Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas

Imagen cortesía de graur razvan ionut y FreeDigitalPhotos.net

Probabilidad
2011

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las Matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar Matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en Matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Tercer Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar cuatro de las áreas que se proponen en los nuevos programas. En *Números* se deja de lado la visión conjuntista para dar paso al tratamiento del sentido numérico, el cálculo operacional y mental. *Geometría* que incluye tópicos relacionados a la visualización espacial, transformaciones geométricas y plano cartesiano. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora desde primaria. *Relaciones y Álgebra* como novedad introduce el trabajo con sucesiones y el tratamiento de la función lineal y la cuadrática. El área de *Medidas* se trabajará de forma transversal respecto a las otras áreas antes mencionadas. Estas cuatro unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Tercer Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes pilotos en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente,

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Probabilidad

Habilidad general

Conocer y aplicar los conceptos básicos de Probabilidad en el planteamiento de situaciones didácticas en el aula.

Introducción

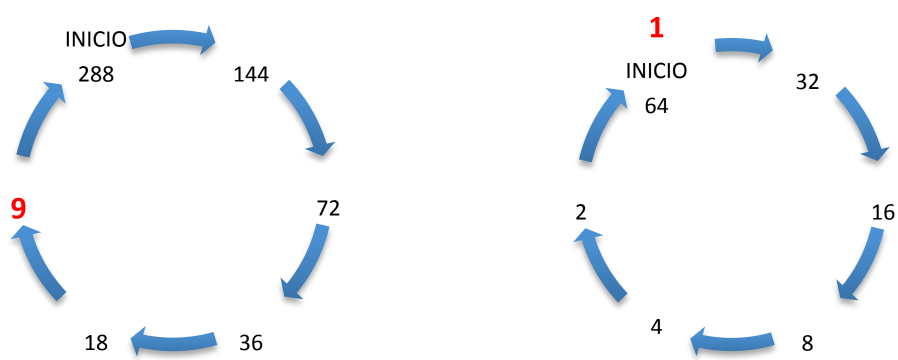
El mundo real está lleno de incertidumbre en condiciones de aleatoriedad. Las situaciones que implican incertidumbre varían de simples juegos de azar a problemas en numerosos campos científicos y ambientes cotidianos. Estos problemas implican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se incluyen elementos conocidos y aleatorios, así como la deducción bajo fundamentos concretos. Es por esto que los conocimientos en probabilidad son de suma importancia para la toma de decisiones en diversos contextos. Este material está dirigido a docentes de secundaria con el fin de analizar varios tópicos de la teoría probabilística y poder construir actividades didácticas y situaciones problema para esta área. Tomando en cuenta el enfoque de los nuevos programas de estudio de matemática, se presentan actividades y definiciones de algunas nociones básicas de Probabilidad.

I. Situaciones o experimentos: aleatorios y deterministas

Actividad 1

En el mes de diciembre se realizará un convivio de profesores de matemática del cantón central de Cartago. Al convivio asisten 30 profesores y se sientan en mesas redondas de seis participantes. La organización del evento quiere regalar un libro por mesa. Todos los profesores desean tener ese libro, por lo cual el proceso de selección debe ser justo. Las personas organizadoras del evento plantean dos propuestas para la selección de los profesores favorecidos:

I Propuesta: Primero se elige a uno de los participantes para que inicie escogiendo un número par, luego, sucesivamente continuando así con el docente que está a la izquierda cada profesor dirá la mitad del número de la persona que le precedió. El ganador del libro será el profesor cuya respuesta le corresponda un número impar. El esquema siguiente muestra dos ejemplos de la forma en que puede ganar uno de los participantes:



II Propuesta: Cada persona escribe su número de cédula en un papel delmismo tipo y tamaño. Luego se dobla el papel y se deposita en una bolsa no transparente. Cada persona saca un papel y lo lee, si no es su número de cédula lo deposita otra vez en la bolsa; en caso de que sea su número de cédula gana el libro.

Responda lo siguiente:

- *¿Son justas las dos propuestas?*
- *¿Es indiferente quién inicie eligiendo el número en la I Propuesta? ¿Por qué?*
- *¿Es indiferente quién saque primero el papel en la II Propuesta? ¿Por qué?*
- *Si tuvieran que escoger una propuesta como método justo para seleccionar al ganador del libro, ¿cuál de las dos propuestas sería más conveniente? ¿Por qué?*

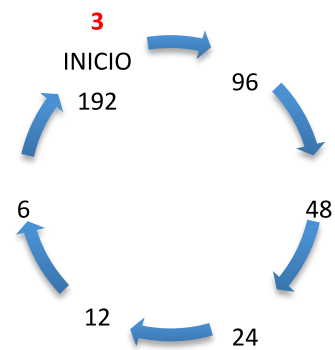
Análisis de la Actividad 1

Los dos procedimientos descritos son situaciones que se consideran como *experimentos*. Se utilizará la palabra *experimento* para describir cualquier proceso que genere un posible resultado.

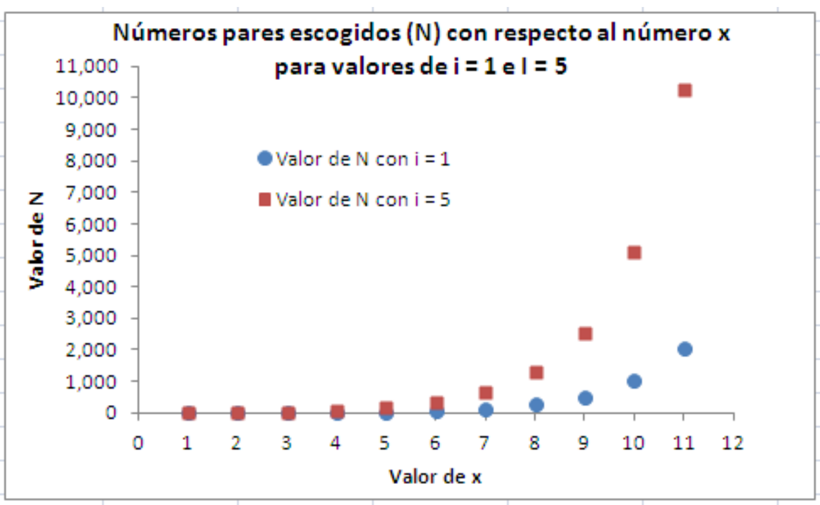
En la primera situación o experimento ocurre que la persona que inicia eligiendo el número par controla quien gana el libro. Esto se da ya que para elegir el número par puede utilizar la estrategia de pensar en cualquier número impar y multiplicarlo seis veces por dos o por $2^6=64$; al haber seis participantes cuando le corresponda dividir a la mitad el número de la persona de su derecha siempre el cociente será impar (el número impar en que había pensado) y por lo tanto ganará.

Por ejemplo, la persona que le corresponde iniciar piensa en el número impar 3 y lo multiplica seis veces por dos o por $2^6=64$ y obtiene el número 192. Si la persona que inicia el juego elige el número 192, observe en la representación gráfica cómo termina ganando.

En general, si N es el número par que debe elegir la persona que inicia el juego e i un número impar entonces un modelo matemático que se puede plantear para elegir un número par que haga ganar a la persona que inicia el juego es $N = i \cdot 2^x$, donde x representa el número de veces en que N se puede dividir entre 2 en forma exacta, de modo que el que inicia el juego puede seleccionar quién va a ganar, pues basta con que escoja un *x* apropiado, y cualquier número impar *i*.



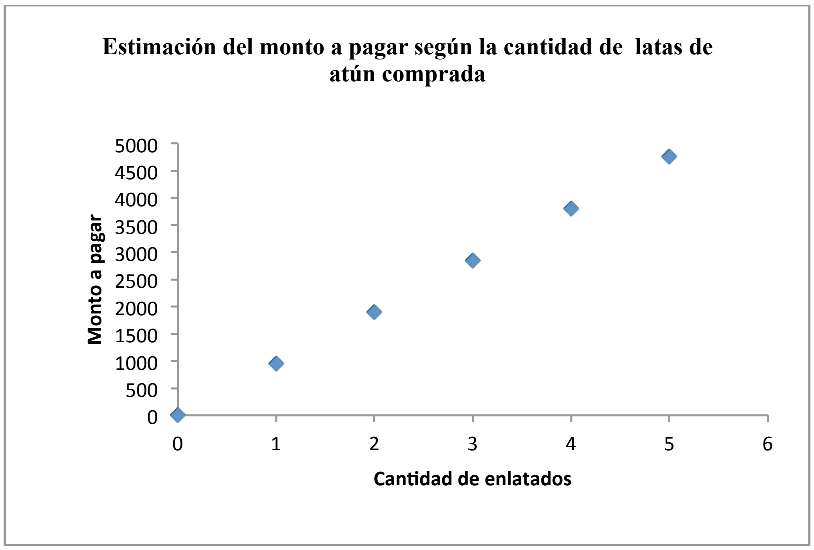
Esta situación se puede simular mediante el siguiente diagrama de puntos:



Experimento determinista

En el primer experimento el ganador puede ser predicho sin necesidad de llevar a cabo la experiencia. Toda situación en la cual sea posible determinar con anticipación el resultado se le llama ***determinista***.

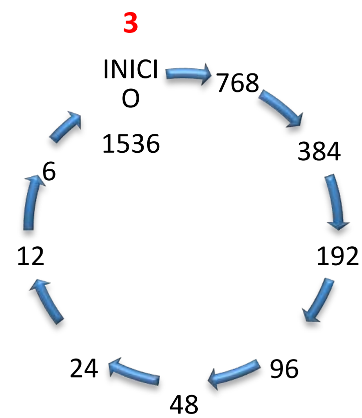
Otro ejemplo, que ilustra una situación o experimento determinista, se presenta al comprar un producto de precio fijo, por ejemplo, un enlatado de atún, que tienen un precio de 950 colones por enlatado de un tamaño estándar. Fácilmente se puede predecir cuánto dinero debemos pagar aún sin realizar la compra, pues va a depender de ¿cuántas latas queremos o podemos comprar? Esta situación se puede simular mediante el siguiente diagrama de puntos:



Observe que el costo de la compra: *C*, puede ser predicho mediante un modelo matemático simple al conocer la cantidad de latas que se compren *L*, mediante la fórmula: $C = 950 \cdot L$. Este es un ejemplo típico de un modelo determinista.

De igual forma, para el ejemplo que se analizó, el ganador se puede determinar simplemente conociendo con quien se inicia y el número que se escoge para iniciar el juego, aunque se incluyan nuevos integrantes. Por ejemplo, si hubiera nueve integrantes, la persona que inicia podría pensar en elegir el número $3 \cdot 2^9 = 1536$ que al dividirlo a la mitad nueve veces le correspondería a él obtener el número impar.

En general, si N es el número par a elegir, i un número impar y p la cantidad de personas, un modelo matemático que se puede plantear para una estrategia ganadora es $N = i \cdot 2^p$.



De forma contraria, en el segundo experimento, no se puede predecir lo que va a ocurrir, incluso si se realizara bajo las mismas condiciones una y otra vez, siempre los resultados pueden ser distintos y no depende de quién saca primero el papel.

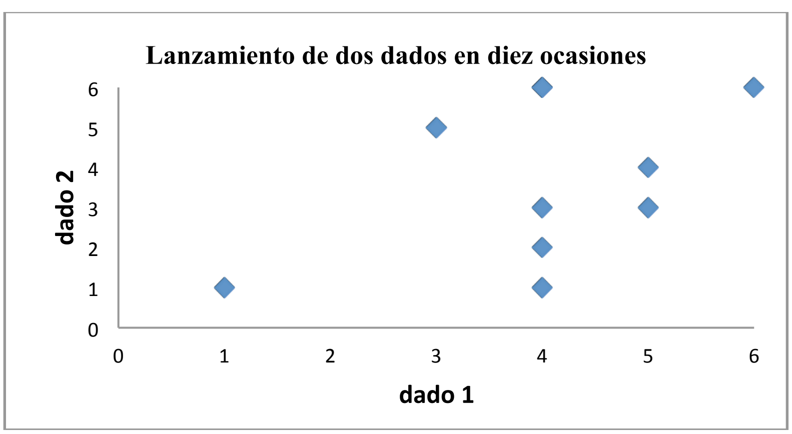
Experimento aleatorio

En aquellas situaciones para las cuales el resultado del experimento es impredecible a priori, es decir se requiere llevar a cabo la experiencia para obtener el resultado, se dice que este resultado depende del azar y el experimento se denomina ***aleatorio***.

Otro ejemplo puede ser el siguiente: La siguiente tabla contiene los resultados de realizar el experimento de lanzar el dado 1 y el dado 2 simultáneamente en 10 ocasiones.

dado 1	4	4	1	5	6	4	4	3	4	5
dado 2	3	2	1	4	6	1	6	5	6	3

Si el número de puntos de la cara superior del dado 1 representa el valor de la coordenada x y el número de puntos de la cara superior del dado 2 representa el valor de la coordenada y, en un sistema de coordenadas se obtiene el siguiente diagrama de puntos.



Como se puede ver en la gráfica anterior, no existe un patrón determinado de comportamiento, por ende no se puede establecer un modelo matemático fijo.

Hay que tener claro no confundir aleatoriedad con alternabilidad de resultados. Por ejemplo, si Cindy y Karla realizan un juego vinculado con el lanzamiento de una moneda, de modo que si el resultado es corona Cindy gana y si el resultado es escudo gana Karla. Después de jugar cinco veces Karla ha ganado en todas ellas, ¿significa esto que el resultado es predecible y por ello el experimento determinista?

La respuesta es negativa, ante el lanzamiento de una moneda que se supone está bien balanceada, las posibilidades son iguales de obtener escudo y corona, el resultado de un lanzamiento es aleatorio, pero es factible que al repetir el experimento pocas veces se presente un único resultado o una aparente tendencia a obtener mayoritariamente un resultado por encima de otro.

En general, si en todas las situaciones de la vida cotidiana, tuviéramos certeza de cómo, por qué y cuándo ocurren los fenómenos, de modo que por medio de un modelo matemático fuera posible conocer el resultado, entonces el azar no existiría y no tendría sentido hablar de probabilidad. Las probabilidades permiten modelar las situaciones aleatorias para identificar la posibilidad de ocurrencia de cada resultado y tomar decisiones de acuerdo con ese conocimiento. Sin embargo, para llegar a modelar estos patrones probabilísticos en una situación particular, se requiere, primeramente, identificar las situaciones o experimentos aleatorios que permiten llevar a cabo un análisis de este tipo y diferenciarlos de los experimentos deterministas que pueden ser modelados matemáticamente.

Un poco de historia

De acuerdo a la enciclopedia en línea Wikipedia en 1776 **Pierre Simon de Laplace (**1749-1827**)** matemático, astrónomo y físico francés comenzó a publicar 5 volúmenes de Traité du Mécanique Céleste, en el que afirmaba categórico que, si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante, se podría predecir su pasado y futuro. Por más de 100 años su afirmación pareció correcta y, por ello, se llegó a la conclusión de que el libre albedrío no existía, ya que todo estaba determinado, a esto se le llamó determinismo laplaciano. Éste consistía en afirmar que, si se conocen las leyes que gobiernan los fenómenos estudiados, se conocen las condiciones iniciales y se es capaz de calcular la solución, entonces se puede predecir con total certeza el futuro del sistema estudiado.

Luego, durante el Siglo XX, el uso de las probabilidades adquirió especial relevancia, los descubrimientos científicos en el área de la física, debido especialmente al surgimiento de la mecánica cuántica y a la ruptura de muchas creencias tradicionales vinculadas al determinismo de la mecánica clásica. Un ejemplo de esto fue la formulación del principio de incertidumbre de Heisenberg en 1927, conocido así por su creador el físico alemán Werner K. Heisenberg. Este principio afirma que es imposible medir simultáneamente de forma precisa la posición y el momento lineal de una partícula. El principio de incertidumbre ejerció una profunda influencia en la física y en la filosofía del siglo XX; además, desempeñó un importante papel en el desarrollo de la mecánica cuántica y en el progreso del pensamiento filosófico moderno. Fue un gran cambio a nivel filosófico por cuanto supone dejar de imaginar las partículas ocupando una posición determinada en el espacio.

Este y otros descubrimientos demostraron que muchos de los comportamientos de la materia que se suponía seguían patrones deterministas, demostraron que en el micro-espacio su comportamiento es aleatorio y puede ser descrito por modelos probabilísticos. Esta situación, unida al desarrollo de otras disciplinas en las que la comprensión del azar ha tomado un importante auge, provocando que sea necesario desarrollar la comprensión de la disciplina desde los primeros años de la educación básica.

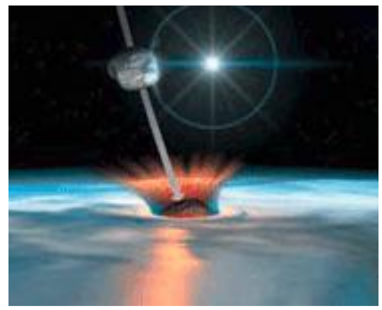
II. Ideas intuitivas: situaciones más, menos e igualmente probables

Actividad 2

Lea el siguiente fragmento publicado por *Inngeniar Group* el 17 de mayo del 2007:

Podría caer un meteorito como el que extinguió a los dinosaurios, pero no antes de 500 años

El holandés Jan Smit, experto en sedimentología y estratigrafía de grandes acontecimientos, advirtió este miércoles de que "se puede repetir" el impacto de un meteorito gigante contra la Tierra que provoque el mismo fenómeno que originó la extinción de los dinosaurios hace 65 millones de años.



(Tomado de http://inngeniar-miscelaneas.blogspot.com/2007/05/podra-caer-un-meteorito-como-el-que.html)

Si se determina intuitivamente que las probabilidades se refieren al grado de certeza que se puede tener en que una determinada situación aleatoria pueda ocurrir, entonces si un meteorito impactara el planeta Tierra de nuevo que sería más probable:

¿Que cayera en

- *el océano o en la superficie terrestre? ¿Por qué?*
- *en Australia o en Costa Rica? ¿Por qué?*
- *en el océano Atlántico o en el Pacífico? ¿Por qué?*
- *en un desierto o una ciudad? ¿Por qué?*

Análisis de la Actividad 2

Sin utilizar ninguna definición formal de probabilidad, cualquier persona con conocimiento básico de geografía podría de forma intuitiva contestar las anteriores preguntas. Por ejemplo, es más probable que el meteorito caiga en el océano que en la superficie terrestre ya que hay más superficie oceánica que terrestre en el planeta Tierra. También, es más probable que caiga en Australia que en Costa Rica ya que el territorio correspondiente a Australia es mucho mayor que el de Costa Rica. Ahora bien, esto no implica que el meteorito no pueda caer en la superficie terrestre o en Costa Rica, simplemente hay mayor posibilidad, a raíz de su espacio, de que caiga en algún Océano o en Australia respectivamente.

Desde este punto de visto, con los estudiantes es importante iniciar un análisis valorando primeramente sus intuiciones sobre lo que es más o menos probable en una situación particular. El análisis de estas intuiciones aplicadas a problemas concretos puede romper con creencias equivocadas sobre el uso de las probabilidades.

III. Espacio muestral, puntos muestrales y representación.

Actividad 3

Analice las siguientes situaciones y responda lo que se le pide:

(a) *Si se lanza una vez una moneda legal, ¿cuántos son los posibles resultados que obtendría? Exprese los resultados que se obtienen.*

(b) *Si se lanza dos veces una moneda legal, ¿cuántos son los posibles resultados que obtendrían? Exprese los resultados que se obtienen.*

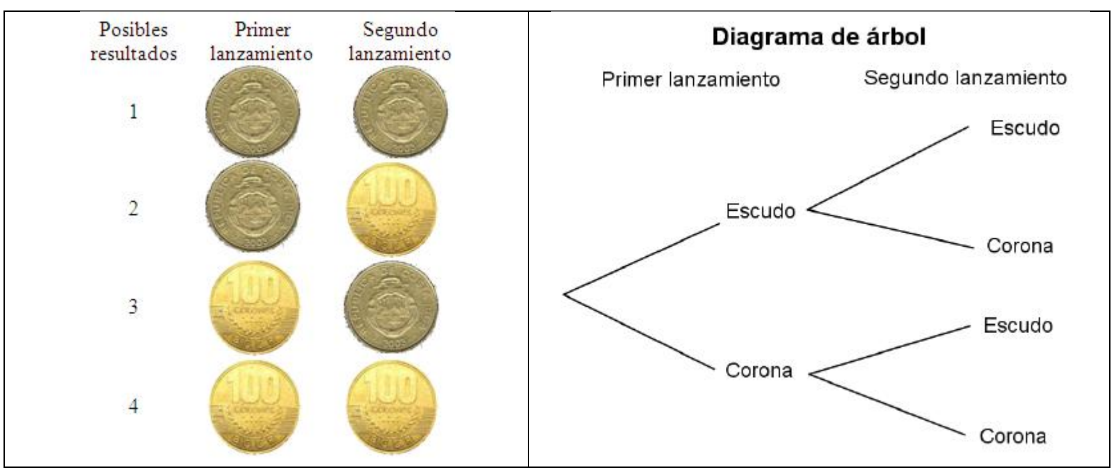
Análisis de la Actividad 3

Al plantear un experimento de esta naturaleza, para fines didácticos se debe utilizar algún tipo de notación o código para representar los resultados posibles. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda se pueden utilizar los siguientes códigos:

e: para un resultado de escudo
c: para un resultado de corona

Por lo anterior, ante un lanzamiento de una moneda, hay dos resultados posibles *e* o *c*.

Por otro lado, si son dos los lanzamientos, entonces los resultados posibles van a ser combinaciones de *e* y *c* en grupos de dos, es decir, podrían obtenerse dos escudos, dos coronas, o un escudo y una corona o viceversa. Por ende los posibles resultados serían: *ee, cc, ec* o *ce*. Otras formas de representar esta situación se presentan a continuación:



El *diagrama de árbol* es muy utilizado para evidenciar el número de resultados al repetir un experimento un número pequeño de veces. Acá se repitió el lanzamiento de una moneda, pero puede ser aplicado al lanzamiento de un dado más de una vez, a la escogencia aleatoria de una respuesta en ítems de selección única, entre otros.

Espacio muestral

Independiente del experimento que se realice, al conjunto de todos sus resultados posibles se le denomina ***espacio muestral***. Por ejemplo el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos monedas al aire es *S*={*ee, cc, ec, ce*}. El espacio muestral puede ser finito como los dos ejemplos analizados anteriormente, o infinito. Un ejemplo de un espacio muestral infinito es el siguiente.

Suponga que se lanza una moneda repetidamente, el juego termina hasta que se obtenga un escudo. ¿Cuál es el espacio muestral?

Aunque en la práctica usted espera que el experimento termine en pocas repeticiones, desde un punto de vista teórico siempre existe una probabilidad de que el juego continúe ante la ausencia de un escudo. Por ello, los elementos del espacio muestral correspondiente pueden ser representados por: *e, ce, cce, ccce, cccce, ccccce*, …, observe que ello significa que el resultado de escudo puede obtenerse en el primer lanzamiento, en el segundo, en el tercero y así sucesivamente[1].

Puntos muestrales

Un resultado particular del experimento aleatoria se le llama ***punto muestral***, es decir, un punto muestral corresponde a un elemento del espacio muestral.

Nota: Para representar el espacio muestral, en aquellos casos en que sea posible, se utilizan las llaves para encerrar los puntos muestrales y utilizar S para representar este conjunto. Para los ejemplos que se han venido trabajando S={e, c}, S={ee, cc, ec, ce} y S= {e, ce, cce, ccce, cccce, ccccce,…}, respectivamente.

[1] Existe una probabilidad de 0,00098 de repetir el experimento 10 veces; $7{,}89\cdot 10^{-31}$ de que el experimento se deba repetir 100 veces; $9{,}33\cdot 10^{-302}$ de que el experimento deba repetirse 1000 veces, como puede notarse aunque la probabilidad tiende a ser muy remota, a medida que el número repeticiones aumenta todavía sigue siendo posible, por ello el espacio muestral se considera infinito.

IV. Eventos simples y compuestos. Evento seguro, probable e imposible. Eventos mutuamente excluyentes

Actividad 4

Una empresa transnacional que fabrica componentes electrónicos desea construir una sede en Costa Rica. Decide elegir aleatoriamente una de las siete provincias de Costa Rica para establecer en ella la sede.

De acuerdo con lo anterior:

- *a) ¿Cuál sería el espacio muestral del experimento?*
- *b) ¿Cuáles son sus puntos muestrales?*
- *c) ¿Qué situación es más probable, que la provincia escogida limite con Nicaragua o lo haga con Panamá?*
- *d) ¿Qué situación es más probable, que la provincia escogida limite con el Océano Pacífico o lo haga con el Océano Atlántico?*
- *e) ¿Qué situación es más probable que la provincia escogida no tenga costas o limite con Nicaragua?*

Análisis de la Actividad 4

a) En este experimento, el espacio muestral está constituido por las siete provincias de Costa Rica, esto es *S*={*San José, Alajuela, Cartago, Heredia, Guanacaste, Puntarenas y Limón*},

b) por lo tanto, los puntos muestrales son: San José, Alajuela, Cartago, Heredia, Guanacaste, Limón y Puntarenas. Con esto se responde a las primeras dos interrogantes.

Para las otras preguntas, se pueden considerar los siguientes casos:

A: La provincia seleccionada tenga límites con Nicaragua
B: La provincia seleccionada tenga límites con Panamá
C: La provincia seleccionada limita con el Océano Pacífico
D: La provincia seleccionada limita con el Océano Atlántico
E: La provincia seleccionada no tiene costas

c) En el caso de A, hay cuatro provincias que tienen límite con Nicaragua: Guanacaste, Alajuela, Heredia y Limón. Mientras que únicamente hay dos provincias que tienen límites con Panamá: Puntarenas y Limón. Por ello al ser la provincia escogida aleatoriamente, A tiene más probabilidad que B de salir seleccionada, es decir hay más probabilidad de seleccionar una provincia que tenga límites con Nicaragua que una provincia que tenga límites con Panamá.

d) Por otro lado, hay dos provincias que tienen límites con el Océano pacífico: Guanacaste y Puntarenas; mientras que solamente Limón tiene límites con el Océano Atlántico; por ello es más probable que ocurra C en vez de D.

e) Por último, hay cuatro provincias que no tienen costa: San José, Alajuela, Cartago y Heredia; mientras que como se dijo antes también hay cuatro provincias que tienen límites con Nicaragua; por ello los eventos A y E son igualmente probables.

Eventos

Observe que cada una de las situaciones consideradas en la actividad anterior, constituye un resultado posible del experimento de seleccionar aleatoriamente una de las provincias de Costa Rica. A cada una de estas situaciones se les denomina con el nombre de ***evento*** o ***suceso***.

Eventos simples y compuestos

En este ejemplo, los eventos A y B son diferentes y cada uno incluye más de una provincia, cada una de las cuales representa un punto muestral. Si un evento tiene más de un punto muestral se le llama ***evento compuesto***, pero si sólo contiene un punto muestral se le llama ***evento simple***.

De acuerdo con lo anterior se tiene lo siguiente:

- El evento A está constituido por cuatro provincias: Limón, Heredia, Alajuela y Guanacaste, entonces A representa un evento compuesto.
- El evento D está constituido por una única provincia: Limón. Por ello es un evento simple.

Eventos igualmente probables

Cuando el número de puntos muestrales es el mismo para dos eventos, entonces se dice que son ***igualmente probables***. Este es el caso de los eventos A y E, pues ambos representan a cuatro provincias. Una situación parecida ocurre con los eventos C y D, pues efectivamente hay dos provincias que son incluidas en cada uno de ellos.

Continuación de Actividad 4

Con base en lo anterior, indique los puntos muestrales a favor de cada uno de los siguientes eventos y si ellos son eventos simples o compuestos.

F: que la provincia seleccionada tenga al menos un aeropuerto internacional

G: que la provincia seleccionada tenga al menos cinco cantones

H: que la provincia seleccionada limite con Honduras

I: que la provincia seleccionada tenga un nombre diferente al de su cabecera.

Análisis

Observe que al hablar de un aeropuerto internacional, sólo Guanacaste y Alajuela cumplen con el requisito, por ello *F* tiene dos puntos muestrales a favor y es un evento compuesto.

Para analizar *G*, se debe recordar que la provincia con menos cantones es Limón que tiene seis cantones: Limón, Pococí, Siquirres, Guácimo, Matina y Talamanca; entonces todas las provincias cumplen con el requisito, por lo que el evento *G* es igual al espacio muestral. El evento *G* es compuesto.

En el caso de *H*, Costa Rica no tiene fronteras con Honduras, entonces no existen puntos muestrales en favor de *H*.

Finalmente el evento *I*, únicamente Guanacaste tiene un nombre diferente al de su cantón cabecera que es Liberia, por ello el evento *I* es un evento simple.

Evento seguro

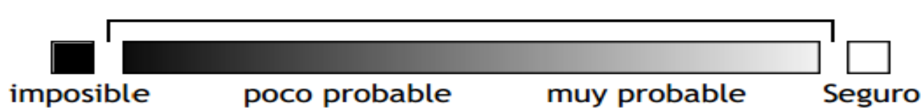
De este ejemplo surgieron dos eventos muy particulares, primeramente el evento *G* que incluye a las siete provincias del país o sea incluye todos los puntos muestrales por ende se cumple que $G = S$, donde *S* es el espacio muestral. Los eventos que cumplen esta cualidad se les llama ***eventos seguros o ciertos***, pues su ocurrencia está asegurada, y se conviene en un resultado determinista, es decir al seleccionar aleatoriamente una provincia de Costa Rica es seguro que *G* va a ocurrir.

Evento imposible

Por otro lado, el evento *H*, que no tiene puntos muestrales a favor, ante esta situación resulta imposible que ocurra. Los eventos que tienen esta particularidad se les denomina ***eventos imposibles***.

Eventos más y menos probables

En relación con la actividad anterior, la identificación de eventos ***más probables o menos probables***, intuitivamente están asociados a la experiencia vivida por las personas. Normalmente esta discriminación se realiza de acuerdo con la experiencia, de modo que se denominan más probables aquellos eventos que ocurren con mayor regularidad. En la actividad anterior, la escogencia de los eventos más probables se vinculó con la cantidad de puntos muestrales a su favor. Cuando se puedan identificar dichos puntos muestrales y todos ellos son igualmente probables, van a ser más probables aquellos eventos que tienen más puntos muestrales a su favor.
Debido a que, el concepto de probabilidad se requiere ir construyendo paulatinamente, es recomendable iniciar con estas ideas intuitivas. De modo que se asocian los eventos más probables o menos probables a las posibilidades de ocurrencia que tiene una u otro evento. Cuando se cree que las posibilidades de ocurrencia son las mismas para ambos eventos se dice que son igualmente probables.
Los estudios de Truran (1994) muestran, que los alumnos, después de los ocho años, desarrollan un lenguaje que les permite llegar a explicaciones convincentes para el evento seguro o imposible, y entre, ellos identificar eventos probables.



Hay que hacer la observación, que a medida que se vayan analizando nuevos conceptos, la intuición será desplazada poco a poco por un análisis más formal desde el punto de vista teórico, a partir de sus puntos muestrales.

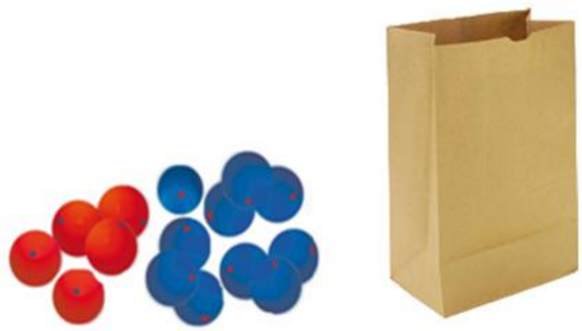
Eventos mutuamente excluyentes

La actividad anterior dejó en evidencia que existen eventos que tienen puntos muestrales en común, por ejemplo entre los eventos A y B, resulta que la provincia de Limón tiene tanto límites con Nicaragua como con Panamá. Cuando esto no ocurre se dice que los eventos son **mutuamente excluyentes**, es decir no pueden ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, los eventos C: la provincia seleccionada limita con el Océano Pacífico y E: la provincia seleccionada limita con el Océano Atlántico, se determinó que ello no pueden ocurrir al mismo tiempo pues no tienen puntos muestrales en común.

V. Definición clásica de probabilidad (definición Laplaciana). Reglas básicas de las probabilidades. Axiomas de Kolmogorov. Otras propiedades

Actividad 5

Suponga que en una bolsa de papel se incluyen cinco bolas rojas y diez bolas azules.



a) *Si se extrae una bola en forma aleatoria (sin ver qué color se está escogiendo) ¿Qué color tiene más probabilidad de salir: azul o rojo?*

b) *¿De qué manera se deberían variar las cantidades para que exista justicia o equidad en las posibilidades de selección?*

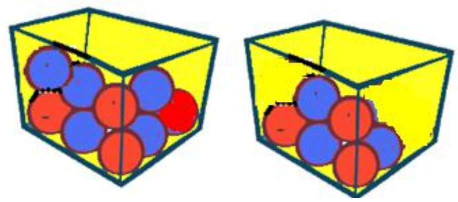
Análisis de la actividad 5

a) De acuerdo con lo que se ha venido discutiendo, bajo el supuesto que todas las bolas tienen igual probabilidad de ser seleccionadas, entonces el color más probable es aquel para el cual hay más bolas de ese color, en este caso el azul.

b) Bajo este mismo principio, para que sea igualmente probable que la bola seleccionada sea roja o azul, se requiere que haya la misma cantidad de bolas rojas y azules.

Continuación de la Actividad 5

Suponga que en un concurso de TV, le piden a usted que seleccione una bola de cualquiera de las dos urnas



Usted ganará un premio si obtiene una bola azul al realizar una selección aleatoria ¿En cuál de los recipientes es más probable obtener una bola roja?

Análisis

Al analizar esta nueva situación, se tiene que comparar lo que ocurre en cada una de las cajas, la primera caja contiene cuatro bolas rojas mientras que la segunda contiene solamente tres, no obstante, este hecho no es suficiente para decir que es más probable obtener una bola roja en la primera caja que en la segunda, esto debido a que el número total de bolas en ambas cajas es diferente. Por ello, la comparación debe hacerse en forma relativa, de la siguiente manera:

En la primera caja hay cuatro bolas rojas de un total de nueve bolas, por ello la proporción de bolas rojas es cuatro de nueve o $\frac{4}{9}$.

En la segunda caja hay tres bolas rojas de un total de seis bolas, por ello la proporción de bolas rojas es tres de seis o $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

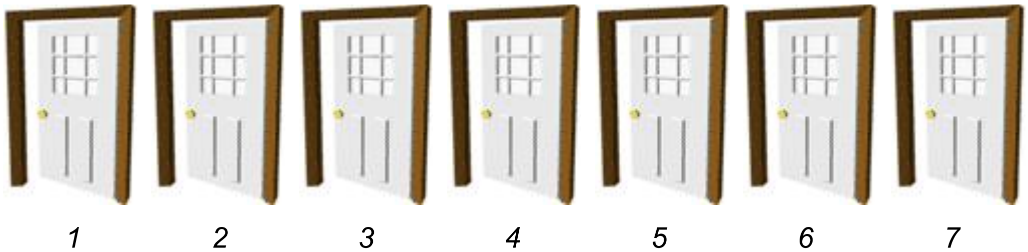
Debido a que $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$, entonces la probabilidad de obtener una bola roja es mayor en la segunda caja.

Definición clásica o laplaciana de probabilidad

En la reflexión de la Actividad 5 se estableció la probabilidad de un evento, como la proporción de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales del experimento; siempre y cuando los puntos muestrales sean todos igualmente probables. Esta definición se conoce como ***definición clásica o definición Laplaciana de Probabilidad***.

Actividad 6

En un canal de televisión hay un programa familiar que tiene un concurso de premios muy popular. El concurso se trata de que una persona del público, elegida al azar, tenga la oportunidad de escoger una puerta entre siete posibles y ganarse lo que está detrás de la puerta escogida. Una de las puertas tiene detrás un automóvil, en dos puertas hay detrás un premio de consolación de quinientos mil colones y en las restantes cuatro puertas no hay premio detrás de ellas. En cada programa la ubicación de los premios varía.



1. *Si Catalina es invitada al programa, ¿cuál es la probabilidad de que sea escogida entre 249 invitados más del público para participar en el concurso?*
2. *Si la eligieron para concursar, ¿cuál es la probabilidad de que*
    a) *gane el automóvil?*
    b) *gane un premio de quinientos mil colones?*
    c) *no gane?*
    d) *gane un premio?*

Análisis de la Actividad 6

1. En la primer situación Catalina tiene una opción de ser escogida entre 250 invitados que hay en total en el programa (contando a ella), o sea una proporción 1 de 250, lo que indica una probabilidad de $\frac{1}{250} = 0,004$ de ser escogida, que equivale a que únicamente en cuatro de mil repeticiones podría salir elegida.
2. Para el análisis de las otras interrogantes, se tiene que hay en total 7 puertas, una con un premio de un automóvil, dos con un premio en efectivo de 500 000 colones y 4 puertas sin premio. Tomando en cuenta estos datos, y las preguntas planteadas se tienen los siguientes eventos:

    A: Catalina gane el automóvil
    B: Catalina gane un premio de 500 000 colones
    C: Catalina no gane premio
    D: Catalina gane algún premio

Bajo el supuesto que Catalina fuera escogida para participar en el concurso se tendría que:

a) El evento A es un evento simple, pues al haber una única puerta que tiene un premio del automóvil, se tiene que hay una probabilidad de 1 en 7 o de $\frac{1}{7}$ de ocurrir, esto se representa indicando que P(A) = $\frac{1}{7}$, se lee que la probabilidad de ocurrencia del evento A es $\frac{1}{7}$. Lo que significa que si se repite siete veces el experimento Catalina esperaría ganar únicamente una vez.

b) Del mismo modo, como se tienen dos puertas con premios de 500 000 colones, hay una proporción de 2 a 7 de obtener un premio en efectivo, por lo que la probabilidad de ocurrencia el evento B es $\frac{2}{7}$, se escribe P(B) = $\frac{2}{7}$. Teóricamente significa que de siete veces que se realice el experimento Catalina esperaría ganar este premio en dos de ellas.

c) Análogamente, se sabe que hay 4 de 7 puertas que no tienen premio, por lo que hay una probabilidad de $\frac{4}{7}$ de que Catalina no obtenga premio, es decir P(C) = $\frac{4}{7}$, lo que en teoría significa de siete veces que se repita el experimento en 4 no estaría ganando premio.

d) Finalmente, existen tres puertas por medio de las cuales Catalina puede recibir algún premio (automóvil o premio en efectivo) entonces tendría una proporción 3 de 7 de ganar algún premio, o sea P(D) = $\frac{3}{7}$.

Nota: En la reflexión anterior se puede observar que el evento D equivale a la reunión de los eventos A y B, los cuales son mutuamente excluyentes. Asimismo el evento C es la negación del evento D y viceversa.

Un poco de historia

Desde un punto de vista didáctico, es importante valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la Probabilidad. La definición de probabilidad utilizada aquí se denomina definición clásica o laplaciana, en honor al matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien desarrolló un procedimiento para determinar la probabilidad de un evento particular. La siguiente reflexión puede ser presentada a los estudiantes (tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace).

En relación con el concepto de probabilidad, Laplace creó una curiosa fórmula para expresar la probabilidad de que el Sol saliera por el horizonte. Él decía que la probabilidad era de $\frac{d+1}{d+2}$ donde d es el número de días que el sol ha salido en el pasado. Laplace decía que esta fórmula, que era conocida como la regla de sucesión, podía aplicarse en todos los casos donde no sabemos nada, o donde lo que conocíamos fue cambiado por lo que no. Aún es usada como un estimador de la probabilidad de un evento, si sabemos el lugar del evento, pero sólo tenemos muy pocas muestras de él.

Su definición nos dice que sea E un experimento cualquiera y S el conjunto finito de sus resultados posibles tal que S = {a1,..,ak}. Si suponemos que cada resultado o punto muestral de S es equiprobable con los demás (que ninguno tenga más oportunidades que otro), entonces la probabilidad del punto muestral ai: P(ai) = p. Si queremos que P sea una función de probabilidad tal que:

$$P(S) = 1 = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$$

entonces $p = \frac{1}{k}$.

Sea A un evento de S tal que A tiene n puntos muestrales de S; entonces

$$P(A) = n \cdot p = \frac{n}{k} = \frac{\text{Número de casos favorables a A}}{\text{Número total de casos}}$$

Actividad 7

De acuerdo con la definición clásica de probabilidades y la reflexión realizada para la Actividad 4, determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) A: la provincia seleccionada tenga límites con Nicaragua
b) D: La provincia seleccionada limita con el Océano Atlántico
c) G: que la provincia seleccionada tenga al menos cinco cantones
d) H: que la provincia seleccionada limite con Honduras

Con base en el análisis efectuado, responda las siguientes preguntas

1. *¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro y de un evento imposible?*
2. *¿Cuál es el valor numérico máximo que puede tomar la probabilidad de un evento?*
3. *¿Cuál es el valor numérico mínimo que puede tomar la probabilidad de un evento?*

Análisis de la Actividad 7

- Debido a que existen cuatro provincias que tienen límites con Nicaragua del total de siete provincias en el país, la probabilidad del evento A es P(A) = $\frac{4}{7}$.
- Del mismo modo, existe sólo una provincia que limita con el Océano Atlántico, por ello P(D) = $\frac{1}{7}$.
- En el caso del evento G, debido a que todas las provincias del país tienen al menos cinco cantones, entonces P(G) = $\frac{7}{7} = 1$.
- Por último, debido a que el evento H es un evento que no tiene puntos muestrales, entonces P(H) = $\frac{0}{7} = 0$.

Luego se tiene que:

1. Tal como se ejemplificó anteriormente, debido a que el evento seguro incluye todos los puntos muestrales entonces su probabilidad es uno. Por otro lado, debido a que el evento imposible no tiene puntos muestrales, entonces su probabilidad es cero.
2. Debido a que en un experimento, el mayor evento posible es el evento seguro, entonces el valor numérico máximo que puede tomar la probabilidad de un evento es uno.
3. Del mismo modo, el evento imposible es el menor de todos los eventos, en ese sentido el menor valor numérico que puede tomar la probabilidad de un evento es cero.

Con base en la reflexión anterior y en la definición clásica de probabilidades se pueden “formalizar” las siguientes propiedades de probabilidad:

Propiedades de probabilidad

Si S es el espacio muestral de un experimento aleatorio con n puntos muestrales distintos, todos ellos igualmente probables ($n \neq 0$) entonces se tendrán las siguientes propiedades:

1) Si *A* es un evento simple de *S*, entonces solamente tendrá un caso favorable, por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento *A* es igual a $P(A) = \frac{1}{n}$.

2) El espacio muestral *S* se considera como un evento seguro por lo que $P(S) = \frac{n}{n} = 1$

3) Si el evento imposible se representa con ϕ, es decir el ϕ no tiene puntos muestrales a favor, entonces su probabilidad es nula, o sea $P(\phi) = \frac{0}{n} = 0$

4) En general para cualquier evento *A* , al ser la probabilidad la proporción de sus puntos muestrales a favor entre el total de puntos muestrales; según los resultados 2) y 3), la probabilidad de *A* es un valor entre 0 y 1, inclusive, $0 \leq P(A) \leq 1$

Otras propiedades

Para complementar estas propiedades, es necesario analizar algunas relaciones que se presentan cotidianamente entre eventos. Si se considera un experimento que tiene espacio muestral *S*, y sean A y B eventos de *S*, entonces se tiene lo siguiente:

a) Cuando se indica que al menos uno de los eventos A o B ocurra, hace referencia a un nuevo evento que indica que puede ocurrir A, puede ocurrir B o pueden ocurrir ambos eventos al mismo tiempo. Este nuevo evento se acostumbra denotar con "A ∪ B". Según esto, el evento A o B incluye los puntos muestrales de A y de B, incluyendo también aquellos que tienen en común.

b) Cuando se indica que los eventos A y B ocurren, se hace referencia a un nuevo evento que involucra la ocurrencia simultánea de A y de B; que se simboliza con "A ∩ B". El evento A ∩ B incluye únicamente los puntos muestrales que tienen en común A y B.

c) Finalmente, cuando se habla que el evento A no ocurra, se hace referencia a un nuevo evento que implica la negación de la ocurrencia del evento A, también se conoce como el complemento del evento A "A^c" (se lee "A complemento". El evento A^c incluye los puntos muestrales de *S* que no tiene A, en otras palabras A^c es el complemento del evento A.

Nota: Observe que si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, es decir no tienen puntos muestrales en común, entonces el evento A ∩ B constituye el evento ϕ, es decir el evento imposible.

Con estas relaciones, proceda a resolver la siguiente actividad.

Actividad 8

Volviendo al ejemplo del lanzamiento de una moneda dos veces se definen los siguientes eventos:

A: Obtener dos escudos
B: Obtener dos coronas
C: Obtener al menos un escudo

Para estos eventos:

a) *Determine los puntos muestrales de los eventos A ∪ B, A ∩ B, A ∪ C, A ∩ C*
b) *Determine las probabilidades P(A), P(B), P(A ∪ B) y P(A ∩ B)*
c) *¿Qué relación existe entre P(A), P(B), P(A ∪ B)?*
d) *Determine las probabilidades P(C), P(A ∪ C) y P(A ∩ C)*
e) *¿Qué relación existe entre P(A), P(C), P(A ∪ C) y P(A ∩ C)?*
f) *Determine los puntos muestrales de A^c y de C^c*
g) *¿Qué relación existe entre P(A) y P(A^c)? ¿y entre P(C) y P(C^c)?*

Análisis de la Actividad 8

De acuerdo con lo analizado en la Actividad 3, el espacio muestral de este experimento es *S* = {*ee, ec, ce, cc*}, por ello se tiene lo siguiente:

a) A ={*ee*}, B = {*cc*} y C = {*ee, ec, ce*}, entonces A ∪ B = {*ee*, *cc*}, A ∩ B = ϕ, A ∪ C={*ee, ec, ce*} y por último A ∩ C ={*ee*}

b) De acuerdo con las propiedades que se han venido analizando $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{0}{4} = 0$,

c) Puede notarse que en este caso $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

d) En este caso se tiene $P(C) = \frac{3}{4}$, $P(A \cup C) = \frac{3}{4}$ y $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$

e) Ahora no se cumple que $P(A \cup C)$sea igual a $P(A) + P(C)$. ¿Por qué ocurre esto? Esta igualdad no se cumple para este caso pues A y C tienen un punto muestral en común, el cual es *ee*, pues A ∪ C ={*ee*}; por ello al determinar $P(A) + P(C)$ se suma dos veces la probabilidad $P(A \cap C)$

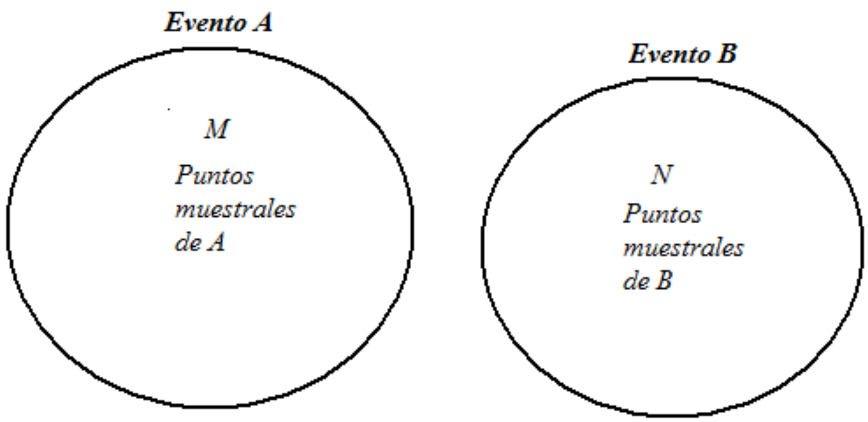
f) Con respecto a A^c, incluye los puntos muestrales que no están en *A*, entonces se tiene: $A^c = \{ce, ec, cc\}$. Del mismo modo $C^c = \{cc\}$.

g) Por lo anterior $P(A^c) = \frac{3}{4}$ y como $P(A) = \frac{1}{4}$, se tiene que $P(A^c) + P(A) = 1$. Del mismo modo $P(C^c) = \frac{1}{4}$ y como $P(C) = \frac{3}{4}$, se tiene que

$$P(C^c) + P(C) = 1.$$

Aunque el resultado anterior responde a un caso particular, importantes propiedades pueden deducirse de este análisis. Seguidamente se describen las principales:

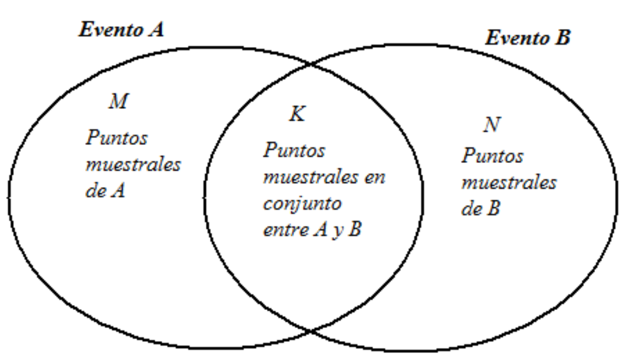
1) Para eventos A y B de un espacio muestral *S* que tiene *n* puntos muestrales, se tiene que si son mutuamente excluyentes (no tienen puntos muestrales en común), entonces, el siguiente esquema resume la relación entre los eventos A y B:



Por ello, $P(A) = \frac{M}{n}$, $P(B) = \frac{N}{n}$, además $P(A \cup B) = \frac{M+N}{n}$, con lo cual se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

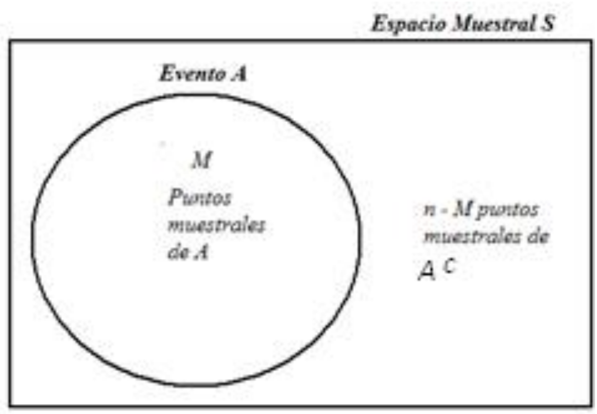
2) Por otro lado, en general si A y B son eventos cualesquiera, la relación anterior no se cumple si A y B tienen puntos muestrales en común, esto pues al calcular $P(A) + P(B)$, se tiene que la probabilidad correspondiente a la intersección se suma dos veces. Observe el siguiente esquema:



Observe que, de acuerdo con lo que se ha venido analizando, $P(A) = \frac{M+K}{n}$ y $P(B) = \frac{N+K}{n}$. Por otro lado: $P(A \cup B) = \frac{M+K+N}{n}$ y $P(A \cap B) = \frac{K}{n}$. Por lo tanto se puede establecer la siguiente relación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Finalmente, se tiene que la relación descrita entre A y ~A es válida en general, pues de acuerdo con la definición de A^c se tiene que $A \cup A^c = S$, tal como se muestra en el esquema:



Según del esquema *n* – *M* representan los puntos muestrales a favor de A^c, por ello se tiene que $P(A^c) = \frac{n-M}{n}$, así $P(A^c) + P(A) = P(S) = 1$, con lo cual:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Axiomas básicos de probabilidad de Kolmogórov

En resumen, dentro de las principales propiedades que se han podido deducir tenemos dos grupos, en primer lugar los axiomas básicos, que se denominan *Axiomas de Kolmogórov*, ellos se pueden resumir por:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, para cualquier evento *A*.

2) $P(S) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$, donde *S* representa al espacio muestral y ϕ representa el evento imposible.

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos *A* y *B* mutuamente excluyentes.

Propiedades adicionales de probabilidad

Las siguientes dos propiedades pueden ser deducidas fácilmente a partir de los tres axiomas anteriores:

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, para eventos *A* y *B* cualesquiera.

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$, para cualquier evento *A*.

Un poco de historia

Para finalizar esta sección, se presenta una breve reseña histórica sobre Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987):

> "… fue un matemático ruso que hizo progresos importantes en los campos de la teoría de la probabilidad y de la topología. En particular, desarrolló una base axiomática que supone el pilar básico de la teoría de la probabilidad a partir de la teoría de conjuntos. …el año 1933 cuando Kolmogorov se propuso construir una teoría de la probabilidad totalmente rigurosa basada en axiomas fundamentales.
>
> La construcción axiomática de la teoría de la probabilidad procede de las propiedades fundamentales de la probabilidad observada en los ejemplos que ilustran las definiciones clásicas y frecuencista. Así, la definición axiomática las incluye como casos particulares y supera las carencias de ambas. De esta manera, la probabilidad pudo desarrollarse como una teoría completamente lógica al mismo tiempo que siguió permitiendo resolver los problemas aplicados de las ciencias modernas y la tecnología. …

Los axiomas de Kolmogorov que definen la probabilidad son los siguientes:

Para cada suceso aleatorio A hay asociado un número no negativo P(A) que se llama su probabilidad.

P(S)=1, donde S es el espacio muestral (evento cierto)

Si los sucesos A1, A2, …, An, son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(Tomado de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf)

VI. Probabilidad frecuencial o empírica

Lo establecido hasta acá en materia de probabilidades, está limitado al conocimiento del espacio muestral y de sus puntos muestrales, desafortunadamente eso no siempre ocurre, pues en muchas ocasiones el espacio muestral es muy grande, es indefinido o incluso es infinito. Para comprender estas situaciones analice la siguiente situación:

Actividad 9

a) *Si nos presentamos a un supermercado a comparar un litro de aceite, pero aunque el contenido del recipiente dice 1000 ml, tenemos la duda que efectivamente estos recipientes contengan esta cantidad, por lo que estamos interesados en determinar la probabilidad que el recipiente tenga menos de un litro tal como dice la etiqueta. ¿Cómo se podría enfrentar este problema?*

b) *Existe la creencia entre la población que en un embarazo cualquiera es igualmente probable que la criatura sea niño o niña; no obstante, los datos indican que en una población hay más mujeres que hombres ¿cómo poder comprobar si efectivamente son igualmente probables?*

c) *Se ha afirmado la probabilidad de que una persona fumadora muera de una enfermedad asociada con el consumo del cigarrillo es aproximadamente de un medio, ¿cómo creen que ha sido posible estimar esta relación?*

Análisis sobre la Actividad 9

En relación con las interrogantes, queda claro que es imposible conocer el espacio muestral, por ello se requiere un análisis particular para cada caso:

a) Ante la imposibilidad de analizar todos los recipientes con aceite que se producen, si se toma una muestra aleatoria de 50 de éstos y se mide su contenido se puede tener una aproximación a la probabilidad de que un recipiente contenga menos de un litro, por medio de la frecuencia relativa del subconjunto de la muestra que contiene menos de un litro de aceite.

b) Del mismo modo, para estimar la probabilidad de que nazca un niño como producto de un embarazo cualquiera, se puede tomar una muestra aleatoria de varios nacimientos y determinar la frecuencia relativa de nacimientos varones, con respecto al total de nacimientos considerados.

c) Finalmente, haciendo un análisis de defunciones para las cuales se sabe que en vida la persona era fumadora, y determinando la causa de la muerte, sería posible aproximar la probabilidad de que una persona fumadora muera por causa de una enfermedad vinculada con el fumado.

En resumen, las situaciones hipotéticas planteadas anteriormente, muestran que no siempre es posible encontrar la probabilidad real de que ocurra un determinado evento; ante esta situación, el cálculo de una aproximación de la probabilidad por medio de una muestra aleatoria es la mejor alternativa.

Actividad 10

Al lanzar una tachuela existen dos eventos posibles:

A: que la tachuela caiga sobre su cabeza (con la punta hacia arriba)
B: que la tachuela caiga acostada

Sobre su cabeza

Evento A

Acostada

Evento B

Debido a que no se conoce con exactitud la probabilidad de que la tachuela caiga con la punta hacia arriba, proponga una estrategia que permita aproximar esta probabilidad.

Análisis de la Actividad 10

Se podría pensar que la probabilidad de ambos eventos es $\frac{1}{2}$ (un caso favorable entre dos posibles). Sin embargo, la forma irregular de la tachuela afecta el resultado de forma incierta, lo que hace dudar que los eventos tengan la misma posibilidad de ocurrir. Por lo que al dudar de una de las premisas de la definición clásica de probabilidad (eventos simples equiprobables), no se debería aplicar esta definición.

Entonces, ¿cómo se podría encontrar la probabilidad de que la tachuela caiga con la punta hacia arriba?

Esta situación presenta una dificultad adicional a la implementación de la definición clásica o laplaciana, ya que no todos los puntos muestrales son equiprobables o por lo menos no se está seguro de que esto ocurra.

Ante esta situación, se puede aproximar la probabilidad del evento A por medio de una muestra aleatoria, estrategia que se utilizó anteriormente y que también es válida para enfrentar el problema. Es decir se puede repetir el experimento una cantidad grande de veces y determinar la proporción de veces en que la tachuela cae con la punta hacia arriba. Evidentemente es apenas una aproximación, pues el valor encontrado podría estar muy lejos del valor real, entre más repeticiones se realicen mejor será la estimación. Por ejemplo, suponga que se lanza 100 veces de las cuales en 35 la tachuela cayó con la punta hacia arriba, entonces una aproximación de la probabilidad de este evento es $\frac{35}{100} = 0{,}35$.

Por ejemplo en el salón de clases se les puede pedir a los estudiantes que se reúnan en grupos, de modo que en cada grupo se repita el experimento 50 veces. Es de esperar que la frecuencia relativa de veces que cae la tachuela con la punta hacia arriba es diferente en cada grupo.

¿Cuál podría ser una forma de unificar los resultados de los grupos?

Para tener una mejor aproximación de la probabilidad que la tachuela caiga con la punta hacia arriba se puede obtener el promedio de las diferentes frecuencias relativas, teóricamente esta estrategia supone una estimación un poco más precisa.

Enfoque frecuencial o empírico de probabilidad

De acuerdo al fragmento histórico que se planteó anteriormente, el cual aparece en la enciclopedia en línea Wikipedia, Laplace creó una curiosa fórmula para expresar la probabilidad de que el Sol saliera por el horizonte. Él decía que la probabilidad era de (d + 1) / (d + 2), donde d es el número de días que el sol ha salido en el pasado. Laplace decía que esta fórmula, que era conocida como la regla de sucesión, podía aplicarse en todos los casos donde no sabemos nada, o donde lo que conocíamos fue cambiado por lo que no. Aún es usada como un estimador de la probabilidad de un evento, si se sabe el lugar del evento, pero sólo se tiene muy pocas muestras de él.

Como se ha analizado en las actividades anteriores, la definición clásica presenta limitaciones en muchos casos. Por lo tanto, se ha recurrido a lo que se denomina *enfoque frecuencial* o *empírico de probabilidad*, el cual utiliza a la frecuencia relativa de resultados de una muestra como una estimación de la probabilidad de un evento. Este enfoque se resume formalmente a continuación:

Si se hace n número de observaciones de una misma clase, donde n es grande, y se encuentra que el evento A ocurre en s ocasiones, entonces la probabilidad del evento A es aproximadamente $P(A) \approx \frac{s}{n}$.

Es importante indicar que a diferencia de la definición clásica de probabilidad, la definición frecuencial o empírica de probabilidades requiere de la experiencia para obtener la frecuencia relativa de un evento en un experimento dado.
Por lo tanto, con base a esta definición, se entiende como *probabilidad de ocurrencia* de un evento a un cierto valor, generalmente desconocido; al cual tienden las frecuencias relativas al aumentar el número de observaciones en que están basadas.

El concepto anteriormente definido resulta de gran utilidad para el análisis de diversas situaciones de la vida real. La siguiente actividad es un ejemplo concreto de esta situación.

Actividad 11

El problema del bajo peso al nacer en los niños tiene grandes repercusiones en su desarrollo. De acuerdo con algunos estudios el bajo peso al nacer está relacionado con el 60% de las muertes infantiles. Los bebés que nacen con peso bajo pueden tener graves problemas de salud durante los primeros meses de vida y su riesgo de sufrir incapacidades a largo plazo es mayor.

Diferentes estudios han demostrado que las madres que fuman cuando están embarazadas tienen una mayor probabilidad de tener hijos con bajo peso y por ende con mayor probabilidad de tener complicaciones de salud. Tomando como referente la *información del artículo Factores de riesgo en el bajo peso al nacer, publicado en Revista Cubana de Medicina General Integral, julio-septiembre, 1995; seguidamente se simuló un escenario basado en esta relación, para 1000 partos.*

Relación entre fumar durante el embarazo y el bajo peso al nacer en los niños

Madres	***Bajo peso al nacer***		***Total***
	Sí	*No*	
Fumadoras	*46*	*307*	*353*
No fumadoras	*39*	*608*	*647*
Total	*85*	*915*	*1 000*

Tomando como referente esta información, estime:

a) *La probabilidad que una madre que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso.*

b) *La probabilidad que una madre no fumadora tenga un niño con bajo peso.*

c) *¿Cuántas veces más probable es que una mujer que fumó durante el embarazo tenga un niño con bajo peso respecto a una madre que no fumó en ese período?*

Análisis sobre la actividad 11

a) Debido a que se analizaron a 353 madres que fumaron durante el embarazo, de las cuales 46 tuvieron niños con bajo peso, por ello la probabilidad que una madre que ha fumado durante el embarazo tenga un niño con bajo peso se puede estimar por $\frac{46}{353} \approx 0{,}130$. Por lo que los datos indican que alrededor de 13 de cada 100 nacimientos de madres fumadoras tienen niños con bajo peso al nacer.

b) Utilizando el mismo análisis con las madres no fumadoras, se tiene que la probabilidad que una madre que no ha fumado durante el embarazo tenga un niño con bajo peso es $\frac{39}{647} \approx 0{,}060$, por lo que los datos indican que seis de cada 100 niños de madres que no fuman durante el embarazo tienen niños con bajo peso.

c) La razón entre ambas probabilidades es $\frac{\frac{46}{353}}{\frac{39}{647}} \approx 2{,}16$. Esto significa que una madre que fuma durante el embarazo tiene un poco más de dos veces más riesgo de tener un hijo con bajo peso que una madre que no ha fumado durante el embarazo.

Evidentemente los resultados acá aportados corresponden a una simulación sobre una situación que se ha observado en diferentes estudios, pero queda claro la importancia de utilizar este recurso para diversas investigaciones.

VII. Introducción a ley de los grandes números.

Actividad 12

Un par de hermanos Carlos y Alberto dejan al azar, el tener que lavar los platos después de almuerzo. Para esto lanzan una moneda al aire; si cae corona Carlos lava los platos y si cae escudo Alberto lo hace. En las últimas 4 ocasiones a Carlos le ha tocado lavar los platos ya que al lanzar la moneda al aire ha salido corona. Él piensa que la moneda que utilizan está cargada ya que, según él, deberían haber lavado los platos dos veces cada uno, porque ante el lanzamiento de una moneda que se supone está bien balanceada hay igualdad de las posibilidades de obtener escudo y corona.

¿Es correcto lo que piensa Carlos?

Análisis de la actividad 12

Estos datos no necesariamente indican que la moneda está cargada, porque aunque las posibilidades sean iguales de obtener escudo y corona en un experimento aleatorio, es posible que al repetir el experimento pocas veces se presente un único resultado o una aparente tendencia a obtener mayoritariamente un resultado por encima de otro.

Si la moneda está bien balanceada, al lanzarla cuatro veces se pueden obtener 16 resultados diferentes, de ellas sólo en una se puede obtener cuatro coronas (*cccc*), por lo que la probabilidad que ocurra esta situación es $\frac{1}{16} = 0{,}0625$, que indica que en seis de cien repeticiones podría ocurrir el hecho, lo cual lo hace probable.

Si se quisiera valorar si la moneda está cargada, se debería repetir más veces el experimento, pues es de esperar que conforme se incremente el número de repeticiones la frecuencia relativa de ocurrencias deberá convergir hacia el valor real de la probabilidad.

Por ejemplo, se han simulado 300 lanzamientos de una moneda bien balanceada, los resultados se representan a continuación con las letras *e* y *c* para escudo y corona respectivamente.

e	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*c*
c	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*
e	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*
c	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*
e	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*
e	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*
c	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*	*c*
c	*c*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*
c	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*
c	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*
c	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*
c	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*
e	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*c*	*e*
c	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*	*e*
c	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*e*	*c*	*e*	*e*	*e*	*e*

Tomando en cuenta estos datos se puede estimar la probabilidad de escudo en relación con un número de repeticiones particular. Esta información se resume en el cuadro:

Probabilidad empírica de obtener escudo de acuerdo con el lanzamiento de una moneda

Número de repeticiones	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
20	8	0,400
100	42	0,420
200	94	0,470
300	147	0,490

Con este ejemplo se muestra como a medida que se incrementa la cantidad de repeticiones del experimento, la probabilidad de obtener escudo converge a 0,500, que debería ser lo correcto.

Ley de los grandes números

La situación descrita en la actividad anterior ha mostrado que mediante la probabilidad empírica o frecuencial, a medida que se aumenta el tamaño de la muestra este valor converge al valor real de la probabilidad del evento. Esta propiedad de la probabilidad empírica se denomina *Ley de los Grandes Números*, la cual fue formulada por Jakob Bernoulli y "bautizada" por Siméon Denis Poisson.

Un poco de historia

Jakob Bernouilli (1654-1705) demostró la llamada Ley de los Grandes Números que enunciada de una forma sencilla dice así:

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. En otras palabras, la Ley de los Grandes Números plantea que la frecuencia relativa se va estabilizando cuando aumenta el número de observaciones.

En ella se establece que los fenómenos eventuales, que circunstancialmente se producen o manifiestan al examinar continuadamente un mismo acontecimiento, decrecen en su irregularidad hasta adquirir una “constante”, a medida que aumenta el número de veces en que la observación es realizada o se extiende la cantidad de hechos a que se aplica dicha observación.

Cuando la aplicación de la Ley de los Grandes Números se efectúa sobre una adecuada y suficiente base estadística, puede logar establecer el grado de probabilidad de que se produzca un determinado acontecimiento (fallecimiento de una persona dentro de una colectividad humana, incendio de un edificio en el conjunto de una masa de inmuebles, etc.). Por ejemplo, esta ley es la base fundamental de la técnica actuarial en cuanto se refiere al cálculo y determinación concreta de las primas que deben aplicarse para la cobertura de riesgos.

Asimismo, en probabilidades, la Ley de los Grandes Números determina que para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima a la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta. En este caso, el espacio muestral del experimento sería el total de observaciones realizadas y un evento determinado sería las observaciones en las cuales ocurrió el evento

Para analizar un caso real en el que se aplica esta ley se propone la siguiente actividad, la cual puede ser desarrollada en las lecciones del colegio.

Actividad 13

a) *Históricamente se ha creído que son igualmente probables los eventos de que nazca un niño o una niña en un parto aleatoriamente escogido (sin tomar en cuenta partos múltiples). De acuerdo con información del Registro Civil de Costa Rica y publicada en la página Web: ccp.ucr.ac.cr, para el año 2009, en el cantón central de Heredia, nacieron 951 niños y 982 niñas. Según esta información ¿Cuál es la probabilidad que naciera una niña en ese año en el cantón Central de Heredia? (utilice tres decimales en su cálculo). Estos datos ¿confirman o desvirtúa esa creencia tradicional? ¿por qué?*

b) *Para complementar lo anterior, en el siguiente cuadro se incluye la cantidad de nacimientos ocurridos en ese cantón entre el 2000 y el 2010.*

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Masculinos	963	1102	959	988	988	978	925	939	958	951	944
Femeninos	969	988	924	1009	927	924	859	917	979	982	915

Con esta nueva información determine ahora la probabilidad de un nacimiento de una niña en el cantón Central de Heredia entre el 2000 y el 2010. ¿Qué puede decir ahora respecto a las preguntas planteadas en la parte a?

c) *Para continuar con el análisis en el Cantón Central de Heredia, entre los años 1972 y el 2010, se registraron 33 662 nacimientos masculinos contra 32 247 nacimientos femeninos ¿A qué conclusión se puede llegar con esta nueva información? ¿Qué puede decir ahora sobre la creencia de que el nacimiento de un niño o niña son igualmente probables?*

Análisis de la Actividad 13

a) Ante esta primera interrogante se espera que el análisis esté direccionado de la siguiente manera:

Total de nacimientos en el año 2009: 1933
Cantidad de niñas nacidas en el año 2009: 982
Probabilidad empírica o frecuencial de obtener un nacimiento de una niña sería

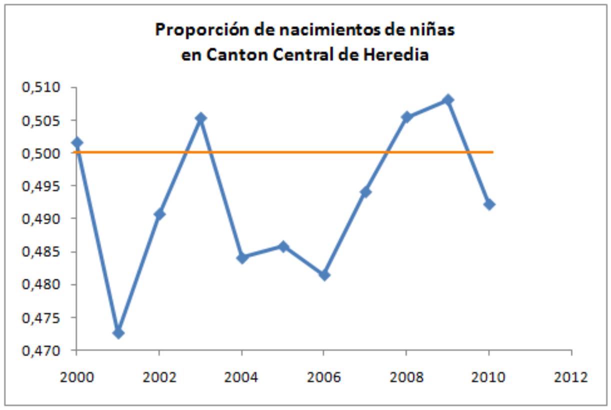
$$\frac{982}{1933} = 0,508$$

Al estar trabajando con una muestra, no siempre los resultados obtenidos corresponden al valor real, por ello dicho resultado no genera importante discrepancia respecto a la creencia tradicional.

b) Es trascendental tener claro que lo importante de un problema de esta naturaleza no es el cálculo sino el análisis y la argumentación que se realice. Es por esto que es preferible observar el comportamiento de la probabilidad empírica año a año para ver el patrón.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	**Total**
Masculinos	963	1102	959	988	988	978	925	939	958	951	944	**10695**
Femeninos	969	988	924	1009	927	924	859	917	979	982	915	**10393**
Total de nacimientos	1932	2090	1883	1997	1915	1902	1784	1856	1937	1933	1859	**21088**
Proporción de niñas	**0,502**	**0,473**	**0,491**	**0,505**	**0,484**	**0,486**	**0,482**	**0,494**	**0,505**	**0,508**	**0,492**	**0,493**

Hay que enfatizar que aunque existe un valor cercano a 0,50 para la proporción de niñas; en la mayoría de los casos esta proporción es menor, lo que pone en duda la afirmación original, esto se confirma al analizar la proporción total que corresponde al análisis de 21 088 nacimientos. Esto se puede notar mejor en el gráfico.



Por todo lo anterior, al analizar cada vez más nacimientos se evidencia una tendencia a que la creencia original es falsa y que la probabilidad que nazca una niña es menor a 0,50. Por ello hay que saber encausar adecuadamente las respuestas que generen los estudiantes.

c) Se tienen 32 247 casos favorables para el nacimiento de una niña de un total de 65 909 nacimientos entre 1972 y el 2010 en el Cantón Central de Heredia. Por ello, la probabilidad empírica de nacimiento de una niña se estima en:

$$\frac{32247}{65909} = 0,489$$

Esto aporta más evidencia en relación con la creencia original, pues por la ley de los grandes números a medida que se aumenta la muestra la probabilidad frecuencial o empírica se aproxima cada vez más a su valor real.

La anterior sería la conclusión a la que se esperaría llegar, en general, hay una mayor cantidad de nacimientos masculinos que femeninos, la estimación que se ha hecho a nivel mundial es que por cada 100 mujeres aproximadamente nacen 105 hombres. Este dato es muy parecido al que se obtuvo en la actividad.

VIII. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema para iniciar la lección.
2. Trabajo estudiantil independiente
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionado con el desarrollo de una habilidad propuesta para octavo año

Concepto	Habilidad específica
Definición (definición laplaciana)	Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con él? Luego, para este momento, un principio educativo que sigue teniendo gran relevancia en la actualidad es el enunciado por Ausubel y cols. (1983):

> *“el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enseñe consecuentemente”*

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrollas en niveles anteriores como:

- ✓ Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.
- ✓ Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio, y representarlos por medio de diagramas de Venn o de árbol.
- ✓ Determinar eventos dentro de una situación aleatoria y sus resultados a favor y clasificar los eventos en simples o compuestos.
- ✓ Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.
- ✓ Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor da cada evento.

Planteamiento del problema

Al lanzar dos dados Cindy y Karla realizan el siguiente juego: Cindy gana si la suma de los puntos es 2, 3, 4, 5, 10, 11 o 12; mientras que Karla gana si la suma de los puntos es 6, 7, 8 o 9. Karla reclama que al tocarle menos números, Cindy va a ganar el mayor número de veces; no obstante, proceden a jugar. Después de jugar 20 veces, Cindy únicamente ha ganado en 7 oportunidades. De acuerdo con lo anterior, responda las siguientes interrogantes.

a) Para un juego particular, es decir un lanzamiento de los dados ¿cuántos puntos tiene el espacio muestral? Se considera punto muestral un resultado simple al lanzar los dados, por ejemplo (3,5) significa que en el primer dado se obtuvo un tres y en el segundo un cinco.

b) ¿Serán estos puntos muestrales igualmente probables? O existe duda de que unos resultados son más probables que otros.

c) ¿Cuántos puntos muestrales están a favor del evento A: Cindy gana el juego?

d) De acuerdo con lo anterior ¿Quién tiene más probabilidad de ganar el juego: Cindy o Karla?

e) Determine la razón entre los puntos muestrales a favor del evento A entre el total de puntos del espacio muestral? Interprete este valor.

f) Repita el inciso e) anterior, pero ahora para el evento B: Karla gana el juego.

g) ¿A qué conclusiones se llega respecto a la inquietud planteada por Karla, sobre que Cindy tiene más probabilidad de ganar el juego porque se le asignaron más números?

Una actividad de este tipo puede ser trabajada en subgrupos de tres o cuatro estudiantes.

Trabajo estudiantil independiente

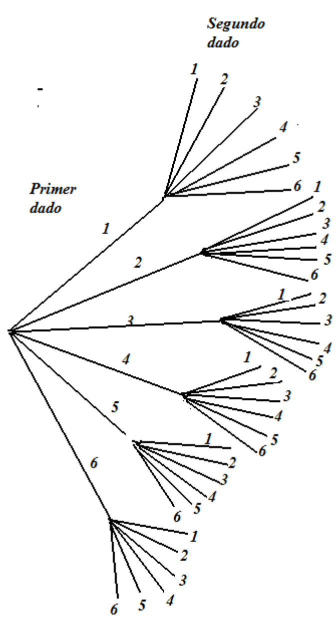
En esta etapa se espera que los estudiantes lean la situación planteada y cada una de las interrogantes, además diseñen una estrategia para abordar el problema integralmente. Seguidamente deben iniciar el proceso de resolución del problema, procurando en el proceso tener en cuenta cada una de las preguntas. Se debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación entre los estudiantes y estimularlos para que se enfrenten a la situación problema. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con los estudiantes para orientar sus trabajos y percepciones; pero debe permitir la discusión entre los jóvenes en relación con la búsqueda de soluciones.

Por último los resultados deben enfocarse a ofrecer las respuestas a cada interrogante en relación con el contexto en que se planteó el problema.

Discusión interactiva y comunicativa

En este momento, el docente discute las posibles respuestas de los estudiantes y revisa la primera parte de la actividad.

a) La identificación de los puntos del espacio muestral se puede haber llevado a cabo de muchas maneras, desde la enumeración total en forma textual hasta el uso de diagramas o cuadros. Por ejemplo {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), …, (6,6)}, o como se muetra a continuación un diagrama de árbol o un cuadro.



Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Independientemente del método que hayan utilizado los estudiantes, lo importante es que identifique el total de puntos muestrales y por ende el espacio muestral correspondiente.

b) Con la pregunta b) se pretende que el estudiante identifique que todos los puntos muestrales son equiprobables, es decir no hay evidencia para que se piense que unos puntos pueden ser más probables que otros, pues se supone que los dados están bien balanceados.

c) Debido a que Cindy gana el juego si la suma de los puntos de los dados es 2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12. Acá los estudiantes deben utilizar los resultados previos para identificar los puntos muestrales por medio de los cuales se pueden obtener estos resultados. Estos resultados pueden ser obtenidos de diferentes maneras, una de ellas consiste en presentar los datos en un cuadro.

Suma de los puntos obtenidos ante el lanzamiento de dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La cantidad de casos favorables del evento A (suma igual a 2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12) es 16, es decir Cindy puede ganar el juego de 16 formas distintas.

d) Debido a que en total hay 36 posibles resultados, de los cuales Cindy puede ganar de 16 formas, se espera que los estudiantes puedan identificar rápidamente que Karla tiene 20 formas de ganar el juego. Por ello deberían poder concluir que es más probable que gane Karla.

e) La razón de los puntos muestrales a favor del evento *A* entre el total de puntos del espacio muestral viene dada por $\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$. Lo que significa que, desde un punto de vista teórico, de cada nueve juegos Cindy esperaría ganar cuatro (es decir 44 de cada 100 juegos).

f) Del mismo modo, como hay 20 resultados favorables a favor del evento B, entonces la razón de casos favorables a favor del evento B entre el total de puntos muestrales es $\frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56$. Lo que significa que desde un punto de vista teórico, Karla podría ganar el juego en cinco de cada nueve intentos.

g) Finalmente, con esta información se espera que los estudiantes puedan concluir sobre el problema que después de jugar 20 veces, Cindy ha ganado en 7, es decir en una razón de $\frac{7}{20} = 0{,}35$, lo cual está dentro de lo común tomando en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. Al mismo tiempo, la creencia original de Karla era falsa, pues no analizó con detalle los pormenores del juego.

Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

Clausura o cierre

Debido a que la habilidad básica que se pretende desarrollar con la actividad consiste en que puedan interpretar la probabilidad de un evento como la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales. Este concepto de probabilidad se denomina concepto clásico o laplaciano. El docente debe utilizar los resultados obtenidos para institucionalizar el concepto, puede hacer una referencia histórica y puede plantear una segunda actividad, vinculada con el mismo problema con el fin de lograr que los estudiantes adquieran otras habilidades.

Bibliografía

Alcázar, A. (2007). *Historia de la probabilidad*. Recuperado de http://web.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf

Gómez, M. (2010). *Elementos de estadística descriptiva.* San José, Costa Rica: EUNED

Lipschutz, S. & Schiller, J. (2000). *Introducción a la probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill.

Pierre Simon Laplace. (2011). *Wikipedia*. Recuperado en julio 28, 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

Triola, M. (2004). *Probabilidad y estadística*. México: PEARSON EDUCACION.

Varona, P., Herrera, D., García, R., Bonet, M., Romero, T. & Venero, S. (2009, abril-junio). Mortalidad atribuible al tabaquismo en Cuba. *Revista Cubana de Salud Pública, 35*(2). Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0864-346620090002&lng=es&nrm=iso

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas, que forma parte del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autor
Edwin Chaves Esquivel
Luis Hernández Solís

Revisor
Jonathan Espinoza González

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública (2011). Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Probabilidad. San José, Costa Rica: autor.