Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

CRUSA
Fundación para la cooperación

Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque en Resolución de problemas

Probabilidades

2012

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Ciclo Diversificado posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, iniciar con *Relaciones y Álgebra* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. A continuación se sigue con *Estadística y Probabilidad*, que no estaba presente en el plan anterior. Y finalmente *Geometría*, cuyos contenidos son completamente distintos a los del programa anterior. Estas tres unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Ciclo Diversificado se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.
En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Probabilidades

Habilidad general

Conocer y aplicar las propiedades básicas de las probabilidades en el planteamiento de situaciones didácticas en el aula.

Introducción

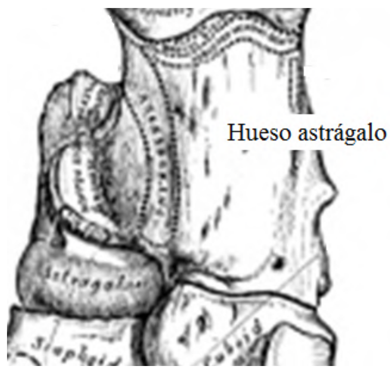
Este material ha sido preparado para apoyar al docente, desde el punto de vista teórico, en el abordaje de los principios básicos de las probabilidades, de acuerdo con lo establecido en los programas de estudio de la Educación Diversificada. Este material constituye una continuación de la unidad que fue preparada para el III Ciclo. Por esta razón, muchas de las situaciones que se analizan en este documento requieren de ciertos conocimientos previos que fueron incluidos en dicha unidad. No obstante, al igual que se ha hecho en otras unidades, se inicia con un resumen de los aspectos considerados en dicha unidad.

I. Desarrollo histórico del Cálculo de Probabilidades

Seguidamente se presenta una breve reseña histórica sobre el surgimiento de las probabilidades en la historia y la forma en que se desarrolló como disciplina científica. Este material es un compendio de los artículos: Historia de la Probabilidad e Historia de la Probabilidad y de la Estadística, tomados de las páginas:

- http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf
- http://www.ahepe.es/Documentos/IJornadas-Madrid2001/HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADISTICA I.PDF.

El cálculo de probabilidades surgió vinculado con el análisis de los juegos de azar. El hallazgo del hueso astrágalo (que corresponde a uno de los huesos del talón de los mamíferos que es el precursor del dado moderno) en excavaciones arqueológicas parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40.000 años. Más recientemente, existe amplia documentación sobre la utilización de las tabas (nombre vulgar del astrágalo) en Grecia, Egipto y Roma.



Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

En Egipto se han encontrado pinturas en las pirámides que ejemplifican juegos de azar desde los 3.500 años a. C. Por su parte Heródoto, historiador griego del siglo V a. C., escribió sobre la popularidad de los juegos de azar en su época, especialmente mediante el lanzamiento de tabas y dados. Los dados procedían del hueso astrágalo, que con el desgastarse perdían su forma rectangular y se hacían cúbicas. En Egipto, Grecia y Roma, el azar era concebido como producto de la divinidad, por lo que sacerdotes o pitonisas empleaban la combinación de resultados de las tabas (tenían cuatro caras distintas) en los templos como procedimiento mediante el cual las divinidades expresaban sus deseos y permitían conocer el futuro.

En los juegos con dados, se busca analizar la ocurrencia o no de un determinado resultado para identificar previamente las posibles pérdidas o ganancias, por muchos años este problema quedó sin resolver ya que, para los jugadores, lo aleatorio del juego llevaba inmersa la incalculabilidad, pues después de repetir varias veces la experiencia no tenían éxito en el cálculo de las predicciones. A pesar de la afición por el juego de dados en estas civilizaciones, no pudieron identificar que después de un gran número de jugadas se tendía a obtener números similares de resultados para cada cara de un dado que estaba bien balanceado.

Casualmente, el no poder identificar la equiprobabilidad de los resultados, fue una de las causas que provocó que el desarrollo del cálculo de probabilidades se retrasara durante siglos. Según especialistas, las principales razones por las que no lograron identificar la equiprobabilidad se deben a: la imperfección del dado y las creencias religiosas; ya que las culturas antiguas, estaban basadas en el determinismo, y creían que no era posible encontrar una causa que permitiera predecir el resultado de lanzar un dado, pues dicho resultado era producto de la voluntad divina.

Después de muchos años, durante el Renacimiento, surgen diferentes inquietudes vinculadas con la contabilización de los posibles resultados del lanzamiento repetido de un dado. Aunque también se le suman otros problemas tales como la forma de repartir las ganancias de los jugadores cuando un juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes surgieron de la resolución de problemas "cotidianos" con la intención de ser equitativos en las apuestas y repartos o incluso de conocer las respuestas para obtener ventajas y en mayores ganancias respecto a otros jugadores. La idea de modelizar el azar mediante las matemáticas aún no estaba plenamente presente en los intelectuales de la época.

Uno de los primeros problemas dedicados a contabilizar el número de posibles resultados al lanzar un dado varias veces se encuentra en un poema de la Edad Media, el poema De Vetula de Richard de Fournival (1200-1250) afirma correctamente que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles, pero además se calcularon acertadamente los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora puede parecer un problema simple, en esa época no lo era, y varios especialistas se equivocaron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles formas de permutar los resultados en una misma combinación.

El problema más importante relativo a los juegos de azar era el conocido "*problema del reparto de apuestas*" que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Este problema fue abordado por importantes matemáticos de la época, entre ellos Luca Pacioli (1445-1517), Girolamo Cardano (1501-1576) y Niccolo Tartaglia (1499–1557). Además de estos tres precursores de la probabilidad destacó también Galileo Galilei (1564-1642), también resolvió problemas sobre dados, hasta tal punto que escribió un libro llamado *Sobre la puntuación en tiradas de dados.* Sin embargo, el mayor aporte de Galileo al desarrollo de la probabilidad fue la teoría de la medida de errores. Por medio de ella clasificó los errores en dos tipos: "*sistemáticos*" y "*aleatorios*", clasificación que se mantiene todavía y estableció las propiedades de los errores aleatorios. Este descubrimiento fue clave para la creación de la Estadística y la Probabilidad.

No obstante, según los historiadores, el nacimiento de las probabilidades se remonta a un hecho ocurrido en 1654, cuando el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662), hacía un viaje en compañía de un jugador conocido como el caballero de Meré, quien era un apasionado con el juego de los dados y las cartas. Este caballero creía que había encontrado una "*falsedad"* en los números al analizar el juego de los dados, observando que el comportamiento de los dados era diferente cuando se utilizaba un dado que cuando se utilizaban dos dados. El aparente error partía de una comparación errónea entre las probabilidades de sacar un seis con un solo dado o de sacar un seis con dos dados. Para el caballero debía existir una relación proporcional entre el número de jugadas necesarias para conseguir el efecto deseado en uno y otro caso. El problema estaba en que el citado caballero no tuvo en cuenta que en el segundo caso estaba analizando una probabilidad compuesta en donde las distintas probabilidades se deben calcular multiplicativamente.

Este y otros problemas planteados por el caballero de Meré a Pascal sobre cuestiones relacionadas con diferentes juegos de azar, dieron origen a una correspondencia entre el propio Pascal y algunos de sus amigos matemáticos, entre los que sobresalió Pierre de Fermat (1601-1665) de Toulouse, abogado de profesión, pero gran amante de las matemáticas. Se puede decir que el resultado generado de esta correspondencia constituyó el origen de la teoría moderna de la probabilidad*,* debido a que Pascal y Fermat resolvieron juntos muchos problemas vinculados con probabilidades, cuyas soluciones fueron el inició de la formalización de la teoría de las probabilidades. Un suceso clave fue el desacuerdo con el caballero de Meré, quién realizó un cálculo de probabilidades erróneo, debido a se equivocó en considerar equiprobables sucesos que no lo eran, sólo cuando los posibles resultados son equiprobables tiene sentido aplicar la definición dada por Meré de probabilidad.

Ni Pascal ni Fermat expusieron sus resultados por escrito, fue el físico-matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) quien en 1657 publicó un breve tratado titulado ”De Ratiocinnis in ludo aleae” (sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados) inspirado en la correspondencia sostenida entre los dos creadores de la teoría de la probabilidad. Además Huygens extendió algunos resultados de Pascal. Los aportes de Pascal se extendieron a muchos campos como el de la filosofía e incluso al de la teología, intentando argumentar la existencia de Dios en términos probabilísticas y gananciales (probabilísticamente es mejor creer que no creer).

El primero en dar la definición clásica de probabilidad fue Jacob Bernoulli (1654–1705), matemático suizo que trabajó en la universidad de Basilea en 1687, en su obra “Ars conjectandi” (El arte de la conjetura) que fue publicada algunos años después de su muerte. En esta obra se encuentra, entre otras cosas, la proposición conocida como el Teorema de Bernoulli por medio del cual, la teoría de la probabilidad pasó de ser un conjunto de soluciones de problemas particulares a un área de importancia general.

Bernoulli destacó la importancia de que los fenómenos aleatorios dejaran de enfocarse como casos particulares y se intentara ver los conceptos generales que había detrás de ellos, sólo así se podría avanzar en la profundización del entendimiento de esta materia.

Más adelante, el matemático francés que había sido exiliado en Inglaterra Abraham De Moivre (1667–1754) aceptó la definición dada por Bernoulli y la reformuló en términos más modernos para la época: “*una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso*”.

Otro de los descubrimientos importantes de Bernoulli fue obtener la probabilidad de ocurrencia de un suceso sin necesidad de contar los casos favorables (ya sea por omisión de datos o por la imposibilidad de contarlos). Para ello desarrolló la probabilidad a posteriori, es decir: “*mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…*” De esta manera, introdujo el concepto de *probabilidad “estadística”* (actualmente denominada *probabilidad frecuencista*), la cual consiste en asignar como probabilidad de un suceso el resultado que se obtendría si el proceso se repitiera un número grande de veces en condiciones similares. Sin embargo, las condiciones anteriores no eran muy concretas para dar una definición rigurosa. Primeramente, se cita el concepto *número grande* de veces, pero no se ofrece cuál sería dicho número o cuán suficientemente grande debe ser; pero además no se especificó qué significaba el término *condiciones similares* y tampoco se estableció cuál era el *error admitido* respecto al resultado teórico.

Casualmente, fue la necesidad de dar mayor precisión sobre lo que debía entender por *número grande* de repeticiones y de calcular el error del resultado obtenido respecto del resultado teórico, lo que permitió que Jacob Bernoulli pudiera desarrollar, en su forma intuitiva, la *Ley de los Grandes Números*. Jacob Bernoulli descubrió que las frecuencias observadas se acercaban al verdadero valor previo de su probabilidad al hacer crecer el número de repeticiones del experimento, a este principio se le denomina ley de los grandes números. Los hallazgos de Jacobo fueron ampliados por su sobrino Niklaus Bernoulli (1687–1759), que aplicó el resultado de su tío.

De esta manera, gracias a Jacob Bernoulli, se introdujo dentro de la teoría de la probabilidad la ley de los grandes números, principio que constituye uno de los conceptos más importantes en cálculo de probabilidades, en la teoría de muestreo, en la inferencia estadística, entre otros; pero además tiene amplias aplicaciones en muchos campos de la Estadística, de las Matemáticas y de la ciencia en general. Pero además, dicho resultado fue objeto de análisis importantes entre matemáticos en los siglos siguientes.

Durante esa época, se desarrollaron tres de los teoremas más importantes de la *teoría de probabilidad clásica*, por Bernoulli el teorema de la suma, que fue formalizado posteriormente por Thomas Bayes (1701-1761), por De Moivre, el *teorema de la multiplicación*, y por Thomas Bayes el *teorema de la probabilidad condicionada*. No obstante, todos los conceptos que se manejan en estos teoremas habían aparecido en los análisis realizados por Pascal, Fermat y Huygens.

Quizá uno de los personajes más importantes en el desarrollo de la Teoría de Probabilidades fue Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien en su obra Théorie Analytique des Probabilités (Teoría Analítica de las Probabilidades) formaliza la teoría clásica de la probabilidad. También merece especial interés su aporte a la teoría de la decisión, ya que en sus trabajos aparecen los elementos básicos para enfrentar un problema de decisión. En el campo de la probabilidad escribió numerosas memorias.

En *Memoire sur la probabilité des causes par les évènemens* (Memorándum sobre la probabilidad de las causas a los hechos), Laplace enuncia el principio para la estimación de las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso observado. Este enunciado es el de la probabilidad inversa que había tratado Bayes. En esta misma memoria estudia también el Problema de los Puntos, que habían sido analizados por varios autores, y define los conceptos de *media aritmética*, como *promedio* de los valores observados, y *media geométrica*, como el valor que correspondería a la abscisa del centro de gravedad del área encerrada.

Los temas tratados por Laplace cambiaron el abordaje que habían dado sus antecesores. Mientras que los matemáticos anteriores a Laplace investigaron fundamentalmente problemas de juegos de azar, a partir de él comienza a llevarse a cabo una formalización de la teoría de la probabilidad. Así, en su memoria *Sur les naissances, les mariages et les morts á Paris* (En los nacimientos, matrimonios y defunciones en París), Laplace aborda un problema de *inferencia estadística* sobre población, inaugurando de esta manera un campo de aplicación de la Estadística a las ciencias sociales, que con tanto éxito se aplicaría en el futuro. La variedad de los temas, por la innovación y análisis de los asuntos tratados con la prolija cantidad que Laplace lo hizo en todas sus memorias, por la propia originalidad de esos temas, por la formalización de métodos tan importantes, lo convierten en un personaje fundamental en el desarrollo de la disciplina.

A partir de los estudios de Laplace y sus antecesores, el Cálculo de Probabilidades y la Estadística se fusionaron de manera que el primero se convirtió en el *andamiaje matemático* de la Estadística. Toda la base matemática que permitió desarrollar la Teoría de Probabilidades está extraída del análisis combinatorio, una disciplina iniciada por Leibniz y Jacob Bernoulli. Posteriormente con el paso del tiempo fue introduciendo la teoría de límites disminuyendo el peso que tenía el análisis combinatorio.

Otro de los hallazgos que revolucionaron la teoría de probabilidades lo realizó el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), con la denominada teoría de errores conjuntamente con Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) y Laplace, llegando a establecer el método de mínimos cuadrados como un procedimiento elemental para resolver los problemas de la teoría de errores. Gauss y Laplace, independientemente aplicaron conceptos probabilísticos al análisis de los errores de medida de las observaciones físicas y astronómicas. De hecho, científicos consagrados de la época como James Clerk Maxwell (1831-1879), Ludwig Boltzmann (1844-1906) y Josiah Willard Gibbs (1839-1903) aplicaron la probabilidad en su obra "Mecánica Estadística". La teoría de los errores constituye la primera rama de la Estadística que puede constituirse como una estructuración teórico-matemática. Otras contribuciones importantes a la teoría de errores fueron las de Simeon Denis Poisson (1781-1840) que descubrió que la media aritmética no es siempre mejor la mejor medida estadística.

Durante la última parte del siglo XIX y ya sobre todo en el siglo XX, tuvo lugar la creación de diferentes escuelas y tendencias dedicadas al estudio de la matemática en el campo de la teoría de la probabilidad en particular. Las escuelas más importantes fueron, la Rusa, la Francesa, la Estadounidense, entre otras. El matemático que sobresale fue el ruso Andrei N.Kolmogorov (1903-1987). Los matemáticos rusos dominaron todas las áreas relativas al cálculo de probabilidades y a la estadística durante la segunda mitad del siglo XIX y ya en el siglo XX formaron una escuela dirigida principalmente por Kolmogorov y Alexandre Khintchine (1894–1959).

Kolmogorov realizó su primer trabajo evaluando los estudios sobre probabilidades efectuados entre los siglos XV y XVI, utilizando como base, fundamentalmente, los trabajos de Bayes. Entre 1927 y 1930 realizó investigaciones dirigidas al análisis complementario de lo que se había desarrollado hasta ese momento sobre la ley de los grandes números (la ley débil de los grandes números, comenzada por J. Bernoulli, y ley Fuerte de los Grandes Números de Francesco Cantelli (1875-1966). En 1929 publicó *La Teoría General de la Medida y el Cálculo de Probabilidades*. En 1950 completó uno de los trabajos más importantes en Estadística *Estimadores Insesgados*. Kolmogorov dio solución a una parte del sexto problema de David Hilbert (1862-1943), en el que se pedía un fundamento axiomático de la teoría de probabilidades, utilizando la medida de Henri Léon Lebesgue (1875–1941). Este fue el comienzo del aporte más importante que Kolmogorov hizo a la teoría del cálculo de probabilidades, o al menos por el que más se le conoce: la axiomatización de la probabilidad.

En este sentido, construyó una teoría totalmente rigurosa basada en axiomas fundamentales. La construcción axiomática de la teoría de la probabilidad procede de las propiedades fundamentales de la probabilidad observada en ejemplos que ilustran las definiciones clásica y frecuencista. La definición axiomática las incluye como casos particulares, pero supera sus carencias. De esta manera, la probabilidad pudo desarrollarse como una teoría completamente lógica al mismo tiempo que permitió resolver los problemas aplicados a las ciencias modernas y la tecnología.

Los axiomas de Kolmogorov que definen la probabilidad sobre un espacio muestral Ω son los siguientes:

1) Para un suceso aleatorio *B* hay asociado un número no-negativo *P(B)* que se llama su probabilidad.
2) *P(Ω)*=1
3) Si los sucesos $B_1, B_2, ..., B_n$ son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces,
$$P(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n)$$

Del hecho que $\Omega = \phi \cup \Omega$ y el axioma 3, se deduce que $P(\Omega) = P(\phi) \cup P(\Omega)$, de lo cual se dedujeron los siguientes resultados:

a) $P(\phi) = 0$

b) $\forall B, P(B^c) = 1 - P(B)$, donde B^c representa el complemento del evento B.

c) $\forall B, 0 \leq P(B) \leq 1$

Entre otros resultados

De los tres axiomas fundamentales de Kolmogorov se deducen la mayoría de las propiedades fundamentales de la probabilidad que se conocen y utilizan hoy en día.

Luego, durante el Siglo XX el uso de las probabilidades adquirió especial relevancia, gracias a los descubrimientos científicos en el área de la física, debido especialmente al surgimiento de la mecánica cuántica y a la ruptura de muchas creencias tradicionales vinculadas al determinismo de la mecánica clásica. Un ejemplo de esto fue la formulación del principio de incertidumbre de Heisenberg en 1927, conocido así por su creador el físico alemán Werner K.Heisenberg (1901-1976). Este principio afirma que es imposible medir simultáneamente de forma precisa la posición y el momento lineal de una partícula. El principio de incertidumbre ejerció una profunda influencia en la física y en la filosofía del siglo XX; además, desempeñó un importante papel en el desarrollo de la mecánica cuántica y en el progreso del pensamiento filosófico moderno. Fue un gran cambio a nivel filosófico por cuanto supone dejar de imaginar las partículas ocupando una posición determinada en el espacio.

Este y otros descubrimientos no sólo demostraron que el comportamiento de la materia en el micro-espacio, que se suponía seguían patrones deterministas, sigue comportamientos aleatorios, sino que también permitieron modelar mediante estrategias probabilísticas. Esta situación, unida al desarrollo de otras disciplinas en las que la comprensión del azar ha tomado un importante auge, ha provocado que sea necesario desarrollar la comprensión de la disciplina desde los primeros años de la educación básica.

II. Repaso sobre los tópicos del III Ciclo

Tal como se citó previamente, el material que se presenta corresponde a una continuación de lo expuesto en la unidad didáctica del III Ciclo. No obstante, con el propósito de contribuir con los lectores que no han revisado dicho material, seguidamente se exponen algunos de los principios básicos que fueron allí analizados.

Experimentos aleatorios y deterministas

Para favorecer la enseñanza de la Probabilidad desde los primeros años, se requiere hacer la diferencia entre los eventos o situaciones aleatorias de las deterministas. Debido a que las leyes de probabilidad únicamente pueden ser aplicadas a situaciones aleatorias, la diferenciación se convierte en una etapa crucial del proceso de aprendizaje. Para ello, se deben requiere plantear situaciones que permitan que cada estudiante identifique las diferencias entre las situaciones aleatorias de las deterministas. Considere la siguiente actividad:

Actividad 1

Considere las siguientes situaciones y determine en cuál de ellas es posible determinar los resultados sin observar el experimento.

a) *Determinación del número de varones que nacerá en el Hospital de la Mujer en cada uno los días de la primera semana del año.*

b) *Se desea determinar la altura a la que se encuentra una bola de tenis que es soltada en un precipicio de 150 metros de altura a los dos, cuatro y cinco segundos después de que ha sido soltada; lo anterior bajo el supuesto que no hay resistencia del aire.*

Análisis de la Actividad 1

a) En relación con esta situación, primeramente hay que observar que no es predecible el número total de nacimientos por día. Además, según estudios demográficos se ha demostrado que, a nivel general, nacen aproximadamente 105 hombres por cada 100 mujeres. No obstante, esta relación se presenta para un número grande de nacimientos, no así para cuando el número de nacimientos es pequeño, tal como el que se produce diariamente en el Hospital de la Mujer.

   Por lo anterior, cualquier persona que pretenda determinar el número de varones que nacerá en cada uno de los días de la primera semana del mes de enero, deberá esperar a que ocurra el hecho y recolectar la información. De otra forma resultará una suposición.

b) Según lo establece la segunda ley de Newton: la suma de fuerzas es igual al producto entre la masa del cuerpo y la aceleración. Para este caso, al lanzar la pelota si no se considera el rozamiento de la pelota con el aire, desde un punto de vista físico, el experimento en cuestión es un ejemplo de movimiento de la caída libre que se cataloga como movimiento uniformemente acelerado. En los casos de caídas desde una altura de unos pocos metros, como este caso, ocurre que la aceleración instantánea debida únicamente a la gravedad es casi independiente de la masa del cuerpo, la cual coincide con la aceleración de la gravedad (g) que es aproximadamente -9,8 m/s^2. En estas situaciones la caída libre se puede modelar matemáticamente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \\ a = g \end{cases}$$

Donde *y*(*t*) representa la posición en el momento *t*, *v*(t) representa la velocidad en el momento *t*, a representa la aceleración, y_0, v_0 representan la posición inicial y la velocidad inicial respectivamente. Desde este punto de vista, debido a que la pelota se deja caer, su velocidad inicial es cero, es decir , $v_0 = 0$, además como la pelota se encuentra a 150 metros de altura, entonces , $y_0 = 150$, por esta razón, al dejar caer la pelota, su posición en el momento *t* (medido en segundos), se puede modelar aproximadamente por las siguiente ecuación:

$$y(t) = 150 + \tfrac{1}{2}(-9,8)t^2$$

Con lo cual, a los dos segundos de soltada es

$$y(2) = 150 + \tfrac{1}{2}(-9,8)2^2 = 130,4$$

A los cuatro segundos

$$y(4) = 150 + \tfrac{1}{2}(-9,8)4^2 = 71,6$$

A los seis segundos

$$y(6) = 150 + \tfrac{1}{2}(-9,8)6^2 = 27,5$$

Todos estos valores se encuentran en metros.

Como el lector puede notar en el experimento a) resulta imposible determinar con anticipación los resultados que se solicitan; mientras que el b) es posible modelarlo matemáticamente, por lo que se puede determinar los resultados sin necesidad de llevarlo a la práctica. En este sentido, se dice que el primer experimento es aleatorio, pues los resultados que se puedan obtener dependen del azar. Mientras que el segundo es determinista pues se puede modelar matemáticamente. En este sentido se pueden obtener las siguientes definiciones.

Experimento determinista

Una situación o experimento *determinista* es aquel cuyo resultado puede ser determinado sin ponerlo en práctica. Es decir es posible identificar las causas que lo generan.

Experimento aleatorio

En aquellas situaciones o experimentos para los cuales el resultado es impredecible a priori, es decir, se requiere llevar a cabo la experiencia para obtenerlo, se dice que este depende del azar y el experimento se denomina *aleatorio*.

Hay que tener claro no confundir aleatoriedad con alternabilidad de resultados. Por ejemplo, Cindy y Karla realizan un juego vinculado con el lanzamiento de una moneda, de modo que si el resultado es corona Cindy gana y si el resultado es escudo gana Karla. Después de jugar cinco veces Karla ha ganado en todas ellas, ¿significa esto que el resultado es predecible y por ello el experimento determinista?

La respuesta es negativa, ante el lanzamiento de una moneda que se supone está bien balanceada, las posibilidades son iguales de obtener escudo y corona; pero al ser el resultado de un lanzamiento aleatorio, es factible que al repetir el experimento pocas veces se presente un único resultado o una aparente tendencia a obtener mayoritariamente un resultado por encima de otro.

En general, si en todas las situaciones de la vida cotidiana se tuviera certeza de cómo, por qué y cuándo ocurren los fenómenos, de modo que por medio de un modelo matemático fuera posible conocer el resultado, entonces el azar no existiría y no tendría sentido hablar de probabilidad. Las probabilidades se refieren al grado de certeza que se puede tener de que una determinada situación aleatoria pueda ocurrir. Al trabajar con situaciones o experimentos aleatorios los análisis probabilísticos requieren que el estudiante pueda tener clara la diferencia entre los experimentos aleatorios y los deterministas.

Eventos simples y compuestos, espacio muestral

En el Ciclo diversificado, se debe dar un mayor nivel de formalidad de los diferentes conceptos con que se trabaja. Toda situación aleatoria, además de lo que se expuso anteriormente, de que su resultado no es previsible, se caracteriza también porque puede ser repetido indefinidamente en las mismas condiciones y todos los posibles resultados son conocidos previamente.

Para profundizar en estos temas, considere la siguiente actividad:

Actividad 2

Considere la diferencia absoluta de los resultados de lanzar dos dados numerados de uno a seis cada uno.

a) Determine todos los posibles resultados del experimento

b) Justifique ¿cuál resultado es más probable obtener un dos u obtener un cero?

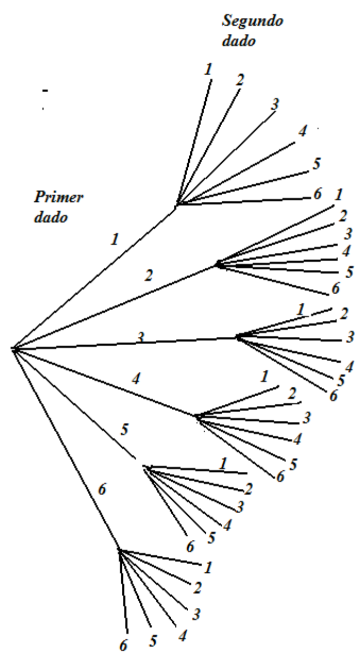
c) Describa los eventos obtener un número menor de 6 y obtener un siete.

Análisis de la Actividad 2

a) Para iniciar el análisis de esta actividad se requiere determinar el conjunto de posibles resultados que se obtiene al lanzar cada dado, el cual es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, debido a que son dos dados el número total de posibles resultados, expresados en pares ordenados, se resume en el siguiente cuadro:

Primer dado	Segundo dado					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Otra forma de representar los posibles resultados para experimentos similares al anterior, consiste en los diagramas de árbol, tal como se muestra a continuación:



Como se ha establecido, para efectos del presente problema, interesa determinar las diferencias absolutas entre los resultados de los dos dados. Estos valores se resumen en el siguiente cuadro:

Primer dado	Segundo dado					
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

b) Por lo anterior, debido a que los 36 resultados resumidos en los cuadros anteriores son igualmente posibles (equiprobables), y a que existen seis formas diferentes de obtener un cero y ocho formas diferentes de obtener un dos, entonces es más probable obtener un dos.

c) Del cuadro anterior, se obtiene que todas las diferencias absolutas son menores que seis, por lo que la obtención de un número menor de seis incluye todos posibles resultados del experimento.

Por otro lado, también se observa que no es posible obtener un siete de la diferencia absoluta entre los puntos obtenidos al lanzar dos dados.

Espacio muestral

Independiente del experimento que se realice, al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se le denomina *espacio muestral*. El espacio muestral puede ser finito o infinito. Un ejemplo de un espacio muestral infinito es el siguiente:

Suponga que se lanza una moneda repetidamente, el juego termina hasta que se obtenga un escudo. ¿Cuál es el espacio muestral?

Aunque en la práctica usted espera que el experimento termine en pocas repeticiones, desde un punto de vista teórico siempre existe una probabilidad de que el juego continúe ante la ausencia de un escudo. Por ello, los elementos del espacio muestral correspondiente pueden ser representados por: *e, ce, cce, ccce, cccce, ccccce*, …, observe que ello significa que el resultado de escudo puede obtenerse en el primer lanzamiento, en el segundo, en el tercero y así sucesivamente[1]. Normalmente se representa el espacio muestral con *S*.

Puntos muestrales

A un resultado particular del experimento aleatorio se le llama *punto muestral*, es decir, un punto muestral corresponde a un elemento del *espacio muestral*. Por ejemplo en lanzamiento de dos dados, cada par ordenado se considera un punto muestral. O si se observa en el diagrama de árbol anterior, cada rama corresponde a un punto muestral.

Eventos

Observe que en el ejemplo anterior, el obtener un cero u obtener un dos, así como cualquier otra relación que se quiera plantear, aglutinan varios puntos muestrales. A estos posibles resultados se les denomina *eventos* o *sucesos*. Los eventos pueden ser considerados como subconjuntos del espacio muestral. Normalmente se utilizan letras mayúsculas para representar los eventos (A, B, C, …)

Eventos simples y compuestos

Si un evento tiene más de un punto muestral se le llama *evento compuesto*, pero si sólo contiene un punto muestral se le llama *evento simple*. Por ejemplo, al lanzar dos dados y sumar los números obtenidos, el evento obtener un 12, es un evento simple

[1] Existe una probabilidad de 0,00098 de repetir el experimento 10 veces; $7{,}89\cdot 10^{-31}$ de que el experimento se deba repetir 100 veces; $9{,}33\cdot 10^{-302}$ de que el experimento deba repetirse 1000 veces, como puede notarse aunque la probabilidad tiende a ser muy remota, a medida que el número repeticiones la probabilidad disminuye pero sigue siendo un valor positivo, por ello el espacio muestral se considera infinito.

pues solamente hay una forma de obtener ese resultado (6,6), mientras que el obtener un cuatro es un evento compuesto pues hay tres formas de obtener ese resultado (2,2), (1,3) y (3,1).

Eventos más probables, menos probables e igualmente probables

En la actividad 2 se determinó que era más probable obtener un dos que obtener un cero. El criterio empleado para llegar a esta conclusión fue que para obtener un dos hay ocho puntos muestrales, mientras que para obtener un cero solamente hay seis puntos muestrales. Cuando los puntos muestrales son equiprobables, entonces se considera que es *más probable* aquel que tiene más puntos muestrales a su favor.

Cada docente debe tener presente que los términos *más probable* o *menos probable* forman parte del lenguaje común tanto de estudiantes como del resto de las personas. Generalmente se vinculan con los niveles de posibilidad de que un hecho ocurra o no; por esta razón se dice que es más probable que en un día de octubre llueva en la ciudad de San José que en la ciudad de Limón, debido a que en San José tradicionalmente llueve en este mes y, este hecho no ocurre con la misma regularidad en Limón. Estas creencias deben ser aprovechadas para potenciar el aprendizaje formal de los conceptos y su aplicación. Hay que tener presente que el supuesto que permite referirse a los conceptos *más probable o menos probable* de un hecho determinado, consiste en que el resultado de este hecho es aleatorio.

Eventos seguros, eventos imposibles y eventos mutuamente excluyentes

Del problema previo, se estableció que el evento de obtener un número menor de seis incluyó todos los puntos muestrales del espacio muestral. Cuando esto ocurre se denomina *evento seguro* o *evento cierto*, su ocurrencia está garantizada. El evento seguro normalmente se representa con el mismo símbolo empleado para el espacio muestral: *S*.

Por otro lado, el evento de obtener un siete no puede ocurrir tal como se definió el experimento. Cuando un evento no puede ocurrir, es decir no tiene puntos muestrales a su favor, se dice que es un *evento imposible*. Debido a que no contiene puntos muestrales, se acostumbra denotar al evento imposible con el símbolo ϕ.

Eventos mutuamente excluyentes

En el lenguaje cotidiano, se llaman *resultados excluyentes* aquellos que no pueden ocurrir a la vez. Esto también ocurre al relacionar eventos. Dos o más eventos son *mutuamente excluyentes* si no tienen puntos muestrales en común. Por ejemplo, en la actividad 2, si se consideran los eventos obtener un número par y obtener un número impar, ellos son mutuamente excluyentes.

Definición clásica o Laplaciana de probabilidad

Los resultados anteriores dejan entrever que la probabilidad de un evento está directamente vinculada con el número de puntos muestrales a su favor. Este conocimiento debe permitir al estudiante deducir el concepto de probabilidad, de modo que tal como se analizó en la parte histórica del documento, la definición clásica se establece entre la relación del número de puntos muestrales favorables entre el total de puntos muestrales.

Actividad 3

Tomando como referencia la Actividad 2, determine la relación entre el número de puntos muestrales a favor de cada posible resultado de la diferencia absoluta de los puntos obtenidos en los dados, entre el total de puntos muestrales del espacio muestral. Además represente gráficamente los resultados de modo que compare esta relación para cada uno de los posibles resultados.

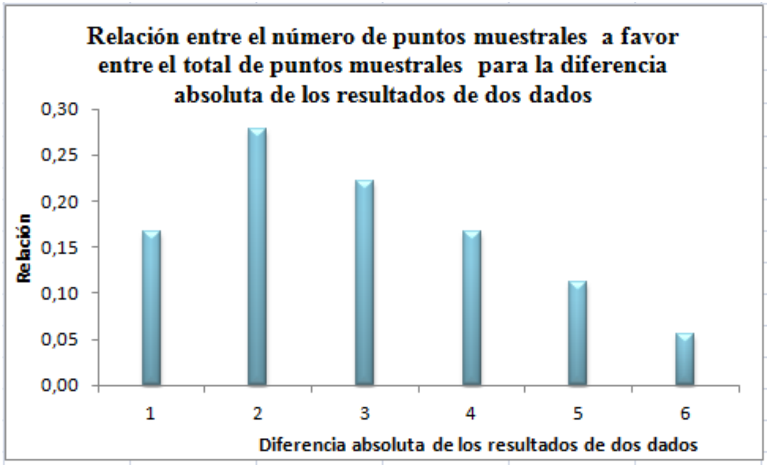
Análisis de la Actividad 3

De los resultados de la Actividad 2, se obtuvo que en total hay 36 puntos muestrales.

Con respecto a la diferencia absoluta de los números obtenidos para cada dado son: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Una forma simple de resolver el problema planteado consiste en elaborar una tabla como la siguiente:

Resultado de la diferencia	Puntos muestrales a favor	Relación	Relación aproximada
0	6	$\frac{6}{36}$	0,167
1	10	$\frac{10}{36}$	0,278
2	8	$\frac{8}{36}$	0,222
3	6	$\frac{6}{36}$	0,167
4	4	$\frac{4}{36}$	0,111
5	2	$\frac{2}{36}$	0,056
Total	**36**	**1**	1,000

Observe que la relación establecida, genera un valor que permite comparar probabilísticamente los resultados. Esta comparación se aprecia mejor en la siguiente gráfica.



Definición clásica o laplaciana de probabilidad

En el análisis de la Actividad 3, se determinó la relación entre el número de puntos muestrales a favor de un evento entre el total de puntos muestrales, como se estableció en el referente histórico, esta relación se conoce como la *probabilidad clásica* asociada al evento. Por la trascendencia que tuvo Laplace en el desarrollo de la disciplina a partir de este concepto, también se le llama *definición Laplaciana*. Hay que recordar que el supuesto básico de esta definición radica en que los puntos muestrales sean todos igualmente probables. En términos simbólicos, si un experimento genera el espacio muestral *S*, el cual contiene n puntos muestrales, de los cuales *k* puntos muestrales favorecen la ocurrencia de un evento *A*, entonces la probabilidad de *A*, denotada por *P*(*A*) viene dada por:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Otro resultado relevante que se generó de la Actividad 3, consiste en el uso de las probabilidades para modelar un fenómeno aleatorio. Tanto el cuadro como la gráfica obtenida, constituyen un modelo probabilístico para el experimento, y puede ser utilizado para una mejor interpretación del hecho descrito y para la toma de decisiones vinculadas con él.

Definición frecuencista de probabilidad y ley de los grandes números

Lo establecido hasta acá en materia de probabilidades está limitado al conocimiento del espacio muestral y de sus puntos muestrales; desafortunadamente eso no siempre ocurre, pues en muchas ocasiones el espacio muestral es muy grande, es indefinido o incluso es infinito. Para comprender estas situaciones analice la siguiente situación:

Actividad 4

a) *Nos presentamos a un supermercado a comprar un litro de aceite, y aunque el contenido del recipiente dice 1000 ml, tenemos la duda de si efectivamente estos recipientes contienen esta cantidad, por lo que estamos interesados en determinar la probabilidad que el recipiente tenga menos de un litro tal como dice la etiqueta. ¿Cómo se podría enfrentar este problema?*

b) Existe la creencia entre la población que en un embarazo cualquiera es igualmente probable que la criatura sea niño o niña; no obstante, los datos indican que en una población hay más mujeres que hombres. ¿Cómo comprobar si son igualmente probables?

c) Se ha afirmado que la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo es aproximadamente de un medio. ¿Cómo creen que ha sido posible estimar esta relación?

Análisis de la Actividad 4

En relación con las interrogantes, queda claro que es imposible conocer el espacio muestral, por ello se requiere un análisis particular para cada caso:

a) Ante la imposibilidad de analizar todos los recipientes con aceite que se producen, si se toma una muestra aleatoria de 50 de éstos y se mide su contenido se puede tener una aproximación de la probabilidad de que un recipiente contenga menos de un litro, por medio de la frecuencia relativa del subconjunto de la muestra que contiene menos de un litro de aceite.

b) Del mismo modo, para estimar la probabilidad de que nazca un niño como producto de un embarazo cualquiera, se puede tomar una muestra aleatoria de varios nacimientos y determinar la frecuencia relativa de nacimientos varones con respecto al total de nacimientos considerados.

c) Finalmente, haciendo un análisis de defunciones para las cuales se sabe que en vida la persona era fumadora y determinando la causa de la muerte, sería posible aproximar la probabilidad de que una persona fumadora muera por causa de una enfermedad vinculada con el fumado.

En resumen, las situaciones hipotéticas planteadas anteriormente muestran que no siempre es posible encontrar la probabilidad real de que ocurra un determinado evento. Ante esta situación, el cálculo de una aproximación de la probabilidad por medio de una muestra aleatoria es la mejor alternativa.

En ocasiones los puntos muestrales de un experimento no tienen la misma probabilidad. Como se mencionó anteriormente, cuando los puntos muestrales no son equiprobables no se puede utilizar la definición clásica. En estos casos se requiere determinar el peso relativo de cada evento.

Actividad 5

Al lanzar una tachuela existen dos eventos posibles:

A: que la tachuela caiga sobre su cabeza (con la punta hacia arriba)
B: que la tachuela caiga acostada

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Debido a que no se conoce con exactitud la probabilidad de que la tachuela caiga con la punta hacia arriba, proponga una estrategia que permita aproximar esta probabilidad.

Análisis de la Actividad 5

Se podría pensar que la probabilidad de ambos eventos es $\frac{1}{2}$ (un caso favorable entre dos posibles). Sin embargo, la forma irregular de la tachuela afecta el resultado de forma incierta, lo que hace dudar que los eventos tengan la misma posibilidad de ocurrir. Por lo que al dudar de una de las premisas de la definición clásica de probabilidad (eventos simples equiprobables), no se debería aplicar esta definición.

Entonces, ¿cómo se podría encontrar la probabilidad de que la tachuela caiga con la punta hacia arriba?

Esta situación presenta una dificultad adicional a la implementación de la definición clásica o laplaciana, ya que no todos los puntos muestrales son equiprobables o por lo menos no se está seguro de que esto ocurra.

Ante esta situación, se puede aproximar la probabilidad del evento A por medio de una muestra aleatoria, estrategia que se utilizó anteriormente y que también es válida para enfrentar el problema. Es decir se puede repetir el experimento una cantidad grande de veces y determinar la proporción de veces en que la tachuela cae con la punta hacia arriba. Evidentemente es apenas una aproximación, pues el valor encontrado podría estar muy lejos del valor real, entre más repeticiones se realicen mejor será la estimación. Por ejemplo, suponga que se lanza 100 veces de las cuales en 35 la tachuela cayó con la punta hacia arriba, entonces una aproximación de la probabilidad de este evento es $\frac{35}{100} = 0{,}35$.

Por ejemplo en el salón de clases se les puede pedir a los estudiantes que se reúnan en grupos, de modo que en cada grupo se repita el experimento 50 veces. Es de esperar que la frecuencia relativa de veces que cae la tachuela con la punta hacia arriba es diferente en cada grupo.

¿Cuál podría ser una forma de unificar los resultados de los grupos?
Para tener una mejor aproximación de la probabilidad que la tachuela caiga con la punta hacia arriba se puede obtener el promedio de las diferentes frecuencias relativas, teóricamente esta estrategia supone una estimación un poco más precisa.

Enfoque frecuencial o empírico de probabilidad

De acuerdo al fragmento histórico que se planteó al inicio, determinar la probabilidad de un evento como la frecuencia relativa de casos favorables entre el total de casos de una muestra aleatoria, viene a complementar la definición clásica, pues resuelve problemas que no pueden ser atendidos por ella.

El *enfoque frecuencial* o *empírico de probabilidad*, se resume formalmente a continuación:

Si se hace n número de observaciones de una misma clase, donde n es grande y se encuentra que el evento A ocurre en k ocasiones, entonces la probabilidad del evento A es aproximadamente $P(A) \approx \frac{k}{n}$.

Por lo tanto, con base en esta definición, se entiende como *probabilidad de ocurrencia* de un evento a un cierto valor, generalmente desconocido, al cual tienden las frecuencias relativas al aumentar el número de observaciones en que están basadas.

El concepto anteriormente definido resulta de gran utilidad para el análisis de diversas situaciones de la vida real. La siguiente actividad es un ejemplo concreto de esta situación.

Actividad 6

El problema del bajo peso al nacer en los niños tiene grandes repercusiones en su desarrollo, de acuerdo con algunos estudios el bajo peso al nacer está relacionado con el 60% de las muertes infantiles. Los bebés que nacen con peso bajo pueden tener graves problemas de salud durante los primeros meses de vida y su riesgo de sufrir incapacidades a largo plazo es mayor.

Diferentes estudios han demostrado que las madres que fuman cuando están embarazadas tienen una mayor probabilidad de tener hijos con bajo peso y por ende con mayor probabilidad de tener complicaciones de salud. Tomando como referente la información del artículo Factores de riesgo en el bajo peso al nacer, publicado en la Revista Cubana de Medicina General Integral, julio-septiembre, 1995; seguidamente se simuló un escenario basado en esta relación, para 1000 partos.

Relación entre fumar durante el embarazo y el bajo peso al nacer en los niños

	Bajo peso al nacer		**Total**
Madres	Sí	No	
Fumadoras	46	307	353
No fumadoras	39	608	647
Total	85	915	1000

Tomando como referente esta información, estime:

a) La probabilidad que una madre que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso.

b) La probabilidad que una madre no fumadora tenga un niño con bajo peso.

¿Cuántas veces más probable es que una mujer que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso respecto a una madre que no fumó en ese período?

Análisis de la Actividad 6

a) Debido a que se analizaron a 353 madres que fumaron durante el embarazo, de las cuales 46 tuvieron niños con bajo peso, la probabilidad que una madre que ha fumado durante el embarazo tenga un niño con bajo peso se puede estimar por $\frac{46}{353} \approx 0{,}130$. Por lo tanto, los datos indican que alrededor de 13 de cada 100 nacimientos de madres fumadoras tienen niños con bajo peso al nacer.

b) Utilizando el mismo análisis con las madres no fumadoras, se tiene que la probabilidad que una madre que no ha fumado durante el embarazo tenga un niño con bajo peso es $\frac{39}{647} \approx 0{,}060$, por lo que los datos indican que seis de cada 100 niños de madres que no fuman durante el embarazo tienen bajo peso.

c) La razón entre ambas probabilidades es $\frac{\frac{46}{353}}{\frac{39}{647}} \approx 2{,}16$. Esto significa que una madre que fuma durante el embarazo tiene aproximadamente dos veces más riesgo de tener un hijo con bajo peso que una madre que no ha fumado durante el embarazo.

Evidentemente los resultados acá aportados corresponden a una simulación sobre una situación que se ha observado en diferentes estudios, pero queda claro la importancia de utilizar este recurso para diversas investigaciones.

Al repetir dos veces un experimento para determinar la probabilidad de un evento por medio de la frecuencia relativa, posiblemente los resultados obtenidos sean diferentes, estas diferencias disminuyen a medida que la muestra aleatoria considerada sea cada vez más grande. Desarrolle la siguiente actividad.

Actividad 7

Tradicionalmente se ha creído que dentro de un parto simple es igualmente probable que nazca una niña o un niño. Suponga que en el período 2000-2010, en el cantón central de la provincia de Heredia se presentaron los siguientes datos respecto al sexo de los niños que nacieron.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	963	1102	959	988	988	978	925	939	958	951	944
Mujeres	969	988	924	1009	927	924	859	917	979	982	915
Total	1932	2090	1883	1997	1915	1902	1902	1784	1856	1937	1933

Fuente: Centro Centroamericano de Población, www.ccp.ucr.ac.cr

a. *Determine para cada uno de los años la probabilidad de que el producto de un parto cualquiera sea una niña.*

b. *Los datos anteriores ¿confirman o contradicen la creencia original de que la probabilidad de que nazca una niña es ½? Puede dibujar un gráfico de línea para visualizar mejor el patrón de variabilidad de los datos. Si los datos no apoyan dicha creencia, ¿cuál sería la mejor aproximación que usted puede dar para esta probabilidad?*

c. *Repita la experiencia de b. pero ahora los datos de todo el país, que se concluye:*

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	39 943	39 214	36 868	37 172	36 747	36 701	36 274	37 471	38 553	38 278	36 382
Mujeres	38 235	37 187	34 276	35 766	35 500	34 847	35 017	35 673	36 634	36 722	34 540
Total	78 178	76 401	71 144	72 938	72 247	71 548	71 291	73 144	75 187	75 000	70 922

Fuente: Centro Centroamericano de Población, www.ccp.ucr.ac.cr

d. *En la página Web del Centro Centroamericano de Población, entre los años 1972 y 2010 se tienen registrados en el país un total de 2 877 695 nacimientos, de los cuales 1 402 063 fueron mujeres. ¿A qué conclusión llega sobre la creencia de que es igualmente probable el nacimiento de una niña que de un niño?*

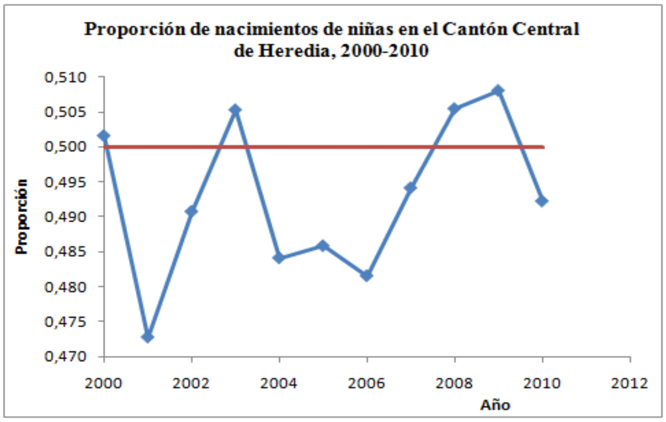
Análisis de la Actividad 7

a. Primeramente se requiere aplicar el enfoque frecuencial para aproximar la probabilidad de que haya nacido una niña en cada uno de los años

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Hombres	963	1102	959	988	988	978	925	939	958	951	944
Mujeres	969	988	924	1009	927	924	859	917	979	982	915
Total	1932	2090	1883	1997	1915	1902	1784	1856	1937	1933	1859
Probabilidad	0,502	0,473	0,491	0,505	0,484	0,486	0,482	0,494	0,505	0,508	0,492

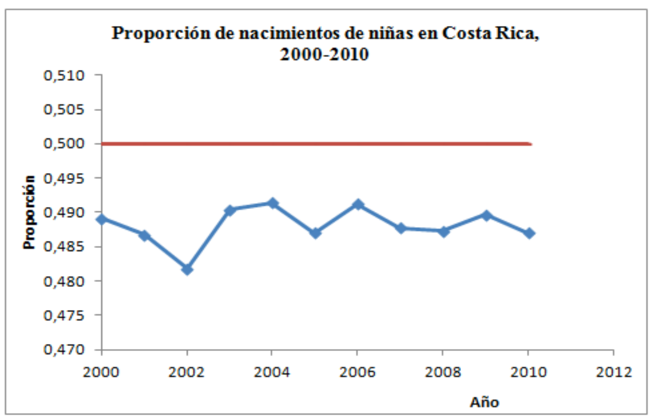
Observe que se obtuvo más valores menores de 0,50; no obstante, la gran variabilidad que presentan los datos no permite observar un patrón claro.

b. El patrón de variabilidad de los resultados obtenidos se puede apreciar mejor por medio de una gráfica lineal tal como se muestra:



Observe que se nota una tendencia en la probabilidad a ser menor a 0,50, lo que podría indicar que la creencia popular de que es igualmente probable que nazca una niña que un niño es falsa. Sin embargo, el patrón no es claro, lo que pensar que las muestras que se están utilizando no son suficientemente grandes.

c. Al repetir el análisis con los datos de Costa Rica, la gráfica resultante es:



Observe que el patrón ahora es más claro, pareciera evidenciarse que la creencia original es falsa, y que la probabilidad que nazca una niña es un valor ligeramente inferior a 0,49.

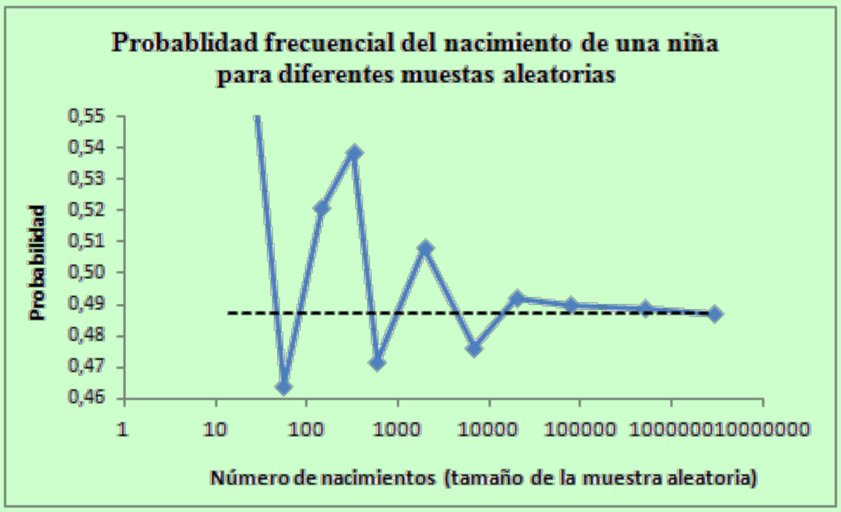
d. Al considerar la información de nacimientos en el país desde 1972 hasta el 2010, se tiene que la probabilidad estimada de que nazca una niña es aproximadamente 0,487, lo que tiende a corroborar lo que se ha venido indicando.

Desde un punto de vista demográfico, se ha determinado que aproximadamente, por cada 100 mujeres nacen 105 hombres, que corresponde a una relación similar a la obtenida previamente.

Ley de los grandes números

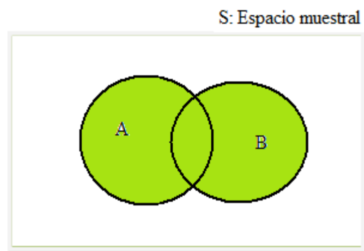
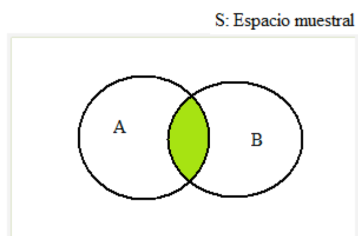
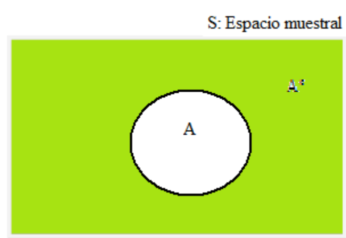
De acuerdo con lo observado en el ejemplo anterior y con lo discutido previamente, cuando se emplea el enfoque frecuencial para determinar la probabilidad de un evento *A*, las aproximaciones son muy variables para muestras relativamente pequeñas; pero, a medida que los tamaños de muestra se van haciendo cada vez más grandes, esta variabilidad disminuye radicalmente y la probabilidad del evento converge a un único valor. Este valor al cual converge dicha probabilidad se considera que es el valor real para *P*(*A*). Esta propiedad se conoce como *ley de los grandes números*, tal como se mencionó fue descubierta en primera instancia por Jacobo Bernoulli.

Desde un punto de vista intuitivo, cuando *n* tiende a *infinito*, la probabilidad empírica *P*(*A*) converge a un valor fijo *p*. Volviendo al ejemplo anterior, la ley de los grandes números, indica que entre más nacimientos se observen la probabilidad empírica de que nazca una niña converge a un único valor, tal como se muestra en la gráfica.



Operaciones con eventos

Como se mencionó previamente, los eventos pueden ser catalogados como subconjuntos vinculados con el espacio muestral, para los cuales los puntos muestrales constituyen sus elementos básicos. Por ello, se pueden definir operaciones con eventos, en el siguiente cuadro se resumen las operaciones más importantes.

Operación	Expresión	Descripción
Unión	$A \cup B$	Unión de eventos originales: es el evento que sucede cuando A sucede o B sucede o ambos suceden 
Intersección	$A \cap B$	Intersección de los eventos originales, es el evento que sucede si y sólo si A y B suceden simultáneamente. 
Complemento	A^c	El complemento del evento A es el evento que sucede cuando A no sucede 

III.Reglas y propiedades básicas de la probabilidad

De acuerdo con los resultados que se han obtenido hasta ahora, en relación con la construcción del concepto de probabilidad, se pueden deducir importantes propiedades o reglas que sustentan dicho concepto. Para una mejor ejemplificación considere las siguientes actividades:

Actividad 8

Vuelva a considerar la Actividad 4, resuelva cada una de los siguientes problemas

a. *Determine los puntos muestrales correspondientes a cada uno de los siguientes eventos, al lanzar dos dados y considerar la diferencia absoluta de los resultados de cada dado:*
   i. *A: Obtener un número mayor que tres*
   ii. *B: Obtener un uno?*
   iii. *C: Obtener un uno o un número mayor que tres*
   iv. *D: Obtener un siete*
   v. *E: Obtener un número menor de seis*

b. *Determine la probabilidad de cada uno de los eventos anteriores utilizando la definición clásica.*

Análisis de la Actividad 8

a. De acuerdo con los resultados obtenidos en la Actividad 4, al analizar el cuadro:

Primer dado	Segundo dado					
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Se tiene que en notación de conjuntos los eventos se pueden expresar por:

A = {(5,1), (6,1), (6,2), (1,5), (1,6), (2,6)}

B = {(2,1), (1,2), (3,2), (2,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5), (6,5), (5,6)},

C = {(5,1), (6,1), (6,2), (1,5), (1,6), (2,6) (2,1), (1,2), (3,2), (2,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5), (6,5), (5,6)}. Observe que $C = A \cup B$

$D = \phi$

$E = S$

b. Debido a que *A* tiene 6 puntos muestrales $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\approx 0{,}167.$

El evento *B* contiene 10 puntos muestrales $P(B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}\approx 0{,}278.$

El evento *C* contiene 16 puntos muestrales $P(C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}\approx 0{,}444.$

D no tiene puntos muestrales, es el evento imposible $P(D)=P(\phi)=\frac{0}{36}=0.$

Finalmente, E es el evento seguro, $P(E)=P(S)=\frac{36}{36}=1.$

Actividad 9

Considere la información contenida en el siguiente cuadro, la cual se obtuvo en la unidad didáctica de Estadística:

Número de años de experiencia en educación de una muestra aleatoria de 170 docentes de primaria encuestados en 1998.

Años de experiencia	Número de docentes	Porcentaje de docentes
De 0 a menos de 5 años	44	25,88
De 5 a menos de 10 años	63	37,06
De 10 a menos de 15 años	46	27,06
De 15 a menos de 20 años	16	9,41
De 20 a menos de 25 años	1	0,59
Total	**170**	**100,0**

Fuente: Fundación Omar Dengo, 1998

Suponga que se selecciona aleatoriamente uno de esos docentes, con base en la información del número de años de experiencia en labores docentes que se presenta en el cuadro, responda los interrogantes que se le plantean:

a. *Determine el número de puntos muestrales a favor de que el docente seleccionado:*
   i. *A: Tuviera 15 o más años de experiencia.*
   ii. *B: Tuviera menos de quince años de experiencia*
   iii. *C: Tuviera menos de 25 años de experiencia*
   iv. *D: Tuviera más de 10 pero menos de 15 años de experiencia*
   v. *E = B $\cup$ D*
   vi. *F: Tuviera al menos 30 años de experiencia*

b. *Determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos del punto a.*

c. *De acuerdo con los resultados de la Actividad 8 y de los puntos a. y b. anteriores, ¿a qué conclusiones se puede llegar respecto a las probabilidades desarrolladas?*

Análisis de la Actividad 9

a. Del cuadro anterior puede notarse que,

   i. El evento *A* contiene 17 docentes, es decir 17 puntos muestrales.

   ii. Del mismo modo el evento *B* contiene 153 puntos muestrales

   iii. Debido a que todos los docentes encuestados tenían menos de 25 años de experiencia, entonces el evento *C* es un evento seguro y contiene 170 puntos muestrales. Pero a la vez, $C = A \cup B$

   iv. Hay 46 docentes que cumplen lo requerido por el evento *D*, por lo que *D* tiene 46 puntos muestrales.

   v. Para determinar el número de puntos muestrales de $E = B \cup D$, se debe tener presente que *D* es un subconjunto de *B*, por lo que $B \cup D = B$, entonces los puntos muestrales de *E* son los mismo que los de *B* o sea 153.

   vi. Finalmente como ningún docente tenía al menos treinta años de experiencia (30 o más años), entonces *F* es un evento imposible y no tiene puntos muestrales a su favor.

b. Las probabilidades correspondientes son:

   i. $P(A) = \dfrac{17}{170} = 0{,}100$

   ii. $P(B) = \dfrac{153}{170} = 0{,}900$

   iii. $P(C) = \dfrac{170}{170} = 1$

   iv. $P(D) = \dfrac{46}{170} \approx 0{,}271$

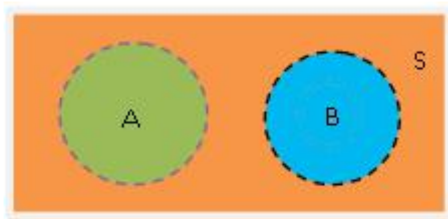
   v. $P(E) = P(B) = \dfrac{153}{170} = 0{,}900$

   vi. $P(F) = P(\phi) = \dfrac{0}{170} = 0$

c. De los resultados previos, tanto en la Actividad 8, como en las partes anteriores, se deduce que la probabilidad de un evento seguro es uno, mientras que la probabilidad de un evento imposible es cero. Esto queda claramente establecido, al analizar la forma en que se ha definido la probabilidad de un evento, tanto por el enfoque clásico como por el enfoque frecuencial o empírico. Un evento seguro incluye todos los puntos muestrales razón por la cual su relación de casos favorables entre el total de casos es uno. Por otro lado, un evento imposible, al no tener puntos muestrales, su probabilidad de ocurrencia es cero. De acuerdo con lo anterior, para cualquier otro evento su probabilidad será un valor entre cero y uno.

Por otro lado, en los dos problemas previos se determina que $C = A \cup B$, además se comprobó que $P(C) = P(A) + P(B)$, por lo que pareciera deducirse que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. No obstante, al observar el resultado obtenido en el punto v. del inciso b. anterior, se tiene que $E = B \cup D$, pero $P(E) \neq P(B) + P(D)$, es decir en este caso $P(B \cup D) \neq P(B) + P(D)$. Esto indica que se requiere analizar detenidamente los casos para identificar en qué momentos la relación podría estarse presentando.

En la Actividad 8, los eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes, también lo son en la Actividad 9. Mientras que en esta actividad B y D no son mutuamente excluyentes. Efectivamente, observe el diagrama de Venn siguiente:



Debido a que los eventos *A* y *B* no tienen puntos muestrales en común, entonces es claro que el evento $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Pero esta condición no se presenta, entonces el resultado no es válido, tal como quedó en evidencia en el inciso v, donde $P(B \cup D) = P(B)$.

Reglas básicas de probabilidad (Axiomas)

Si S es el espacio muestral de un experimento aleatorio con n puntos muestrales distintos, todos ellos igualmente probables ($n \neq 0$), entonces se tendrán las siguientes propiedades:

1) Para un evento cualquiera *A*, se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) $P(S) = 1$ y $P(\phi) = 0$.
3) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Observe que estas reglas corresponden, parcialmente, a la axiomatización que realizó Kolmogorov sobre el Cálculo de Probabilidades.

Nota: Observe que si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, es decir no tienen puntos muestrales en común, entonces el evento $A \cap B$ constituye el evento ϕ, es decir es un evento imposible.

De las reglas anteriores, se deducen otras propiedades de mucho valor práctico. Realice la siguiente actividad

Actividad 10

Considere la información de siguiente cuadro, que corresponde a la encuesta aplicada de 170 docentes de primaria.

Grado académico de una muestra aleatoria de 170 docentes de primaria encuestados en 1998, según su sexo.

Grado académico	Hombre	Mujeres	Total
Diplomado o Profesorado	6	9	15
Bachillerato	10	42	52
Licenciatura	6	67	73
Posgrado	3	23	26
Total	**25**	**141**	**166**[1]

Fuente: Fundación Omar Dengo, 1998

[1]Cuatro docentes no indicaron su grado académico

Suponga que se selecciona un docente aleatoriamente, y se determinan los eventos, A: el docente seleccionado es varón, B: el docente posee el grado de licenciatura, C: El docente posee el un grado académico de bachillerato o menos.

a. *Relacione $P(A \cup B)$ con $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$*

b. *Relacione $P(C \cup A)$ con $P(C)$, $P(A)$ y $P(C \cap A)$*

c. *Relacione $P(B^c)$ con $P(B)$*

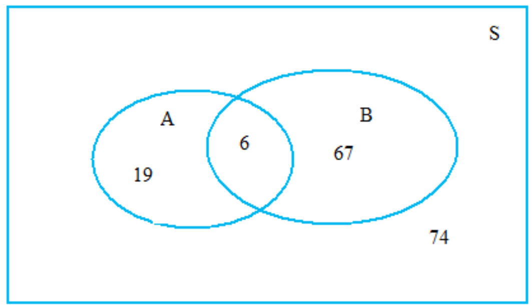
d. *Relacione $P(C \cup A)^c$ con $P(C \cup A)$*

e. *¿A qué conclusiones llega respecto a $P(A \cup B)$ y a $P(A^c)$ para cualesquiera eventos A y B.*

Análisis de la Actividad 10

a. De acuerdo con lo reportado en el cuadro de los 170 educadores a los que se les aplicó el cuestionario 166 indicaron cuál era su grado académico, por lo que el problema se debe resolver con 166 puntos muestrales. Por ello se tiene:

i. $A \cup B$ representa el evento para el cual el docente seleccionado es hombre o su grado académico es licenciatura. Esto se ejemplifica en el siguiente diagrama.

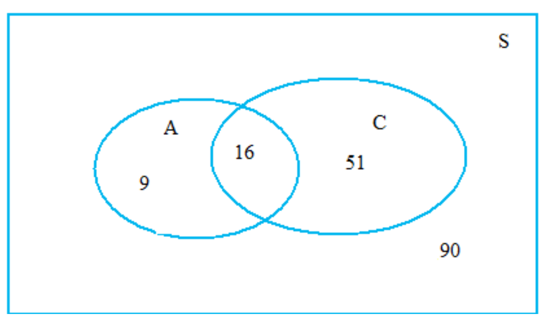


$$P(A\cup B)=\frac{92}{166}\approx 0,554 \qquad P(A)=\frac{25}{166}\approx 0,151 \qquad P(B)=\frac{73}{166}\approx 0,440$$
$$P(A\cap B)=\frac{6}{166}\approx 0,036.$$

Con estos valores se observa que para este caso:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ii. $C \cup A$ representa el evento para el cual el docente seleccionado tiene un grado académico de Bachillerato o menos, o es hombre. Esto se ejemplifica en el siguiente diagrama.

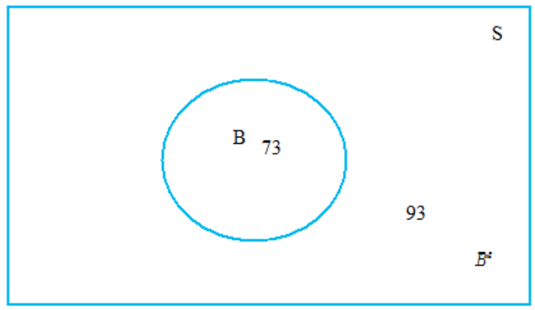


$$P(C\cup A)=\frac{76}{166}\approx 0,458 \qquad P(A)=\frac{25}{166}\approx 0,151 \qquad P(C)=\frac{67}{166}\approx 0,404$$
$$P(C\cap A)=\frac{16}{166}\approx 0,096.$$

Con estos valores se observa que para este caso:

$$P(C\cup A)=P(C)+P(A)-P(C\cap A)$$

iii. B^ces el evento que niega a *B*, es decir el docente seleccionado no posee una licenciatura. Esto se represente en el diagrama:



$$P\left(B^c\right)=\frac{93}{166}\approx 0,560\,,\ P(B)=\frac{73}{166}\approx 0,440\,.$$

Con esta información se puede ver que

$$P\left(B^c\right)+P(B)=1\Rightarrow P\left(B^c\right)=1-P(B)$$

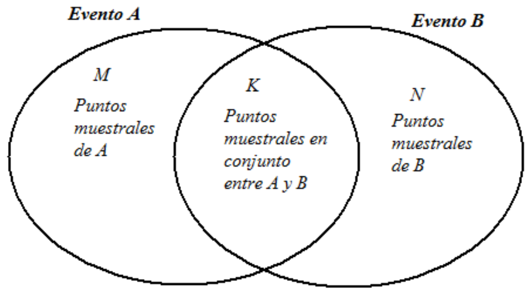
iv. $(C\cup A)^c$ es el evento que niega la ocurrencia de $C\cup A$, es decir significa que el docente seleccionado tiene licenciatura o posgrado y además es mujer. Por ello de acuerdo con el diagrama construido en *ii*. se tiene que:

$P(C\cup A)^c=\frac{90}{166}\approx 0,542$, además $P(C\cup A)=\frac{76}{166}\approx 0,458$,

$$P(C\cup A)^c+P(C\cup A)=1\Rightarrow P(C\cup A)^c=1-P(C\cup A)$$

v. Aunque el resultado anterior responde a un caso particular, importantes propiedades pueden deducirse de este análisis. Seguidamente se describen las principales:

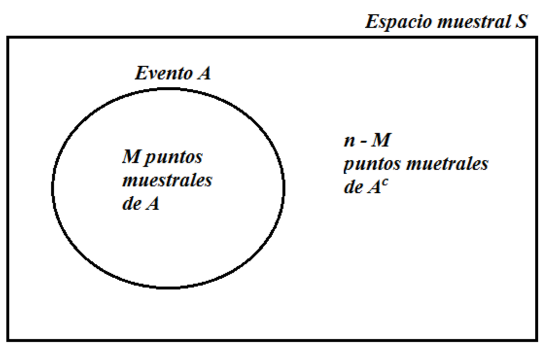
- Para eventos A y B de un espacio muestral *S* que tiene *n* puntos muestrales, A y B son eventos cualesquiera, es decir puede ocurrir que tengan puntos muestrales en común, entonces al sumar $P(A)+P(B)$ se ha sumado dos veces la probabilidad correspondiente a la intersección. Observe el siguiente esquema:



Observe que, de acuerdo con lo que se ha venido analizando, $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{M+K}}{\mathrm{n}}$ y $\mathrm{P(B)} = \frac{\mathrm{N+K}}{\mathrm{n}}$. Por otro lado: $\mathrm{P(A \cup B)} = \frac{\mathrm{M+K+N}}{\mathrm{n}}$ y $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{n}}$. Por lo tanto se puede establecer la siguiente relación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Finalmente, se tiene que la relación descrita entre *A* y A^c es válida en general, pues de acuerdo con la definición de A^c se tiene que $A \cup A^c = S$, tal como se muestra en el siguiente esquema:



Según el esquema, n – M representan los puntos muestrales a favor de A^c, por ello se tiene que $P(A^c) = \frac{n-M}{n}$, así $P(A^c) + P(A) = P(S) = 1$, con lo cual:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Propiedades adicionales de probabilidad

Las siguiente dos propiedades pueden ser deducidas fácilmente a partir de los tres axiomas anteriores:

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, para eventos *A* y *B* cualesquiera.
2) $P(A^c) = 1 - P(A)$, para cualquier evento *A*.

Bibliografía

A.H.E.P.E. (2002). Historia de la Probabilidad y de la Estadística. Recuperado de la página Web: http://www.ahepe.es/Documentos/IJornadas-Madrid2001/HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADISTICA I.PDF

Batanero, C. y Godino, J. (2012). Estocástica y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granas, España.

Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada, España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Chaves, E. y Hernández, L. (2011). Unidad Didáctica de Probabilidades: Materiales para el Tercer Ciclo. MEP, Formación Continua 2011.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Reidel Publishing Company. Boston, USA.

Gómez, M. (1999). Elementos de Estadística Descriptiva. San José, Costa Rica: EUNED.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1974). La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Presses Universitaires de France. Paris, Francia.

Lipschutz, S. & Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. México: McGraw-Hill.

Universidad Autónoma de Madrid (2012). Historia de la Probabilidad, recuperado de la página Web: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autor
Edwin Chaves Esquivel

Revisores
Jonathan Espinoza González

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2012). *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Probabilidades.* San José, Costa Rica: autor.