

Formación continua: 2011

Materiales para Primer Ciclo



Estadística y Probabilidad

Estadística



Introducción

Desde sus primeros años, los niños están expuestos a un bombardeo constante de información que les llega por diversos medios; sin embargo, la mayoría de ella les llega en forma desordenada, por lo que no siempre es comprendida en forma adecuada. Por esta razón, el sistema educativo debe propiciar el conocimiento necesario para que, desde las primeras edades, los niños puedan analizar e interpretar esta información de modo que les ayude a comprender mejor el entorno.

En la formación preescolar, los niños han adquirido ciertas destrezas que le ayudan a agrupar, clasificar y cuantificar cierta información, por lo que en los primeros años de la escuela se debe aprovechar estas destrezas para potenciar el análisis de información cuantitativa y cualitativa que se genera en el contexto estudiantil, así como generar estrategias más sofisticadas para cumplir este propósito.

Del mismo modo, el azar está presente, no solo en diversos juegos que practican sino también en situaciones propias de su vida.

De acuerdo con lo anterior, la inclusión de la Estadística y la Probabilidad tiene como objetivo básico ayudar al niño a adquirir las habilidades necesarias para la recolección, presentación y resumen de datos, pero sobre todo para favorecer su análisis e interpretación, además de comprender la presencia del azar en la vida cotidiana y la importancia de las probabilidades para propiciar una mejor comprensión de las situaciones aleatorias.

Este material está dirigido a docentes de Primaria, pretende ser un apoyo para el educador en cuanto a conceptos y tipos de actividades que puede realizar al abordar el tema de Estadística y Probabilidad en el Primer Ciclo.

Nota: Las actividades que se describen en este material están dirigidas para docentes de primaria, por lo cual en algunas de ellas no es conveniente replicarlas tal y como se desarrollaron a los estudiantes. Es importante que el docente las estudie y realice las adaptaciones pertinentes para su utilización en el salón de clases o bien pueda implementar nuevas situaciones.

Tabla de contenidos

I. Generalidades acerca de la Estadística y la Probabilidad	4
II. La Estadística.....	7
III. La Probabilidad	27
Bibliografía.....	41

I. Generalidades acerca de la Estadística y la Probabilidad

Actividad 1

Reflexione sobre las siguientes preguntas y encuentre posibles respuestas:

1. *¿Qué es la Estadística?*
2. *¿Para qué sirve la Estadística?*
3. *¿Qué son datos?*
4. *¿A qué se le llama variabilidad en los datos?*
5. *Mencione situaciones en las que se requiere utilizar datos.*
6. *Indique algunas situaciones cotidianas en las que se utilizan conceptos estadísticos.*
7. *¿Qué es la Probabilidad?*
8. *¿Para qué sirve la Probabilidad?*
9. *Indique algunas situaciones cotidianas en las que se utilizan conceptos probabilísticos.*
10. *¿Cuál es la importancia de generar aprendizaje en conceptos de Estadística y Probabilidades desde los primeros años de escolaridad?*

Análisis de la Actividad 1

Es importante que el docente deje los alumnos discutir entre ellos para que traten de comprender y definir los conceptos, sin intervenir directamente.

La reflexión sobre las preguntas anteriores es fundamental si se desea orientar un proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad con niños. Es muy importante que el educador comprenda la importancia de estas áreas para el desarrollo de un ciudadano, específicamente el aporte que ellas ofrecen para potenciar el razonamiento crítico y la resolución de problemas.

En cuanto a la Estadística, el educador debe tener claro que esta disciplina es mucho más que simples técnicas y métodos para calcular o resumir información, sino que es una ciencia que analiza la forma en que la información debe ser utilizada para orientar la comprensión del entorno del que provienen los datos y, por ende, facilitar la argumentación y la toma de decisiones con base en esa información.

Desde el año 1995, esta área fue incluida en los programas de estudio de los tres ciclos de la Educación General Básica; sin embargo, son pocos los docentes que desarrollan estas temáticas en sus aulas y en otras ocasiones los imparten de manera superficial, ya sea por falta de tiempo, para dar mayor énfasis a otros temas que se consideran más importantes, o porque no han recibido una adecuada formación para enseñar esta disciplina.

El principio básico por el cual la estadística cobra una especial importancia en el mundo actual obedece a la variabilidad del mundo. Cuando se comprende que este principio de variabilidad está presente en todas las cosas del mundo, se hace necesario establecer estrategias que ayuden a comprender esta variabilidad, la cual se puede visualizar a partir de los datos correspondientes a un determinado fenómeno. Por ejemplo:

Si se analiza un grupo de estudiantes, se puede observar que hay gran variabilidad en las características tales como:

- a) Color de la piel, ojos o cabello
- b) Estatura o Peso
- c) Fecha de su cumpleaños
- d) Cantidad de hermanos
- e) Domicilio
- f) Ocupación del padre o encargado
- g) Preferencia alimenticia
- h) Materia escolar preferida

Entre muchas otras particularidades que se podrían citar. De modo que si se quiere investigar sobre cualquiera de estas u otras características, los datos que se obtengan van a tener gran variabilidad, y se requiere de diversas estrategias para poder resumir e interpretar la información de estos datos.

Pero esta situación que se visualiza en un grupo de estudiantes, está también presente en todos los ámbitos de la vida; cada criatura o cada objeto inanimado va a tener características propias que los hacen diferentes de una u otra manera de sus semejantes, lo cual propicia la variabilidad de datos, la cual es el objeto de estudio de la Estadística.

De este modo, para una mejor comprensión de esta variabilidad en los datos, la Estadística es la disciplina que ofrece diversas estrategias para el análisis de los datos, la cual va desde la forma en que se debe recolectar la información, su ordenamiento y sistematización, su presentación o resumen en cuadros, gráficos o medidas, pero ante todo en su análisis, de manera que dichos datos proporcionen una información que sea de interés para la situación que se está analizando.

En cuanto a las probabilidades, permiten modelar las situaciones aleatorias (ocasionadas por lo inesperado), que constituyen incertidumbre para las personas. Un ser humano regularmente debe enfrentar situaciones para las cuales el resultado resulta inesperado, por ejemplo:

- a) Regar las plantas del jardín, aunque puede ser que no sea necesario pues puede llover.
- b) Visitar o no a un amigo que está enfermo de una gripe, pero tener temor a contagiarse.
- c) Tomar el sol para broncearse, pero temer contraer alguna enfermedad con la exposición al sol.
- d) Comprar un boleto de lotería, aunque sabe que podría no salir seleccionado en el sorteo

El resultado de estas situaciones es inesperado y un buen conocimiento sobre probabilidades puede ayudar a tomar la decisión en algunas de ellas. Pero también en los juegos cotidianos de niños, el azar está presente. Lo importante es que un ciudadano desde sus primeros años pueda diferenciar entre las situaciones cuyos resultados son predecibles con anterioridad de aquellas para las cuales se requiere tener un conocimiento de probabilidades para modelar los posibles resultados e identificar aquellos que tienen una mayor posibilidad de ocurrencia.

En esta primera etapa, no se pretende saturar a los niños de conceptos formales ni mecanizados, sino despertar su interés hacia los procesos de recolección y resumen de datos desde un punto de vista intuitivo. Del mismo modo, en el área de las probabilidades los niños deben ir introduciéndose paulatinamente, iniciar con la identificación de situaciones aleatorias simples, determinación de eventos más y menos probables, y vincular el concepto de probabilidad con los niveles de ocurrencia de un evento, entre otros.

En esta sección se analiza una serie de conceptos elementales vinculados con la Estadística y la Probabilidad, así como la propuesta de estrategias para propiciar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas áreas en los primeros niveles educativos.

A continuación se citan las habilidades generales que se espera que desarrolle el lector con esta unidad didáctica y los conceptos que se tratan en ella.

Habilidades generales

- Reconocer los fundamentos teóricos de la Estadística y la Probabilidad vinculados con los conceptos propuestos en los programas de Matemática del Primer Ciclo de la Educación General Básica.
- Identificar la variabilidad en los datos como la principal fuente de análisis dentro de los estudios estadísticos.
- Utilizar diferentes estrategias para el proceso de recolección, sistematización, presentación y resumen de grupos de datos, para la resolución de problemas.
- Plantear interrogantes del contexto que requieran de recolección, ordenamiento, presentación y análisis de datos.
- Identificar situaciones aleatorias y clasificar sus posibles resultados en más o menos probables según corresponda.
- Desarrollar situaciones didácticas que permitan potenciar la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad en el Primer Ciclo de la Educación General Básica.
- Identificar las principales estrategias evaluativas correspondientes a la propuesta didáctica.

Conceptos

Estadística

- La Estadística y su importancia en la sociedad actual.
- Los datos y su variabilidad como fuentes de análisis estadístico.
- Tipos de datos: cuantitativos y cualitativos.
- Recolección de datos: observación, interrogación y experimentación.
- Representaciones: agrupación, cuadros de frecuencias, gráficos de barras.
- Medidas estadísticas: moda, mínimo y máximo.
- Generación de situaciones de aprendizaje.
- Estrategias evaluativas.

Probabilidad

- Ideas intuitivas: el azar y lo aleatorio
- Situaciones deterministas y situaciones aleatorias
- Clasificación de eventos
 - Seguro, probable e imposible
 - Más probable, menos probable e igualmente probables.
- Espacio muestral, puntos muestrales y representación
- Generación de situaciones de aprendizaje.
- Estrategias evaluativas.

II. La Estadística

La historia de la Estadística se remonta a épocas remotas, seguidamente se presenta una pequeña referencia que puede utilizarse para introducir el tema



Un poco de historia

Antecedentes de la Estadística

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadísticas, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, polos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales y ciertas cosas.

Hacia el año 3000 A.C. los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos en tablas sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el siglo XXXI A.C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos con anterioridad al año 2000 A.C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el año 594 A.C. para cobra impuestos.

El imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control. Durante la Edad Media sólo se realizaron algunos censos exhaustivos en Europa. Los reyes carolingios Pipino el Breve y Carlomagno ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la Iglesia en los años 758 y 762, respectivamente.

Tomado de http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lat/caballero_w_aa/

Actividad 2

Realice la lectura de los siguientes resúmenes de artículos de revista.

1) *Agresividad en niños y niñas de kínder y primer ciclo, del área metropolitana.*

Resumen

Este estudio es una investigación de corte descriptivo con un total de 154 escolares, en cuatro escuelas del área metropolitana, en Costa Rica, en el 2005. Se definieron cuatro variables relacionadas con la agresión para analizar: datos sociodemográficos, conocimiento de los conceptos de agresión en el área escolar y familiar. Los resultados indican que, tanto en la escuela como en sus casas, ellos y ellas refieren actos violentos de magnitud variable.

Leiva, V.(2007). Agresividad en niños y niñas de kínder y primer ciclo, del área metropolitana. Revista de Ciencias Sociales de la UCR. Vol. 117-118, No. 3-4



2) *Aporte nutricional del comedor escolar en un grupo de niños provenientes de familias de una comunidad urbano - marginal de San José*

Resumen

El presente trabajo es resultado de un reanálisis de los datos presentados anteriormente por Fernández, Jiménez & Vargas (2000) con el objetivo de cuantificar el aporte del comedor escolar a la alimentación de 11 familias de Finca San Juan de Pavas.

El método usado para recolectar los datos dietéticos fue el recordatorio de 24 horas. El consumo de alimentos del niño en el comedor escolar fue medido aparte y su consumo en el hogar fue incluido en el consumo familiar.



Los resultados demostraron que durante los días de semana cuando el niño va a la escuela, recibe del comedor más de una tercera parte de sus necesidades nutricionales en cuanto a energía y 10 nutrientes. Además, se encontró que la alimentación ofrecida en las escuelas tenía una concentración mayor de calcio; riboflavina; vitaminas A, C y B6, y menor de grasa total y saturada. Se concluye que el comedor de la escuela de Finca San Juan de

Rincón Grande de Pavas, contribuye de forma importante a las necesidades nutricionales y formación de hábitos alimentarios adecuados en un grupo de niños escolares de familias de bajos recurso

Fernández, K; Jiménez, K. y Chinnock, A. (2000) Aporte nutricional del comedor escolar en un grupo de niños provenientes de familias de una comunidad urbano - marginal de San José. Revista Costarricense de Salud Pública. Vol.9, No.17.

Responda las siguientes preguntas:

1. Desde el punto de vista social, ¿qué importancia encuentra usted a la realización de estudios de este tipo de investigaciones?
2. ¿Cuál es el rol que juegan los datos en estos estudios?
3. De acuerdo con lo que se ha discutido sobre la variabilidad de la información ¿Qué importancia tiene la variabilidad de los datos en estos estudios?

Análisis de la Actividad 2

El primer artículo hace referencia a un problema relevante para la sociedad, como es el aumento de agresividad. Tal como se indica desde el kínder los niños reflejan actos violentos de diferente tipo. Por otro lado, el segundo estudio refleja la importancia que tiene un comedor escolar para la salud nutricional de los niños de una determinada comunidad. Estos dos estudios son un ejemplo de la trascendencia social que tienen las investigaciones dirigidas hacia la recolección y el análisis de información en diferentes áreas. Esta información se convierte en insumos fundamentales para la toma de decisiones, de modo que las instituciones pueden utilizar esta información para planificar su trabajo futuro. Por ejemplo, en el primer caso se requieren buscar estrategias que reduzcan la agresividad en los niños desde las primeras edades; mientras para el segundo caso, se observa la importancia de fortalecer los comedores escolares a nivel general, pero sobre todo en áreas urbano-marginales.

Al igual que en estos ejemplos, en muchos otros el análisis de datos es una estrategia vital en el desarrollo de la investigación y en la toma de decisiones.

En el primer estudio se analizaron los datos obtenidos para 154 niños de kínder, estos datos correspondieron a información relevante sobre diversas características asociadas con la agresividad. La frase “*Los resultados indican que, tanto en la escuela como en sus casas, ellos y ellas refieren actos violentos de magnitud variable*”, es un indicador de la variabilidad que se obtuvo en los datos, lo que significa que estos 154 niños mostraron niveles de agresividad muy variable, lo cual tiene que tomarse en cuenta para la toma de decisiones.

En el segundo estudio, se analizaron 11 familias que tenían niños en la escuela de Finca San Juan, en Rincón Grande de Pavas, se recabaron datos vinculados con la alimentación de estos niños, los cuales reflejaron el aporte nutricional que reciben de su asistencia al comedor escolar. Evidentemente, este aporte debe haber presentado variabilidad entre los niños y entre las familias. Nuevamente se observa que la recolección de datos y su análisis posterior, constituye el fundamento básico del estudio.

Importancia de la Estadística, los datos y su variabilidad

En razón a lo anterior el educador de primaria debe valorar el aporte que la Estadística ofrece a distintos campos científicos, razón por la cual el aprendizaje de la disciplina constituye una herramienta fundamental para la comprensión del contexto.

Del mismo modo, se debe identificar los datos y la variabilidad que presentan como el objeto de estudio de la disciplina. Sin embargo, hay que tener presente que, un dato aislado no es fuente de análisis estadístico, sino que se requieren de un grupo de datos para poder orientar un análisis de este tipo, pues el propósito básico consiste en caracterizar la variabilidad que se presenta entre los datos del grupo.

Actividad 3

Suponga que se desea realizar un estudio para determinar el tipo de alimentación de los niños de uno de los grupos de la escuela en que usted trabaja. Entre muchas otras características de interés, se consulta lo siguiente:

- ¿Utiliza el comedor escolar?
- Normalmente ¿Cuántas veces al día consume frutas?
- Entre los siguientes tres alimentos, seleccione el de su preferencia
 Hamburguesa Arroz Ensalada
- ¿Cuál es su peso en kilogramos?



Suponga que la información para estas características de los estudiantes se resume en un cuadro similar al siguiente:

Número de estudiante	¿Utiliza el comedor escolar?	¿Cuántas veces consume fruta?	Preferencia entre los tres alimentos	Peso en Kg
1	Si	0	Hamburguesa	55
2	Si	3	Arroz	46
3	Si	2	Hamburguesa	43
4	No	0	Hamburguesa	49
5	Si	2	Arroz	43
6	No	3	Ensalada	44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

De acuerdo con los datos del cuadro ¿Cuál es la principal diferencia entre las cuatro características de los estudiantes que se analizan?

Análisis de la Actividad 3

Si se observa hay dos tipos de datos claramente diferenciados, algunos de ellos corresponden a números mientras que los otros no son términos numéricos. Esta es la principal diferencia entre estas cuatro características.

Tipos de datos

Si los datos correspondientes a una característica son numéricos se dice que la información es **cuantitativa**, en caso contrario se dice que es **cualitativa**.

Actividad 4

Retomando el análisis anterior suponga que para este grupo de estudiantes se desea determinar

- *Número de personas asalariadas pertenecientes al núcleo familiar.*
- *El salario neto mensual de las personas que conforman el núcleo familiar.*
- *El nivel de escolaridad que tiene el padre, la madre o el encargado del estudiante.*
- *El número de estudiantes que habitan en la vivienda.*
- *La condición de la vivienda donde habitan: si es alquilada, prestada o propia.*
- *El área de construcción de la vivienda.*
- *El número de personas que viven en la vivienda.*

Para cada una de estas variables determine si los datos obtenidos son cantidades o cualidades.

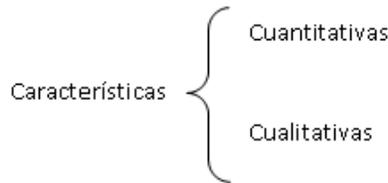


Análisis de la Actividad 4

Seguidamente se encuentra la clasificación de las características según la condición de cuantitativa o cualitativa:

Características	Tipo
• Número de personas asalariadas pertenecientes al núcleo familiar	Cuantitativa
• Salario neto mensual de las personas que conforman el núcleo familiar	Cuantitativa
• Número de estudiantes que habitan en la vivienda	Cuantitativa
• Condición de si la vivienda donde habitan es alquilada, prestada o propia	Cualitativa
• Área de construcción de la vivienda	Cuantitativa
• Número de personas que viven en la vivienda.	Cuantitativa
• Nivel de escolaridad que tiene el padre, la madre o el encargado del estudiante	Cualitativa

Dentro de los estudios estadísticos normalmente se combina el uso de características cuantitativas y cualitativas; pero ello va a estar en función de los requerimientos del estudio.



Recolección, representación e identificación de medidas

Se ha mencionado que en los estudios estadísticos los datos constituyen el elemento básico de análisis; pero además que a partir de observaciones aisladas no es posible efectuar esos estudios. Por esta razón, una mención especial requieren los procesos de búsqueda y recolección de datos, debido a que la calidad de los estudios estadísticos va a depender, en primera instancia, de la calidad de la información que se ha recolectado.

Actividad 5

Analice las siguientes situaciones que se desarrollan en una escuela particular, en el cual hay dos grupos de Tercero.

- a) *El profesor del grupo está interesado en identificar aquellos estudiantes que tienen problemas de socialización que afectan el trabajo en subgrupos. Para ello decide plantear varias situaciones didácticas para que sean resueltas por medio del trabajo grupal, y lleva a cabo una guía de observación para identificar el comportamiento de cada uno durante el proceso. Con esta estrategia puede identificar a los estudiantes que tienen más problemas para socializar.*



- b) Para complementar el estudio realizado en el punto a) el docente decide reunirse con los padres de familia o encargados de los jóvenes que presentaron problemas y realizar algunas preguntas para obtener más información al respecto. De este modo, en conjunto con la Dirección de la Escuela, se pueden buscar medidas que ayuden a esos estudiantes.
- c) Debido a que un importante número de estudiantes de un grupo de Tercero regularmente llega tarde cuando tienen clases por la mañana, el profesor decide realizar un estudio para identificar los medios de transporte que utilizan para llegar a la institución. Debido a que la escuela se encuentra frente a una carretera principal cerca de paradas de autobuses, el profesor decide llegar a las 6:00 am (en un día que inician con una lección de Música) para identificar el medio de transporte que utiliza cada uno de los 27 estudiantes de su grupo. De este modo, permanece en la entrada de la institución hasta las 7:30 am observando y anotando si el estudiante llega caminando, en vehículo particular, en autobús público o en transporte privado. Sin embargo, la Directora de la Escuela le sugiere que, para facilitar su trabajo, dedique un espacio de una lección para consultar a cada estudiante por el medio de transporte que regularmente utiliza para trasladarse a la institución.



Con base en la situación planteada discuta:

1. ¿Qué técnicas de recolección de información se ponen en práctica en cada uno de los puntos anteriores?
2. Si usted fuera ese profesor, ¿cuál técnica emplearía en la tercera situación y por qué?

Análisis de la Actividad 5

1. En la situación a) el profesor recurre a la **observación** para identificar datos relacionados con los patrones de conducta de los estudiantes cuando se trabaja en subgrupos.

En la situación b) se recurre a la **interrogación** a los padres o encargados de los estudiantes con la intención de recolectar datos que le ayuden a complementar las observaciones realizadas. Para ello elaboró una serie de preguntas que aplicó a estas personas, con el propósito de obtener información de naturaleza similar y poder sistematizarla.

En la situación c), primeramente se considera oportuno utilizar la **observación** para recolectar esta información, pero la directora le sugiere utilizar la **interrogación**. Aquí se evidencia como pueden ser utilizadas diferentes técnicas para recolectar un mismo tipo de datos.

2. Aunque las dos técnicas generan los mismos datos, no necesariamente son igualmente efectivas ni producen observaciones con la misma calidad. Como puede notarse el uso de la observación en este caso genera un gran esfuerzo de trabajo, que implica que el docente invierta una hora y 30 minutos cada uno de los días en que va a aplicar la estrategia; pero además, una alta concentración en la actividad, pues no se le puede pasar ningún estudiante sin que registre el medio de transporte empleado. Por su parte, la interrogación, en este caso

es de más fácil aplicación, pues basta con plantear, en forma directa o mediante alguna estrategia indirecta, una o más preguntas destinadas a recabar esta información.

Actividad 6

Analice la siguiente situación

Una estudiante pregunta al profesor ¿es cierto que las mandarinas regularmente tienen 10 gajos? El profesor que realmente nunca había prestado atención a eso, aprovechó la inquietud para generar una situación didáctica que fuera de interés para los estudiantes. En la siguiente lección trajo una mandarina para cada estudiante y les propuso que se la comieran, pero antes que contaran el número de gajos y el número de semillas de la fruta. Con ello, el docente espera generar un grupo de datos que le permita introducir algunos conceptos vinculados con la representación tabular y gráfica, así como el uso de medidas estadísticas.



Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué técnica de recolección de información van a utilizar los estudiantes en esta experiencia?
2. ¿Considera usted que la actividad b) provoca que se desaproveche mucho tiempo y genera un costo innecesario, debido a que el docente debió buscar o inventar otros datos que le ayudaran a introducir los conceptos de representación y uso medidas estadísticas?
3. Si los datos obtenidos son los siguientes:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Gajos	9	9	11	10	9	9	11	9	10	9	11	8	9	10
Semillas	8	9	4	15	7	11	3	8	9	12	6	9	10	10

Estudiante	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Gajos	9	10	10	9	9	10	9	10	9	9	10	9	9	10
Semillas	8	10	11	10	8	11	12	12	11	9	5	9	7	8

¿Qué estrategias utilizaría para resumir la información relacionada con el número de gajos y el número de semillas de las 28 mandarinas?

4. ¿Cuál de las características: número de gajos o número de semillas, presenta más variabilidad?

5. Si se trae una nueva mandarina de la misma clase que las otras 28, y se pregunta ¿cuántos gajos y cuántas semillas podría tener? ¿Qué respuesta daría usted?

Análisis de la Actividad 6

1. Aunque en la identificación del número de gajos y del número de semillas se utiliza la observación, la actividad general realizada que produce esta observación es la **experimentación**. En la mayoría de casos en que se realiza la observación, la misma corresponde a un proceso de experimentación, aunque sea sencillo. En este caso, el profesor, para caracterizar a las mandarinas en cuanto al número de gajos y número de semillas, debió establecer un pequeño experimento que le llevó a generar 28 datos para cada una de estas características.
2. En cuanto a la estrategia planteada por el docente para esta actividad, es de mucho valor práctico para la búsqueda de información dentro del contexto estudiantil, pues ante una pregunta simple, se desarrolla una experiencia que permite generar datos que ayudan a dar una respuesta a la interrogante; por lo que le da mayor realce a la disciplina pues el estudiante puede valorarla como una estrategia que le permite comprender el entorno.
3. Diferentes estrategias pueden utilizarse para resumir esta información, todas ellas se vinculan con los contenidos planteados en los programas de estudio. A continuación se realiza un análisis que va desde las más simples e intuitivas hasta aquellas más elaboradas para la edad de los estudiantes.

a. Ordenamiento y clasificación de la información

Como puede notarse, si todas las mandarinas hubieran tenido la misma cantidad de gajos y la misma cantidad de semillas, es decir si no hubiera existido variabilidad en el número de gajos y número de semillas, no sería necesario realizar más análisis, pues la respuesta sería única para cada característica. El hecho que exista variabilidad en la cantidad de gajos es la que provoca la necesidad de realizar los análisis estadísticos.

Desde un punto de vista intuitivo, primeramente se debería proceder a clasificar la información de acuerdo con la cantidad de repeticiones que existen para cada característica y clasificar los datos en grupos. Por ejemplo, para el número de gajos se tiene:

Una mandarina tenía ocho gajos.
Quince mandarinas tenían nueve gajos.
Nueve mandarinas tenían diez gajos.
Tres mandarinas tenían once gajos.

Esta clasificación corresponde a la identificación del número de repeticiones o la **frecuencia** de cada uno de los valores correspondientes al número de gajos. El concepto de frecuencia es muy utilizado en Estadística, en este caso se dice que la categoría de ocho gajos tuvo una **frecuencia** de uno, la de nueve gajos tuvo una **frecuencia** de quince, la de diez gajos tuvo una **frecuencia** de nueve y finalmente la categoría de once gajos tuvo una **frecuencia** de tres.

b. Presentación tabular y gráfica

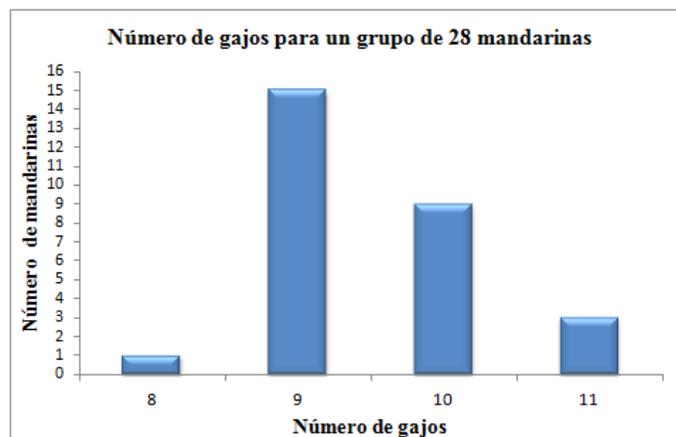
Esta información puede ser resumida en un cuadro de la siguiente forma:

Número de gajos para un grupo de 28 mandarinas

Numero de gajos	Frecuencia de mandarinas
Ocho	1
Nueve	15
Diez	9
Once	3
Total	28

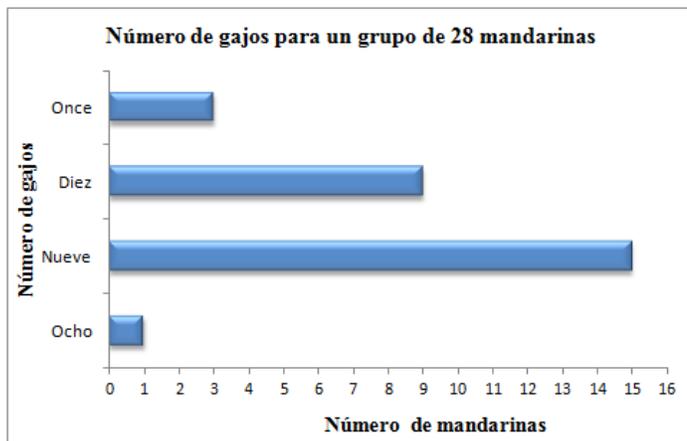
El cuadro que se construya debe ser suficientemente ilustrativo para que cualquier persona que lo observe comprenda la información que suministra. Para ello el título principal y los títulos secundarios deben proporcionar la información necesaria para lograr este objetivo. Este tipo de cuadro se conoce como *cuadros de frecuencia absoluta*.

Pero esta misma información puede ser presentada también en un gráfico de barras como el siguiente:



En el Primer Ciclo es importante que los estudiantes puedan construir estos gráficos en forma manual; esto les ayudará a lograr un buen manejo de los conceptos de escalas en los ejes de los gráficos. En los ciclos posteriores, el uso de la computadora será un recurso fundamental para simplificar el trabajo y mejorar la calidad de las representaciones.

El gráfico anterior se denomina *gráfico de barras verticales*. Si no se desea incluir el número de gajos en forma simbólica sino en palabras, entonces, para favorecer la lectura del gráfico, se acostumbra construir un *gráfico de barras horizontales* como el siguiente:



Ambas representaciones gráficas suministran la misma información; por una cuestión de estética se puede utilizar uno u otro según la situación lo amerite.

c. Determinación de medidas o valores relevantes

Para finalizar el análisis, se pueden identificar tres valores que tienen, desde un punto de vista matemático y de interpretación, una relevancia particular. Estos valores son:

- Al valor que es más común o valor de más frecuencia, se le llama **moda** de los datos; para el ejemplo, se dice que es el número de gajos más común por mandarina para todo el grupo.
- Al menor valor, se le llama **mínimo** de los datos; representa el número menor de gajos por mandarina para todo el grupo.
- Al mayor valor, se le llama **máximo** de los datos; representa el número mayor de gajos por mandarina, para todo el grupo.

d. Interpretación de la información

De acuerdo con la información obtenida que se resume en los puntos anteriores, se observa que para el grupo de 28 mandarinas observado, el número de gajos no presenta mucha variación pues se encuentra entre ocho y once; pero lo más común es que una de estas mandarinas tenga entre nueve y diez gajos, debido a que los otros dos valores tienen frecuencia muy baja. En general, el número más común es de nueve gajos por mandarina.

El docente debe tener presente que el análisis y la interpretación de la información es una etapa clave en un proceso de este tipo, pues por medio de esta etapa, se debe dar respuesta a las interrogantes que propiciaron el estudio.

El análisis anterior se puede repetir para el caso del número de semillas. Primeramente, al ordenar y clasificar los datos se tiene:

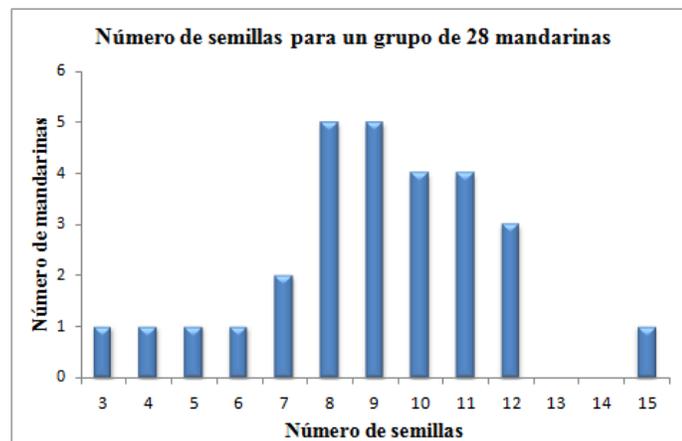
Número de semillas	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Frecuencia de mandarinas	1	1	1	1	2	5	5	4	4	3	0	0	1

El cuadro correspondiente para resumir los datos podría ser el siguiente:

Número de semillas para un grupo de 28 mandarinas

Numero de semillas	Frecuencia de mandarinas
Tres	1
Cuatro	1
Cinco	1
Seis	1
Siete	2
Ocho	5
Nueve	5
Diez	4
Once	4
Doce	3
Trece	1
Total	28

Seguidamente se realiza la representación gráfica de estos datos:



Finalmente, para el número de semillas se tienen dos modas que son ocho y nueve, es decir, los números más comunes de semillas por mandarina son ocho y nueve. Por otro lado, el mínimo valor de semillas por mandarina son tres y el máximo valor de semillas por mandarina es de 15.

Al analizar la información recabada se puede observar que el número de semillas de este grupo de 28 mandarinas presenta mucha dispersión, pues varía entre tres y quince semillas. Pero se observa mucha concentración de mandarinas que tenían entre ocho y doce semillas. Esta mayor variabilidad se refleja en que hay dos modas (ocho semillas y nueve semillas) con frecuencia de cinco cada una de ellas; pero además los valores de diez y once semillas, también tienen una frecuencia alta (cuatro mandarinas cada uno).

4. Ante la consulta sobre cuál de estas dos características de las mandarinas tiene más variabilidad, es evidente que el número de semillas es mucho más variable que el número de gajos para este grupo de mandarinas. Esta situación se detecta muy bien al observar los cuadros o las representaciones gráficas.
5. Para una nueva mandarina que aún no ha sido pelada, de acuerdo con la información previa, se tendería a creer que podría tener entre nueve y diez gajos, y entre ocho y doce semillas. No obstante, no hay absoluta certeza que esto sea cierto.

Como se ha podido notar, las actividades 5 y 6 han sido muy representativas para comprender varios conceptos estadísticos nuevos.

La actividad 6 es un claro ejemplo de la forma en que, por medio de una situación adecuadamente seleccionada, es posible favorecer habilidades destinadas hacia la recolección, representación tabular y gráfica, así como al uso de medidas estadísticas.

Recolección, representación e identificación de medidas

Primeramente se analizaron tres estrategias para la recolección de información: **observación, interrogación y experimentación**. Estas tres técnicas son muy utilizadas, normalmente se combinan para generar datos de calidad. En estos primeros niveles, el profesor debe dar la confianza para que los estudiantes puedan ensayar por ellos mismos en la aplicación de estrategias de recolección de datos para responder un problema particular.

Observación: Consiste en recolectar datos por medio de la observación simple. Se observa el fenómeno y se anotan los datos correspondientes para su posterior análisis. Esta es una técnica muy utilizada en investigaciones sociales y sobre todo en investigación educativa. También, puede ser empleada en procesos de recolección de información en los trabajos de aula durante las lecciones de Estadística y Probabilidades.

Principales ventajas:

- a) Se recaba la información directamente, por lo que la calidad de los datos está garantizada, siempre que el observador esté debidamente preparado para llevar a cabo este proceso.
- b) La observación permite desarrollar una descripción de los hechos y al mismo tiempo analizar la situación.
- c) Esta técnica es de vital importancia cuando se llevan a cabo experimentos de cualquier tipo.

Principales desventajas:

- a) Se requiere una adecuada preparación de las personas que vayan a realizar las observaciones de la forma más natural posible.
- b) Muchas veces, la persona observada puede sentirse intimidada y no actuar naturalmente.
- c) Se requiere sistematizar muy bien el proceso de anotación de los datos para cada observación, lo cual no siempre es una tarea fácil.

Interrogación: Consiste en elaborar preguntas cuyas respuestas generen datos adecuados para llevar a cabo el análisis estadístico correspondiente para dar respuesta a las interrogantes del problema en estudio.

Principales ventajas:

- Permite unificar información, pues a todos los individuos se les realizan las mismas preguntas.
- Es adaptable a diferentes situaciones.

Principales desventajas:

- Es difícil obtener información confidencial pues puede ocurrir que el entrevistado no quiera contestar.
- No se puede profundizar sobre un tema, pues la pregunta está dirigida para recolectar información muy específica.

Experimentación: Consiste en la realización de experimentos particulares por medio de los cuales se generan datos necesarios para responder las interrogantes del estudio. En términos generales, la experimentación debe ser una herramienta fundamental para generar datos dentro del sistema educativo.

Las principales ventajas son:

- Los niños y los jóvenes tienen un gran potencial para la experimentación, la técnica aprovecha ese potencial y lo encausa hacia el aprendizaje.
- Pone de cara a situaciones reales, y ante la búsqueda de estrategias que le permitan argumentar si una hipótesis o creencia está en lo correcto o no lo está.

Principales desventajas:

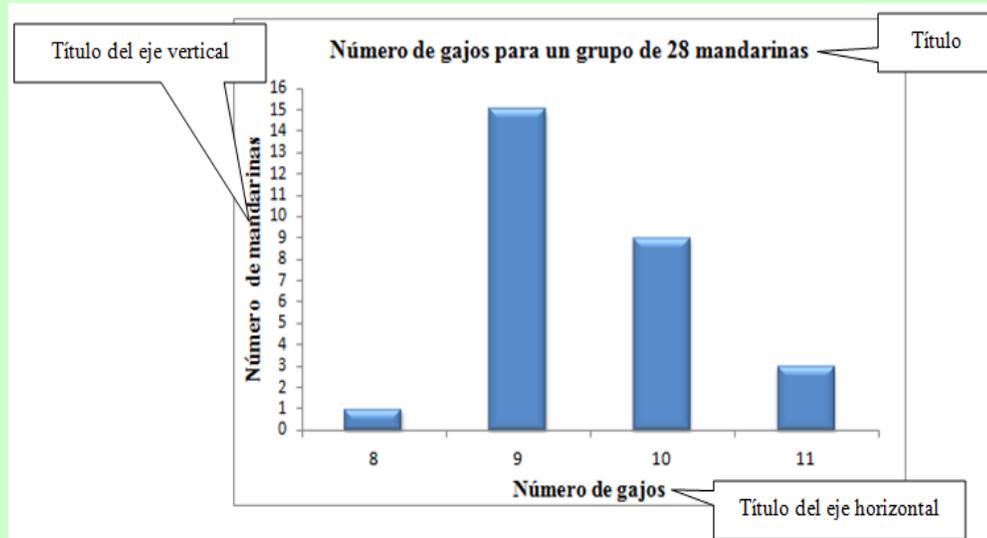
- Su principal desventaja consiste en que se debe realizar una muy buena planificación de los experimentos, e incluso ponerlos a prueba previamente para tener una mayor certeza de lograr los propósitos educativos.

Construcción de cuadros de frecuencia y gráficos de barras simples

Como pudo notarse, los cuadros de frecuencia se construyen a partir de la información recabada, indicando simplemente las categorías de la característica y sus frecuencias correspondientes. Pero se debe prestar atención al título general y a los títulos secundarios. Observe la siguiente figura:

Número de gajos para un grupo de 28 mandarinas	
Numero de gajos	Frecuencia de mandarinas
Ocho	1
Nueve	15
Diez	9
Once	3
Total	28

Del mismo modo, los gráficos de barras simples se construyen con base a la información de un cuadro de frecuencias. Por esta razón suministran la misma información, por lo que en este documento únicamente se incluye el cuadro o la representación gráfica. La ventaja de las representaciones gráficas consiste en que permite observar con más propiedad los patrones de variación de los datos. Mientras que los cuadros tienen la ventaja de mostrar los datos numéricos directamente, lo cual no ocurre con los gráficos. Las representaciones gráficas deben cuidar los mismos detalles de los cuadros, es decir, además de las barras con la información se incluye el título principal y los títulos de los ejes.



Identificación de las medidas estadísticas

En el Primer Ciclo únicamente se observan tres medidas estadísticas dirigidas hacia el análisis de datos cuantitativos. Estas medidas son de fácil identificación y fácil interpretación.

La moda: Como se indicó previamente corresponde al valor de mayor frecuencia. En un conjunto de datos puede ser que haya más de una moda o podría ser que no haya moda. Un error común que se debe evitar consiste en considerar la moda como la medida para la cual la mayoría de los datos toma ese valor, lo cual no siempre es cierto, pues se entiende por mayoría más de la mitad de los datos.

El **mínimo** y el **máximo**: Los valores máximo y mínimo únicamente se identifican para datos cuantitativos, representan los extremos de un grupo de datos, el valor mayor y el valor menor respectivamente.

Análisis con datos cualitativos

Para complementar lo expuesto hasta ahora, el siguiente cuadro presenta un resumen correspondiente a la información cualitativa.

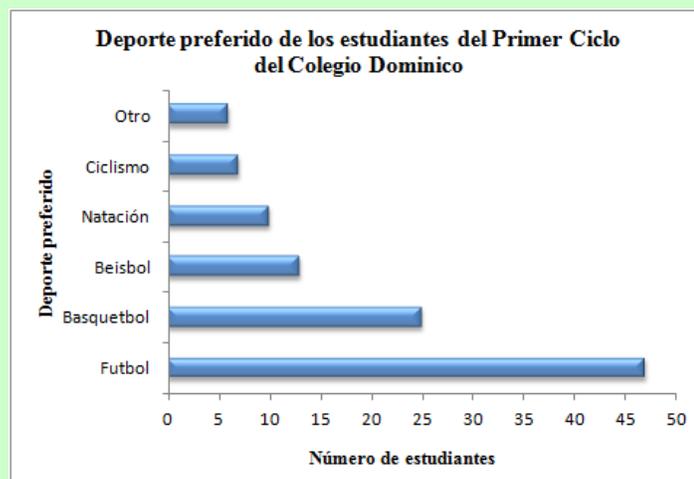
Deporte preferido de los estudiantes del Primer Ciclo del Colegio Dominicó

Deporte favorito	Número de estudiantes
Futbol	47
Basquetbol	25
Beisbol	13
Natación	10
Ciclismo	7
Otro	6
Total	108

Fuente: Encuesta realizada por el profesor de Educación Física del Colegio Dominicó

Observe que este cuadro sigue el mismo formato empleado para la datos cualitativos, la única diferencia planteada aquí es que se ordenaron los deportes de acuerdo con la frecuencia, de modo que van de mayor a menor. Además, debido a que la información utilizada para construir el cuadro fue recolectada por otra persona, al final del cuadro se incluye la fuente correspondiente.

Tampoco hay importantes diferencias al momento de construir las representaciones gráficas, tal como se muestra a continuación.



Fuente: Encuesta realizada por el profesor de Educación Física del Colegio Dominicó

Por último, en cuanto a la identificación de medidas, para el caso de datos cualitativos como en el caso del deporte preferido de los estudiantes, la única medida que tiene una interpretación lógica corresponde a la moda, para este caso la moda es el fútbol. Quiere decir que el deporte más común entre los estudiantes del Primer Ciclo del Colegio dominico es el fútbol. Los otros deportes citados por los estudiantes en orden de importancia son: basquetbol, beisbol, natación y ciclismo.

Generación de situaciones-problema

Como fue planteado en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, para la generación de habilidades en los estudiantes se propone el desarrollo de situaciones didácticas que deben ser abordadas siguiendo varios pasos, entre ellos:

1. Explorar el problema

- Entender la redacción del problema y plantearlo con sus propias palabras
- Hay algún antecedente o ha resuelto algún problema similar
- Distinguir que datos se requieren para resolver el problema
- Saber a dónde se quiere llegar y con qué información.

2. Establecimiento de una estrategia

- Establecer una estrategia para la recolección de los datos
- Identificar alguna técnica para organizar, resumir y presentar la información.

3. Ejecutar la estrategia

- Implementar la o las estrategias para la recolección de datos.
- Desarrollar las estrategias para la organización, resumen y presentación de la información.
- Realizar el análisis e interpretación de la información recolectada.

4. Auto-reflexión de la estrategia y concluir

- Revisar el análisis realizado en función del problema original, ¿satisface lo establecido con el análisis de datos el problema original?
- ¿Ha identificado una estrategia más sencilla para resolver el problema?
- Ofrecer la respuesta final al problema original.

En este sentido, al docente le corresponde:

1. Planificar y coordinar la implementación de la “situación problema” para iniciar una lección.
2. Orientar y guiar el trabajo de los estudiantes sea en forma individual o en subgrupos.
3. Coordinar una plenaria para la presentación de los resultados obtenidos por los estudiantes en subgrupos o con el grupo general.
4. Llevar a cabo la institucionalización de los principales conceptos estadísticos que se utilizaron para la resolución del problema y proponer estrategias alternativas que pudieron haberse utilizado.

Los profesores deben estar pendientes de plantear situaciones problema que permitan la adquisición de las habilidades correspondientes a cada año escolar. Por ejemplo, suponga que se desea crear una situación problema para primer año, la cual incluye los siguientes conceptos y habilidades:

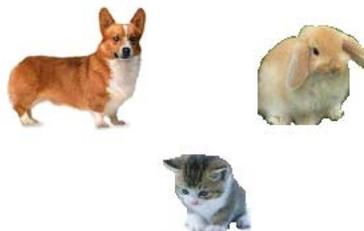
Conceptos	Habilidades específicas
Recolección de información <ul style="list-style-type: none"> • Observación • Interrogación 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar la observación y la interrogación para recolectar datos • Emplear la frecuencia absoluta de los datos repetidos para agruparlos.
Presentación de información <ul style="list-style-type: none"> • Frecuencia 	

Debido a la edad de los estudiantes, no es adecuado incluir la observación y la interrogación en un solo problema, pero se puede plantear una situación para que sean ellos quienes determinen cuál de las técnicas utilizan; o se puede establecer un problema donde se concentren en utilizar una de ellas. Tampoco es conveniente que recolecten información de más de una característica.

Observe la siguiente situación:

¿Cuál es la preferencia por mascotas de los estudiantes del grupo? Es decir

- ¿Cuáles son todas las mascotas preferidas para los estudiantes del grupo?*
- ¿Cuál es la mascota que más prefieren los estudiantes de este grupo? ¿Cuántos niños indican que es su mascota preferida?*
- ¿Cuál es la segunda y cuál es la tercera mascota de su preferencia? ¿Cuántos niños dieron por respuesta a cada una de ellas?*



Es importante que el niño se inicie en los procesos de identificar y recolectar datos. Este tipo de actividades promueve dicha habilidad. Esta situación se puede plantear a un subgrupo de tres o cuatro estudiantes. El subgrupo encargado de realizar la actividad debe seguir los siguientes pasos:

1. Primeramente deben tener claro el significado de mascota, para ellos se pueden asesorar con un diccionario o mediante la consulta al profesor. Deben establecer qué información requieren recabar para resolver el problema.
2. Una vez comprendido el problema deben establecer una estrategia para recolectar esta información necesaria y para resumirla.

Una estrategia para recolectar la información consiste en conseguir o elaborar una lista de clase donde se incluyen los nombres de los estudiantes. Como estrategia de recolección, deberían identificar a la interrogación como la mejor vía, pues simplemente se consulta a cada estudiante *¿cuál es su mascota preferida?*

3. En la tercera etapa, deben poner en práctica la estrategia planteada en el punto 2 anterior, lo cual consiste en apersonarse a los otros subgrupos, consultar a cada estudiante por la mascota preferida y anotar el nombre de esa mascota al lado del nombre del estudiante en dicha lista. Con esto se introduce en la elaboración de bases de datos muy simples. Se espera que dichos datos quedaran ordenados en una forma similar a la de la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Mascota preferida
Abarca Rojas Mafalda	Perro
Alvarado Pérez Manolito	Conejo
Barrantes Mena Libertad	Gato
⋮	⋮
⋮	⋮

Con la información recabada, los estudiantes deben buscar estrategias para resumirla y presentarla de una manera que les permita responder las preguntas que surgieron al inicio. El docente debe darles la libertad de actuar y motivarlos para que busquen alternativas para enfrentar esta tarea. Una forma que podrían emplear es listando los nombres de las mascotas y escribiendo al lado el número de estudiantes que tiene esa preferencia, primeramente haciendo un conteo manual y luego escribiendo el resultado.

Mascota preferida	Número de estudiantes	Número de Estudiantes
Perro		7
Gato		4
Conejo		2
⋮		⋮
⋮		⋮

4. Finalmente, con la información recolectada, los estudiantes deben estar en capacidad de responder las interrogantes planteadas y exponer los resultados obtenidos ante el grupo completo.

Para la institucionalización de los contenidos el docente debe enfocarse en la necesidad con que a diario las personas requieren buscar datos y la forma en que pueden recabar esos datos. En este caso los estudiantes utilizaron la interrogación como una forma de recolección de información, el docente puede consultar sobre ¿qué otras formas pudieron utilizarse? Además, debe hacer hincapié en la necesidad de recolectar la información de una manera sencilla, que permita realizar una clasificación u ordenamientos en función de las interrogantes que se quieran contestar. El concepto de frecuencia o número de estudiantes que prefieren una determinada mascota debe ser analizado; es decir, la frecuencia va a ser el número de estudiantes de cada una de las agrupaciones.

Evaluación de las situaciones-problema

Para ejemplificar una evaluación seguidamente se va a considerar el problema planteado en la sección anterior. Las etapas de evaluación están en función de las cuatro etapas que deben desarrollar para resolver el problema.

- *Exploración del problema.* Es importante que el estudiante explore el problema con detalle, que se cuestione, que consulte por los términos que no conoce, por ejemplo el de mascota. Así como que tengan una discusión entre los estudiantes del subgrupo para tener claridad absoluta al abordar las etapas siguientes. El docente debe estar al tanto de la forma en que los estudiantes llevan a cabo esta labor.
- *Establecimiento de una estrategia.* Una vez comprendido el problema, es conveniente calificar el tipo de estrategia diseñado por el estudiante. En este caso, se deben considerar aspectos como la originalidad, su factibilidad, conexión y belleza.
- *Desarrollo de la Estrategia.* Se valora si el estudiante hace un uso adecuado de procedimientos de recolección de datos para desarrollar la estrategia. Del mismo modo, deben proceder a organizar y resumir los datos para que puedan responderse las interrogantes. En este proceso se requiere evaluar la originalidad con la que se implementa la estrategia.
- *Auto-reflexión sobre la estrategia y conclusión.* En este punto se evalúa la pertinencia de la estrategia empleada. Además la pertinencia o coherencia de los resultados obtenidos, así como su factibilidad. Las respuestas ofrecidas deben ser coherentes con las tres interrogantes planteadas.

El profesor debe tener presente que la evaluación es un proceso formativo más que sumativo, por lo que la evaluación del desarrollo de una situación problema es una etapa más del proceso de aprendizaje en los estudiantes y de la adquisición de las habilidades propuestas. Por esta razón, el seguimiento a cada una de las etapas del proceso es fundamental, para lograr una verdadera integralidad del trabajo realizado por los estudiantes.

III. La Probabilidad

El ser humano debe enfrentar cotidianamente situaciones de incertidumbre en condiciones de aleatoriedad. Estas varían de simples juegos de azar hasta complejos problemas de la vida real. La adquisición del conocimiento sobre el azar y la identificación de modelos de probabilidades que le ayuden a tomar decisiones en condiciones de incertidumbre, permite tener una mayor comprensión del entorno.



El azar y lo aleatorio

Los conceptos de azar y aleatoriedad no son de simple comprensión para un niño. Al respecto, los profesores Godino y Batanero (2002) indican lo siguiente:

Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Las operaciones aritméticas básicas se pueden también concretizar en operaciones con objetos físicos (juntar o separar colecciones, etc.) que tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los operandos primitivos al deshacer la operación).

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en una ruleta, desde una posición inicial, impulsándola hacia la derecha, es muy poco probable que un impulso a la izquierda devuelva la aguja a su posición inicial. Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de aleatoriedad y probabilidad. (pág. 754)

Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. En Godino, J. (2002). Matemática y su Didáctica para Maestros: Manual para el estudiante. Pág.753-761
<http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

Por esta razón, de acuerdo con diferentes investigaciones en el campo, el primer paso para enfrentar la enseñanza de la probabilidad, consiste en generar en los niños la habilidad de diferenciar las situaciones aleatorias de las deterministas. Para lograr esto, se debe aprovechar las intuiciones con que los niños llegan a la escuela.

Desde que el niño está muy pequeño es común que en su interacción con otros niños utilicen juegos que tienen incluidos, implícitamente, principios aleatorios. Entre los juegos más comunes se encuentran: “de tin marín de do pingüé...”, “zapatito cochinito...”, “piedra-papel-tijera”, entre otros.



Aunque de forma intuitiva, ellos consideran que los resultados de estos juegos dependen del azar (lo que significa que intuitivamente consideran que el resultado de los juegos es inesperado, y todos tienen oportunidad de ganar). El profesor debe aprovechar estas ideas intuitivas de los niños para favorecer la identificación de las situaciones aleatorias de las deterministas.

Actividad 7

Analice las siguientes situaciones:

1. Suponga que se seleccionan dos niños: Ana y Manuel, los niños pasan delante del grupo y proceden a jugar:

“Zapatito cochinito cambia de pie”

Pierde el estudiante que sale seleccionados dos veces continuas. Repiten cinco veces el juego, en todas ellas Ana inicia el juego.

2. Ahora se seleccionan otros dos niños: Víctor y Karol pasan al frente del grupo y juegan ahora

“Piedra-papel-tijera”

Juegan varias veces.

De acuerdo con lo anterior

¿Cuál de estos juegos considera que es más justo para los participantes y por qué?

Análisis de la actividad 7

Para analizar cada uno de estos juegos, hay que observar que en el primer caso, al iniciar, debido a que Ana inicia, entonces se presenta la siguiente secuencia:

Inicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Ana	cambia
Manuel	de
Ana	pie

Ana cambia de pie

Se reinicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Ana	cambia
Manuel	de
Ana	pie

Ana pierde

Observe que es posible determinar que Ana va a perder, sin necesidad de realizar el juego, por lo que, aunque se repita cinco o más veces siempre se puede determinar quién va a perder. Para este caso, Ana estaría perdiendo en las cinco oportunidades.

La situación planteada acá no cambia aunque se incluyan más jugadores, por ejemplo que ocurre si Cindy también entra al juego, y le toca el tercer turno:

Inicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Cindy	cambia
Ana	de
Manuel	pie

Manuel cambia de pie

Se reinicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Cindy	cambia
Ana	de
Manuel	pie

Manuel pierde

Aunque ahora el que pierde es Manuel, nuevamente es predecible que iba a perder sin necesidad de realizar el juego.

¿Qué pasa con el otro juego?

Debido a que Víctor y Karol deben seleccionar piedra, papel o tijera, en teoría se dan muchas posibilidades de selección. El siguiente cuadro resume estas posibilidades:

Víctor juega	Karol juega	Resultado
Piedra	Piedra	Empate
Piedra	Papel	Gana Karol
Piedra	Tijera	Gana Víctor
Papel	Piedra	Gana Víctor
Papel	Papel	Empate
Papel	Tijera	Gana Karol
Tijera	Piedra	Gana Karol
Tijera	Papel	Gana Víctor
Tijera	Tijera	Empate

Observe que hay tres formas por las cuales Víctor puede ganar, tres formas por las cuales Karol puede ganar y tres posibles resultados de empate. Pero debido a que no es posible determinar con anticipación ¿cuál es la selección que va a realizar cada uno?, entonces resulta imposible tener la certeza sobre quién va a ganar el juego.

Entonces este juego se considera justo, pues ambos jugadores tienen la misma oportunidad de ganar y el resultado del juego es incierto.

Situaciones aleatorias y situaciones deterministas

El primer juego planteado en la actividad anterior tiene un resultado que se puede predecir sin ponerlo en práctica. Toda situación para la cual pueda ser posible determinar con anticipación el resultado se le llama *determinista*.

De forma contraria, en el segundo juego, no es posible predecir lo que va a ocurrir, incluso si se realizara bajo las mismas condiciones una y otra vez. Siempre el resultado es inesperado, pues va a depender de la selección entre piedra, papel y tijera que haga cada uno de los jugadores, y si esa selección la realiza espontáneamente, entonces el resultado es incierto. En aquellas situaciones para las cuales el resultado del experimento es no predecible sin llevarlo a la práctica, se dice que este resultado depende del azar y la situación se denomina *aleatoria*.

Observe que normalmente, intuitivamente los niños creen que ambos juegos permiten escoger un ganador en forma indeterminada; no obstante, solamente uno de ellos está en la categoría de aleatorio. En este sentido, se requiere insistir en que el docente debe aprovechar estas ideas intuitivas para favorecer el aprendizaje de los conceptos, de modo que los niños cambien sus intuiciones erróneas y fortalezcan las correctas.

Actividad 8

Observe las siguientes dos situaciones:

1. Suponga que usted selecciona una mandarina de la misma variedad de las citadas en la actividad 6. Se desea determinar con exactitud la cantidad de gajos que tiene esta mandarina.



2. Ahora suponga que usted va a la pulpería a comprar arroz, pero no está seguro del número de kilos que puede comprar con el dinero que lleva, por lo que primero consulta el precio por kilo.

Determine si la identificación del número de gajos antes de pelar la mandarina, o del precio que va a pagar por el número de kilos de arroz comprado, son situaciones aleatorias o deterministas.



Análisis de la actividad 8

Como se pudo observar al analizar el comportamiento de los gajos de las mandarinas, este dato varió entre ocho y once, para las mandarinas observadas, por lo que el número de gajos de una nueva mandarina podría estar en este rango (o incluso podría tener un número diferente); por ello, sin pelarla o realizar algún otro análisis, no es viable determinar previamente el número de gajos que dicha mandarina podría tener, por lo que esta situación se puede considerar como aleatoria.

Por otro lado, al tener identificado el precio del kilo de arroz, un comprador sabe con exactitud antes de realizar la compra, el monto económico que debe pagar para un determinado número de kilos, por lo que la situación se considera como determinista.

Experimentos aleatorios y eventos

Antes de continuar se requiere realizar la observación que, tanto en los programas de estudio como en este documento se van a utilizar los términos *situaciones aleatorias*, *experimentos aleatorios* como sinónimos. Además, a los posibles resultados de una situación aleatoria se les llamarán *eventos*.

De acuerdo con lo anterior, para el experimento aleatorio de la actividad 7, en la que Víctor y Karol juegan *piedra-papel-tijera* se pueden señalar como eventos simples los siguientes:

1. Karol gana el juego
2. Víctor gana el juego
3. El juego queda empatado

Pero también se pueden establecer combinaciones entre ellos, por ejemplo: El juego queda empatado o lo gana Karol; se considera como un solo evento que consiste en combinar dos eventos. Del mismo modo se pueden definir otros.

Para la situación descrita en la actividad 8, algunos ejemplos de eventos son:

1. Que la mandarina tenga nueve gajos
2. Que la mandarina tenga ocho gajos
3. Que la mandarina no tenga diez gajos

Existen otros eventos que se podrían definir.

Eventos seguros, probables e imposibles

Los conceptos resultado seguro, seguro probable o imposible forman parte del lenguaje común de los de los ciudadanos, por lo que el profesor debe utilizar adecuadamente estas ideas para generar las habilidades correspondientes.

En los análisis de probabilidades, los juegos con dados, con monedas o con urnas con bolas de diferentes colores o numeradas, entre otros juegos, son muy ilustrativos.



Los juegos de azar tienen una importante historia que puede ser utilizada por el docente para motivar a los estudiantes. Seguidamente se incluye una pequeña referencia histórica sobre el antecesor del dado.



Un poco de historia

El hueso astrágalo

La presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo en las excavaciones arqueológicas más antiguas parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 4 000 años, y la utilización del astrágalo en culturas más recientes ha sido ampliamente documentada. Existen en las pirámides de Egipto pinturas que muestran juegos de azar que datan del año 3 500 a. C. y Heródoto se refiere a la popularidad y difusión en su época de los juegos de azar, especialmente la tirada de astrágalos y dados. Los dados más antiguos se remontan a unos 3 000 años antes de Cristo y se utilizaron en el juego como en ceremonias religiosas.



Los sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas. Los juegos con dados se originaron en los tiempos del Imperio Romano (siendo una de las causas que provocó su caída), aunque no se conocen apenas las reglas con las que jugaban. Uno de estos juegos, denominado "hazard", palabra que en inglés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe "al-azar", que significa "dado".

Tomado de <http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article2118>

Actividad 9

Considere la siguiente actividad.

Suponga que se lanzan dos monedas. Considere los siguientes resultados o eventos

A: se obtiene un escudo y una corona

B: se obtiene a lo sumo dos escudos

C: se obtienen al menos tres escudos

Describa cada uno de los eventos anteriores

Análisis de la actividad 9

Cuando se lanzan dos monedas, los posibles resultados se representan en la figura.



Eventos seguros, probables e imposibles

Puede notarse que se presentan cuatro posibles resultados simples. El evento A puede ocurrir de dos formas distintas, la primera moneda escudo y la segunda corona, o la primera corona y la segunda escudo. Por esta razón se dice que es un **evento probable**, pues puede ocurrir o no ocurrir en este experimento. Por otro lado, el evento B: *se obtiene a lo sumo dos escudos*, significa que se obtienen dos o menos escudos (no más de dos); como puede notarse dicho evento ocurrirá siempre, pues al lanzar dos monedas el número máximo de escudos que se puede obtener es dos. De este modo el evento B siempre ocurre, independientemente del resultado, por ello se dice que es un **evento seguro**. Finalmente, el evento C: *se obtiene al menos tres escudos*, significa que se podría obtener tres escudos o más, lo cual es imposible pues solamente se tienen dos monedas, por ello se dice que C es un **evento imposible**.

Eventos o resultados más probables, menos probables o igualmente probables

Los conceptos de más probable o menos probable, al igual que los anteriores, forman parte del lenguaje de los niños, pero no siempre se utilizan adecuadamente. Analice la siguiente actividad:

Actividad 10

Una familia debe decidir entre las playas del Caribe o las del Pacífico Central para realizar un paseo en los primeros días del mes de octubre. Debido a que van a ir a acampar, no es conveniente que llueva, por ello deben seleccionar el lugar que tenga menos probabilidades de lluvia en esas fechas.

¿En cuál de las regiones Huetar Atlántica o Pacífica Central, es más probable que llueva en los primeros días del mes de octubre?



Análisis de la actividad 10

Las condiciones climatológicas varían mucho dentro de las diferentes regiones del país; pero normalmente se han marcado épocas en las que en unas regiones llueva más que en otras. Casualmente, el mes de octubre es uno de los más lluviosos en la Región Pacífico Central; pero no es así en la Región Huetar Atlántica, donde más bien se aprovecha la ausencia de lluvias en los primeros días de octubre para realizar los famosos Carnavales de Limón. Por esta razón, es más probable que llueva en la Región Pacífico Central.

Eventos o resultados más probables, menos probables o igualmente probables

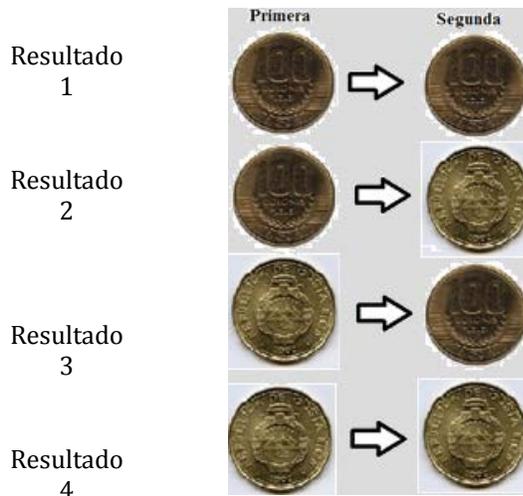
Normalmente, la identificación de eventos más probable o menos probable, intuitivamente están asociados a la experiencia vivida por las personas. Tal como se analizó en la actividad anterior, la experiencia sobre el comportamiento del clima ayuda a determinar que un evento es **más probable** que otro.

Debido a que el concepto de probabilidad se requiere ir construyendo paulatinamente durante toda la Primaria, es recomendable nuevamente iniciar con estas ideas intuitivas. De modo que se asocian los eventos **más probables** o **menos probables** a las posibilidades de ocurrencia que tiene uno u otro evento. Cuando se cree que las posibilidades de ocurrencia son las mismas para ambos eventos se dice que son **igualmente probables**.

Hay que hacer la observación que a medida que se vayan analizando nuevos conceptos, la intuición será desplazada poco a poco por un análisis más formal desde el punto de vista teórico.

Espacio muestral, puntos muestrales y representación

Para el análisis de estos conceptos se puede volver a analizar las actividades 6 y 9. Primeramente en la actividad nueve, al lanzar dos monedas, se determinaron cuatros resultados diferentes, los cuales se representaron en la figura:



Al grupo total de resultados se le llama *espacio muestral*, mientras que a cada uno de los resultados simples se le denomina *punto muestral*. Si se representa con una E un resultado de escudo y con una C un resultado de corona, cada resultado del experimento se pueden expresar por un par de letras donde se combinan E y C. Los cuatro *puntos muestrales*, en el mismo orden en que apararen en la figura serían:

CC, CE, EC, EE

A todo este grupo de resultados simples se le llama *espacio muestral*

En segundo lugar, en la actividad 6, se analizó un juego entre los estudiantes Víctor y Karol, denominado piedra-papel-tijera. Después de analizar el problema se determinó que el experimento podría generar solamente uno de los siguientes resultados:

	Víctor juega	Karol juega	Resultado
1	Piedra	Piedra	Empate
2	Piedra	Papel	Gana Karol
3	Piedra	Tijera	Gana Víctor
4	Papel	Piedra	Gana Víctor
5	Papel	Papel	Empate
6	Papel	Tijera	Gana Karol
7	Tijera	Piedra	Gana Karol
8	Tijera	Papel	Gana Víctor
9	Tijera	Tijera	Empate

En total hay nueve resultados diferentes que constituyen nueve *puntos muestrales*. En el mismo orden de la tabla ellos son: (Piedra, Piedra), (Piedra, Papel), (Piedra, Tijera), (Papel, Piedra), (Papel, Papel), (Papel, Tijera), (Tijera, Piedra), (Tijera, Papel) y (Tijera, Tijera). Todo el grupo constituye el *espacio muestral* del experimento.

El conocimiento del espacio muestral y de los puntos muestrales relacionados permite tener una mayor propiedad al momento de indicar si un evento es más probable que otro. Realice la siguiente actividad.

Actividad 11

1. Vuelva a analizar el experimento realizado de lanzar dos monedas y considere los eventos:

A: Se obtiene un escudo

D: Se obtienen dos escudos

Indique ¿cuál es más probable y cuál es menos probable?

2. Considere nuevamente la actividad 7, suponga que cada uno de los puntos muestrales son igualmente probables. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar, Víctor o Karol?

Análisis de la actividad 11

1. Si se observa claramente, el evento A contiene dos puntos muestrales, o sea hay dos oportunidades de ocurrir, que son EC y CE (la primera moneda cae escudo y la segunda corona, o la primera cae corona y la segunda escudo). El evento D solamente tiene un punto muestral que es EE (la primera moneda cae escudo y la segunda también), o sea sólo tiene una oportunidad de ocurrir. Por esta razón es más probable el evento A.

2. Al observar el cuadro nuevamente, se observan que hay igual cantidad de puntos muestrales para que Víctor gane que para que gane Karol (tres para cada uno), por ello los eventos se consideran igualmente probables.

Esta última actividad ha dejado en evidencia que, si se logra identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales, resulta más fácil identificar si un evento es más probable que otro. Solamente aquí hay que hacer varias observaciones:

1. El concepto de más probable o menos probable, tal como se citó al inicio, está directamente vinculado con la idea intuitiva de que es más probable aquel que corrientemente pueden ocurrir más veces.
2. Si se desea identificar a un evento como más probable porque tiene más puntos muestrales que otro, hay que tener presente que se debe suponer que los puntos muestrales son todos igualmente probables.

Generación de situaciones-problema

Debido a que este apartado corresponde a aspectos didácticos, lo expuesto para la sección de Estadística es también válido acá. Es decir en el proceso se deben considerar al menos las siguientes etapas, con las demás observaciones detalladas en esa sección:

1. Explorar el problema
2. Establecer una estrategia
3. Ejecutar la estrategia
4. Auto-reflexionar sobre la estrategia y concluir

Igualmente al docente le corresponde

1. Planificar y coordinar la implementación de la “situación problema” para iniciar una lección.
2. Orientar y guiar el trabajo de los estudiantes sea en forma individual o en subgrupos.
3. Coordinar una plenaria para la presentación de los resultados obtenidos por los estudiantes en subgrupos o con el grupo general.
4. Llevar a cabo la institucionalización de los principales conceptos estadísticos que se utilizaron para la resolución del problema y proponer estrategias alternativas que pudieron haberse utilizado.

En este sentido, a continuación se propone un problema para ser implementado en segundo año, que abarca los siguientes conceptos y habilidades específicas.

Eventos <ul style="list-style-type: none"> • Más probables y menos probables 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar resultados o eventos más probables o menos probables en situaciones aleatorias pertenecientes a diferentes contextos.
--	---

Las situaciones que se deben proponer deben ser simples pero concretas. El estudiante se encuentra en un proceso donde la intuición debe jugar un rol fundamental. No obstante, hay que suponer que ya adquirieron habilidades vinculadas con los eventos seguros, probables e imposibles.

Considere el siguiente problema para ser planteado a uno de los subgrupos de trabajo:

Suponga que va a elegir por una rifa una de las provincias de Costa Rica para poner en práctica un nuevo programa deportivo para estudiantes de Primer Ciclo. Responda cada una de las siguientes interrogantes:

1. *¿Es más probable que salga seleccionado San José que Limón?*
2. *¿Cuál de los resultados es más probable? Que salga seleccionada una provincia costera o una provincia del centro del país.*
3. *¿Cuál de los resultados es menos probable? Que salga seleccionada una provincia que limita con Nicaragua, o una provincia que limita con Panamá.*

Se espera que el subgrupo encargado de resolver este problema realice las siguientes etapas:

1. Deben leer varias veces el problema para comprender lo que se solicita. Además deben aclarar conceptos, recordar ¿cuáles son las provincias de Costa Rica? Además, debido a que para analizar el problema se requieren algunos conocimientos sobre Geografía, si no tienen estos conocimientos deben buscar un libro o mapa que les ayude a ubicarse con respecto a cada uno de los eventos planteados.



2. Una vez comprendido el problema, deben establecer una estrategia para abordar cada una de las preguntas del problema. En primer lugar deben tener claro que en la rifa todas las provincias tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas. Además que para cada evento deben identificar el número de provincias asociadas a él. Con esta información pueden pasar a la siguiente etapa.
3. Acá deben evidenciar poner en práctica la estrategia que se ha venido analizando en las etapas 1 y 2. Esto se puede resumir de la siguiente manera:
 - Hay tres provincias costeras: Guanacaste, Puntarenas y Limón.
 - Hay cuatro provincias sin costa, ubicadas en el centro del país: San José, Alajuela, Heredia y Cartago.
 - Hay cuatro provincias que limitan con Nicaragua: Guanacaste, Alajuela, Heredia y Limón.
 - Hay dos provincias que limitan con Panamá: Limón y Puntarenas.
4. Finalmente deben proceder a responder las preguntas. De acuerdo con lo analizado hasta acá deberían responder que:
 - Es igualmente probable que salga seleccionada la provincia de San José que la provincia de Limón.
 - Es más probable que sea seleccionada una provincia del centro del país (que son cuatro) que una provincia costera (son tres).
 - Es menos probable que salga seleccionada una provincia que limite con Panamá (son dos) que una provincia que limite con Nicaragua (son cuatro).

Para la institucionalización de los contenidos el docente debe enfocarse en los supuestos que han fundamentado el análisis realizado y que se mencionaron anteriormente. Es decir, debe indicar que el razonamiento empleado por los estudiantes responde a que se supone que todas las provincias tienen la misma posibilidad de salir seleccionadas y que son más probables los

eventos que tienen más oportunidad de ocurrir, o sea que para este caso incluyen más provincias. Pero además el docente debe estar atento a orientar a los estudiantes en las etapas precisas.

Evaluación de las situaciones-problema

Nuevamente, el proceso de evaluación va a ser ejemplificado por medio del análisis del problema previo. Tal como se recomendó en la sección de Estadística, la evaluación debe realizarse en función de cada una de las etapas que deben seguir los estudiantes para llegar a la resolución del problema.

- *Exploración del problema.* Aquí debe evaluarse el nivel de exploración que realizan los estudiantes sobre el problema planteado. Además de la discusión que deben hacer en los términos de la redacción, también debe tomarse en cuenta su iniciativa para buscar la información geográfica sobre la que no tiene conocimiento. De modo que al final de esta etapa, debe tener plena claridad para continuar con la siguiente etapa.
- *Establecimiento de una estrategia.* El profesor debe observar que los estudiantes utilizan adecuadamente la información recabada en la etapa previa para establecer una estrategia que les permita abordar con suficiente información cada una de las preguntas.
- *Desarrollo de la Estrategia.* Debe evaluarse si el estudiante ha sido capaz de identificar cada uno de los eventos planteados en el problema, tal como se citó en el análisis de la situación, en la sección anterior. El profesor debe observar si los elementos establecidos por los estudiantes son suficientes para responder el problema, así como el nivel de razonamiento utilizado para llegar a la obtención de esos elementos.
- *Auto-reflexión sobre la estrategia y conclusión.* Finalmente, se evalúa la congruencia del análisis efectuado y los resultados ofrecidos por los estudiantes para cada una de las tres preguntas. Las respuestas no solamente deben estar en armonía con las preguntas realizadas, sino que también deben ser argumentadas adecuadamente.

Es importante aclarar nuevamente que las deficiencias que se observen en esta etapa no deben ser simplemente objeto de una calificación baja, sino que el proceso debe permitir al estudiante aprender de los errores cometidos y mejorar la adquisición de las habilidades. Esta debe ser la principal función del educador en este proceso.

Bibliografía

Ministerio de Educación Pública. (2011). *Propuesta de Programa de estudios Matemáticas*. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2011). *Propuesta de Programa de estudios Matemáticas. Apoyo curricular I y II Ciclos. Educación General Básica*. San José, Costa Rica.