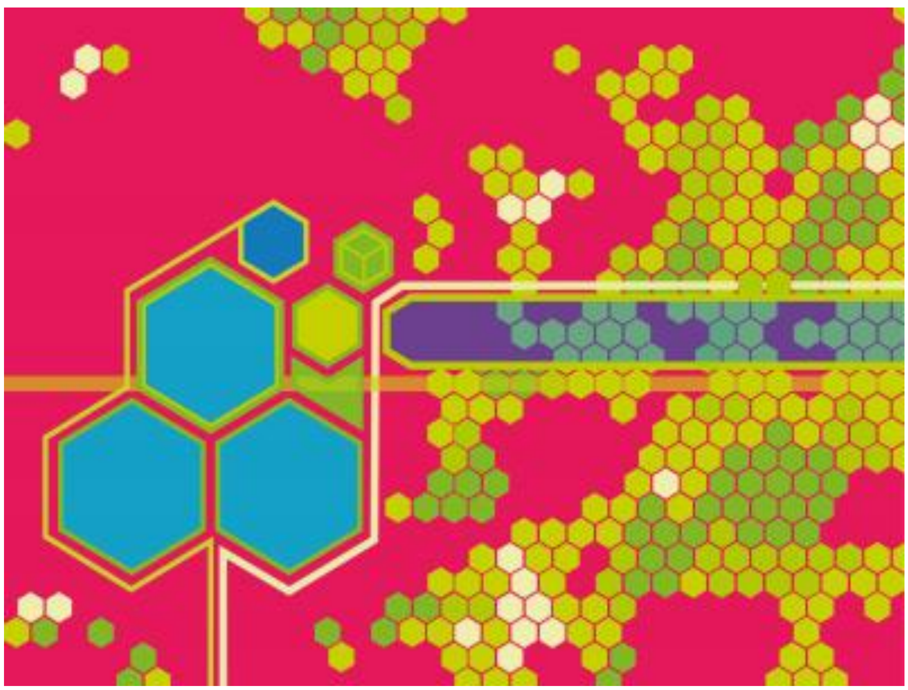
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque en Resolución de problemas



Geometría
2012

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Ciclo Diversificado posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, iniciar con *Relaciones y Álgebra* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. A continuación se sigue con *Estadística y Probabilidad*, que no estaba presente en el plan anterior. Y finalmente *Geometría*, cuyos contenidos son completamente distintos a los del programa anterior. Estas tres unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Ciclo Diversificado se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.
En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

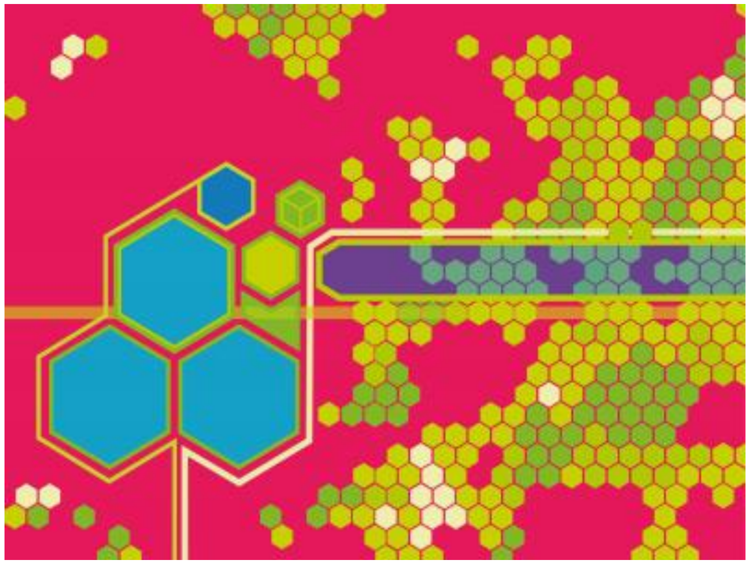
Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Geometría



Habilidad general

Conocer y aplicar dada una serie de situaciones seleccionadas con fines didácticos, conceptos básicos de polígonos, transformaciones en el plano, uso de la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones en el plano, visualización y aplicación de características de figuras geométricas tridimensionales.

Introducción

Este material propone situaciones seleccionadas con fines didácticos. Se busca desarrollar algunos contenidos de geometría mediante la metodología de resolución de problemas utilizando un enfoque orientado a la educación a distancia.

Este material introduce el trabajo con circunferencias, polígonos, transformaciones y visualización espacial. En muchos momentos esto se liga con las coordenadas cartesianas, lo cual da la oportunidad de representarlos objetos geométricos de varias maneras y conecta de manera natural con el área de *Relaciones y Álgebra*.

I. Circunferencias y rectas

Actividad 1

A partir del carro 1, en la siguiente figura, el carro 2l se encuentra a 60 m al Este y 40 m al Norte, y carro 3 a 24 m Oeste y X m al Norte, si las carreteras se cortan formando ángulo recto, ¿cuál es el valor de X?

Imagen: elaboración propia

Análisis de la Actividad 1

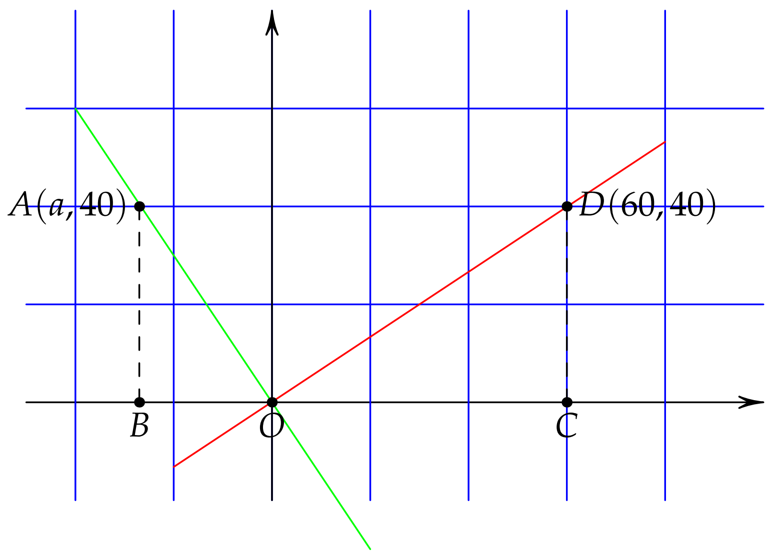
Esta actividad permite crear un modelo utilizando un sistema de ejes cartesianos e involucrarse con las ecuaciones de rectas perpendiculares entre sí. Este es un problema abierto, en el sentido de que no se encuentra un valor específico de X, porque no hay suficientes datos para ello.

Se puede superponer un sistema de ejes cartesianos, en donde el carro 1 está en el origen (0,0) y 2 en el punto (60,40); el lado de cada cuadrado de la cuadrícula representa 20 m. De ahí se puede observar que X está entre 80 y 100. Una aproximación aceptable puede ser 96. Pero, ¿cuál es el valor exacto? Para responder a esto se debe analizar con más profundidad el modelo y utilizar la información dada para los otros puntos.

La idea es que un problema de este tipo se proponga antes de conocer la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares entre sí y que se pueda, a partir del trabajo con el él, deducir dicha relación. Se supone que se conoce que las pendientes de rectas paralelas son iguales.

Una posible estrategia que permite deducir la relación entre perpendiculares, antes mencionada, es la siguiente.

La ecuación de la recta *l* que contiene los carros 1 y 2 es $y = \frac{2}{3}x$. Puesto que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, en lugar de considerar la recta *l*' que contiene el carro 3 y es perpendicular a *l*, considere la recta *l*'' que es paralela a *l*' y pasa por el origen (carro 1). Hay un punto A en la recta *l*'' cuya ordenada es 40; sea *a* su abscisa, según se muestra en el siguiente dibujo.



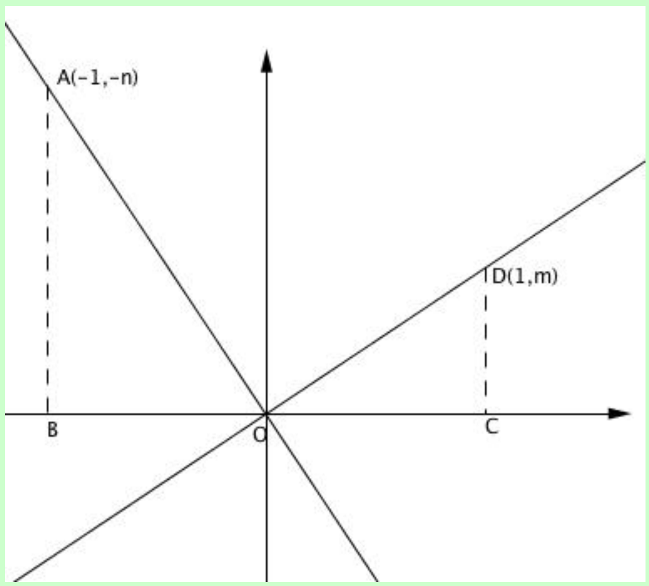
Por el criterio A-A-A, los triángulos ABO y OCD son semejantes, por lo tanto $\frac{40}{60} = \frac{|a|}{40}$. Luego, $|a| = \frac{80}{3}$ y como *a* es negativo, se tiene que $a = -\frac{80}{3}$. De aquí se tiene que la pendiente de la recta *l*'' es $\frac{40}{-\frac{80}{3}} = -\frac{3}{2}$.

Pero, ¿cuánto es X? En realidad la idea de la actividad es deducir el asunto de la pendiente de la recta. El valor aproximado 96 que se dio antes para X se deduce del dibujo pero no puede verificarse analíticamente. Observe que *l*' es una traslación vertical de *l*''; el valor de X depende de la magnitud de la traslación (de modo equivalente del valor de la y-intersección de la recta) y no hay datos suficientes para determinarlo.

Relación entre las pendientes de dos rectas

La etapa de clausura consiste en enunciar que si la pendiente de una recta en el plano es $m \neq 0$, entonces la pendiente de una recta perpendicular a ella es – 1/*m*. Este es un resultado que se puede probar siguiendo el argumento anterior para el caso particular del problema dado. Se puede proceder como se indica a continuación.

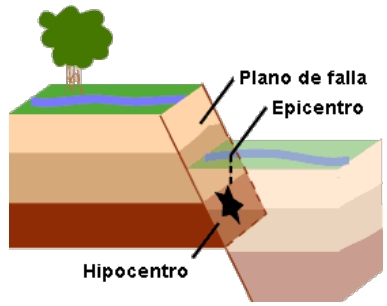
Sea *l* una recta en el plano cuya pendiente es $m \neq 0$ y sea *l'* perpendicular a ella, con pendiente *n*. Dado que si dos rectas son paralelas entonces tienen la misma pendiente, entonces podemos suponer que *l* y *l'* se cortan en el origen de coordenadas. En *l*, la ordenada que corresponde a la abscisa 1 es *m* y, digamos que en *l'* la ordenada que corresponde a la abscisa -1 es -*n*; el siguiente dibujo puede servir como auxiliar.



Si el ángulo COD mide x, entonces el ángulo BOA mide 90-x (pues las rectas son perpendiculares), luego, los triángulos ABO y OCD son semejantes, por lo que $\frac{m}{1} = \frac{1}{-n}$. Luego, $n = -\frac{1}{m}$.

Actividad 2

Un movimiento sísmico es un movimiento vibratorio producido por la pérdida de estabilidad de masas de la corteza. Cuando el movimiento llega a la superficie y se propaga por ésta se le llama terremoto.



Fuente: http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm

El movimiento sísmico se propaga concéntricamente y de forma tridimensional a partir de ese punto de la Litósfera al hipocentro. Cuando las ondas procedentes del hipocentro llegan a la superficie terrestre se convierten en bidimensionales y se propagan de forma concéntrica a partir del primer punto de contacto con ella. Este punto se llama epicentro. (http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm)

Hay un sismo y en tres estaciones se reportaron ondas secundarias de similar intensidad. Tomando como punto de referencia la estación central sismológica, las tres estaciones se ubican así:

A: 24 millas al norte y 15 millas al este
B: 30 millas al norte y 6 millas al este
C: 15 millas al sur y 10 millas al este

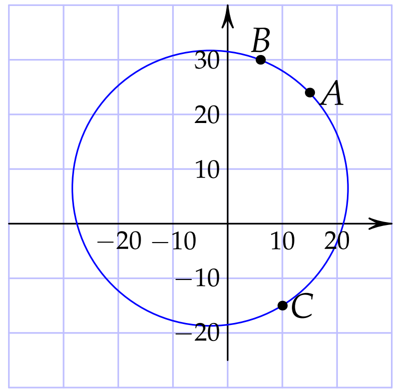
a. *¿Cuál es la ubicación del epicentro con respecto a la estación central?*
b. *¿Cuál fue el radio de alcance de la onda sísmica?*
c. *¿Cómo se podría representar el comportamiento sísmico mediante una relación algebraica?*

Análisis de la Actividad 2

Estas preguntas, permiten desarrollar estrategias que se pueden implementar para introducir de forma natural la ecuación de la circunferencia con centro en un punto dado y un radio dado.

Dado que las ondas secundarias reportadas por las tres estaciones son de similar intensidad, ellas se encuentran a la misma distancia del epicentro. Es decir, se ubican en una circunferencia cuyo centro es el epicentro del sismo.

La información dada puede ubicarse en un plano con sistema de ejes cartesianos, cuyo origen es la estación central. Tomamos este origen porque conocemos la ubicación de las otras tres estaciones con respecto a ella. Esto se da en la siguiente figura.



Si el epicentro está en el punto (*a,b*) y las tres estaciones están a *r* millas de distancia del epicentro, entonces la distancia de cada estación al epicentro se puede escribir como

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=d \qquad [1]$$

donde (*x,y*) es la ubicación de la estación. Se observa que en realidad todos los puntos de la circunferencia de centro (*a,b*) y radio *r* cumplen con [1]y viceversa, todos los puntos que cumplen [1] están en la circunferencia de centro (a,b) y radio r. Si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

que es la forma en que usualmente se da la ecuación de la circunferencia.

Para este caso particular, la información sobre la ubicación de las estaciones permite establecer un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas mediante el cual se puede determinar: $a=-3{,}2$, $b=6{,}5$ y $r=25{,}2$.

Conociendo la ecuación de una circunferencia y las coordenadas de un punto, se puede saber si éste se encuentra dentro, fuera o en la circunferencia.

En el ejemplo anterior, las personas del pueblo que están 10 millas Sur y 20 millas al Este de la estación central no deberían haber sentido el sismo; en cambio los habitantes de un pueblo que está a 5 millas al Oeste de la estación central sí lo sintieron ya que el pueblo está dentro del radio de la onda sísmica. Esto se puede ver en la gráfica, pero también se puede hacer algebraicamente, puesto que al sustituir (20,-10) en

$$(x+3{,}2)^2+(y-6{,}5)^2$$

se obtiene $23{,}2^2+(-16{,}5)^2=810{,}49>25{,}2^2$, lo cual indica que (20,10) está en el exterior de la circunferencia. En el caso del otro pueblo, el punto a considerar es (-5,0); al sustituirlo se obtiene $(-1{,}8)^2+(-6{,}5)^2=45{,}49<25{,}2^2$, por lo que está en el interior de la circunferencia.

En la etapa de clausura de esta actividad se puede utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos para deducir la ecuación de la circunferencia con centro en (a,b) y radio r, así como la forma en que se determina si un punto (p,q) está en la circunferencia, en su interior o en su exterior.

Ecuación de la circunferencia y posición de un punto respecto a ella

Una circunferencia con centro en (a,b) y radio r tiene como ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

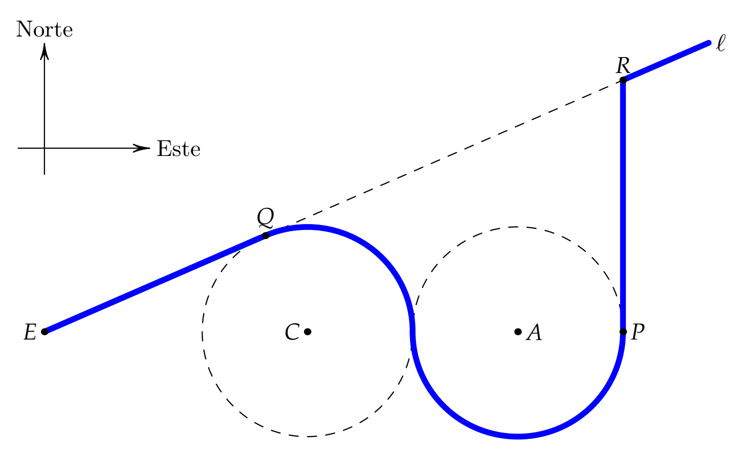
De este modo, el punto (p,q):

- está en una circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p,q) a (a,b) es igual a *r*,
- está en el interior de la circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2<r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p,q) a (a,b) es menor que *r*,
- está en el exterior de la circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2>r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p,q) a (a,b) es mayor que *r*.

Actividad 3

La circunferencia es una curva plana de curvatura constante; se utiliza en muchos contextos tales como diseño industrial y diseño arquitectónico, entre otros. También, arcos de circunferencia, se utilizan en el diseño de carreteras para empalmar, de manera sencilla, tramos rectos con tramos curvos y tramos curvos entre sí.

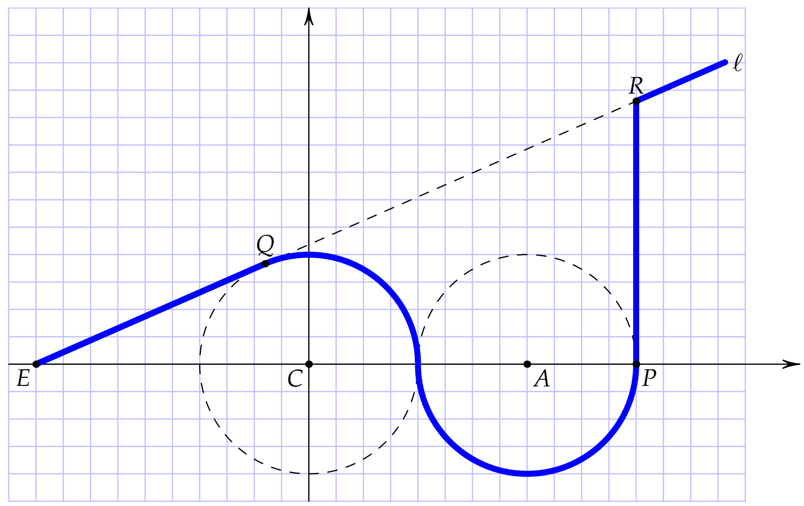
La figura siguiente representa el diseño de un tramo de cierta carretera; la forma del diseño obedece a que hay algunas edificaciones en ese sector y no se pudo construir en línea recta. La carretera corresponde al trazo azul, los demás elementos geométricos que ahí aparecen son auxiliares en el diseño. La recta l es tangente en Q a la circunferencia centrada en C; ambas circunferencias tienen radio de igual medida y son tangentes. La carretera se dirige en línea recta desde E hasta Q, luego sigue sobre un arco que es un cuarto de la circunferencia con centro en C, luego sigue sobre un arco que es media circunferencia con centro en A, continúa por el segmento PR que es tangente a la circunferencia y a partir de R continúa continua sobre la misma recta l.



El punto E está situado a 100 m al Oeste del punto C y el punto A está situado a 80 m al Este de C. ¿Cuál es la ubicación del punto R con respecto a C?

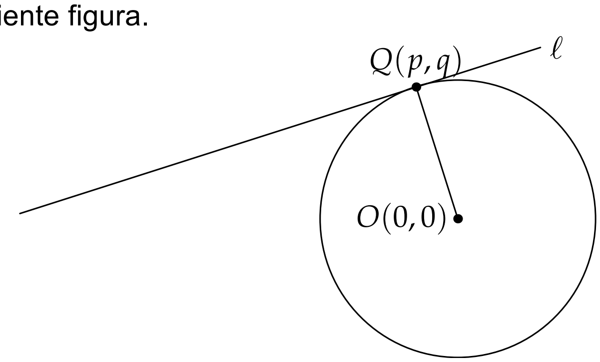
Análisis de la Actividad 3

El propósito de la actividad es involucrarse con el estudio de la relación entre circunferencias y rectas (tangentes, secantes, exteriores). Una estrategia posible es establecer un sistema de ejes cartesianos. Dado que los puntos se dan en términos de su ubicación con respecto al punto C, es conveniente introducir un sistema de ejes cartesianos con origen en C y cuyo eje *x* sea la recta que contiene los puntos A y C, como se observa en la figura siguiente (el lado de cada cuadrado de la cuadrícula representa 10 m).



Por las condiciones dadas se obtiene que la abscisa de R es 120, de modo que el problema se resuelve si se determina el punto Q, porque así se determina la ecuación de *l* y, de ahí, la ordenada de R. Se puede obtener una aproximación de tal ordenada observando la figura: aproximadamente 98. Otra forma de obtener una aproximación es viendo que la circunferencia de centro C corta el eje *y* en 40 (el radio de la circunferencia), entonces, por semejanza de triángulos: $\frac{PR}{220} = \frac{40}{100}$, es decir $PR = 88$. ¿Cuál es el valor exacto de la ordenada?

Considere en primer lugar una circunferencia de centro en O(0,0) y una recta tangente a ella en *Q*(*p,q*), como en la siguiente figura.



El radio $\overline{OQ}$ es perpendicular a *l* y la pendiente de la recta que contiene a dicho radio es $\frac{q}{p}$, por lo tanto, la pendiente de la recta *l* es $\frac{-p}{q}$. Pero, dado que *l* pasa por (-100,0) y *(p,q)* su pendiente es, también, $\frac{q}{p+100}$. Entones $\frac{q}{p+100} = \frac{-p}{q}$; por lo que $p^2 + q^2 = -100p$. Pero (p,q) está en una circunferencia de radio 40 centrada en (0,0), por lo tanto $p^2 + q^2 = 1600$. Es decir

$-100p = 1600$ y, entonces $p = -16$ y $q = \sqrt{1344}$, de manera que la pendiente de la recta es $m = \frac{16}{\sqrt{1344}}$ y su ecuación es $y = \frac{16}{\sqrt{1344}}(x + 100)$.

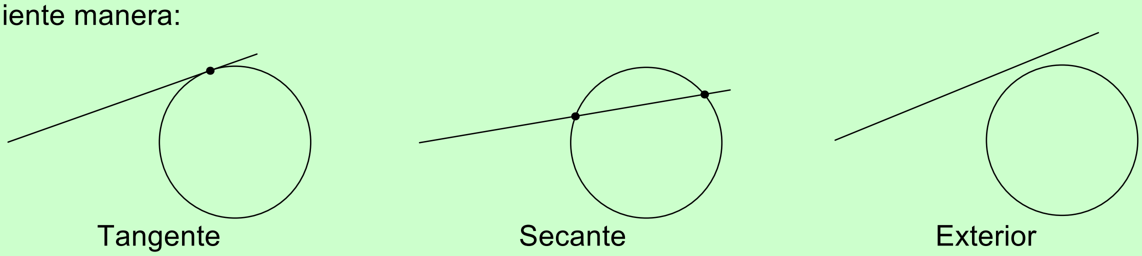
La ordenada del punto R es $y = \frac{16}{\sqrt{1344}}(120 + 100) = \frac{3520}{\sqrt{1344}}$. Si aproximamos $\sqrt{1344}$ con dos decimales se tiene $\sqrt{1344} \approx 36{,}66$ y, entonces $y = 96$.

Falta una respuesta, algo como así: de esta forma el punto R se encuentra a …

En la etapa de clausura deberá establecerse relaciones algebraicas entre circunferencias y rectas tangentes, secantes y exteriores a ella.

Relaciones algebraicas entre circunferencias y rectas

Una recta es tangente a una circunferencia si tienen exactamente un punto en común (se intersecan en un solo punto); la recta y la circunferencia son secantes si tienen exactamente dos puntos en común (se intersecan en dos puntos distintos) y la recta es exterior a la circunferencia si no tienen puntos en común (no se intersecan). Gráficamente se visualizan de la siguiente manera:



Si se tiene la representación algebraica de ellas, digamos que la circunferencia es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

y la recta es

$$y = mx + c,$$

entonces basta ver el número de soluciones de la ecuación cuadrática

$$(x - a)^2 + (mx + c - b)^2 = r^2.$$

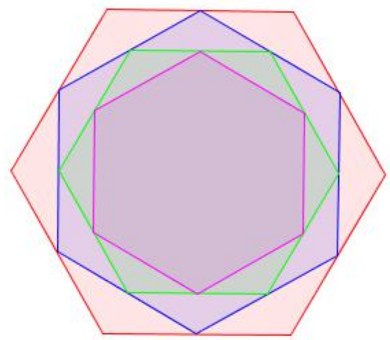
Si no hay solución entonces la recta es exterior a la circunferencia, si hay solución única entonces es tangente y si hay dos soluciones distintas entonces es secante; en los dos últimos casos, las soluciones de la ecuación corresponden a las abscisas de los puntos de intersección.

En el proceso de análisis de la actividad también se obtuvo un hecho importante que aquí se generaliza a una recta centrada en (*a*,*b*): si la recta $y = mx + c$ es tangente a la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en el punto (*p*,*q*), entonces $m = -\frac{p-a}{q-b}$.

III. Polígonos y áreas

Actividad 4

El siguiente diseño se elaboró de la siguiente manera: primero se trazó un hexágono regular de lado 4 cm, luego se trazaron los puntos medios de sus lados y se trazó el hexágono cuyos vértices son esos puntos medios y así sucesivamente hasta el hexágono más pequeño.

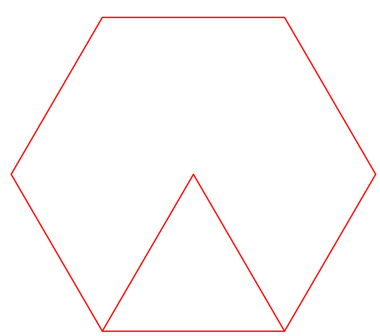


¿Cuánto mide el perímetro y cuánto el área del cuarto hexágono (contados de mayor a menor)? Si se continúa de esa manera, ¿cuál es el área del n-ésimo hexágono?

Análisis de la Actividad 4

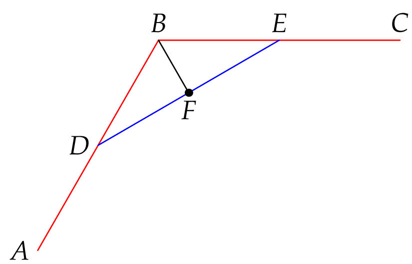
Esta es una actividad que permite repasar e introducir diversos conceptos. Se puede repasar la trigonometría vista en noveno año y la fórmula del área del triángulo; se puede introducir la medida del ángulo central de un polígono regular, la medida de sus ángulos internos, el cálculo de la apotema y el cálculo del área.

Se observa que cada hexágono regular está compuesto por 6 triángulos congruentes, así que, en primer lugar, habrá que obtener el área de cada triángulo. Veamos el triángulo que aparece en la figura:



Se sabe que la medida de la base es igual a la medida del lado del hexágono. Para determinar la altura del triángulo (es decir, la apotema del hexágono) se debe conocer la medida de sus ángulos; aquí se puede deducir (viendo que un giro completo es 360º y que el hexágono regular tiene 6 ángulos centrales) que la medida del ángulo central del hexágono es 360/6=60º y como los lados del triángulo que lo forman son congruentes, entonces son congruentes sus ángulos opuestos, de aquí se concluye que el triángulo es equilátero. Así, si el lado del hexágono es L entonces su apotema es $L\frac{\sqrt{3}}{2}$ y su área es $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$.

Veamos qué relación hay entre la medida del lado de un hexágono y la medida del lado del hexágono en que está inscrito. Usemos la siguiente figura como auxiliar:



En el triángulo DFB se tiene que $m(\sphericalangle BFD) = 90°$, $m(\sphericalangle DBF) = 60°$ y $m(\sphericalangle BDF) = 30°$, de modo que $DE = L\frac{\sqrt{3}}{2}$; es decir, la medida del lado de cada hexágono es igual a la medida de la apotema del hexágono en el que está inscrito. Podemos formar la siguiente tabla (el hexágono 1 es el mayor, el 2 es el que está inscrito en el 1 y así sucesivamente):

No. hexágono	1	2	3	4
Medida lado	*L*	$L\frac{\sqrt{3}}{2}$	$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
Medida apotema	$L\frac{\sqrt{3}}{2}$	$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$	$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$
Área	$\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$	$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 L^2$	$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 L^2$	$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 L^2$

Para el caso particular del problema se tiene $L = 4$, entonces el área del cuarto hexágono es $48\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$. Siguiendo la tabla, el n-ésimo hexágono tiene área $3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1} L^2$, es decir $48\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}$ cuando $L = 4$.

Esta actividad conecta con el área de Relaciones y Álgebra porque permite descubrir regularidades.

La etapa de clausura consistirá en sistematizar conceptos relacionados con polígonos regulares tales como centro, radio, apotema, ángulo central, ángulo interno; así como el cálculo del perímetro, la apotema y el área.

Elementos de un polígono regular

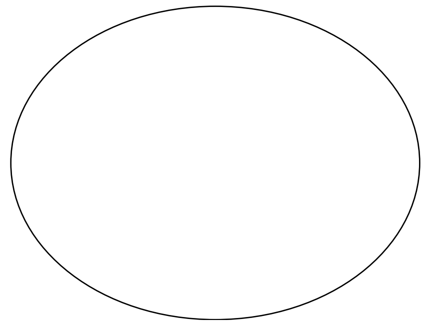
- El centro es el punto que equidista de los vértices del polígono.
- Un radio es un segmento de recta cuyos extremos son el centro y un vértice del polígono; también se llama radio del polígono a la medida de dicho segmento.
- Una apotema es un segmento de recta cuyos extremos son el centro y el punto medio de uno de sus lados.
- El ángulo formado por dos radios consecutivos se llama ángulo central. La medida de un ángulo central de un polígono regular de *n* lados es $\frac{360}{n}$ grados.
- Un ángulo interno es el formado por dos lados consecutivos. La medida de un ángulo interno es $\frac{180(n-2)}{n}$ grados.

Actividad 5

En la antigua Roma hubo una ciudad llamada Pompeya. En el año 79 de nuestra era fue sepultada por una erupción del volcán Vesubio. Las excavaciones sistemáticas, iniciadas en el siglo XIX, han mostrado los vestigios de la ciudad con un sorprendente grado de conservación. La fotografía muestra el anfiteatro de la ciudad, dedicado al deporte y a los espectáculos con luchas de gladiadores y combates con fieras. Tenía capacidad para 20 000 personas. La arena es una elipse cuyo eje mayor mide 135 metros y su eje menor mide 104 metros. Estime el área del dicha elipse anfiteatro

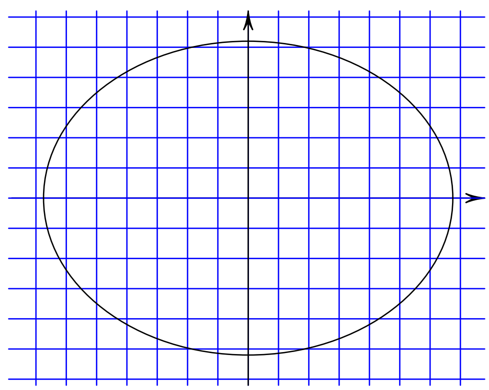
Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Este es el plano de la arena:

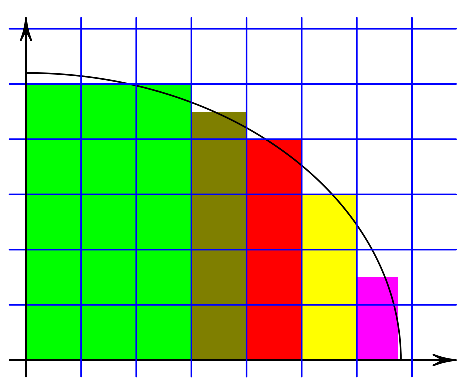


Análisis de la Actividad 5

Esta actividad permite, en el proceso, repasar el concepto de simetría axial. Se observa que hay dos ejes de simetría para la figura, los segmentos de dichos ejes que son interiores a la figura y con extremos en ella se llaman eje mayor y eje menor. La idea aquí es utilizar coordenadas para hacer un estimado del área. Se puede trazar la elipse en un sistema de ejes coordenados cuyo origen sea el centro de la figura (esto es, el punto en el que se cortan los ejes).



Dada la doble simetría de la figura, se puede estimar el área de la cuarta parte que queda en el primer cuadrante y luego multiplicar por cuatro. Hay varias maneras de realizar un estimado de este tipo; por ejemplo, se pueden considerar rectángulos con base en el eje horizontal y alturas estimadas según la curva, tal como se muestra a continuación (el siguiente dibujo tiene una escala mayor que el anterior).

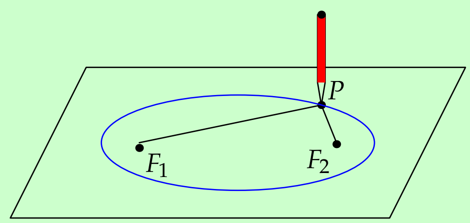


El lado de cada cuadrado en la cuadrícula representa 10 m; de esta manera, el rectángulo verde tiene área 1500 m^2, el oliva tiene área 450 m^2, el rojo tiene área 400 m^2, el amarillo 300 m^2 y el magenta 112,5 m^2. El área de esta cuarta parte es aproximadamente 2762,5 m^2; de manera que el área de la arena del anfiteatro de Pompeya es 11050 m^2. De hecho, el área de una elipse con tales dimensiones es $\pi \cdot 52 \cdot 67{,}5 \approx 11\,027$.

La etapa de clausura de una actividad como esta servirá para introducir algunos términos relacionados con la elipse tales como eje mayor, eje menor y vértice y para sistematizar un procedimiento de estimación de áreas de figuras con lados curvos.

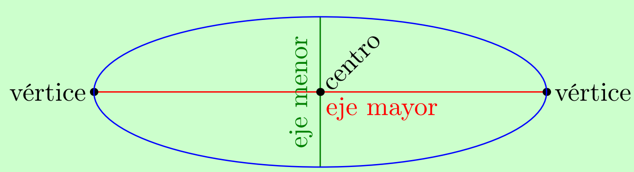
Elipses

Trate de realizar la siguiente actividad: tome un cordel (no muy grande), clave con chinches los dos extremos del cordel sobre una cartulina, de modo que el cordel no quede tenso. Ahora tome un lápiz y, manteniendo el cordel tirante comience a desplazar el lápiz, apretando suavemente su punta sobre el papel.



El trazo que obtiene es una curva parecida a un círculo pero achatada. Esta curva se llama **elipse**. Los puntos F_1 y F_2, en los que se clavan los extremos del cordel, se llaman **focos** de la elipse. La longitud del cordel, al mantenerse tirante, no varía; digamos que dicha longitud es *k*. Del proceso de trazado de la curva, podemos decir que la elipse está formada por todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a los dos focos es una constante *k*.

El punto medio del segmento de extremos F_1 y F_2 se llama centro de la elipse. El segmento que tiene por extremos dos puntos de la elipse y contiene los dos focos se llama **eje mayor**; sus extremos se llaman **vértices**. El segmento que tiene por extremos dos puntos de la elipse y es perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse se llama **eje menor**. Las rectas que contienen ambos ejes son ejes de simetría de la elipse.



Una historia interesante

(Adaptado de: Ávila, G. (1989). Kepler e a órbita elíptica en *Revista do professor de Matemática*, número 15. Publicación de la Sociedade Brasileira de Matemática.)

Ptolomeo de Alejandría, quien vivió en el siglo II de nuestra era, dejó establecido, en su tratado *Almagesto*, un desarrollo matemático para el movimiento de los planetas que es conocido como **sistema de Ptolomeo**. En él, lo mismo que Arquímedes, Hiparco y los pensadores de la antigüedad, Ptolomeo postuló un universo geocéntrico; esto es, un universo donde todo gira alrededor de la Tierra que permanece fija. Este sistema, además de parecer muy acorde con el sentido común, podía ser representado con facilidad. La órbita de los planetas alrededor de la Tierra se representaba mediante ciclos y epiciclos, que están basados en diversos movimientos circulares.

Hacia el final del siglo XV nació Copérnico (1473 – 1543), que se convirtió en un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo al proponer, con éxito, un sistema heliocéntrico: la Tierra gira alrededor del Sol. Sin embargo, en un principio, Copérnico consideró que las órbitas de los planetas alrededor del Sol eran circulares. Esto, desde luego, no estaba acorde con algunas de las observaciones realizadas, de modo que tuvo que hacer modificaciones a su teoría y consideró que el Sol no estaba exactamente en el centro del círculo sino en algún punto cercano. Esto tampoco fue suficiente y tuvo que incluir epiciclos en su sistema. Para realizar pronósticos el sistema resultaba poco útil.

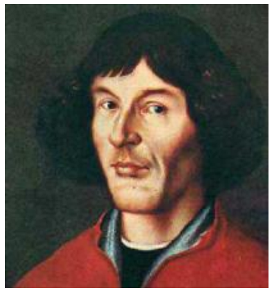
Tres años después de la muerte de Copérnico nació, en Dinamarca, Tycho Brahe (1546 – 1601), quien desde muy joven se apasionó por la astronomía tras observar un eclipse de Sol. A partir de entonces y por el resto de su vida se dedicaría por completo a esta actividad.

En una noche de agosto de 1563, Brahe observó que Júpiter y Saturno se encontraban prácticamente coincidentes sobre la bóveda celeste. Consultando las tablas astronómicas usadas en su época se dio cuenta de que contenían graves incorrecciones sobre dicho evento, a causa de las observaciones poco precisas en que estaban basadas. A partir de este momento, el joven decidió que haría todo lo que estuviera a su alcance para mejorar los datos. Para ello se preparó académicamente, visitó astrónomos, adquirió instrumentos de observación y construyó instrumentos propios cada vez más precisos. Entre tanto, contó con el apoyo incondicional del rey Federico II de Dinamarca, lo que le permitió trabajar con toda comodidad durante 20 años, en ese tiempo realizó el mayor cúmulo de observaciones astronómicas hasta entonces conseguido. De la riqueza de sus datos pudo deducir que el sistema copernicano requería de ajustes.

Al morir Federico II, le fue retirado el apoyo a Brahe y este abandonó Dinamarca. Posteriormente se asentó en una localidad cercana a Praga como matemático imperial del emperador Rodolfo II de Bohemia.

En Alemania, dentro de un ambiente familiar bastante difícil, nació Johnnes Kepler (1571 – 1630). Por diversas circunstancias Kepler se convirtió en asistente de Tycho Brahe a partir de febrero de 1600, pero habían tenido contacto por correspondencia durante los dos años previos. La capacidad de observación de Brahe y la competencia matemática de Kepler, trabajando en conjunto, rindieron excelentes frutos.


Ptolomeo


Copérnico


Brahe

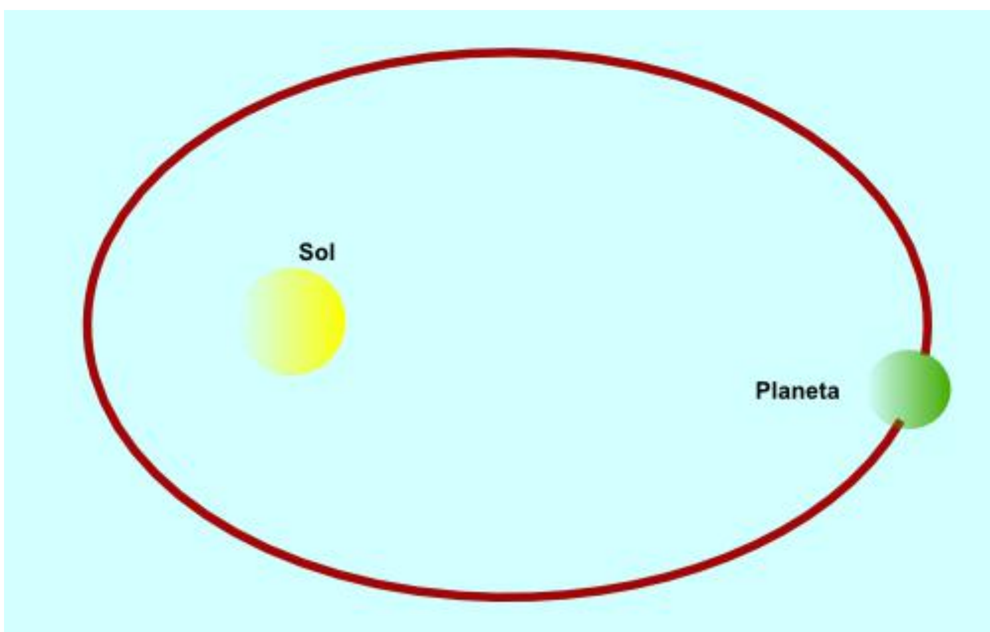

Kepler


Newton

Al morir Tycho Brahe, en 1601, Kepler fue nombrado su sucesor en el puesto de matemático imperial. Más adelante, utilizando como base las extraordinarias observaciones de Brahe y luego de laboriosos cálculos, Kepler logró determinar que la órbita de Marte no podía ser circular, sino que correspondía a una elipse con el Sol ubicado en uno de sus focos y cuya excentricidad es E=0,093. Una excentricidad bastante cercana a 0 que hace parecer que la órbita es circular.

Kepler generalizó este resultado mediante una ley conocida como **primera ley de Kepler** que dice:

Cada uno de los planetas describe una órbita elíptica de la cual el Sol ocupa uno de los focos.

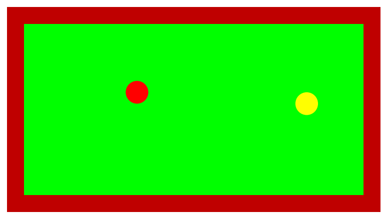


En el siglo XVII, Isaac Newton (1642 – 1727) confirmó analíticamente, según la ley de la gravitación universal, esta y otras leyes sobre el movimiento planetario enunciadas por Kepler.

V. Transformaciones en el plano

Actividad 6

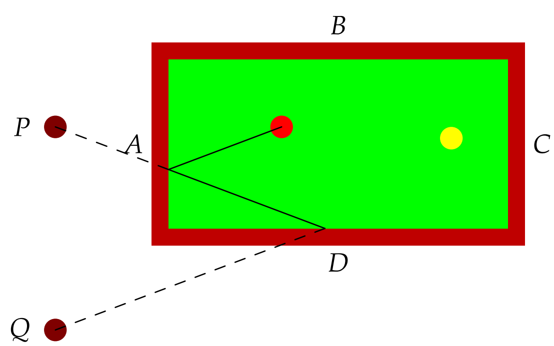
La figura representa una mesa de billar. Las dimensiones del rectángulo verde son 1,5 m por 3 m. Los lados de dicho rectángulo se llaman bandas. La bola amarilla que se ve en la figura está ubicada a 2,5 metros de la banda izquierda (llámese A) en la figura y a 80 cm de la banda inferior (llámese D): la bola roja está a 1 m de la banda izquierda y a 90cm de la banda inferior. Se golpea con el taco la bola amarilla de modo que esta bola pegue en la banda derecha (llámese C), luego en la D, luego en la A y, finalmente golpee la bola roja. ¿En qué puntos de las bandas mencionadas golpeará la bola amarilla?



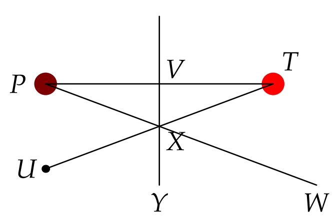
Análisis de la Actividad 6

Se trata de determinar en qué dirección debe golpearse la bola amarilla, hacia la banda derecha, para que siguiendo los pasos indicados finalmente golpee la bola roja. Una estrategia posible para encontrar la trayectoria que debe seguir la bola amarilla es la siguiente. Para facilitar el análisis sigamos la trayectoria en sentido inverso; esto es, cómo se golpearía la bola roja proviniendo de la banda A.

Observe la siguiente figura.

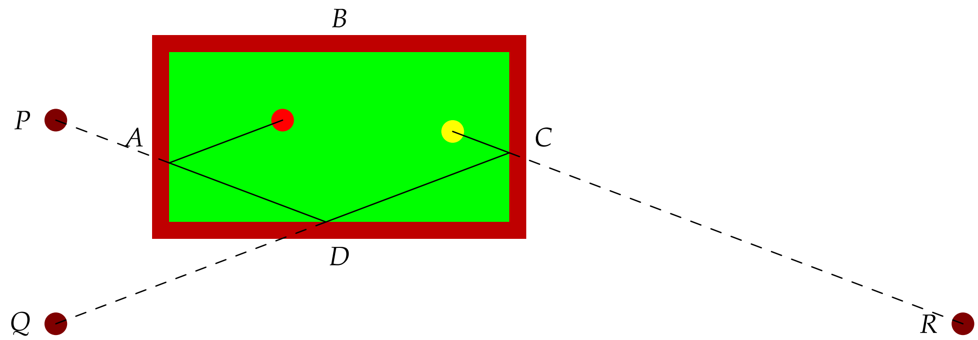


El punto P es opuesto al punto rojo con respecto a la banda A; el punto Q es opuesto a P con respecto a la recta que contiene a la banda D. Considere el siguiente esquema:



Por las condiciones dadas, el triángulo VXT es congruente al triángulo VXP, por lo que los ángulos VXP y VXT son congruentes. Por ser opuestos por el vértice, los ángulos VXP y WXY son congruentes; por lo tanto, los ángulos WXY y VXT son congruentes.

Dicho de otro modo, el ángulo formado por el segmento que sale del punto rojo y la banda A es congruente con el ángulo formado por la banda A y el segmento que va de la banda A a la banda D. Esto significa que si la bola viene de la banda D y toca en el punto indicado a la A, golpeará posteriormente la bola roja. Siguiendo el razonamiento hacia atrás se encuentra la trayectoria que debe seguir la bola amarilla, tal como se ve en el dibujo.



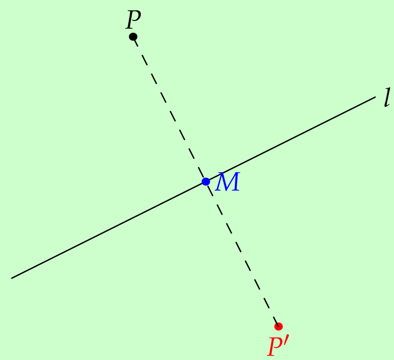
El punto P es la reflexión del punto rojo con respecto a la recta que contiene la banda A. El punto Q es la reflexión de P con respecto a la recta que contiene la banda D y R es la reflexión de Q con respecto a la recta que contiene la banda C. Considerando un sistema de ejes cartesianos con origen en la esquina inferior izquierda de la mesa, el punto rojo es (1; 0,9), y por lo tanto se tiene P(-1; 0,9), Q(-1; -0,9) y R(7; -0,9). Para saber los puntos donde la bola amarilla debe impactar las bandas, basta con determinar las ecuaciones de las rectas correspondientes y ver cuál es el valor de la ordenada cuando la abscisa es 3 (banda C); el de la abscisa cuando la ordenada es 0 (banda D) y el de la ordenada cuando la abscisa es 0 (banda A). Haciendo esto se obtiene que la bola amarilla debe golpear la banda C en el punto ubicado a 61,11 cm arriba de la esquina inferior derecha, la banda D en el punto ubicado a 1,38 m de la esquina inferior izquierda y la banda A en el punto a 52,22 cm arriba de la esquina inferior izquierda.

Igual que muchas de las actividades que se tratan en este material, esta está relacionada con varios conocimientos previos en geometría por lo que sirve de repaso para ellos.

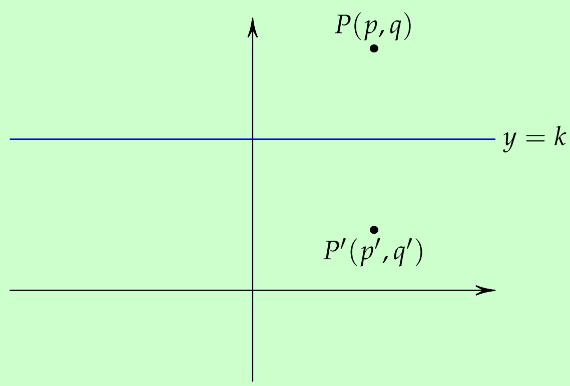
En la etapa de clausura se deberá sistematizar lo que corresponde a reflexiones en el plano.

Reflexión

Una reflexión en el plano con respecto a una recta *l*, es una transformación tal que cada punto P, no contenido en *l*, asigna un punto P' (llamado homólogo de P) tal que *l* es perpendicular a $\overline{PP'}$ y lo corta en su punto medio. Una reflexión es una isometría, es decir, conserva las distancias y las medidas de los ángulos.



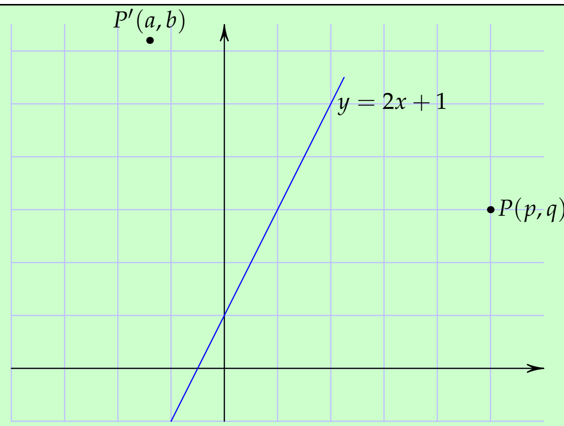
Si se consideran rectas en un sistema de ejes cartesianos, se pueden determinar las coordenadas del punto homólogo de un punto dado de manera sencilla. Considere la recta $y = k$, con *k* constante; tal como se ve en la figura. Tómese un punto $P(p, q)$ y su homólogo mediante una reflexión con respecto a esa recta.



Se ve que $p' = p$. Además, la distancia de la recta al punto P es $|q - k|$ y la distancia de la recta a P′ es $|k - q'|$, entonces $q' = 2k - q$. De esta forma el punto homólogo a $P(p, q)$ respecto a la recta con ecuación $y = k$ es $P'(p, 2k - q)$. Por ejemplo, si la recta es $y = 8$, entonces, el homólogo de (5,2) es (5,14).

Si la recta es paralela el eje de las ordenadas y tiene ecuación $x = k$; en este caso, el homólogo de $P(p, q)$ es $P'(2k - p, q)$.

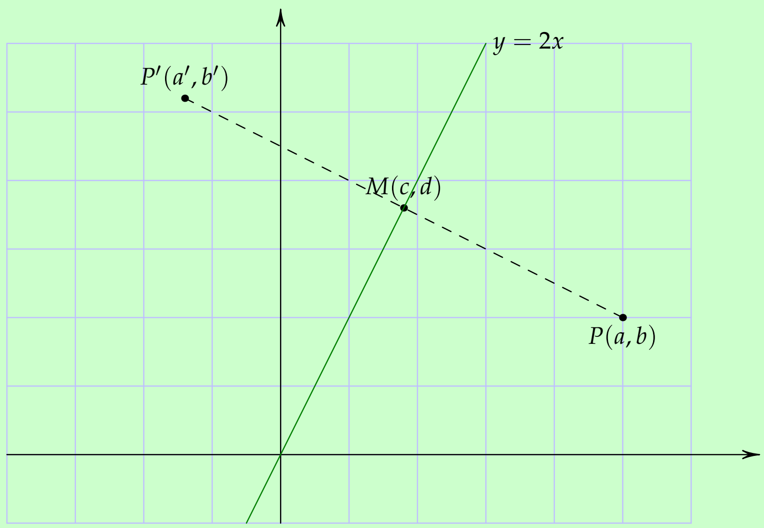
¿Qué sucede si la recta no es paralela a alguno de los ejes y tiene ecuación de la forma $y = mx + b$? Considere por ejemplo la recta $y = 2x + 1$, ¿cuál es el punto homólogo de $P(5,3)$ mediante una reflexión con respecto a esta recta?



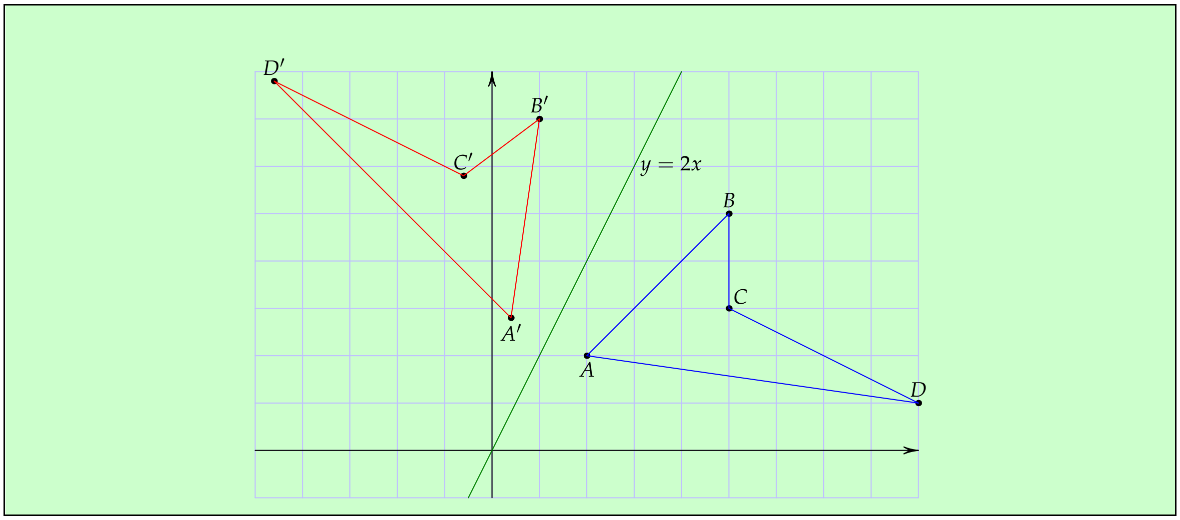
El homólogo, digamos (a,b) y P están en una recta que es perpendicular a la recta dada; la ecuación de esta es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$. La intersección de estas dos rectas es $\left(\frac{9}{5}, \frac{23}{5}\right)$; este es, además, el punto medio del segmento cuyos extremos son P y su homólogo; es decir $\left(\frac{9}{5}, \frac{23}{5}\right) = \left(\frac{5+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$, de donde se obtiene que $(a,b) = \left(\frac{-7}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Ejemplo: dibujar, en un sistema de ejes cartesianos, el polígono ABCD, donde A(2,2), B(5,5), C(5,3), D(9,1) y su homólogo mediante una reflexión con respecto a la recta $y = 2x$.

Considere la recta $y = 2x$ y un punto (a,b), ¿cuál es su homólogo (a',b')?



Con la notación de la figura, la recta que contiene los puntos P y P' es perpendicular a la recta $y = 2x$; su ecuación es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + b$. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de estas dos rectas se obtiene que $M(c,d) = M(\frac{1}{5}(a+2b), \frac{1}{5}(2a+4b))$. Puesto que M es el punto medio de P y P', entonces $M = \frac{1}{2}(P + P')$ y, por lo tanto, se tiene que $a' = \frac{1}{5}(-3a+4b)$ y $b' = \frac{1}{5}(4a+3b)$. Con esto se pueden calcular fácilmente todos los puntos homólogos del polígono dado: A'(2/5,14/5), B'(1,7), C'(-3/5,29/5), D'(-23/5,39/5). Se obtiene el siguiente dibujo:



Actividad 7

Mauritios Cornelius Escher (1898 – 1972) fue un artista holandés que utilizó de manera magistral en sus trabajos la partición periódica del plano. En el año 1926 visitó por primera vez la Alhambra de Granada, España, donde quedó fascinado por los ornamentos y tuvo la impresión de que la partición del plano abrigaba posibilidades insospechadas. En 1936 volvió a la Alhambra en compañía de su esposa y, asistido por ella, copió durante varios días tales diseños con el propósito de estudiarlos a conciencia en su casa. Una vez allí, leyó libros sobre ornamentos y tratados de matemáticas cuyas ilustraciones le fueron de mucha utilidad. A partir de entonces utilizó ampliamente sus descubrimientos en sus dibujos y grabados. La figura que aparece abajo es un grabado de Escher, está formado por una figura básica que se puede repetir, sin traslapes, hasta cubrir todo el plano. Determine cuál es esa figura básica y explique cómo, con ella, se puede cubrir el plano.

Fuente: http://library.thinkquest.org/16661/escher/tessellations.2.html

Análisis de la Actividad 7

La idea central de esta actividad es introducir transformaciones en el plano. Algunas de ellas, como la traslación, ya son conocidas, pero la rotación puede introducirse con una actividad como esta.

Se trata de observar detenidamente y descubrir patrones en la figura y luego ver de qué manera tales patrones conforman la figura completa. La siguiente es una forma de describirlo: el patrón menor es la "media ranita", a partir de ella se obtiene todo el diseño. En la figura se visualizan unos hexágonos, el diseño completo se obtiene por traslación a partir de un hexágono, pero este hexágono se puede formar a partir de la media ranita. Se extrae un hexágono y se delimita para verlo mejor.

Suponga que la figura generadora es la mitad derecha de la ranita que está cabeza abajo. Mediante reflexión con respecto al eje de simetría (línea verde) se obtiene la ranita completa, llamémosla A. Mediante una rotación de 120º alrededor del centro del hexágono (punto amarillo) de la ranita A se obtiene otra ranita (roja) y por rotación de -120º de A alrededor del mismo punto se obtiene la otra ranita roja. Trasladando hacia arriba con magnitud de un radio del hexágono la ranita A se obtiene la ranita gris (B) que está arriba y mediante una rotación de B de 120º alrededor del punto amarillo y otra de -120º se obtienen las otras dos ranitas grises. Suponga que el lado del hexágono mide L, entonces la apotema mide $L\frac{\sqrt{3}}{2}$, de modo que, mediante una traslación de la media ranita generadora de $L\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades hacia la izquierda y $\frac{L}{2}$ unidades hacia arriba se obtiene la media ranita negra que está junto al lado izquierdo del hexágono; si esta se refleja con respecto a la diagonal rosada se produce otra media ranita negra, esta a su vez produce otra media ranita negra mediante reflexión y así sucesivamente se obtienen todas las medias ranitas negras que están en el interior del hexágono. Diversas traslaciones del hexágono básico producen el diseño completo.

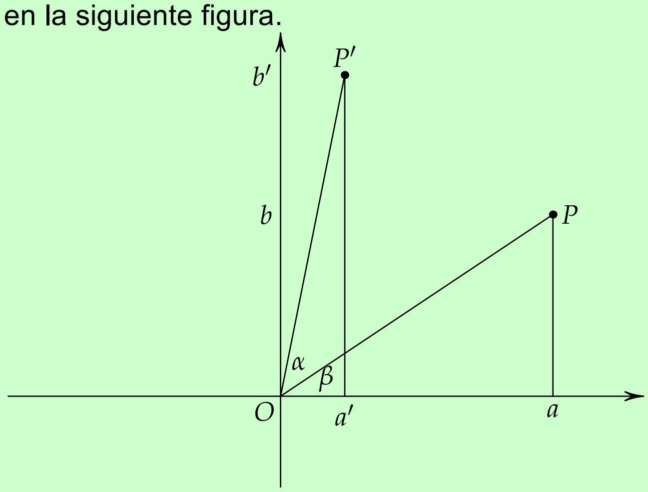
Para la etapa de clausura de una actividad como esta, deberán sistematizarse varios conceptos y procedimientos. Para empezar, las tres transformaciones que se utilizaron aquí son isometrías; es decir, transformaciones que preservan las medidas de longitud y las medidas de los ángulos.

Traslaciones

Antes hablamos de una traslación que consistía en un movimiento de $L\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades hacia la izquierda y $\frac{L}{2}$ unidades hacia arriba; se dice que esta es una traslación de vector $\left(-L\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2}\right)$, el signo negativo en la primera entrada del par ordenado se refiere a que es un movimiento hacia la izquierda. En general, una traslación de vector (*a,b*) traslada el punto (*x,y*) al punto (*x*+*a*,*y*+*b*); es decir, si un punto es A(*x*,*y*) entonces su homólogo mediante la traslación es A′(*x*+*a*,*y*+*b*).

Rotaciones

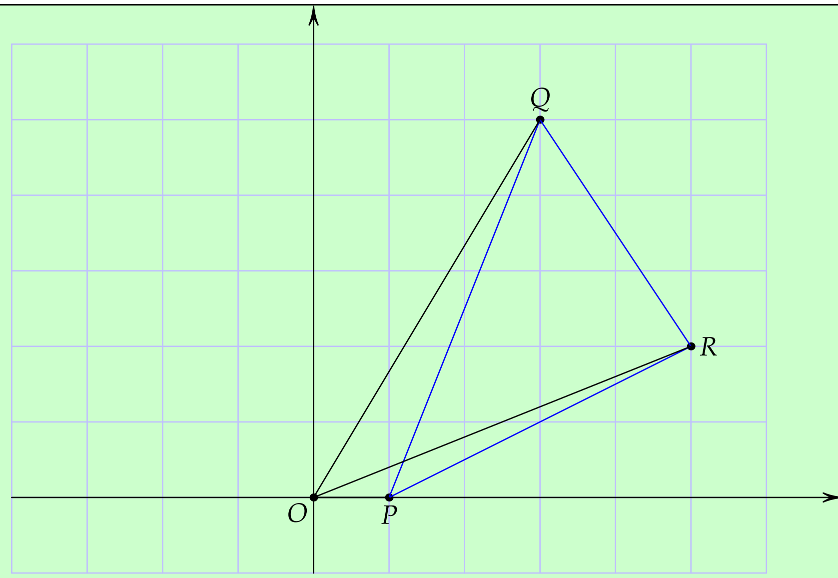
Se llama giro o rotación de centro C y amplitud α a la transformación del plano en la que el homólogo de un punto P es otro punto P′tal que P y P′ equidistan de C y $\alpha = \sphericalangle PCP'$. Una rotación es una isometría; esto es, conserva las distancias y las medidas de los ángulos. De este modo, al someterse una figura a una rotación, el tamaño y la forma permanecen invariantes, mientras sus puntos se mueven a lo largo de arcos de círculos concéntricos. Sea P(a,b) y P'(a',b') su homólogo bajo una rotación de amplitud α con centro en el origen de coordenadas O. Se traza el segmento $\overline{OP}$ y sea β el ángulo entre el eje x positivo y $\overline{OP}$, entonces el ángulo entre el eje x positivo y $\overline{OP'}$ es $\alpha+\beta$, tal como se ve en la siguiente figura.



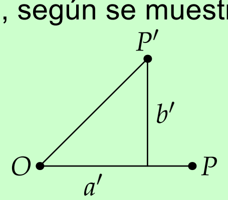
Dado que $OP' = OP = \sqrt{a^2+b^2}$, entonces
$a' = \sqrt{a^2+b^2}cos(\alpha+\beta)$ y $b' = \sqrt{a^2+b^2}sen(\alpha+\beta)$.

Ejemplo: Dada una rotación de centro O y amplitud 45º, Dibujar el triángulo de vértices P(1,0), Q(3,5), R(5,2) y su homólogo, el triángulo de vértices P', Q', R'.

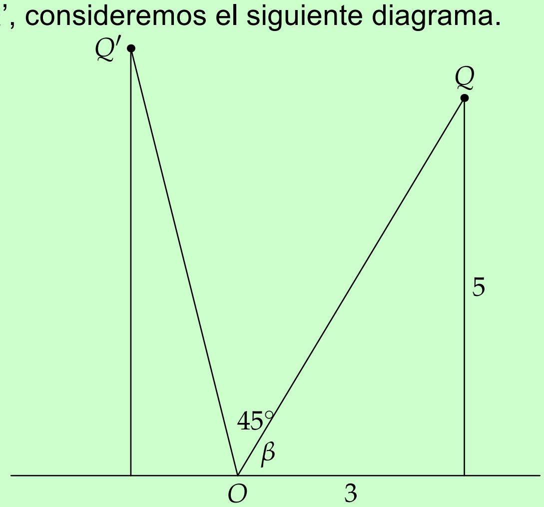
Para facilitar el trabajo, dibuje los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OR}$ en un sistema de ejes cartesianos.



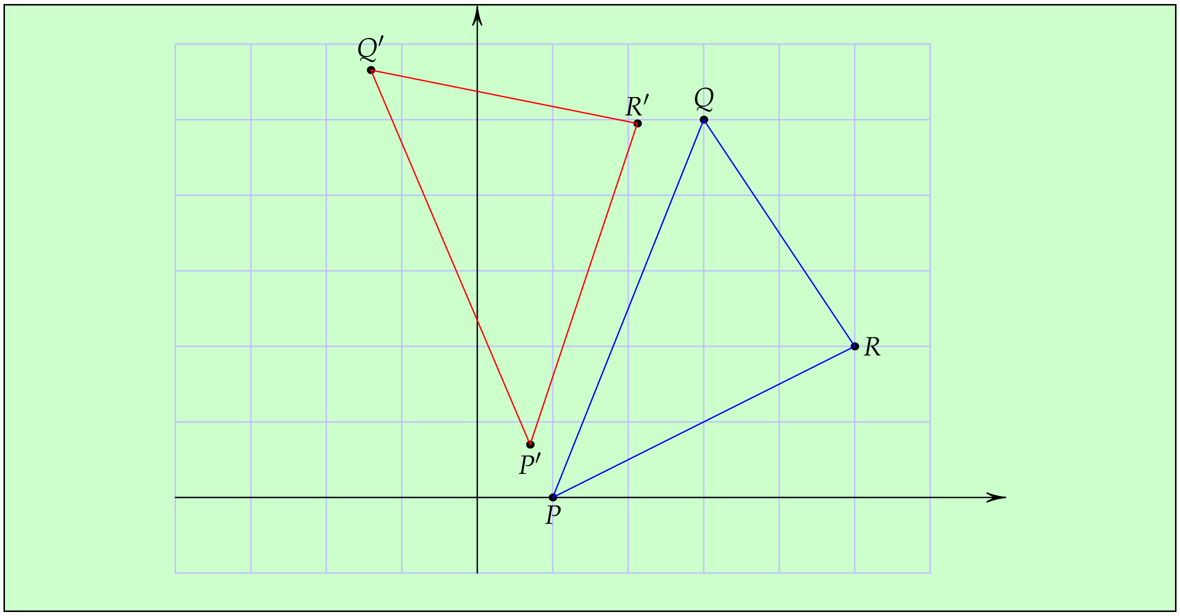
Al rotar $\overline{OP}$ un ángulo de 45º (alrededor de O), se obtiene un segmento $\overline{OP'}$de longitud 1, que forma un ángulo de 45º con $\overline{OP}$, según se muestra en el dibujo.



Como $m(\sphericalangle P'OP) = 45°$ y $OP' = 1$, entonces $a' = b' = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ahora procedemos con Q', consideremos el siguiente diagrama.



Puesto que $\tan(\beta) = \frac{5}{3}$, entonces $\beta = 59°$. Por otra parte $OQ' = OQ = \sqrt{34}$, entonces las coordenadas de Q' vienen dadas por $\sqrt{34}\cos(104)$ y $\sqrt{34}\text{sen}(104)$; es decir $Q'(-1{,}41, 5{,}657)$. De modo parecido se obtiene $R'(2{,}1213,\ 4{,}95)$. El triángulo dado y su homólogo se presentan en la siguiente figura.


Q′
R′
Q
R
P′
P

VI. Visualización espacial

Actividad 8

Observe la pieza metálica representada en la siguiente imagen.

De las siguientes figuras planas, ¿cuáles tienen algún tipo de relación con el sólido?, ¿qué tipo de relación observa? No tome en cuenta la escala, solo la forma. Trace al menos otras dos figuras planas relacionadas con el sólido según el tipo de relación que encontró en las otras.

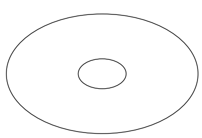


Figura 1

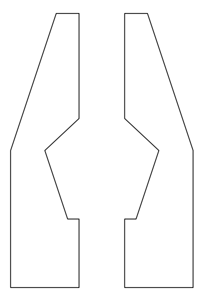


Figura 2

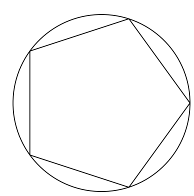


Figura 3

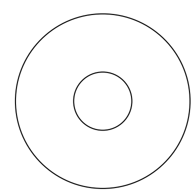


Figura 4

Análisis de la Actividad 8

Esta actividad obliga la observación atenta de las formas tridimensionales y de posibles relaciones entre ellas y las figuras planas. Podrían establecerse algunos tipos de relaciones, pero aquí primordialmente interesa descubrir que algunas de las figuras planas dadas se pueden obtener cortando el sólido mediante planos.

La figura 1 (una elipse dentro de otra elipse) se obtiene mediante algunos cortes oblicuos de la figura; por ejemplo, algunos cortes de este tipo arriba o debajo de la forma pentagonal que ahí aparece (sin cortar las bases de la figura).

La figura 2 se obtiene mediante un corte perpendicular al plano de la base, pasando por su centro.

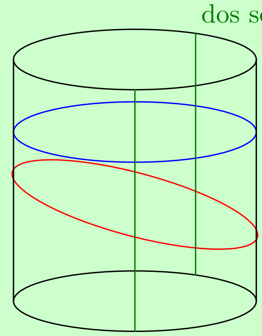
La figura 3 no puede ser obtenida a partir de cortes planos del sólido dado.

La figura 4 (dos circunferencias concéntricas) se obtiene al cortar con ciertos planos paralelos al plano de la base (arriba o debajo de la figura pentagonal).

La etapa de clausura de esta actividad deberá llevar a la conceptualización de sección plana de un cuerpo sólido y clasificar la curvas que se obtendrían mediante secciones planas de un cilindro y de un cono (observe que la figura sólida dada aquí está formada por la unión de un cilindro y un tronco de cono, con un agujero en forma cilíndrica a lo largo del eje de la figura y otro que corresponde a un prisma pentagonal).

Sección plana

Hay varias figuras que se pueden obtener mediantes cortes con planos.

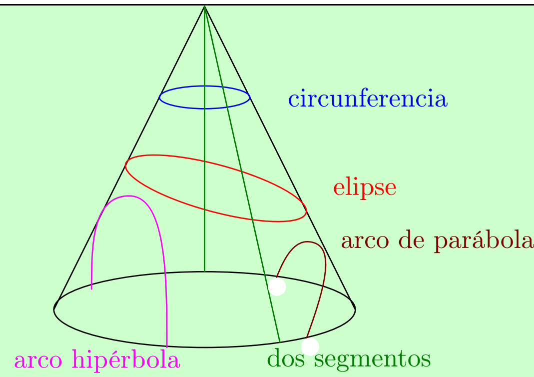


Las secciones planas de un cilindro circular recto son circunferencias, si la sección es paralela a la base del cilindro. Son un par de segmentos paralelos, si la sección es perpendicular al plano de la base. Son elipses si la sección no es paralela ni perpendicular al plano de la base.

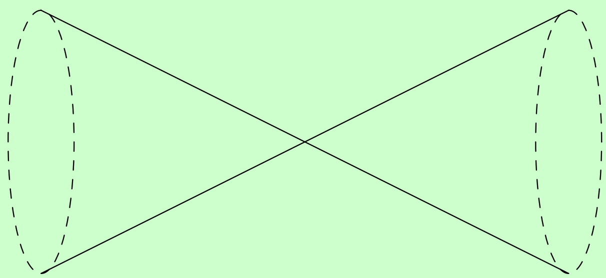
Nota: Si la sección no es paralela ni perpendicular al plano de la base, pero corta la base del cilindro, lo que se obtiene es un arco de elipse.

Las secciones planas de un cono circular recto son:

- Circunferencia, si la sección es paralela al plano de la base.
- Arco de parábola, si el plano de la sección es paralelo a un segmento cuyos extremos son un punto de la circunferencia de la base y el vértice del cono (generatriz).
- Elipse, si el plano de la sección es oblicuo, no paralelo a ninguna generatriz y no corta la base. Si se corta la base y se mantienen las otras condiciones, se obtiene un arco de elipse.
- Arco de hipérbola, si la sección corta perpendicularmente la base y no contiene el vértice.
- Dos segmentos de recta si el plano vertical contiene al vértice.



Nota: Tanto los cilindros como los conos, definidos de manera estricta, son no acotados por lo que no tienen base. Por otra parte, el cono es doble como se muestra en la figura (las líneas discontinuas indican que se prolonga indefinidamente).



En este caso, las secciones planas del cono (doble) son elipses, circunferencias, parábolas (la curva completa) e hipérbolas (la curva completa con sus dos ramas). Hay un caso especial: cuando el plano que corta contiene al vértice, la sección resultante es un par de rectas (donde antes se obtenía un par de segmentos) o únicamente un punto (el vértice).

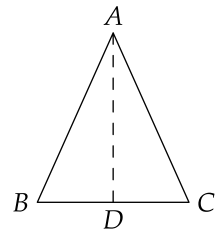
Actividad 9

La imagen corresponde a una pantalla de lámpara. Es una esfera de diámetro 30 cm, con un corte, que está unida a una base de 3cm de alto. Al colocarla en la forma que aparece en la figura la altura de la pantalla es 31 cm, ¿cuál es el bombillo esférico de mayor diámetro que se puede introducir en dicha pantalla?

Imagen: elaboración propia

Análisis de la Actividad 9

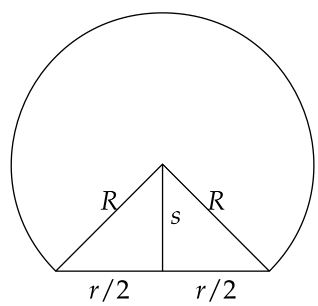
Esta actividad pretende la visualización de las secciones planas de una esfera; con cualquier corte plano a la esfera se obtiene una circunferencia, de manera que la boca de la pantalla corresponde a una circunferencia. Puesto que la altura de la figura de la base es 3 cm, la altura de la figura es 31 cm y el radio de la esfera es 15 cm, entonces la distancia del centro de la esfera al plano de la sección es 13 cm. Para introducir un bombillo esférico, su diámetro tiene que ser menor que el diámetro de la circunferencia que se obtiene como sección de la esfera por un plano a 13 cm de distancia del centro de la misma. El siguiente esquema sirve como auxiliar.



El vértice A corresponde al centro de la esfera y $\overline{BC}$es un diámetro de la circunferencia que se obtiene como sección. Se tiene que $AB = AC = 15$ (radio de la esfera) y $AD = 13$ según lo comentado anteriormente. Si $BC = 2x$, entonces, por Pitágoras, $x = \sqrt{15^2 - 13^2} = \sqrt{56} \approx 7{,}48$. De manera que el diámetro del bombillo tiene que medir menos de 14,96 cm.

La etapa de clausura de esta actividad debe establecer que las secciones planas de una esfera son circunferencias. Por otra parte, se deberá establecer la relación entre el radio de la circunferencia de la sección y la distancia entre el centro de la circunferencia y el plano de la sección.

Si se tiene una esfera de radio *R* que se corta con un plano cuya distancia al centro de la esfera es *s*, con $s < R$, se puede determinar el diámetro *r* de la circunferencia resultante. Se puede proceder de la siguiente manera, para ello se utilizará el siguiente esquema.



De acuerdo con el teorema de Pitágoras se tiene $\frac{r}{2} = \sqrt{R^2 - s^2}$, es decir, $r = 2\sqrt{R^2 - s^2}$.

VII. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para undécimo año.

Concepto	Habilidades específicas
Transformaciones en el plano • Traslaciones • Reflexiones • Rotaciones	Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con ella? Luego, para este momento, es importante que la profesora o el profesor tenga claro cuáles son las habilidades desarrolladas anteriormente.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

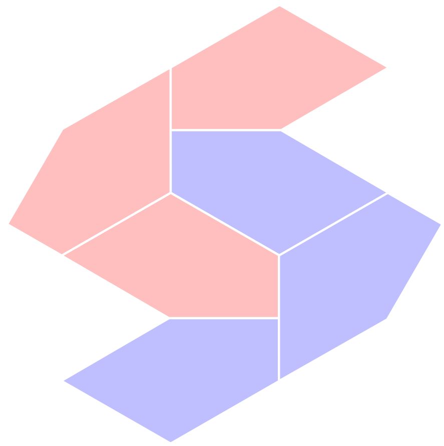
- ✓ Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.

- ✓ Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.

En este momento los estudiantes manejan con soltura los polígonos, la propiedad de que la suma de los ángulos internos de un polígono es 180(n-2) grados, donde n es el número de lados, y pueden utilizar trigonometría para determinar longitudes (lados o diagonales).

Problema

Un diseñador pretende cubrir con lozas un piso. Quiere que cada loza sea un pentágono de modo que ellas encajen para cubrir el piso sin traslaparse ni dejar espacios entre ellas; todas las lozas son congruentes, tal como se muestra a continuación.



¿Qué relación debe haber entre los ángulos del polígono?, ¿qué relación entre sus lados? Describa matemáticamente cómo se puede obtener el diseño dado en la figura a partir de una loza básica y cómo se puede cubrir el plano a partir de este diseño.

Trabajo estudiantil independiente

En esta etapa se espera que los estudiantes pregunten sobre algunos de los aspectos que aparecen en el problema y que no tengan claro. Se le puede guiar para que recuerden cuál es la suma de los ángulos internos de un polígono. Además es importante que se discutan diferentes estrategias para abordar el problema integralmente, una primera aproximación sería, por ejemplo, copiar el diseño en papel cuadriculado para tener una idea de lo que está sucediendo.

Para este tipo de actividades se les debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación entre los estudiantes y estimularlos para que se enfrenten al problema. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con los estudiantes para orientar el desarrollo de su trabajo y plantear preguntas generadoras que encausen a lo que se quiere llegar, pero debe permitir la discusión entre los jóvenes en relación con la búsqueda de soluciones.

Discusión interactiva y comunicativa.

En este momento, el docente discute las posibles respuestas de los estudiantes y revisa la primera parte de la actividad. Se debe valorar todas las estrategias utilizadas y agruparlas de acuerdo con su similitud.

La estrategia del cuadriculado puede ser útil; sin embargo, para la primera parte, determinar relación entre ángulos y entre lados, deberá observarse que en los puntos en que confluyen diversos vértices de la figura, la suma de ellos debe ser

360º. A partir de ahí podrán verse las relaciones entre ángulos. Deberán observar, también, que hay un lado que es el doble de otro. A partir de estas se pueden encontrar diversas relaciones.

La segunda parte es describir cómo a partir del pentágono base se puede construir la figura que se da en el enunciado del problema y cómo a partir de esta, se puede cubrir el plano. Pueden numerar los pentágonos que aparecen en la figura y explicarán como se obtiene el segundo, tercero, etc., a partir del primero. Los estudiantes posiblemente darán sus respuestas indicando cosas como vueltas, traslados, etc., que están relacionadas con las transformaciones que se desea introducir.

Se clasifican las soluciones correctas y las incorrectas; de hecho, las relaciones como tales son únicas, pero hay muchas medidas de ángulos y lados que las satisfacen; de este modo, puede que algunos estudiantes den medidas específicas que estén correctas y otros proporcionen relaciones generales.

Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

Clausura o cierre

Aunque ya se conoce la suma de los ángulos internos de un polígono, esto puede sistematizarse; lo mismo que algunas relaciones entre lados y ángulos. El objetivo principal de la actividad es llegar a la definición de las transformaciones: reflexión, rotación, traslación. Posteriormente se verán propiedades de ellas.

Bibliografía

Ávila, G. (1989). Kepler e a órbita elíptica en *Revista do professor de Matemática*, número 15. Publicación de la Sociedade Brasileira de Matemática.

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: AlianzaUniversida Textos.

Coxeter, H. & Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. Washington: MAA.

Ernst, B. (1994). *El espejo mágico de M. C. Escher*. Singapur: Benedikt Taschen.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas*. Barcelona: Graó.

Ruiz, A. y Barrantes, H.(2006). *Geometrías*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Costa Rica: EUNED

Swokoski, P. (1995). *Álgebra con geometría analítica.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Usiskin, Z., Hirschhorn, D., Cosxford, A., Highstone, V., Lewellen, H., Oppong, N. et al (1997). *Geometry*. Glenview: Scott ForesmanAddisson Wesley.

Vázquez, A. y De Santiago, J. (2007). *Geometría Analítica.* México: Pearson Educación.

Lecturas recomendadas

Clemens, S., O'Daffer, P. & Cooney, T. (1998). *Geometría*. México: Pearson.

Devlin, K. (2000). *The language of Mathematics, making the invisible visible*. New York: Henry Holt & Company.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: AcademicPress.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autor
Hugo Barrantes

Revisores
Luis Hernández Solís
Marianela Zumbado Castro
Jonathan Espinoza González

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Ilustración de la portada
Cortesía de FreeDigitalPhotos.net.

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2012). *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Geometría.* San José, Costa Rica: autor.