Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CRUSA Fundación para la cooperación

Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas

Números

2011

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las Matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar Matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en Matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Tercer Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar cuatro de las áreas que se proponen en los nuevos programas. En *Números* se deja de lado la visión conjuntista para dar paso al tratamiento del sentido numérico, el cálculo operacional y mental. *Geometría* que incluye tópicos relacionados a la visualización espacial, transformaciones geométricas y plano cartesiano. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora desde primaria. *Relaciones y Álgebra* como novedad introduce el trabajo con sucesiones y el tratamiento de la función lineal y la cuadrática. El área de *Medidas* se trabajará de forma transversal respecto a las otras áreas antes mencionadas. Estas cuatro unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Tercer Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes pilotos en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente,

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Números

Habilidad general

Conocer y aplicar algunos conceptos del área de *Números* en Tercer ciclo para el planteamiento y resolución de problemas en el aula.

Introducción

Algunos de los resultados de investigaciones señalan la necesidad de robustecer en el currículo un *sentido numérico*; esto refiere, por ejemplo, al uso de los números para representar situaciones o entidades de la realidad, a la estimación numérica de valores y de las operaciones aritméticas, a la "razonabilidad" de cálculos. Un sentido numérico permite ver que una suma como 10/11 + 12/13 se aproxima a 2 sin necesidad de hacer los cálculos. También está estrechamente asociado a operaciones y cálculos, es el que permite decidir sobre cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar un problema: cálculo mental, estimación aproximada, trabajo sistemático con papel y lápiz, el uso de calculadora o incluso la computadora.

Este material está dirigido a docentes de secundaria con el fin de analizar algunos tópicos de *Números* y poder construir actividades didácticas y problemas para esta área. Tomando en cuenta el enfoque de los recién aprobados programas de estudio en Matemáticas, se presentan actividades y definiciones de algunas de sus nociones básicas.

I. Sentido numérico

Actividad 1

Considere la información de la siguiente tabla

	Exportaciones totales de bienes y servicios (X) (en millones de dólares)	Importaciones totales de bienes y servicios (M) (en millones de dólares)	PIB total (en millones de dólares)	Índice de apertura $\frac{X+M}{PIB}$	Población	PIB per cápita (en dólares) $\frac{PIB}{Población}$
Guatemala	3909	7669	22 834		13 028 000	
El Salvador	4728	7328	15 298		6 762 000	
Honduras	3537	5380	7528		6 968 000	
Nicaragua	1507	2551	4770		5 532 000	
Costa Rica	10 914	10 642	21 081		4 399 000	
Panamá	10 910	10 508	15 474		3 287 000	

Fuente: Estado de la Región en Desarrollo Humano Sostenible, 2008

a. *¿Cuál de los seis países exportó en bienes y servicios más millones de dólares? ¿Cuánto representa esa cantidad en colones?*
b. *El Índice de apertura es el peso que tiene en la producción de un país el comercio internacional. Es decir, entre mayor sea este índice, la economía de ese país depende de otros países. Se calcula sumando las exportaciones y las importaciones y dividiendo el total entre el Producto Interno Bruto (PIB). Determine el índice de apertura para cada país y coloque el resultado en la quinta columna.*
c. *El PIB per cápita es el PIB dividido por su población y representa el valor promedio de los bienes y servicios producidos por persona en un país. Determine el PIB per cápita de cada país y colóquelo en la última columna.*

Análisis de la Actividad 1

El objetivo de la actividad es darle un significado a los números a través de ejemplos concretos. El ejemplo se pudo haber planteado solamente como la resolución de la operación:

$$\frac{10\,914 + 10\,642}{21\,081}$$

Sin embargo, plantear un problema donde cada uno de los números tiene un significado (exportaciones, importaciones, PIB, etc.) y con datos reales permite que las Matemáticas tengan sentido para los estudiantes.

Al rellenar la quinta columna del cuadro se puede realizar un análisis con los resultados. Por ejemplo, se pueden realizar preguntas como: ¿cuál país depende más (o depende menos) de la economía internacional?

	Exportaciones totales de bienes y servicios (X) (en millones de dólares)	Importaciones totales de bienes y servicios (M) (en millones de dólares)	PIB total (en millones de dólares)	Índice de apertura $\frac{X+M}{PIB}$	Población	PIB per cápita (en dólares) $\frac{PIB}{Población}$
Guatemala	3909	7669	22 834	0,5071	13 028 000	
El Salvador	4728	7328	15 298	0,7881	6 762 000	
Honduras	3537	5380	7528	1,1845	6 968 000	
Nicaragua	1507	2551	4770	0,8507	5 532 000	
Costa Rica	10 914	10 642	21 081	1,0225	4 399 000	
Panamá	10 910	10 508	15 474	1,3841	3 287 000	

Para completar la última columna se puede caer en el error de llenarla así:

	Exportaciones totales de bienes y servicios (X) (en millones de dólares)	Importaciones totales de bienes y servicios (M) (en millones de dólares)	PIB total (en millones de dólares)	Índice de apertura $\frac{\mathrm{X+M}}{\mathrm{PIB}}$	Población	PIB per cápita (en dólares) $\frac{\mathrm{PIB}}{\mathrm{Población}}$
Guatemala	3909	7669	22 834	0,5071	13 028 000	0,001452
El Salvador	4728	7328	15 298	0,7881	6 762 000	0,002262
Honduras	3537	5380	7528	1,1845	6 968 000	0,001080
Nicaragua	1 507	2551	4770	0,8507	5 532 000	0,000862
Costa Rica	10 914	10 642	21 081	1,0225	4 399 000	0,004792
Panamá	10 910	10 508	15 474	1,3841	3 287 000	0,004707

El error está en tomar como referencia los datos absolutos dados y en dividir las cantidades de la cuarta y sexta columna. Sin embargo, los datos de la cuarta columna están dados en millones de dólares, por lo que lo correcto es:

	Exportaciones totales de bienes y servicios (X) (en millones de dólares)	Importaciones totales de bienes y servicios (M) (en millones de dólares)	PIB total (en millones de dólares)	Índice de apertura $\frac{X+M}{PIB}$	Población	PIB per cápita (en dólares) $\frac{PIB}{Población}$
Guatemala	3909	7669	22834	0,5071	13 028 000	1 752, 68
El Salvador	4728	7328	15298	0,7881	6 762 000	2 262,34
Honduras	3537	5380	7528	1,1845	6 968 000	1 080,36
Nicaragua	1507	2551	4770	0,8507	5 532 000	862,25
Costa Rica	10 914	10 642	21 081	1,0225	4 399 000	4792, 22
Panamá	10 910	10 508	15 474	1,3841	3 287 000	4707,63

De igual forma los resultados se pueden aprovechar para el análisis de la situación de Costa Rica con respecto a los otros países del istmo centroamericano.

II. Teoría de números

Actividad 2

Analizar los divisores del número 120.

Análisis de la Actividad 2

En este caso, la actividad pretende retomar los conceptos de teoría de números vistos en la educación primaria y darles un nivel mayor de profundidad.

Es importante que tal vez por medio del uso de la *pregunta dirigida* se repasen estos conceptos.

El docente (**D**) puede dirigir un diálogo con sus estudiantes de la siguiente forma:

D: ¿Qué números dividen al 120 y por qué?

Daniel: Dos profe, ya que es un número par.

D: Correcto. ¿Dicho número tiene más divisores?

Eunice: Sí, el tres, dado que sus cifras suman un número que es múltiplo de tres. También el cinco pues termina en cero.

D: ¿Este número es múltiplo de 10?

Ana: Sí, porque $12 \cdot 10 = 120$.

El docente escribe lo siguiente:

a. $120 = 12 \cdot 10$
b. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
c. $120 = 12 \cdot 2 \cdot 5$

D: ¿Cuál de las representaciones anteriores corresponde a la descomposición en factores primos del número 120?

Enrique: La opción b, ya que las otras contienen cantidades que no corresponden a números primos.

Otra alternativa metodológica consistiría en que el docente pueda dejar que sus estudiantes trabajen de forma independiente, individualmente o en subgrupos y determinar todas las posibles características de dicho número. Luego, se realizaría una etapa de discusión de las características observadas (quizás mediante el uso de preguntas como las utilizadas en la propuesta con pregunta dirigida), con la cual, posteriormente, se puede hacer el cierre o la clausura de la lección repasando los siguientes conocimientos:

Divisibilidad, factor y múltiplo de un número

Decimos que un número entero a es un factor de b, o bien a es divisor de b (b es divisible por a) o b es múltiplo de a si el residuo de la división euclídea de b entre a es cero. Se suele expresar de la forma $a|b$, que se lee a divide a b; o a es divisor de b, o también b es múltiplo de a.

Nótese que al decir que a|b, se afirma que b = a·k, k número entero. Por ejemplo, 3|21, ya que $21 = 3 \cdot 7$; pero 21 no es divisible por 8, pues no existe un entero c tal que $21 = 8 \cdot c$. Es decir, el residuo de la división euclídea de 21 entre 8 no es cero.

Criterios de Divisibilidad

- Un número natural es divisible por 2 si es par. O bien, si la última cifra del número es 0, 2, 4, 6, 8.

- Un número natural es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo:

1371 es divisible por 3 ya que 1+3+7+1 = 12 y este número es múltiplo de 3

- Un número natural es divisible por 5 si la última cifra del número es 0 o 5.

- Un número natural es divisible por 7 si al restar el doble de las unidades al número que queda suprimiendo la cifra de las unidades, el resultado es un múltiplo de 7. Por ejemplo:

203 es divisible por 7 pues 2·3 = 6 y 20 – 6 = 14 y este es múltiplo de 7.

- Un número es divisible por 11 si la suma de los dígitos de las posiciones pares menos la suma de los dígitos de las posiciones impares es un múltiplo de 11. Por ejemplo, 1325171903 es divisible por 11 pues

3+9+7+5+3 = 27 y 0+1+1+2+1 = 5 y 27 – 5 = 22 es múltiplo de 11.

Números primos y compuestos

Un número natural p > 1 se llama primo si sus únicos divisores positivos son 1 y p, en caso contrario se denomina número compuesto. De esta forma, se tiene que

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

son los números primos menores que 60. El resto de números mayores que 1 y menores que 60 se pueden escribir como productos de estos, por lo que son compuestos.

Descomposición prima de un número natural

Todo número entero positivo mayor que 1 se puede descomponer en factores primos, es decir $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, donde $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ son números primos. A continuación, se presentan las descomposiciones de algunos números naturales:

36 = 2·2·3·3 o bien 36= 22·32
120 = 2·2·2·3·5 o bien 120 = 23·3·5

Un poco de historia

La fascinación por el estudio de los números primos ha existido desde tiempos antiguos. Desde entonces varios matemáticos han propuesto fórmulas que calculan números primos (no todas válidas para ciertos valores), teoremas que hacen uso de ellos y hasta conjeturas que permiten avanzar en su estudio. Como lo describen Barrantes, Días, Murillo y Soto (1998):

> En la Escuela Pitagórica el número era concebido como un elemento natural que formaba parte del universo. La contribución más importante de dicha escuela fue la distinción entre números primos y números compuestos. Eratóstenes (II a.C.) describe un método llamado "criba" para reconocer si un número es primo. Schosten (siglo XVIII), utilizando el mismo método, publicó una tabla hasta el 10 000, y otros publicaron tablas hasta 1 020 000.
>
> Una de las primeras y más frecuentes preguntas que se hace al introducir el tema es si existe una fórmula para determinar números primos. No existe pero muchos matemáticos aficionados y profesionales han ensayado con diferentes expresiones para determinar una fórmula para números primos. Por ejemplo, Leonard Euler (siglo XVIII) tenía que el polinomio n2+n+41 siempre da primo para números enteros del cero al 40; o bien Mersenne que afirmó en 1664 que 2p – 1es primo si p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257 y para ningún primo p < 258.
>
> Los primos poseen propiedades interesantes como que todo entero mayor que 2 se puede escribir como producto de primos, que da la idea de que los números primos son la "esencia" de los naturales.
>
> Existen muchas conjeturas acerca de los números primos. Una de las más famosas es la conjetura de Goldbach que dice:
>
> Todo número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos primos.
>
> Esta conjetura está aún sin resolver. A principios del siglo XX, el matemático ruso I. Vinogradov demostró que todo impar mayor que uno se puede escribir como la suma de tres primos; curiosamente la demostración usa variables complejas.

Actividad 3

Alicia va al club cada dos días, Carlos va cada tres, Daniel cada cuatro y Luis cada cinco días. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la próxima vez que vuelvan a reunirse?

Análisis de la Actividad 3

En este tipo de problemas es importante asignar el tiempo necesario para que se pueda explorar de una forma intuitiva y utilizar conocimientos previos. Por ejemplo, se podría hacer una simulación de la situación con el objetivo de ver si hay algún patrón que pueda servir para encontrar la solución.

No necesariamente se debe resolver el problema mediante un procedimiento deductivo, puede ser inductivo; por esto es importante utilizar diferentes esquemas, dibujos, materiales concretos, etc. Una idea es pensar que se vieron cualquier día de la semana, por ejemplo lunes, y hacer un esquema por semanas, como el siguiente:

Semana 1	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Alicia	X		X		X		X
Carlos	X			X			X
Daniel	X				X		
Luis	X					X	

Semana 2	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Alicia		X		X		X	
Carlos			X			X	
Daniel		X				X	
Luis				X			

Es claro que con este procedimiento tardará mucho en encontrar la solución. Sin embargo, lo realizado evidencia ciertas características del problema. Por ejemplo:

Coincidencias	**Cantidad de días transcurridos**	**Observación**
Alicia y Daniel	4	4 es múltiplo de 2 y 4
Alicia y Carlos	6	6 es múltiplo de 2 y 3
Alicia y Daniel	8	8 es múltiplo de 2 y 4
Alicia, Carlos y Daniel	12	12 es múltiplo de 2, 3 y 4.

De lo anterior, se puede especular que al menos dos personas suelen coincidir en días que corresponden a un múltiplo *común* a los periodos en que suelen asistir a dicho lugar. Así se puede pensar que el problema se resuelve si obtenemos un múltiplo común a 2, 3, 4, 5 días. Sin embargo, como se requiere determinar el día más próximo en que se van a reunir, dicho múltiplo debe corresponder al *mínimo* que se puede establecer entre ellos.

Se necesita una cantidad de días donde todos coincidan, es decir se requiere un número de días que sea divisible por 2, 3, 4 y 5.

Finalmente, durante la etapa de clausura se formalizaría la siguiente noción:

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de dos números naturales a y b, es el menor número natural c que es múltiplo de ambos. Se denota por m.c.m.

A continuación se expone el algoritmo tradicional para su obtención, tomando como referencia la situación anterior*:*

2	3	4	5	2
1	3	2	5	2
	3	1	5	3
	1		5	5
			1	__
				60

Así, deberían pasar 60 días para que vuelvan a reunirse. Problemas en los cuales se usa esta noción como estrategia de solución se mencionan a continuación:

a. Un camionero viaja a Caldera cada 18 días, otro va cada 15 días y un tercero va cada 8 días. Hoy 10 de enero han coincidido en Caldera los tres viajantes. ¿Cuál es la fecha más cercana en qué volverán a coincidir en dicho lugar?

b. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. A las 9 am los tres relojes han coincidido en dar la señal. ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

c. Tres avisos luminosos encienden sus luces así: el primero cada 6 segundos, el segundo cada 9 segundos y el tercero cada 15 segundos. A las 7 de una noche se encienden simultáneamente los tres avisos. ¿Cuántas veces coinciden encendidos los avisos en los 9 minutos siguientes?

d. Rosa tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de cubos rojos, quiere conseguir que las dos columnas sean iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?

Actividad 4

Damaris y Johan tienen 25 lentejuelas blancas, 15 azules y 90 rojas. Ellos quieren hacer el mayor número de collares de forma tal que se utilice igual cantidad de abalorios para cada color y sin que sobre ninguna lentejuela.

a. ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
b. ¿Qué número de lentejuelas de cada color tendrá cada collar?

Análisis de la actividad 4

Al igual que la actividad anterior, se debe dar espacio para explorar el problema de una forma intuitiva y con ello vislumbrar algunas características importantes que permitan encaminar su resolución.

Si se desea confeccionar 2 collares con las condiciones establecidas, se tiene que:

25 lentejuelas blancas	15 lentejuelas azules	90 lentejuelas rojas
Se ocupan 12 para cada uno.	Se ocupan 7 para cada uno.	Se ocupan 45 para cada uno.
Sobra una lentejuela	Sobra una lentejuela	No sobran lentejuelas

Dado que sobran lentejuelas, dicha opción se descarta. De igual forma no se podrían confeccionar 3 collares. Observe:

25 lentejuelas blancas	15 lentejuelas azules	90 lentejuelas rojas
Se ocupan 8 para cada uno.	Se ocupan 5 para cada uno.	Se ocupan 30 para cada uno.
Sobra una lentejuela	No sobran lentejuelas	No sobran lentejuelas

Lo anterior evidencia que al no sobrar lentejuelas se debe buscar confeccionar una cantidad de collares que sea *divisor* de cada uno de los grupos establecidos por color. Con lo cual se puede concluir que 5 collares es la mejor opción, dado que:

25 lentejuelas blancas	15 lentejuelas azules	90 lentejuelas rojas
Se ocupan 5 para cada uno.	Se ocupan 3 para cada uno.	Se ocupan 18 para cada uno.
No sobran lentejuelas	No sobran lentejuelas	No sobran lentejuelas

Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos números a y b es el mayor número entero c que divide a ambos números. Se denota por m.c.d.

A continuación se expone el algoritmo tradicional para su obtención, tomando como referencia la situación anterior:

$$\begin{array}{ccc|c} 25 & 15 & 90 & 5 \\ 5 & 3 & 18 & \end{array}$$

Así, se pueden confeccionar 5 collares, utilizando 5 lentejuelas blancas, 3 azules y 18 rojas.

A continuación, se mencionan algunos problemas que son característicos de la aplicación de esta noción para establecer su solución.

a. Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

b. Juan tiene que poner un rodapié de madera a dos paredes de 12 m y 9 m de longitud. Para ello ha averiguado la longitud del mayor listón de madera que cabe en un número exacto de veces en cada pared. ¿Cuál será la longitud de este listón?

III. Números enteros negativos

Actividad 5

Determine el resultado de las siguientes operaciones:

6 – 11

11 – 40

Análisis de la Actividad 5

El estudiante es posible que tenga arraigada la creencia de que dichas operaciones son irrealizables, pues la resta al asociarse con la noción de “quitar” no da sentido a que a 6 se le quite 11. Es importante que el docente deje latente la inquietud en el estudiante de que los resultados de dichas operaciones pueden ser representadas por un nuevo tipo de número y así allanar el camino para la inserción de los *números enteros negativos*.

Actividad 6

Se propone conjuntamente la resolución de los siguientes problemas:

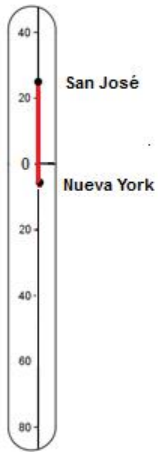
i. *El yak es un animal que habita en las montañas del Tibet a unos 5000 metros sobre el nivel del mar y el cachalote vive 5 900 metros más abajo. Determine la altura aproximada en la que suele vivir este último.*

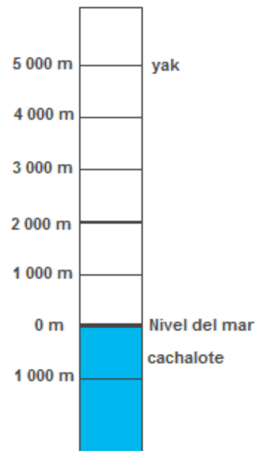
ii. *La temperatura promedio en la ciudad de San José es de 25° C. Durante el invierno, ciudades como Nueva York pueden experimentar hasta 30° C menos. Describa a qué temperatura puede estar dicha ciudad.*

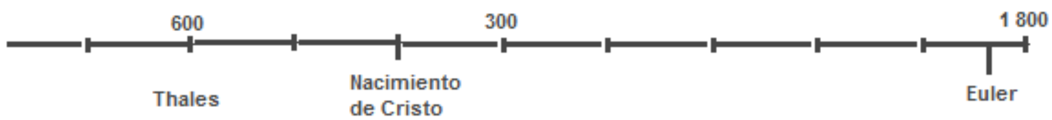
iii. *Leonard Euler (1707-1783) ha sido uno de los matemáticos más productivos en la historia y 23 siglos aproximadamente antes que él nace Thales de Mileto, el cual es considerado el primer matemático en preocuparse por la demostración de las propiedades de las figuras geométricas. ¿En qué siglo nació aproximadamente Thales de Mileto?*

Análisis de la Actividad 6

Este tipo de actividad es una buena oportunidad para introducir los números enteros negativos usando problemas contextualizados. Se espera que el estudiante esté familiarizado intuitivamente con términos que suelen mencionarse frecuentemente en las noticias o en el estudio de otras áreas como Estudios Sociales y Ciencias para establecer estrategias de resolución. Por ejemplo: temperaturas bajo cero, años antes de Cristo, alturas sobre el nivel del mar y bajo el nivel del mar y situaciones de deudas y ganancias, entre otros. En este caso serán importantes las formas de representación gráfica de las respuestas obtenidas para su comprensión.







Para i. el cachalote estaría a una profundidad de 900 m.

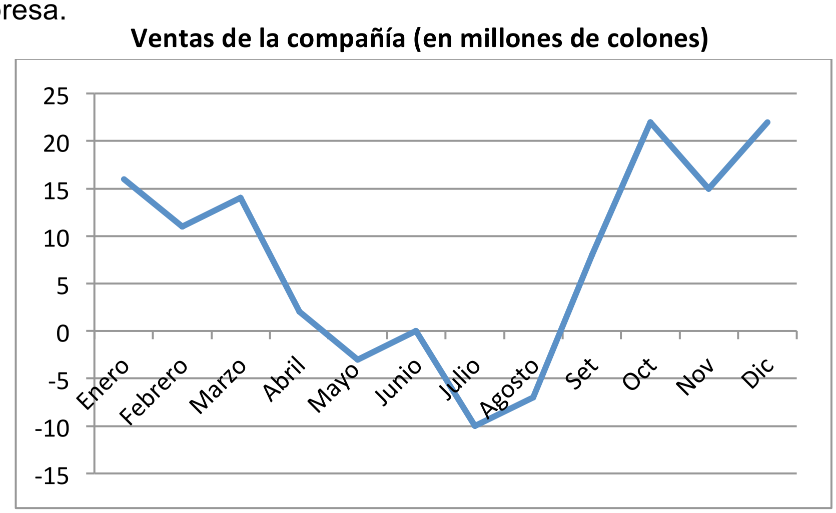
En el caso de ii, se puede observar que Nueva York tendría una temperatura de hasta 5°C bajo cero.

Finalmente, Thales de Mileto nació aproximadamente en el siglo VI antes de Cristo.

Nota: El docente se debe apoyar en las respuestas que dan los estudiantes para formalizarar la existencia y representación de los números enteros negativos, así como otros contextos donde suelen ser usados.

Posteriormente se pueden plantear problemas donde ya se haga uso de la notación de número negativo para la interpretación de información. Por ejemplo:

En el siguiente cuadro aparecen las ganancias o pérdidas en cada mes en el año 2011 de una empresa.



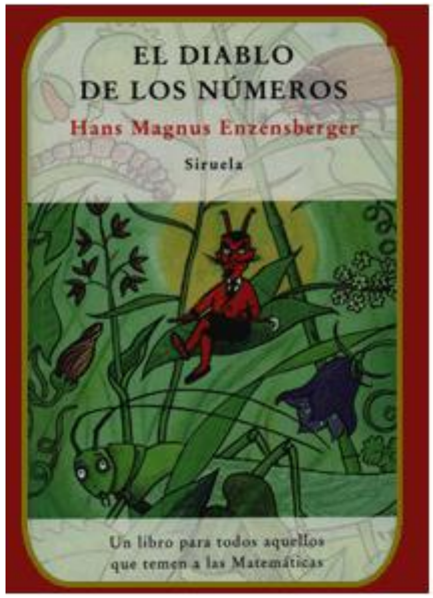
a. ¿En qué meses la empresa tuvo pérdidas?
b. ¿En qué meses la empresa tuvo ganancias?
c. ¿En qué meses no hubo ni ganancias ni perdidas?
d. ¿Cuál es la ganancia total en los primeros seis meses?
e. ¿Cuál es la ganancia total en el segundo semestre?
f. ¿Cuál fue la situación de la empresa en los meses de mayo, junio, julio y agosto?

A través de esta actividad, aparte del análisis de la gráfica que se debe realizar, se puede trabajar contextualizadamente el concepto de número negativo y operaciones con los números enteros. Precisamente este tipo de actividades son las que buscan que sea el estudiante el que deduzca un concepto nuevo, en este caso la operatoria con los números enteros y que posteriormente sea el docente el que formalice dicho conocimiento.

IV. Números racionales

Actividad 7

Lea el siguiente extracto de libro El Diablo de los números" escrito por Hans Magnus Enzensberger.



Capítulo 4

La cuarta noche

(…)

El diablo de los números alzó su bastón, y ante los ojos de Robert apareció una nueva calculadora. No era tan ranujienta como la anterior, pero a cambio era gigantesca: un mueble acolchado y peludo, tan largo como una cama o un sofá. A un costado había una tablita con muchas teclas acolchadas, y el campo en el que se podían ver las luminosas cifras llenaba todo el respaldo del extraño aparato.

-Bueno, teclea uno entre tres -ordenó el anciano.

1 : 3

(…) En la interminable ventanita apareció la solución, en letras verde claro:

0,3333333333333333333

-¿Es que no termina nunca? -preguntó Robert.

-Sí -dijo el diablo de los números-. Termina donde termina la calculadora.

-¿Y luego qué?

-Luego sigue. Sólo que no puedes leerlo.

-Pero siempre sale lo mismo, un tres tras otro. ¡Es como un tobogán!

-En eso tienes razón.

-Bah -murmuró Robert-. ¡Es demasiado tonto! Para eso yo escribo simplemente un tercio. Así:

$\frac{1}{3}$

Y me quedo tan tranquilo.

-Muy bien -dijo el anciano.

(…) Sólo me gustaría saber de dónde salen todos esos treses.

Es así: el primer tres que hay detrás de la coma son tres décimas. Luego viene el segundo tres, que hace tres centésimas; el tercero, tres milésimas, etc. Puedes sumarlo todo:

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003
...

¿Comprendido? ¿Sí? Entonces intenta todo el tiempo multiplicar por tres: el primer tres, es decir las tres décimas, luego las tres centésimas, etc.

-No hay problema -dijo Robert-. Puedo hacerlo incluso de cabeza:

$$
\begin{aligned}
0{,}3 \times 3 &= 0{,}9\\
0{,}03 \times 3 &= 0{,}09\\
0{,}003 \times 3 &= 0{,}009\\
0{,}0003 \times 3 &= 0{,}0009
\end{aligned}
$$

Bueno, etcétera.

-Bien. Y si sumas todos los nueves otra vez, ¿qué ocurre?

-¡Un momento! 0,9 más 0,09 son 0,99; más 0,009, 0,999. Cada vez más nueves. Parece seguir eternamente así.

-Parece. Pero, si lo piensas bien, verás que no es cierto. Si sumas los tres tercios, tendría que salir 1, ¿no? Porque un tercio por tres da un entero. Eso está claro. ¿Entonces?

-Ni idea -dijo Robert-. Falta algo. 0,999 es casi uno, pero no del todo.

(…) El anciano rió maliciosamente, levantó su bastón, lo esgrimió en el aire, y en un abrir y cerrar de ojos todo el cielo se llenó de una larga, larguísima serpiente de nueves que ascendía más y más hacia lo alto.

-Basta -exclamó Robert-. ¡Se marea uno!

-Sólo chasquear los dedos, y habrán desaparecido. Pero sólo si admites que esta serpiente de nueves detrás del cero, si sigue y sigue creciendo, es exactamente igual a uno.

(…)-¡Jamás! -dijo-. No importa cuánto sigas con tu serpiente, siempre faltará algo: el último nueve.

-¡No hay un último nueve! -gritó el diablo de los números.

(…)-Está bien -dijo Robert-. Me rindo. Pero sólo si nos quitas de encima esta serpiente de números.

-Eso está mejor.

Trabajosamente, el anciano alzó su bastón, que ya estaba cubierto de nueves, murmuró en voz baja algo incomprensible... y el mundo estuvo libre de la culebra.

-¡Uf! -exclamó Robert-. ¿Esto ocurre sólo con los treses y los nueves? ¿O también los otros números forman esas repugnantes serpientes?

-Hay tantas serpientes interminables como arena a la orilla del mar, querido. (…)

-Pero algunas de tus cifras detrás de la coma se comportan de forma muy peculiar. ¿Quieres que te enseñe cómo?

-¡Claro! Siempre que no llenes toda la playa de esas asquerosas serpientes.

-Tranquilo. Tu gran calculadora lo hará. Sólo tienes que pulsar: siete entre once.

No hizo falta que se lo repitieran.

7:11=0,636363636363636…

-¡Qué está pasando! -exclamó-. Siempre 63, y 63 y otra vez 63. Es probable que continúe así para siempre.

-Sin duda; pero esto aún no es nada. ¡Prueba con seis entre siete!

Robert tecleó:

6:7=0,857 142857 142857…

-¡Siempre vuelven a aparecer las mismas cifras! -exclamó-: 857 142, y vuelta a empezar. ¡El número gira en círculos!

Sí, son unas criaturas fantásticas, los números. ¿Sabes?, en el fondo no hay números normales. Cada uno de ellos tiene sus propios rasgos, sus propios secretos. Nunca acaba uno de conocerlos. La serpiente de nueves tras el cero y la coma, por ejemplo, que no termina nunca y sin embargo ejs prácticamente lo mismo que un simple uno.

Con base en la lectura conteste

a. *¿Es 0,999999999…=1?*
b. *Demuestre que 3×0,333333…= 1*

Análisis de la actividad 7

La historia anterior refleja por un lado cómo puede ser dirigida una situación de aula donde se intenta explorar la naturaleza de los números racionales y la periodicidad de su representación por medio de expansión decimal. Sin embargo, también enfatiza de forma indirecta la importancia que tienen las diferentes formas de representar números racionales para justificar algunas percepciones erróneas que se tienen acerca de ellos.

Con respecto a la primera pregunta, la lectura deja en claro que sí debe asumirse la igualdad. Sin embargo, se puede establecer una conexión con el área *Relaciones y Álgebra* para justificarlo matemáticamente. Denotemos con x el número racional 0,99999…., o sea:

$$x = 0{,}9999999\ldots$$

Multiplicando por 10 ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene que

$$10x = 9{,}999999\ldots$$

Si se restan miembro a miembro las igualdades anteriores, se obtiene

$$10x - x = 9{,}9999999\ldots - 0{,}9999999\ldots$$

$$9x = 9$$

con lo que $x = 1$.

La pregunta *b* es otra forma de hacer referencia a la pregunta *a*, sólo que aquí basta con tener claro que $0,33333... = \frac{1}{3}$ y resolver la operación

$$\frac{1}{3}.3 = \frac{3}{3} = 1$$

Se debe procurar que el estudiante resuelva divisiones sin el uso de la calculadora para enfatizar cómo es que se obtienen las representaciones decimales de los números racionales.

Las diferentes representaciones de un número racional deben valorarse en función del contexto en que se utilicen, lo cual se pone en evidencia con el desarrollo de la próxima actividad.

Se debe considerar formas de representación que simplifiquen ese comportamiento infinito periódico de los números racionales. Por ejemplo:

$$\frac{13}{9} = 1,4444... = 1,\overline{4}$$

Actividad 8

Ana lee una receta que le envió una amiga para hacer un pastel. Ana manifiesta que no comprende la forma en que su amiga le envió la información pues no está descrita en la forma tradicional en que suele hacerse. A continuación se describe dicha receta:

- *2 huevos.*
- $\frac{7}{2}$ *tazas de harina.*
- $\frac{3}{2}$ *tazas de azúcar.*
- *0,25 kg de mantequilla.*
- $\frac{5}{2}$ *de cucharada de polvo de hornear.*
- *0,25 tazas de leche*
- *Rayadura de naranja.*

¿De qué forma se puede ayudar a Ana para que comprenda los datos de la receta?

Análisis de la actividad 8

El contexto de esta situación amerita que la forma de representación más adecuada guarde concordancia con el instrumento que se utiliza para hacer la medición. A continuación se propone la forma de reescribir la información para que Ana comprenda el sentido de las mediciones que debe realizar:

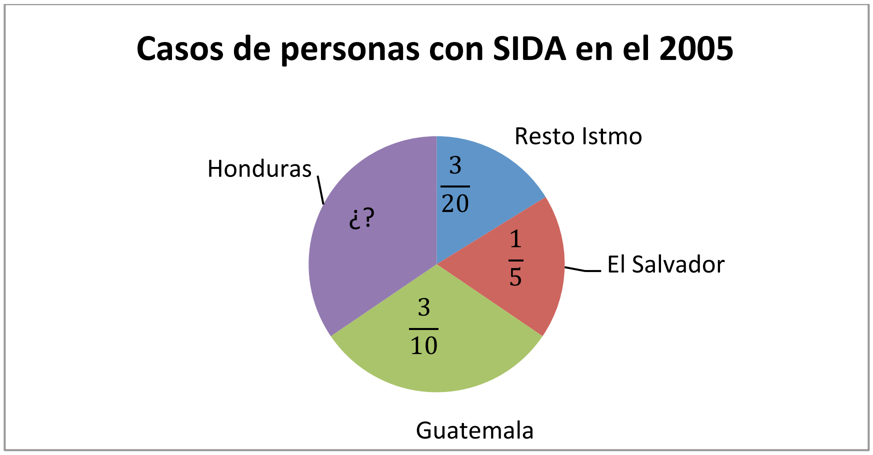
- *2 huevos.*
- 3 *tazas* y *½ de harina.*
- *1 taza* y *½ de azúcar.*
- *¼ de barra de mantequilla.*
- *2 cucharadas y ½ de polvo de hornear.*
- *¼ taza de leche.*
- *Rayadura de naranja.*

Se destaca que cuando se deben medir ingredientes que correspondan a cantidades mayores que la unidad, se recomienda el uso de notación mixta y si dichas cantidades son menores que la unidad, entonces utilizar la notación fraccionaria.

Los problemas siguientes buscan trabajar con números racionales en cualquiera de sus representaciones y que el trabajo operatorio de los mismos sea natural para el estudiante.

a. De Heredia Centro a la Basílica de Cartago hay aproximadamente 36,7 Km. Si una persona camina sin detenerse un promedio de 5, 4 Km por hora, ¿cuánto tiempo duraría en realizar determinado trayecto?

b. De acuerdo con la figura, ¿qué proporción representa la cantidad de personas con SIDA en Honduras? ¿Se podría garantizar que El Salvador y Guatemala tienen el 50% de los casos de SIDA del Istmo Centroamericano? Si en total había 196 700 personas con SIDA en Centroamérica en el año 2005, ¿cuántas personas estaban infectadas en Guatemala?



Un poco de historia

Desde hace miles de años, civilizaciones antiguas realizaron procedimientos numéricos que involucraban el uso de fracciones. Implementaron su propia simbología, evolucionando hasta la forma actual de representación fraccionaria. El siguiente extracto resume lo especificado anteriormente:

> En el Antiguo Egipto ya se calculaba utilizando fracciones cuyos denominadores son enteros positivos. Cualquier fracción que escribimos con un numerador no unitario, los egipcios la escribían como suma de fracciones unitarias distintas, de ahí que las sumas de fracciones unitarias se conozcan como fracción egipcia. Además, se puede demostrar que cualquier número racional positivo se puede escribir como fracción griega.
>
> El jeroglífico de una boca abierta () denotaba la barra de fracción (/), y un arte numérico escrito debajo de la "boca abierta" denotaba el denominador de la fracción.
>
> Los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron sobre todo las fracciones con numerador igual a 1. En la escritura, la fracción la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido, y debajo, o al lado, ponían el denominador; el numerador no se ponía por ser siempre 1.
>
> Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval.
>
> En el siglo XIII Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones.
>
> Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional

V. Números irracionales

Actividad 9

Observe los siguientes números:

1,21739130434782608669565…

2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823764648042953118023287825098194558153017567173613320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920868058257492796…

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892…

Caracterice estos números, determinando semejanzas y diferencias entre ellos.

Análisis de la Actividad 9

Esta actividad tiene por objeto comenzar a establecer la existencia de números irracionales mediante la exploración de su notación decimal. Es claro que después de una minuciosa revisión de las cifras de los tres números anteriores se puede destacar una característica común a ellas y es que su expansión decimal es infinita. Con respecto a las diferencias se puede observar que los dos últimos números tienen la particularidad de que su expansión decimal no manifiesta periodo alguno, contrario al primero en el que sí es identificable.

Los docentes no tendrán dificultad en notar que el segundo y el tercer número son aproximaciones de e y π respectivamente. Es probable que si esta actividad es desarrollada por el estudiante, quizás reconozca el número π.

Los números irracionales e y π son números trascendentales o trascendentes, es decir, no son solución de una ecuación con coeficientes enteros o racionales.

En el contexto estudiantil es importante que la actividad promueva la identificación de números que son racionales y los que no lo son, apoyados en la experiencia que éstos han adquirido en 8° Año en el tratamiento de los primeros.

Es importante que al identificar el primer número de esta actividad como racional, hay que tener presente que se puede expresar como el cociente de dos números enteros. Se puede cuestionar si los otros dos números pueden ser expresados de esa forma.

Se puede señalar como nota curiosa para ser investigada el hecho de que existen más números irracionales que racionales.

Esta actividad puede servir como una oportunidad para introducir los números irracionales por medio del componente histórico.

Todo lo anterior permite sentar una base para que se pueda formalizar con los estudiantes el concepto de número irracional y sus diversas formas de representación.

Nota: Previamente es importante discutir con los estudiantes cómo el nacimiento de nuevos tipos de números obedece a la necesidad del hombre por representar y modelar situaciones que no se ajustan a la realidad o las formas de representación numérica existentes.

Un poco de historia

Para la introducción de los números irracionales se puede hacer referencia a momentos históricos y situaciones particulares, como por ejemplo:

- Hipaso de Metaponto (500 a.C.) se cree que fue el primero en descubrir la existencia de números irracionales, en un momento en el que los pitagóricos pensaban que los números racionales podían describir toda la geometría del mundo. Al descubrir que $\sqrt{2}$ es un número irracional Hipaso de Metaponto habría roto la regla de silencio de los pitagóricos revelando en el mundo la existencia de estos nuevos números, hecho que según algunos generó su expulsión de la Escuela Pitagórica y su condena a muerte.

- Hubo numerosos intentos fallidos en la antigüedad por expresar la razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro como una medida racional, que terminaron en 1767 cuando el matemático alemán Johann H. Lambert (1728 - 1777) determina la irracionalidad del número π.
  Desde el año 1650 a.C. se calculó que $\pi = \frac{64}{81} = 3{,}1604938271604\ldots$ y en el año 2010 gracias a las computadoras, se han podido calcular 5 000 000 000 000 de decimales.

- Un número que aparece en la naturaleza, en el arte y el diseño, el denominado número áureo, es representado con la letra griega fi en honor a Fidias (490-431 a.C.), escultor griego de la antigüedad, quien lo tuvo presente en sus obras.

  Este número ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749\ldots$) se puede usar en la conexión entre las matemáticas y otras disciplinas. Por ejemplo, el Partenón de Grecia está inscrito en un rectángulo áureo.

Fuente: http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/razon-oro.html

Número irracional

Un número irracional es un número que no se puede escribir como el cociente indicado de dos números enteros (una fracción). Ejemplo: π es un número irracional. Su valor aproximado es

3,14159265358979323846264338327950…

La expansión decimal no sigue ningún patrón, por lo que se dice que este tipo de números tiene expansión decimal infinita no periódica.

Números irracionales famosos

- Pi es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos:

  3,14159265358979323846264338327950…

- El número e (el número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de e sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son:

  2,7182818284590452353602874713527…

- La razón de oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son:

  1,61803398874989484820...

Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son irracionales. Ejemplos:

$\sqrt{3}$=1,7320508075688772935274463415059…

$\sqrt{99}$ = 9,9498743710661995473447982100121…

Pero $\sqrt{4}$= 2, y $\sqrt{9}$ = 3, así que no todas las raíces son irracionales.

Actividad 10

Demostrar que $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

Análisis de la Actividad 10

Este tipo de actividad debe servir como un elemento que permite fomentar procesos de argumentación matemática. Por otra parte, el incluir elementos de teoría de números permite establecer conexiones con otros temas matemáticos. Esta demostración se realizará por contradicción, la cual se encuentra en *Elementos* de Euclides, el texto con un mayor número de ediciones publicadas después de la biblia. Cabe destacar que existen otras demostraciones de índole geométrica y analítica para esta misma situación.

Supóngase que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

donde el máximo común divisor de p y de q es 1. Elevando al cuadrado a ambos miembros, se tiene

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

De lo anterior, p^2 es múltiplo de 2, por lo que p es múltiplo de 2 y puede ser expresado de la forma

$p = 2k,$ k entero

Luego,

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Con lo cual, q^2 es múltiplo de 2 y q es múltiplo de 2. Así, p y q son múltiplos de 2, lo que contradice nuestra suposición inicial.

Por lo tanto, $\sqrt{2}$ tiene que ser irracional.

Nota: Esta demostración clásica permite trabajar algunos elementos de la lógica, tales como el significado de la demostración por contradicción, donde se parte de un supuesto verdadero hasta llegar a una proposición que contradice dicho supuesto, así como los métodos de inducción y deducción. Además se utilizan conceptos básicos de teoría de números.

Actividad 11

Determine entre qué par de números naturales se encuentra el número $\sqrt{33}$.

Análisis de la Actividad 11

Este problema tiene por objeto hacer uso de la estimación para realizar aproximaciones de raíces cuadradas y se espera que el mismo se pueda generalizar para los casos de raíces cúbicas, cuartas, etc. Aquí sería muy fácil hacer uso de la calculadora, pero no se debe perder de vista que la estimación es una habilidad muy importante que se debe ejercitar constantemente para facilitar la resolución de ciertos ejercicios, por lo que esta actividad constituye una oportunidad para ello.

Se pueden retomar elementos trabajados por el estudiante en años anteriores. Por ejemplo, la relación que existe entre las potencias y las raíces.

$$7^3 = 343 \leftrightarrow \sqrt[3]{343} = 7$$

De ese modo, se puede recurrir a la noción de potencia para ir realizando aproximaciones

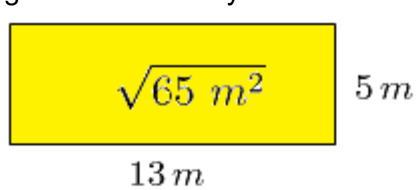
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
			25 < 33 < 36 con lo que $\sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36}$	

O sea, $\sqrt{33}$ se ubica entre 5 y 6.

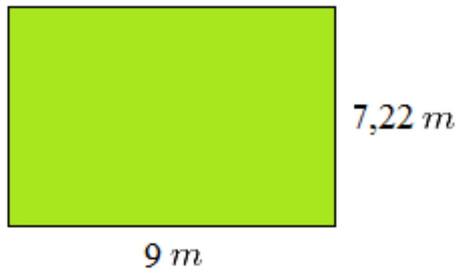
Como detalle complementario es interesante exponer el método utilizado por los babilonios para aproximar una raíz cuadrada.

Por ejemplo: Aproximar el número $\sqrt{65}$.

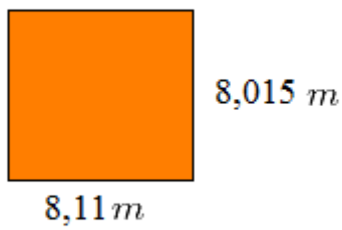
1. Escoja dos números cuya multiplicación dé 65. Por ejemplo: 5 y 13.
2. Se construye un rectángulo con lados 5 y 13 metros cada uno.



3. Se saca el promedio entre 5 y 13, que es 9. Este número será la medida de uno de los lados de un nuevo rectángulo. Para encontrar la medida del otro lado dividimos 65 entre 9, lo que es aproximadamente 7,22 (con 2 decimales). Por lo tanto el nuevo rectángulo tendrá medidas 7,22 por 9 metros cada lado. Esto quiere decir que $7,22 < \sqrt{65} < 9$.



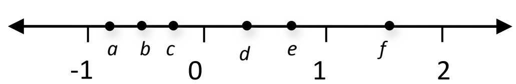
4. Repetimos el procedimiento anterior: promedio entre 7,22 y 9, aproximadamente 8,11 y 65 dividido por 8,11, aproximadamente 8,015. El rectángulo con lados 8,11 y 8,015 metros es aproximadamente un cuadrado, y $8,015 < \sqrt{65} < 8,11$



5. Continuar el procedimiento para obtener una mejor aproximación.

Actividad 12

Dadas las coordenadas a, b, c, d, e, y f como se muestra en la figura:



i. *¿Cuál es el punto más próximo de a·b?*
ii. *¿y de 1/d?*
iii. *¿y de f/2?*
iv. *¿Quién es mayor e o |a|?*

Análisis de la Actividad 12

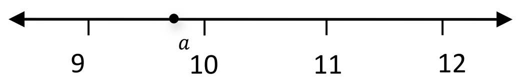
Aunque esta actividad se puede resolver con relativa facilidad sustituyendo por valores aproximados los números representados, se debe pensar en la justificación de las conclusiones por medio de argumentos que hagan referencia al uso de las propiedades de los números.

Por ejemplo, en el caso de la pregunta *i*, se pueden considerar propiedades como el signo de *a·b, y* si la magnitud de *a·b* es menor o mayor que la de *b* para concluir que el valor más cercano a dicha expresión es *d.* En el caso de *ii*, se puede aprovechar que al ser *d* un valor ubicado entre 0 y 1, 1/d representa una cantidad mayor que uno (inclusive mayor que 2), por lo que *f* es el valor más cercano.

En *iii,* basta determinar en la representación gráfica el punto medio entre 0 y *f,* con lo que *e* es el valor más próximo. En *iv* se aplica la noción de valor absoluto para concluir que *a* está a una mayor distancia que *e* con respecto al cero. Así que |*a*| > *e.*

Al finalizar la actividad anterior, es importante que el estudiante pueda usar no solo la estimación sino también las propiedades de los números como una forma de desarrollar procesos de argumentación. A continuación se proponen algunos ejemplos adicionales:

a) Observe la siguiente representación de un número *a*:

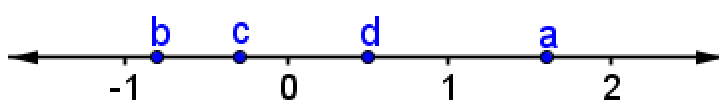


Un posible valor de a es

( ) $\sqrt{10}$ ( ) $\sqrt{101}$ ( ) $\sqrt{95}$ ( ) $\sqrt{80}$

b) En la representación gráfica que se adjunta a continuación responda falso o verdadero según corresponda. Argumente sus respuestas.

I. *b.c < d*
II. |*c – 1*| > *a*
III. $\frac{1}{d} > a$
IV. *-5c < a*
V. *cd > c*



VI. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de la propuesta de nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema para iniciar la lección.
2. Trabajo estudiantil independiente
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para 7° Año:

Conocimiento	Habilidad específica
Algoritmo de la división	Aplicar el algoritmo de la división en la resolución de problemas.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema, el docente debe tener claro qué quiere lograr con él. Se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

- ✓ Investigar patrones o regularidades en sucesiones.
- ✓ Calcular potencias cuya base y exponente corresponden a números naturales.
- ✓ Realizar divisiones.

Es importante que durante el planeamiento y desarrollo de una actividad de esta índole se consideren aspectos como los siguientes:

a. El docente no debe sugerir la respuesta al estudiante; más bien su rol debe ir orientado a promover la discusión por medio de *buenas preguntas* para que el estudiante pueda avanzar.
b. El docente debe planificar las posibles etapas en las que podría desarrollarse la actividad, procurando anticipar las posibles estrategias que un estudiante realizaría (buenas o malas) para estar preparados sobre cómo el docente debe reaccionar y actuar ante ellas.

Problema

¿Cuál es la última cifra del número 2^{2011}?

Trabajo estudiantil independiente

Se espera que los estudiantes lean el problema hasta comprender su alcance y que realicen comentarios sobre su grado de dificultad. Es probable que se intente determinar dicha cifra por medio del uso de la calculadora. Al ver que ella no puede determinar dicho número, se verán en la obligación de explorar otras estrategias.

El estudiante comenzará a realizar los primeros intentos de cálculo:

Potencia	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Cifra de las unidades	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

Se espera además que observe la existencia de un patrón reconocible en la cifra de las unidades de las potencias calculadas, donde se repiten las cifras 2, 4, 8, y 6 en forma periódica.

Potencia	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Cifra de las unidades	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

Esto debe llevar al estudiante de forma natural a implementar una estrategia en donde se necesite la noción de agrupamiento para establecer cuáles potencias quedan al margen de las agrupaciones realizadas e identificar fácilmente a partir de las potencias sobrantes la última cifra de 2^{2011}.

Se debe ir conduciendo al estudiante por medio de preguntas generadoras a la realización de la división como la estrategia que permite dar solución al problema. Por ejemplo, aunque el estudiante identifique el patrón, puede ser que se le dificulte utilizar la división. En este caso, el docente puede intervenir planteándole otras situaciones del pasado que sirvan de conexión con la noción de división de números naturales, situaciones como *hacer grupos, repartir, entre otros.* De este modo, se procede a realizar la división:

$$\begin{array}{r|l} 2011 & \underline{\;4\;} \\ \underline{20} & 502 \\ 011 & \\ \underline{8} & \\ 3 & \end{array}$$

Al obtener residuo 3, se da la siguiente situación:

Potencia	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^{2005}	2^{2006}	2^{2007}	2^{2008}	2^{2009}	2^{2010}	2^{2011}
Cifra de las unidades	2	4	8	6	...	2	4	8	6	2	4	8
										Residuo 3		

Con lo cual la última cifra de las unidades de la potencia 2^{2011} es 8.

Cabe la posibilidad de que el estudiante sea consciente de realizar la división, pero efectúa los cálculos con calculadora, obteniendo como resultado 502,75. Se pueden dar dos escenarios: que el estudiante no sepa cómo interpretar ese 0,75 por lo que no le quedaría alternativa más que realizar dicho proceso a mano, o bien los que tienen un sentido numérico más desarrollado pueden asociar 0,75 con ¾ y de ese modo, en el bloque de cuatro dígitos, la posición que corresponde a ¾ es 8.

Discusión interactiva y comunicativa

Aquí se entabla la discusión de los resultados obtenidos por los diversos grupos por medio de una exposición, así como las dificultades encontradas y los caminos explorados. Se hace una retroalimentación cruzada entre profesores y estudiantes. Así, por ejemplo, se pueden discutir aspectos relacionados con las limitaciones que presentó la calculadora durante el proceso de resolución del problema, o bien valorar las ventajas que ofrece la exploración inicial del problema, desarrollando intentos iniciales que permiten vislumbrar las características ocultas que él encierra.

Es importante en esta etapa que los estudiantes activen los procesos *Argumentar* y *Comunicar* mediante la exposición de sus respuestas y las heurísticas empleadas durante su desarrollo, para que los demás compañeros evalúen su pertinencia.

Clausura o cierre

Aunque el estudiante reconoce desde primaria el algoritmo de la división, no lo concibe dentro de su relevancia para el desarrollo de la teoría de números en ámbitos superiores.

Dados n y b números enteros positivos, existen únicos enteros q y r con $0 \leq r < b$ tal que

$$n = qb+r.$$

En la notación anterior, n corresponde al dividendo, b al divisor, q es el cociente y r es el residuo.

El algoritmo de la división es importante porque constituye una herramienta para el desarrollo de la teoría de números. Por ejemplo, este algoritmo permite implementar otro método para la obtención del máximo común divisor, que se expone a continuación:

Ejemplo: Determine el m.c.d de los números 24 750 y 5280.

Solución: De la manera tradicional, se puede obtener el m.c.d por medio de los factores presentes en cada uno de los números:

24750	5280	2
12 375	2640	3
4125	880	5
825	176	11
75	16	
		m.c.d = 330

Por otra parte, usando el otro método, se dividen ambas cantidades utilizando el algoritmo de la división, con lo cual se obtiene:

24 750 = **5 280** ·4 + **3 630**

Luego, se realiza la división sucesiva del divisor y el residuo que se va obteniendo hasta que el residuo sea cero:

5280 ⌊ 3630 3630 1 1 650	5280=**3 630**·1 + **1650**
3630 ⌊ 1650 3300 2 330	3630 = **1650**·2 + **330**
1650 ⌊ 330 1650 5 0	1650 = 330·5 + 0

El residuo anterior a cero corresponde al m.c.d.

Bibliografía

Barrantes, H., Díaz, P., Murillo, M. y Soto, A. (1998). *Introducción a la teoría de números*. San José: EUNED

Enzensberger, H. (1998). *El diablo de los números.* Madrid: Ediciones Siruela.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* [Traducción de José María y Jesús Casado]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática “THALES”.

Número racional. Recuperado el 22 de agosto de 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional

Números irracionales. (s.f.). Recuperado el 22 de agosto de 2011, de http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html.

Lecturas recomendadas

Flores, F. (2008). Historia y didáctica de los números racionales e irracionales. Recuperado el 24 de agosto del 2011 de http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Francisco_Luis_Flores_Gil_-_Historia_y_Didactica_de_los_Numeros_Racionales_e_Irracionales.pdf

Godino, J., Font, V., Konic, P y Wilhelmi, M.(2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. Recuperado el 22 de agosto de 2011 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sentido_numerico.pdf

Torres, C. Números enteros: Origen e Historia. Recuperado el 24 de agosto del 2001 de http://personales.ya.com/casanchi/mat/enteros01.pdf

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas, que forma parte del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores
Miguel González Ortega
Ricardo Poveda Vásquez

Revisor
Ricardo Poveda Vásquez

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública (2011). *Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Números.* San José, Costa Rica: autor.