Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Relaciones y Álgebra para I y II ciclos

Ejercicios adicionales

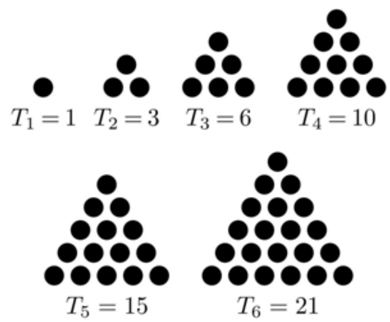
Curso bimodal de capacitación para docentes de la Educación Primaria

2015

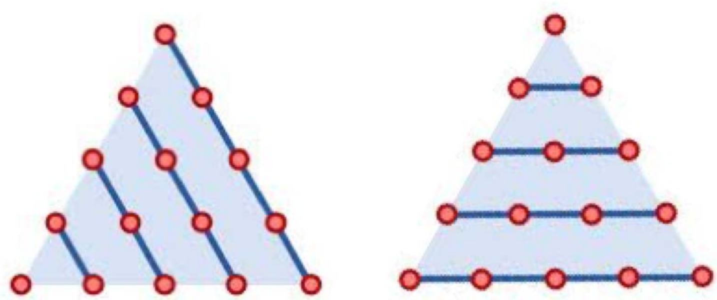
Módulo 1: Sucesiones, patrones y relaciones matemáticas

Problema 1.1: números triangulares

Los números triangulares T_n son una sucesión de números, en donde cada uno de sus elementos representa la cantidad de puntos de un arreglo triangular, según se presenta a continuación:



Otras formas de visualizar la sucesión de números triangulares son las que siguen:



1, 3, 6, 10, 15, 21, …

a) Determinar el número triangular T_7.

b) Determinar el número triangular T_{10}.

c) Explique cómo se pasa de T_1 a T_2, de T_2 a T_3, de T_3 a T_4 y en general, de T_{n-1} a T_n. ¿Cuál es la relación entre T_n y T_{n-1}?

d) Complete la tabla que sigue:

$T_1 + T_2$	$1 + 3 = 4 = 2 \times 2$
$T_2 + T_3$	
$T_3 + T_4$	
$T_4 + T_5$	

e) ¿Cuál es el patrón que se deduce de la tabla anterior?

f) Explique cómo obtener el enésimo número triangular T_n a partir de los patrones encontrados en las preguntas c y e.

g) Utilice la fórmula encontrada para calcular el número triangular T_{500}.

Solución del problema 1.1

a) Observando la regularidad (patrón) en los números triangulares, $T_6 = T_5 + 6 = 21$, $T_7 = T_6 + 7 = 28$.

b) Continuando con el patrón tenemos:

$T_8 = T_7 + 8$	36
$T_9 = T_8 + 9$	45
$T_{10} = T_9 + 10$	55

c) Observando el patrón anterior, conjeturamos que para pasar de T_{n-1} a T_n basta sumar *n*. Esto puede ser escrito como $T_n = T_{n-1} + n$ lo que es equivalente a $T_{n-1} = T_n - n$.

d) Completando la tabla:

$T_1 + T_2$	$1 + 3 = 4 = 2 \times 2$
$T_2 + T_3$	$3 + 6 = 9 = 3 \times 3$
$T_3 + T_4$	$6 + 10 = 16 = 4 \times 4$
$T_4 + T_5$	$10 + 15 = 25 = 5 \times 5$

e) Del patrón anterior podemos deducir que $T_{n-1} + T_n = n \times n$.

f) De c) y e) obtenemos dos relaciones:

$$\begin{cases} T_{n-1} = T_n - n \\ T_{n-1} + T_n = n \times n \end{cases}$$

Si sustituimos el valor de T_{n-1} en la segunda ecuación tendremos:

$$T_n - n + T_n = n \times n$$

Acomodando los términos:

$$T_n + T_n = n \times n + n$$

Lo anterior se escribe como $2T_n = n \times (n+1)$, y se concluye que el enésimo número triangular T_n depende de *n* de acuerdo con la relación o fórmula:

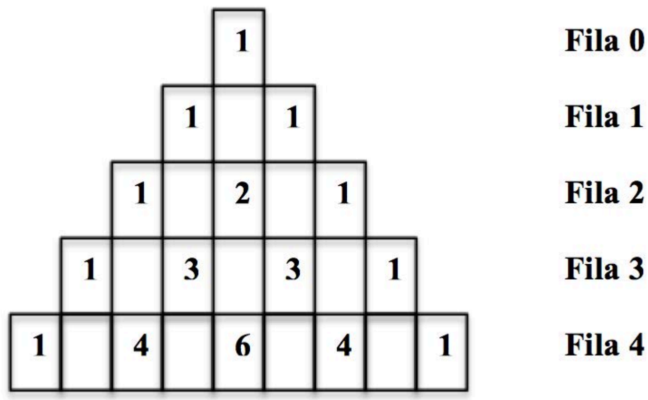
$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

g) Ahora podemos calcular cualquier número triangular con la relación anterior. En particular

$$T_{500} = \frac{500 \times 501}{2} = 250 \times 501 = 125\,250$$

Problema 1.2:

La figura adjunta contiene las primeras filas del triángulo de Pascal:



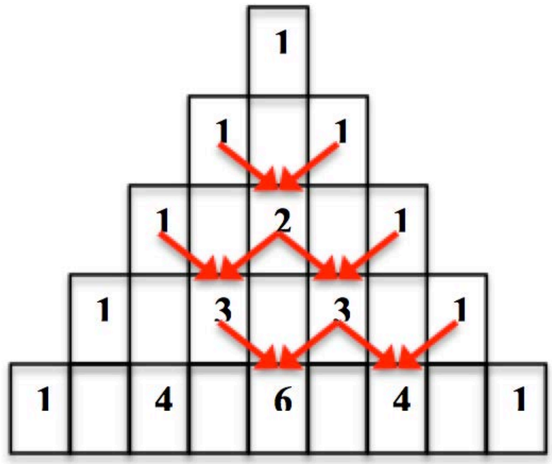
Si el patrón continúa,

a) Construya las filas 5 y 6 del triángulo de Pascal.
b) ¿Cuántos números hay en la fila 5? ¿En la fila 6? ¿En la fila 15?
c) En general ¿cuántos números hay en una fila arbitraria *n*? (*n* número natural)
d) En algunas filas cada número aparece dos veces. Otras poseen un número central que sólo aparece una vez. ¿Tendrá número central la fila 8?, ¿la fila 11?, ¿la fila 55?. Justifique su respuesta.
e) ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la fila 1 del triángulo de Pascal?, ¿de la fila 2?, ¿de la fila 3?, ¿de la fila 4?, ¿de la fila 5?, ¿de la fila 10?, ¿de la fila *n*?.

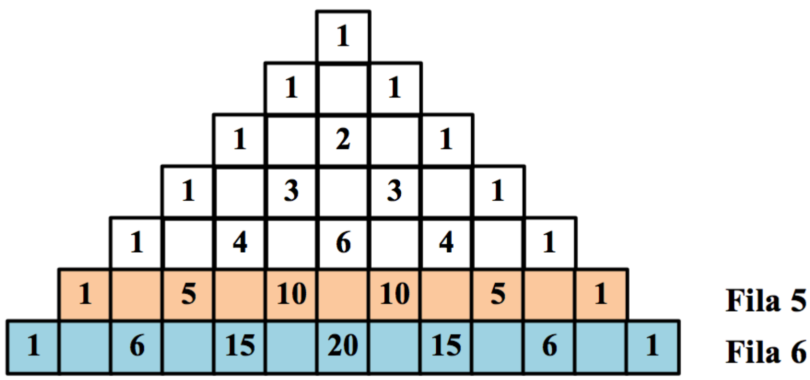
Solución del problema 1.2

El triángulo de Pascal es llamado así en honor al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) quien introdujo esta notación en 1654 en su publicación del tratado del triángulo aritmético. Las propiedades y aplicaciones del triángulo eran conocidas por matemáticos indios, chinos y persas antes de la publicación de Pascal, pero fue él quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y organizó la información.

a) El “descubrimiento” más importante en la construcción del triángulo de Pascal es el siguiente: cada número distinto de uno es la suma de los dos números que están ubicados por encima de él. La figura que sigue muestra algunos ejemplos:



Con esto podemos completar las filas 5 y 6 solicitadas.



b) En la fila 0 hay un número; en la fila 1 dos números; en la fila 2 tres números; en la fila 3 cuatro números y en la fila 4 cinco números. Como el patrón continúa entonces en la fila 5 tendremos seis números; en la fila 6 siete números; en la fila 15 dieciséis números.

c) Generalizando el patrón encontrado, la fila n tendrá $n + 1$ números.

d) Observemos el patrón. Las filas 0, 2 y 4 tienen número central, mientras que las filas 1 y 3 los números aparecen duplicados. Lo que hay de común en esto es la paridad de las filas: las filas pares tienen número central y las impares cada número aparece dos veces. El número 8 es par. Por lo tanto la fila 8 tiene número central. Como 11 y 55 son números impares, entonces las filas 11 y 55 no tienen número central. En ellas cada número aparece dos veces.

e) Podemos construir una tabla y calcular la suma de los números para cada fila del triángulo.

Fila	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Suma	1	2	4	8	16

La suma es una sucesión geométrica. Cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

Fila	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Suma	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**

En matemática es usual utilizar notaciones compactas para indicar operaciones que son extensas. Una de ellas es la potenciación para indicar la multiplicación de un número por él mismo varias veces. Por ejemplo:

$$2 \times 2 = 2^2$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

y así sucesivamente.

Utilizando esta notación podemos reescribir las tablas anteriores como:

Fila	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**
Suma	**1=20**	**2=11**	**4=22**	**8=23**	**16=24**	**32=25**	**64=26**	**256=28**	**1024=210**

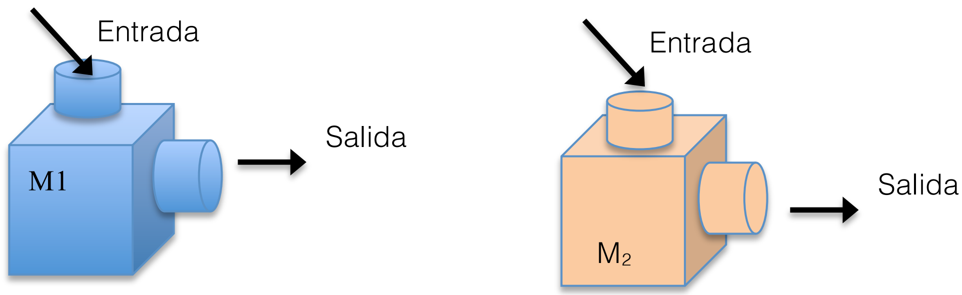
Esta notación nos ayuda a ver el patrón en forma generalizada. La suma de los números de la fila n es 2^n. Con esta generalización podemos calcular la suma de los números de cualquier fila particular. Si denotamos por S_n esta suma, es decir, $S_n = 2^n$, entonces:

$$S_5 = 2^5 = 32;\ \ S_{10} = 2^{10} = 1024;\ \ S_{20} = 2^{20} = 1048576$$

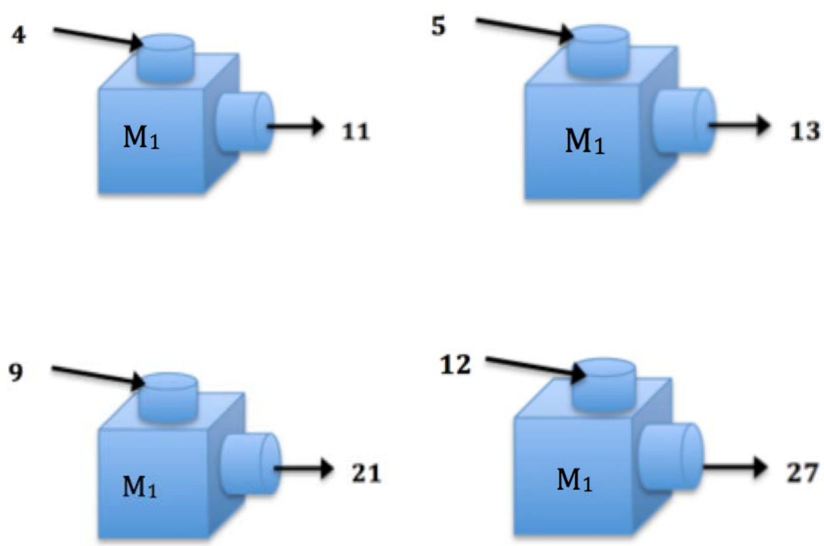
Para los cálculos con valores elevados de n, por ejemplo $n = 20$, es recomendable utilizar una calculadora que tenga el operador de potencia.

Problema 1.3: Adivine la regla

En el siguiente juego tenemos dos máquinas M_1 y M_2 que reciben un número como entrada, aplican una regla desconocida sobre él y lo transforma en otro número u objeto que es expulsado a la salida de la máquina. Su tarea consiste en adivinar la regla que utilizó cada máquina.

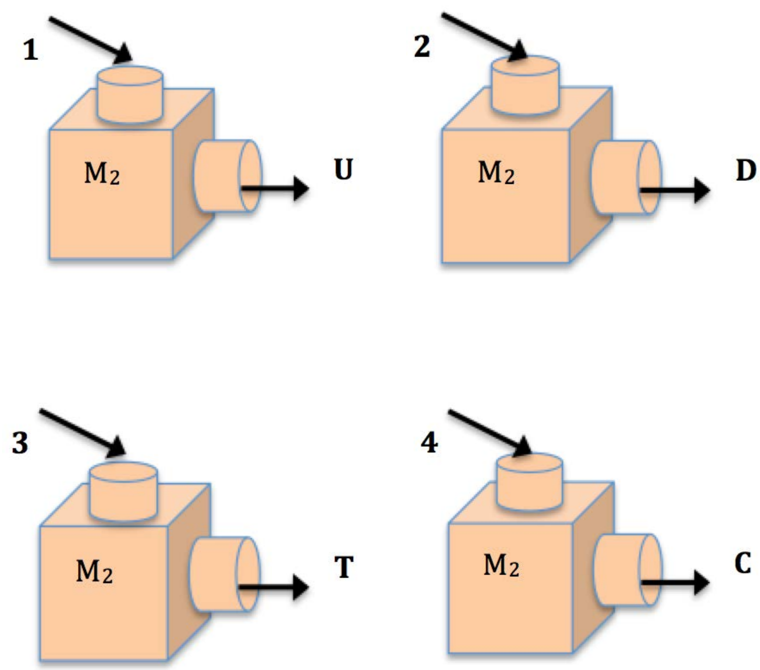


a) A continuación aparecen las salidas para las entradas 4, 5, 9, 12 en M_1



¿Cuál es la regla? ¿Cómo expresar a_n en términos de *n*?

b) Las salidas para las entradas 1, 2, 3, 4 en M_2 son:



¿Cuál es la regla? ¿Cuál es la salida cuando la entrada es 7? ¿Cuál es la salida cuando la entrada es 9?

Solución del problema 1.3

a) Todas las salidas son números impares.

Los números pares 2, 4, 6, 8, … son de la forma **2*n*** para ***n*** natural positivo. Si sumamos o restamos 1 a un número par obtendremos un número impar. De igual forma, si sumamos 3 a un número par obtendremos un número impar. En general si sumamos un número impar a un número impar obtendremos un número impar.

Podemos experimentar con las entradas y salidas de la máquina M_1 para "ver" cuál es el patrón o regla.

n	4	5	9	12
$2\times n+1$	9	11	19	25

Podemos observar que la regla **2 ×*n* + 1** para la entrada ***n*** no produce las salidas de la máquina pues faltan 2 unidades. Entonces podemos inferir que funcionara la regla:

$$(\mathbf{2}\times\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{2}=\mathbf{2}\times\boldsymbol{n}+\mathbf{3}$$

n	**4**	**5**	**9**	**12**
$\mathbf{2}\times\boldsymbol{n}+\mathbf{3}$	**11**	**13**	**21**	**27**

Esto confirma que la regla es correcta. Por lo tanto $a_n = 2 \times n + 3$

El término general a_n se obtiene al multiplicar por dos la entrada *n* y sumar 3 al resultado. Decimos que existe una *relación* entre la salida a_n y la entrada *n*. La salida depende de la entrada.

b) Una observación cuidadosa nos lleva a concluir que cada salida es la inicial del nombre, en español, del número de entrada. Cuando la entrada es 1 (Uno) la salida es U, cuando es 2 (Dos) la salida es D y así sucesivamente. Esta es la regla.

Aplicando la regla, cuando la entrada es 7 la salida será S, y cuando la entrada es 9 la salida será N. En este caso podemos tener una misma salida para diferentes entradas. Por ejemplo, las entradas 2, 12, 16, 200 producen como salida la letra D.

Módulo 2: Ecuaciones e inecuaciones

Problema 2.1: viajando en taxi

Según la Autoridad Reguladora de los Servicios Públicos (ARESEP), las tarifas de taxi tipo sedán aprobadas mediante la resolución 033-RIT-2015 y publicadas en La Gaceta 97 del 21 de mayo del 2015 son:

Tarifa banderazo (primer km)	₡ 630
Tarifa variable (km adicional)	₡ 610
Tarifa por espera	₡ 3495
Tarifa por demora	₡ 6125

Fuente: http://www.aresep.go.cr

Cuando el taxi está detenido (en un semáforo o en una presa) el taxímetro, también conocido como maría, debe ir aumentando ₡10 cada seis segundos. Cuando el auto avanza, debe variar ₡10 cada 15 metros. ¿Cuánto tiene que pagar Daniel por un viaje en taxi desde su casa hasta un centro comercial que se encuentra a 12 kilómetros de distancia, si el taxi se detuvo durante 2 minutos en una presa?

Solución del problema 2.1

Para el viaje de ida, Daniel tuvo que pagar ₡ 630 por el primer kilómetro, y ₡ 610 por cada uno de los 11 kilómetros adicionales. Si representamos con la letra *a* la cantidad adicional a pagar por los 120 segundos en que el taxi estuvo detenido, entonces tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{120}{6} = \frac{a}{10}$$

La solución es $a = \dfrac{120 \times 10}{6} = 200$ colones. Por lo tanto Daniel tuvo que pagar:

630 + 610 × 11 + 200 = 7540 colones

Existe una aplicación gratuita para teléfonos celulares conocida como “taxiando”. La aplicación funciona en conjunto con el GPS de cada celular para identificar el trayecto del viaje y calcular lo que el usuario tendría que pagar. Además calcula la distancia y el tiempo del recorrido.

Problema 2.2: agente vendedor

Estrella es agente vendedora en una empresa que fabrica máquinas de coser. Su salario mensual es el salario mínimo, que actualmente es de ₡320 961, más la comisión por las ventas. La empresa otorga un 5% por la venta de cada máquina de coser manual *Puntada Segura* que vale ₡195 000 cada. Estrella espera ganar en este mes al menos un millón de colones (sin los rebajos de ley). ¿Cuál es la cantidad mínima de máquinas de coser *Puntada Segura* que tendrá que vender para alcanzar su meta?

Foto tomada por el autor

Solución del problema 2.2

Designemos con la letra n la cantidad de máquinas que Estrella tendrá que vender durante este mes para alcanzar lo que propuso. La comisión ganada por cada máquina vendida es 5% de ₡195 000, es decir,

$$0,05 \times 195\,000 = 9750 \text{ colones}$$

La comisión ganada por la venta de n máquinas es igual a $9750 \times n$ y por lo tanto su salario mensual (sin los rebajos de ley) es el salario mínimo + comisión ganada:

$$320\,961 + 9750 \times n \text{ colones}$$

Esta cantidad tiene que ser por lo menos igual a un millón de colones, es decir

$$320\,961 + 9750 \times n \geq 1\,000\,000$$

Necesitamos encontrar el *menor* valor de n natural que satisfaga la inecuación anterior. Podemos experimentar con algunos valores de n conforme la tabla abajo:

n	20	40	50	60	70
$320\,961 + 9750 \times n$	515 961	710 961	808 461	905 961	1 003 461

Observando la tabla anterior vemos que

$$60 < n \leq 70$$

La cantidad mínima *n* tiene que ser mayor que 60 pero menor o igual que 70. La tabla abajo proporciona un mejor acercamiento al valor de *n*.

n	61	63	65	67	69	70
320 961 + 9750 × *n*	915 711	935 211	954 711	974 211	993711	1 003 461

Concluimos que la cantidad mínima de máquinas de coser que tendrá que vender Estrella para alcanzar la meta de un millón de colones es igual a 70, pues si vende 69 máquinas no alcanza el millón de colones.

Es claro que si vende más de 70 máquinas también sobrepasará el millón de colones, pero si vende menos de 70 no alcanzará su meta. Por lo tanto la cantidad *mínima* de máquinas a vender es exactamente 70.

Problema 2.3: digitadora de documentos

Paula trabaja como digitadora de texto y cobra ₡ 2400 por trabajo más una cantidad que depende del número de páginas digitadas según la siguiente tabla:

Primeras 10 páginas	₡ 350 por página
Siguientes 20 páginas	₡ 300 por página
Siguientes páginas	₡ 250 por página

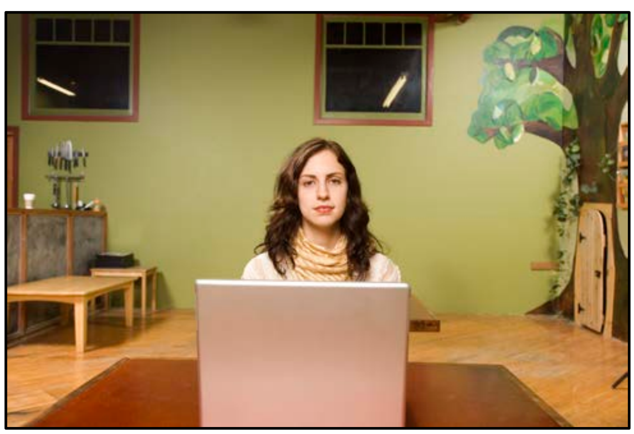


Foto propiedad del MEP Costa Rica

a) Marianela la contrató para que editara el texto de un artículo de 16 páginas. ¿Cuánto pagó Marianela por el trabajo?
b) Luis la contrató para que editara el texto de un informe de 37 páginas. ¿Cuánto pagó Luis por el trabajo?

Solución del problema 2.3

a) El costo por la digitación de las 10 primeras páginas fue de 350 × 10 = 3500 colones mientras que el costo de las 6 páginas restantes fue de 300 × 6 = 1800 colones. Por lo tanto el costo por el trabajo completo fue de

$$2400 + 3500 + 1800 = 7700 \text{ colones}$$

b) Por las primeras 10 páginas Luis tiene que pagar 3500 colones. Para las 20 páginas que siguen pagará 300 × 20 = 6000 colones, y para las 7 páginas que siguen pagará 250 × 7 = 1750 colones. El costo por el trabajo completo fue de

$$2400 + 6000 + 1750 = 13\ 650 \text{ colones}$$

Problema 2.4: Ensalada de frutas

David quiere llevar algunas manzanas para la ensalada de frutas que van a preparar en su escuela para la fiesta de fin de año. Su papá le regaló ₡5000 para que él compre la mayor cantidad posible de manzanas. Si el precio de cada manzana gala es ₡260, ¿cuál es la mayor cantidad de manzanas que David podrá comprar?

Solución del problema 2.4

Si utilizamos la letra *m* para indicar la cantidad de manzanas que David puede comprar con los cinco mil colones entonces podemos plantear la siguiente inecuación:

$$260 \times m \leq 5000$$

La solución es $\frac{5000}{260}$ lo que es aproximadamente 19,23. Pero como *m* es un número entero entonces la mayor cantidad que David puede comprar son 19 manzanas. Esto le costaría ₡4940 y sobrarían ₡60.

Módulo 3: Razón, proporción y porcentaje

Problema 3.1: capacitaciones en línea

Lea atentamente la siguiente noticia publicada el domingo 5 de octubre del 2014 en el periódico La Nación.

MEP combatirá rezago de docentes con cursos en línea

Alberto Barrantes C.
alberto.barrantes@nacion.com

La bases débiles de la universidad de algunos docentes y la resistencia por temores al cambio, en otros, limita los avances que prometen las portátiles y las pizarras electrónicas a las aulas.

Para vencer estas barreras y ahorrarse recursos como transporte y alimentación, el Ministerio de Educación Pública (MEP) plantea que la mayoría de capacitaciones a docentes sean vía electrónica, mediante Internet.

La Fundación Omar Dengo (FOD) y el MEP diseñaron una "universidad gratis" por Internet para capacitar a docentes de primaria y secundaria.

Actualización

Cambios Un escaso 5% de las actividades de capacitación se realiza en la modalidad de videoconferencia o curso virtual. La mayoría son talleres, charlas o cursos presenciales. El MEP cambiará a modalidad en línea para 2015.

Participación Solo 40% de los educadores asiste a los cursos y de los participantes solo el 20% afirma llevar el conocimiento adquirido a sus clases.

FUENTE **ESTADO DE LA EDUCACIÓN**

El portal en línea ofrece cursos, recursos didácticos, juegos y dinámicas para que los educadores actualicen conocimientos y los pongan en práctica en el aula.

El campus virtual se conoce como UPE: la puerta al conocimiento y pretende que la falta de tiempo no se convierta en una excusa para no actualizarse.

Según el último Informe del Estado de la Educación (2013), para capacitar a los docentes se hace poco uso de la tecnología.

"Vamos a dar un golpe de timón y utilizar los recursos de forma más eficiente, mediante capacitaciones en línea, con apoyo de la FOD", aseguró la ministra de Educación, Sonia Marta Mora.

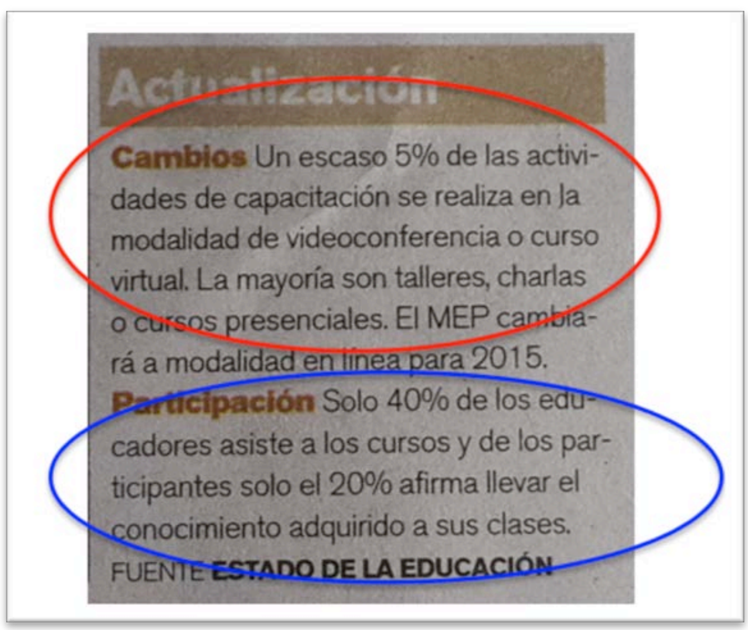
El MEP gastó unos ¢2.000 millones al año, entre 2010 y 2013, en capacitaciones que los mismos maestros consideran de poca utilidad, corta duración y sin ningún tipo de continuidad.

a) Si en el año 2013 fueron desarrolladas 18 actividades de capacitación en la modalidad de videoconferencia o de cursos virtuales, ¿cuántas actividades de capacitación fueron brindadas en otras modalidades en el 2013?

b) De los 46 500 docentes de I, II, III ciclos y ciclo diversificado, ¿cuántos asisten a los cursos de capacitación? ¿cuántos afirman llevar el conocimiento adquirido a sus clases?

Solución del problema 3.1

La parte de la noticia que contiene los datos que nos interesan se encuentra resaltada en la figura del lado:



Actualización

Cambios Un escaso 5% de las actividades de capacitación se realiza en la modalidad de videoconferencia o curso virtual. La mayoría son talleres, charlas o cursos presenciales. El MEP cambiará a modalidad en línea para 2015.

Participación Solo 40% de los educadores asiste a los cursos y de los participantes solo el 20% afirma llevar el conocimiento adquirido a sus clases.

FUENTE **ESTADO DE LA EDUCACIÓN**

a) La información indica que el 5% de las actividades de capacitación fue dada en forma de videoconferencia o curso virtual. Por lo tanto las 18 actividades mencionadas representan el 5%. Si la cantidad total de actividades de capacitación es representada por la letra *n* entonces tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{18}{5} = \frac{n}{100}$$

La solución es $n = 360$. La cantidad de actividades de capacitación brindadas en otras modalidades representan el 95% del total *n*, es decir, 95% de 360, o bien $360 - 18 = 342$.

b) Tenemos que calcular el 20% del 40% del total de educadores, es decir,

$$\frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times 46\,500 = \frac{2 \times 4 \times 46\,500}{100} = 3720$$

Concluimos que únicamente 3720 docentes afirman llevar el conocimiento adquirido en las capacitaciones a sus clases.

Problema 3.2: el partido Saprissa-Boca Juniors

Lea atentamente la siguiente noticia que fue publicada en el periódico La Nación:

JUEGO AMISTOSO DEL 4 DE JULIO

Boca-S ya vendió 43% de los boletos

Miguel Calderón S.
miguel.calderon@nacion.com

El partido amistoso del próximo 4 de julio entre el laureado equipo argentino Boca Juniors y el Saprissa ya registra un 43% de las entradas vendidas.

La organización del juego informó ayer de que los boletos se venden a muy buen ritmo en la tiquetera eticket.cr, por lo que estiman que habrá un llenazo en el Estadio Nacional.

"Estamos sorprendidos porque aún no hemos arrancado con la publicidad del juego y tenemos vendidos cerca de 15.000 tiquetes. Esto significa que la

La peña de Boca en el país estará presente. RAFAEL PACHECO

¿Aproximadamente cuántas personas podrán asistir al partido de fútbol entre el Saprissa y el Boca Juniors si todas las entradas son vendidas?

Solución del problema 3.2

En la información leemos que el 43% de las entradas vendidas representan cerca de 15 000 tiquetes. Si representamos con la letra *n* la cantidad de tiquetes que corresponden al 100% de entradas vendidas, y considerando que cada aficionado ocupa un tiquete para ingresar al estadio, entonces tendremos la siguiente proporción:

$$\frac{15\,000}{43} \approx \frac{n}{100}$$

En la proporción anterior hemos utilizado el signo de aproximadamente igual “ $\approx$ ” en lugar del signo de igualdad “=” pues el número de tiquetes vendidos no era exactamente 15 000.

La solución $n \approx 34\,883{,}72$ no es entera. Al tratarse de cantidad de personas, tiene que ser un número entero. Por lo tanto podemos tomar como solución $n = 34\,883$, es decir, aproximadamente 34 883 personas podrán asistir al partido.

Problema 3.3: la bandera

La figura adjunta muestra una bandera de Costa Rica con una altura de 4 cm y con largo de 6 cm.

Bandera de Costa Rica, razón 2:3

Si queremos hacer otra bandera de Costa Rica que tenga 1 m de altura entonces ¿cuál tiene que ser el largo de la bandera para mantener la razón dada?

Solución del problema 3.3

La proporción es útil para ampliar o reducir objetos. Aquí queremos ampliar la bandera de Costa Rica manteniendo la misma razón de la bandera dada.

Queremos mantener la razón entre el largo y la altura que es de

$$\frac{6}{4} = 1{,}5$$

Para una altura de 100 cm, pues 1 metro es equivalente a 100 cm, si utilizamos la letra *a* para el largo de la bandera ampliada entonces

$$\frac{a}{100} = 1{,}5$$

Por lo tanto el largo de la bandera ampliada es $a = 100 \times 1{,}5 = 150$ cm que equivale a 1,5 metros.

Problema 3.4: Ofertas

En el siguiente recorte de periódico

¿Cuál es el porcentaje de descuento para cada uno de los tres productos, si comparamos el precio actual con el anterior?

Solución del problema 3.4

El precio de cada malla con 15 unidades de naranjas cuesta ₡895, y su precio anterior era de ₡2055. Por lo tanto el ahorro es de ₡1160, lo que representa

$$\frac{1160}{2055}\times 100$$

Lo que es aproximadamente 56,45% de descuento. El ahorro por la compra de cada kilo de repollo blanco es de

$$\frac{615-295}{615}\times 100=\frac{320}{615}\times 100$$

Aproximadamente 52% de ahorro por kilo de repollo blanco. Finalmente para cada kilo de zanahoria se ahorra:

$$\frac{735-590}{735}\times 100=\frac{145}{735}\times 100$$ (cerca de un 19,73%)

Créditos

Relaciones y Álgebra para I y II ciclos. Ejercicios adicionales es un recurso del *Curso bimodal de capacitación para docentes de la Educación Primaria.* Una actividad del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor del documento
Edison de Faria Campos

Revisores

Erasmo López López.
Damaris Oviedo Castro
Ricardo Poveda Vásquez
Ángel Ruiz
Grace Vargas Ramírez

Edición Gráfica
Keibel Ramírez Campos

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

La imagen de la portada es propiedad del Ministerio de Educación Pública.

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2015). *Relaciones y Álgebra para I y II ciclos. Ejercicios adicionales*. San José, Costa Rica: autor.