + 8{,}42y - 10 = 0$$

La presencia del término xy sugiere que la cónica está girada (rotación) en el sistema de coordenadas rectangulares dado.

El programa también dice que la cónica es una hipérbola (una de las dos ramas), y no una parábola como podríamos sospechar desde un inicio. Es claro que la foto no está bien de frente, lo que dificulta la ubicación de los ejes de coordenadas y, como consecuencia, cambia la relación entre las dos variables. Lo ideal será conseguir una foto en que el arco quede completamente de frente. En este caso la cónica podría ser aproximada por una parábola.

Finalmente, es importante investigar las dimensiones de interés para el problema: la base y la altura del arco de la cónica, para que los coeficientes de la relación tengan que ver con las dimensiones reales del arco.

Este es un trabajo extra clase que puede interesar al estudiantado y que implica la búsqueda de información en Internet o bien directamente con el personal que administra el Estadio Nacional.

La actividad puede ser modificada. Por ejemplo se puede pedir el modelo para la cónica que aparece en las puertas del Palacio Güell construido entre 1886 y 1890. El Palacio fue diseñado por el arquitecto catalán Antoni Gaudí, a encargo del industrial, político, científico y escritor de Cataluña Eusebi Güell, quién financió varias de las obras más conocidas de Gaudí. (ver http://es.barcelona.com/guia_ciudad/gaudi/palacio_gueell/)

IV. Construcción de un modelo

Esta es una actividad de carácter formativo. Consiste en construir un modelo que es aparentemente simple, pero que muestra lo complejo de la tarea. Su inserción en este documento es para mostrar al estudiante cómo modelizar.

Actividad 8

Cierta tarjeta de crédito tiene una tasa de interés anual del 30% y un pago mensual mínimo que corresponde al mayor entre dos valores: ₡5000,00 o el 5% del saldo pendiente de pago. Magally utilizó ₡500 000,00 de crédito en dicha tarjeta y no volvió a utilizarla. Si ella decide hacer el pago mínimo cada mes, ¿cuánto tiempo tomará para cancelar su deuda y cuánto pagará en total?

Análisis de la Actividad 8

El propósito de esta actividad es el de acercarse a la forma en que trabaja un matemático durante la construcción de un modelo matemático sencillo. El matemático busca las variables que son importantes para su modelo, hace hipótesis para simplificarlo, utiliza o construye definiciones, determina relaciones entre las variables, comprueba el modelo para situaciones conocidas, modifica sus hipótesis y repite el proceso hasta llegar a un modelo más “refinado” y con mayor capacidad explicativa y predictiva. Al concluir su modelo, el matemático lo somete a la comunidad de matemáticos mediante la publicación de su trabajo en alguna revista especializada. La comunidad se encarga de revisarlo, analizarlo, buscar posibles errores, contraejemplos, hacer demostraciones más “elegantes”, generalizarlo.

A pesar de la simplicidad del modelo construido para la actividad y del uso de funciones conocidas por los estudiantes de undécimo año, se puede observar la complejidad de los cálculos involucrados.

A continuación se brindan algunos conceptos relacionados con la situación planteada.

Las tarjetas de créditos son de uso frecuente en Costa Rica. El Semanario Universidad publicó en su edición del 07 de febrero de 2012 el artículo titulado “Aumenta deuda de costarricenses con tarjetas de crédito”. En dicho artículo se menciona que un estudio realizado por el Ministerio de Economía, Industria y Comercio (MEIC) reveló que en octubre del 2011 circulaban 1 466 602 tarjetas de crédito en Costa Rica y que este número sigue en aumento. Además, la deuda de los costarricenses con los emisores de tarjetas sumó los ₡579 659 millones.

Una tarjeta de crédito es un instrumento financiero a través del cual una institución emisora de la tarjeta concede a sus clientes, mediante la suscripción de un contrato de adhesión, una línea de crédito del cual se puede disponer continuamente (hacer compras o disponer de efectivo) siempre y cuando no sobrepase la cantidad autorizada por el emisor.

A cambio del crédito, el cliente se compromete a pagar cada mes una cantidad fija o un porcentaje del saldo pendiente, el que sea el mayor entre los dos. En general, el contrato de la tarjeta contiene una declaración similar a "el pago mínimo será el mayor entre p colones o r% del saldo pendiente de pagar".

Como no existe garantía de que el cliente pague su deuda a la institución emisora de la tarjeta, estas son consideradas más riesgosas para la institución, lo que hace que las tasas de interés cobradas en las tarjetas de crédito sean más elevadas que las cobradas sobre los préstamos garantizados. En Costa Rica la tasa de interés anual, para tarjetas de crédito en colones, varía del 23% al 54%.

En la situación planteada, Magally utilizó 500 000 colones de crédito de la tarjeta (capital inicial que debe de ser reembolsado a la institución emisora de la tarjeta) y se comprometió a hacer el pago mínimo mensual.

En el primer mes ella pagará el máximo entre 5000 colones y el 5% de 500 000 colones. Como $0{,}05 \cdot 500\,000 = 25\,000$ colones, este monto corresponde al pago mínimo de este mes.

En el segundo mes hay que pagar el máximo entre 5000 colones y el 5% del saldo pendiente de pago (500 000 – 25 000 = 475 000), pero hay que pagar intereses (30% anual) por el saldo pendiente. De esta forma, Magally tendrá que pagar la suma de

$$0{,}05 \cdot 475\,000 = 23\,750 \text{ colones}$$

y por concepto de intereses sobre saldo

$$475\ 000 \times 0{,}30/12 = 11\ 875 \text{ colones.}$$

Por lo tanto, el nuevo saldo pendiente de pago será igual a

$$475\ 000 - 23\ 750 + 11\ 875 = 463\ 125 \text{ colones.}$$

En el tercer mes ella hará un pago mínimo de

$$0{,}05 \times 463\ 125 = 23\ 156{,}25 \text{ colones}$$

e intereses de

$$463\ 125 \times 0.30/12 \approx 11\ 578{,}10 \text{ colones.}$$

El nuevo saldo pendiente de pago es de

$$463\ 125 - 23\ 156{,}25 + 11\ 578{,}10 \approx 451\ 546{,}90 \text{ colones,}$$

y así sucesivamente. Se puede representar la información en una tabla:

Mes	Pago mensual mínimo (colones)	Intereses devengados (colones)	Saldo pendiente (colones)
0	0	0	500 000,00
1	25 000,00	0	475 000,00
2	23 750,00	11 875,00	463 125,00
3	23 156,25	11 578,10	451 546,90
…	…	…	…

La cantidad de la segunda columna disminuye y cuando llegue a un valor menor o igual a 5000 colones entonces el pago mínimo mensual será de 5000 colones hasta que la deuda sea completamente cancelada. Esto ocurrirá cuando el saldo pendiente de pago de la última columna sea menor o igual a 100 000 colones.

El método utilizado anteriormente es ineficiente pues el saldo pendiente de pago disminuye muy lentamente y podría consumir muchas horas de trabajo para poder responder las preguntas planteadas. De esta forma, se intentará encontrar un modelo que generalice la situación, que permita calcular el saldo pendiente para un mes arbitrario. Para ello se introducirán las siguientes variables:

P_0 Crédito inicial (principal inicial) a ser rembolsado
P_n Saldo pendiente de pago, al final del mes n
i_a Tasa de interés anual sobre el saldo pendiente, expresada en forma decimal
i Tasa de interés mensual ($= i_a/12$)
p Pago mensual mínimo
r Tasa de pago mínimo del saldo mensual

Con las variables anteriores, los pagos mensuales son:

Mes	Pago mensual mínimo (colones)	Intereses devengados (colones)	Saldo pendiente (colones)
0	0	0	P_0

1	rP_0 (si $rP_0>p$)	0	$P_1 = P_0 - rP_0 = (1-r)\ P_0$
2	rP_1 (si $rP_1>p$)	iP_1	$P_2 = P_1 - rP_1 + iP_1 = (1-r+i)\ P_1 = (1-r)\ (1-r+i)\ P_0$
3	rP_2 (si $rP_2>p$)	iP_2	$P_3 = P_2 - rP_2 + iP_2 = (1-r+i)\ P_2 = (1-r)\ (1-r+i)^2 P_0$
…	…	…	…
N	rP_{N-1} (si $rP_{N-1}>p$)	iP_{N-1}	$P_N = (1-r)\ (1-r+i)^{N-1} P_0$
$N+1$	p (si $rP_N \le p$)	iP_N	$P_{N+1} = P_N - p + iP_N = (1+i)\ P_N - p$
$N+2$	p	iP_{N+1}	$P_{N+2} = P_{N+1} - p + iP_{N+1} = (1+i)^2\ P_N - p[1+(1+i)]$
$N+3$	p	iP_{N+2}	$P_{N+3} = P_{N+2} - p + iP_{N+2} = (1+i)^3\ P_N - p[1+(1+i)+(1+i)^2]$
…	…	…	…
$N+k$	p	iP_{N+k-1}	$P_{N+k} = (1+i)^k\ P_N - p[1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{k-1}]$

Al final del primer mes (n = 1) se hace el pago mensual de (considerando), y como no hay interés, el saldo pendiente de pago es En el segundo mes (n = 2) se realiza el pago mensual de (considerando), y el interés sobre el saldo pendiente de pago El saldo pendiente de pago será Al finalizar el tercer mes (n = 3) el interés a pagar es (considerando), y el saldo pendiente de pago es En general el saldo pendiente de pago en el mes n, suponiendo que es:

(a)

Si $i < r$ y $0 < 1+i - r < 1$, entonces y por lo tanto ,
de tal forma que el saldo pendiente de pago disminuye con el tiempo, y existirá un mes N cuando por primera vez ocurrirá $rP_N \le p$, es decir $rP_N \le p < rP_{N-1}$.
Esto implica que

Lo anterior se escribe como

Aplicando logaritmo en las desigualdades anteriores se obtiene

Como pues $0 < 1+i - r < 1$, entonces

y por lo tanto

(b)

De esa forma N es el último mes en que el pago mensual mínimo propuesto es mayor que p. A partir del mes N el pago mínimo será constante e igual a p colones, hasta la cancelación total de la deuda de la tarjeta de crédito.

Si suponemos que con entonces , es decir

. Esto implica que , y por lo tanto

Los pagos a partir del mes N, el mes de cambio de pago mínimo, se calculan de la siguiente forma (tabla anterior):

Para calcular la suma , se utilizará el resultado que sigue: Si con entonces , y así

, y por lo tanto Entonces

(c)

Como $i < r$ y rP_N □ p entonces $iP_N < rP_N$ □ p lo que implica que
Lo anterior garantiza que la deuda no solo disminuye a partir del mes N, sino que puede asumir valores negativos a partir de cierto valor de k, es decir, que existe algún número entero M tal que El número $N+M$ representa el número de

períodos de pagos requeridos para cancelar la deuda de la tarjeta de crédito. Por lo tanto *N+M* satisface:

Esto implica en las siguientes desigualdades:

,

o sea . Tomando logaritmo en las desigualdades anteriores se obtiene:

.

Por lo tanto

(d)

Durante los *M* meses el usuario de la tarjeta hará el pago mensual mínimo de *p* colones, y el pago total corresponderá al pago de los primeros *N* meses y el pago $M \cdot p$ correspondiente a los últimos *M* meses (suponiendo que el último pago es de *p* colones).
El pago total bajo las hipótesis del modelo es:

Un resumen del modelo matemático construido para el problema de la tarjeta de crédito es el que sigue:

Sean P_0 el crédito inicial y P_n el saldo pendiente de pago, al final del mes *n* para la actividad de la tarjeta de crédito. Si suponemos que:

, $i < r$, y si el cliente decide pagar la cantidad mínima por mes, siendo esta cantidad la mayor entre p colones o r% del saldo pendiente de pagar entonces:

en donde N solución entera de las desigualdades

representa la cantidad de meses en que el pago mínimo mensual es mayor que p colones.

La deuda es cancelada en $N + M$ meses, en dónde M satisface las desigualdades

en donde M representa la cantidad de meses en que el pago mínimo mensual es de p colones.

El pago total de los P_0 colones tomados en préstamo de la tarjeta en los $N + M$ meses es de

(Lovelock, Mendel, Wright, 2007)

Utilizando los datos de la actividad planteada tenemos:

P_0 (colones)			r	p
500 000	0,3 (30%)	0,025	0,05	5000

Para la situación dada se tiene que $rP_0 > p$ pues rP_0 = 25 000 colones mientras que p = 5000 colones. Igualmente $rP_1 > p$.

Los meses para los cuales el pago mensual mínimo es mayor que p satisfacen:

Utilizando una calculadora o bien una hoja de cálculo como Excel se tiene que

$$62.543425 \leq N < 63.\ 543425$$

y por lo tanto pasarán N = 63 meses = 5 años y 3 meses para que se cambie de un pagamento mínimo mensual decreciente mayor que 5000 colones, a uno que sea constante (5000 colones), que serán pagados durante M meses, en donde M satisface

Como Utilizando este valor se encuentra que $27.608 \leq M < 28.608$, es decir, M = 28 meses (2 años y 4 meses).

Pasarán $N + M$ = 7 años y 7 meses para que Magally cancele su deuda.

El pago total realizado por ella, para cancelar el crédito de 500 000 colones fue de

Se logró resolver la situación particular planteada. Para ello se construyó un modelo matemático más general, utilizando letras para representar las variables y las constantes del problema, se hicieron algunos supuestos tales como Magally no vuelve a utilizar su tarjeta después del gasto inicial y decide hacer el pago mensual mínimo, $rP_0>p$, entre otros. Además fueron utilizadas propiedades de las potencias, logaritmos y desigualdades.

Desde el punto de vista matemático el modelo es relativamente simple, pero su construcción es bastante laboriosa. Lo importante es que la matemática requerida en la construcción está al alcance de los estudiantes de undécimo año que sienten el gusto por las matemáticas.

V. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.

4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para undécimo año.

Conocimientos	Habilidades específicas
Funciones y modelización	Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con ella? Luego, para este momento, es importante que la profesora o el profesor tenga claro cuáles son las habilidades desarrolladas anteriormente.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

- ✓ Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
- ✓ Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar expresiones algebraicas.
- ✓ Resolver ecuaciones literales para una de las letras.

Problema

La tabla que sigue muestra la población de Costa Rica (en millones) en el periodo 1960-2009 (Banco Mundial. Indicadores de desarrollo mundial).

Año	Población (millones)
1960	1,334
1965	1,583
1970	1,822
1975	2,052
1980	2,349
1985	2,699
1990	3,078
1995	3,479
2000	3,931

http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des

Determine la función de crecimiento exponencial que modela la población de Costa Rica, tomando en consideración las poblaciones de 1990 y del 2000 como base para calcular los valores de la tasa de crecimiento poblacional k. Use t = 0 para representar el año 1990. La función de crecimiento exponencial que se utiliza como modelo para el crecimiento no acotado de una población tiene como criterio

Utilice el modelo para predecir la población de Costa Rica en el año 2011. Compare el resultado con el valor de 4 301 712 habitantes en el 2011, publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos de Costa Rica (INEC, http://www.inec.go.cr)

Trabajo estudiantil independiente

En esta etapa se espera que los estudiantes pregunten sobre algunos de los aspectos que no tengan claro en el problema. Se puede aclarar lo que quiere decir tasa de crecimiento poblacional. Además, es importante que se discutan diferentes estrategias para abordar el problema integralmente. Una primera estrategia sería construir una tabla para $P(t)$, para los valores de t (año) dado en la tabla, usando $t = 0$ para representar el año 1990.

Año	Población (millones)
-30	1,334
-25	1,583
-20	1,822
-15	2,052
-10	2,349
-5	2,699
0	3,078
5	3,479
10	3,931

Pero esto es de poca ayuda, excepto que sirve para identificar el año 2000 con $t = 10$. Además, puede provocar dudas el uso de tiempo negativo.

Pronto se darán cuenta de que necesitan conocer el valor de k para poder resolver el problema. Además, tienen que relacionar la función exponencial con su inversa, la función logarítmica. Aquí un error frecuente es un mal uso de las propiedades de logaritmo, como por ejemplo escribir

Este mismo tipo de error puede ocurrir al tomar *ln* en la expresión que representa el criterio de la función

Por esto es importante dividir P por P_0 antes de tomar logaritmo.

Para este tipo de actividades se les debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación activa del estudiantado y estimularlos para que se enfrenten a la situación problema. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con el grupo para orientar el desarrollo de su trabajo y plantear preguntas generadoras que encausen a lo que se quiere llegar; pero debe permitir la discusión en relación con la búsqueda de soluciones.

Para la solución del problema se utilizan los datos $P(0) = P_0 = 3{,}078$ millones, pues $t = 0$ corresponde al año 1990, $P(10) = 3{,}931$ millones (correspondiente al año 2000). Se tiene que $3931000 = P_0\, e^{10k} = 3078000\, e^{10k}$. Por lo tanto

Aplicando logaritmos a ambos lados

$$10k = \ln(1{,}277) \approx 0{,}2446$$

Se obtiene el valor de la tasa de crecimiento poblacional, $k \approx 0{,}02446$, y la función de crecimiento que modela la población de Costa Rica es

Se espera que la población de Costa Rica para el año 2011 sea aproximadamente

habitantes.

En este caso es significativamente menor que la población real censada en el 2011, 4301712 habitantes.

Es importante aclarar que el modelo utilizado es bastante impreciso. Existen mejores

modelos, como por ejemplo el logístico con 3 datos de la tabla para intentar calcular k, P_0, r. El problema es que las ecuaciones resultantes son más complicadas que las obtenidas con el modelo de crecimiento exponencial.

Discusión interactiva y comunicativa.

En este momento, el docente discute las posibles respuestas del estudiantado y revisa la primera parte de la actividad. Se debe valorar todas las estrategias utilizadas y agruparlas de acuerdo a su similitud.

Se clasifican las soluciones correctas y las incorrectas y se discute en cada caso cómo las primeras satisfacen las condiciones dadas en el problema y qué condición o condiciones de estas no son satisfechas por las soluciones incorrectas.
Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

Clausura o cierre

Este enfoque de clausura hace referencia a una actividad de repaso de las propiedades vistas y el énfasis en los posibles errores. Se repasa el concepto de función, función inversa, propiedades de las potencias y de los logaritmos.

Hay que poner atención especial en los errores algebraicos, principalmente los relacionados con el uso equivocado de propiedades de las funciones implicadas.
También, se evidencia la necesidad del uso de calculadoras para poder obtener los parámetros que aparecen en el modelo. Los resultados son aproximados y el docente puede precisar cuántos decimales quiere para los resultados parciales obtenidos. El uso de muy pocos decimales puede producir errores muy grandes cuando trabajamos con funciones como la exponencial.

Bibliografía

Lovelock, D., Mendel, M., Wright, L. (2007). *An introduction to the mathematics of money*. Springer.

Comparando sismos. http://es.wikipedia.org/wiki/Escala_sismológica_de_Richter

Datos sobre la población de Costa Rica, http://www.inec.go.cr, recuperado el 10 de abril de 2012.

Datos sobre la población de Costa Rica, http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des, recuperado el 10 de abril de 2012.

Palacio Güell http://es.barcelona.com/guia_ciudad/gaudi/palacio_gueell/

Fotos: caverna de Lascaux. Jornal Folha de Sao Paulo, 25/07/2011 . Recuperado de: http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/3849-gruta-de-lascaux

Terremoto de Cinchona, 2009, http://www.aldia.cr/galerias/TerremotoVaraBlanca/index.html, recuperado el 10 de abril de 2012.

Terremoto de Limón, 1991, http://www.nacion.com/2011-04-17/ElPais/NotaPrincipal/ElPais2748253.aspx, recuperado el 10 de abril de 2012.

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autor

Edison de Faria

Revisores
Miguel González Ortega
Marianela Zumbado Castro

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Ilustración de la portada
Cortesía de FreeDigitalPhotos.net.

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2012). *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Relaciones y Álgebra.* San José, Costa Rica: autor.