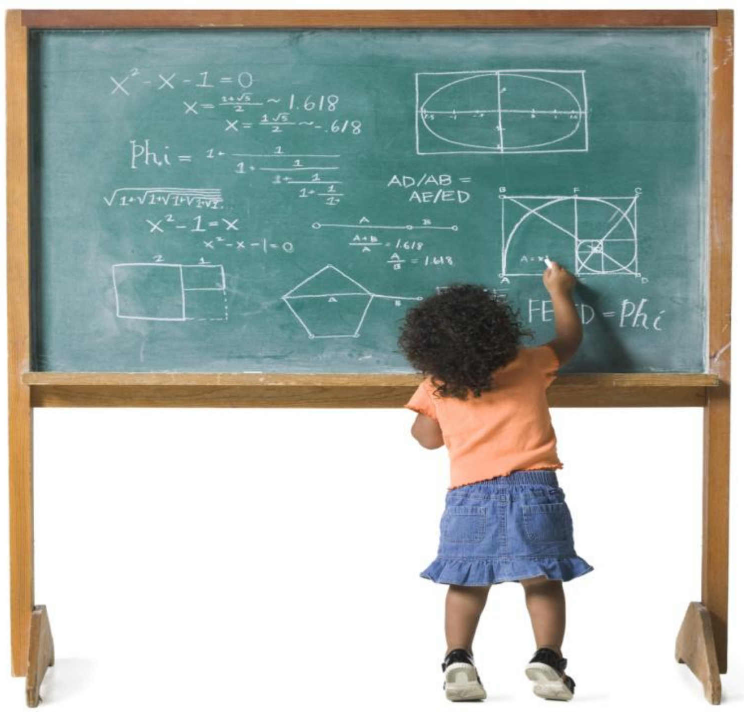
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas



Relaciones y Álgebra

2011

Tabla de contenido

Presentación

El *Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las Matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar Matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en Matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Tercer Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar cuatro de las áreas que se proponen en los nuevos programas. En *Números* se deja de lado la visión conjuntista para dar paso al tratamiento del sentido numérico, el cálculo operacional y mental. *Geometría* que incluye tópicos relacionados a la visualización espacial, transformaciones geométricas y plano cartesiano. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora desde primaria. *Relaciones y Álgebra* como novedad introduce el trabajo con sucesiones y el tratamiento de la función lineal y la cuadrática. El área de *Medidas* se trabajará de forma transversal respecto a las otras áreas antes mencionadas. Estas cuatro unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Tercer Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes pilotos en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

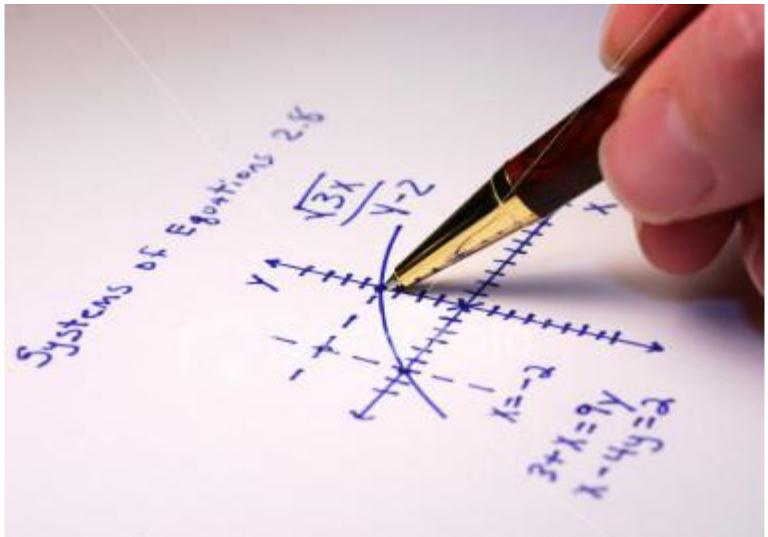
Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente,

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Relaciones y Álgebra



Habilidades generales

Conocer y aplicar algunos conceptos en el área de *Relaciones y álgebra* para Tercer ciclo en el planteamiento de problemas en el aula.

Introducción

La humanidad a lo largo de su existencia ha sentido la necesidad de comprender y explicar los fenómenos de su entorno para su beneficio, desde predecir cuáles son las mejores temporadas para sembrar y comprender cómo se originan las estaciones del año hasta la predicción de eclipses y la realización de viajes al espacio. Es importante destacar que el ser humano ha buscado la mejor manera de representar estos fenómenos mediante la construcción del concepto de variable, símbolos, el uso de modelos, tabulación de datos y gráficas, entre otros. El manejo fluido de estas formas de representación es clave para lograr el entendimiento de situaciones del contexto inmediato al ser humano, pues facilitan su interpretación y permiten definir estrategias para una adecuada toma de decisiones alrededor de él. Es por ello que la noción de función como una relación de correspondencia entre dos conjuntos no se trabajará en el presente documento, ya que la prioridad es el manejo de la noción de dependencia entre variables y sus diferentes formas de representación.

Este material está dirigido a docentes de secundaria, pretende analizar algunos tópicos de *Relaciones y Álgebra* mediante la construcción de actividades y problemas bajo el enfoque de la propuesta de nuevos programas de estudio en Matemáticas.

I. Sucesiones. Ley de formación de una sucesión

Actividad 1

El matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci en su obra Libro del Ábaco publicada en el año 1202 planteó un problema famoso que se enuncia a continuación:

Suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja de conejos procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendremos al final de un año?

Análisis de la Actividad 1

Como se especifica en los fundamentos de los nuevos programas de Matemáticas, la Historia de las Matemáticas puede verse como un recurso para proporcionar oportunidades didácticas especiales para el desarrollo de la lección. Uno de sus usos es precisamente el enriquecimiento de la resolución de problemas, donde se destaca:

> Al proponerse un problema matemático de un periodo histórico no sólo se ofrece la oportunidad para identificar esas relaciones entre matemáticas y otras Ciencias o dimensiones culturales, sino para usar desafíos interesantes que pueden poner en movimiento procesos. Hay una estimulante intersección entre uso de Historia y resolución de problemas. (p. 64)

En esta oportunidad, se propone un problema que se trabajó siglos atrás, el cual brinda opciones valiosas para desarrollar un tema en el salón de clase. Para iniciar el tratamiento de esta situación, es necesario fomentar en los estudiantes el realizar representaciones gráficas que permitan comprender el problema y posteriormente el uso de representaciones tabulares que resuman esta información. A continuación se ofrece una posible estrategia de representación para ser considerada por el docente:

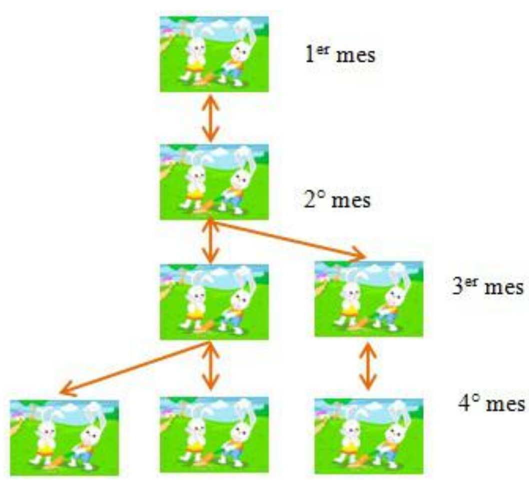


Imagen de los conejos cortesía de AKARAKINGDOMS at FreeDigitalPhotos.net

No. de Mes	Explicación	Cantidad de parejas
1	La pareja A tiene un mes de edad. Se cruza la pareja A.	1
2	La pareja A tiene dos meses. Está próxima a parir.	1
3	La pareja A da a luz a la pareja B. Se vuelve a cruzar la pareja A.	2
4	La pareja A da a luz a la pareja C. La pareja B cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A y B.	3
5	Las parejas A y B dan a luz a D y E. La pareja C cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A, B y C.	5
6	A, B y C dan a luz a F, G y H. D y E cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D y E.	8
. . .	A, B, C, D y E dan a luz a I, J, K, L y M. F, G y H cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D, E, F, G y H.	13
12	. . .	. . .

Se podría continuar completando la tabla anterior, sin embargo, después de haber trabajado es posible interpretar como se comportan los datos. En efecto, se puede observar que la cantidad de parejas de conejos al final de cada mes se obtiene sumando la cantidad de parejas obtenidas en los dos meses anteriores. Dicha afirmación se puede verificar en el siguiente cuadro resumen:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	…	12
Cantidad de parejas	1	1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	2 + 3 = 5	5 + 3 = 8	8 + 5 = 13	…	89 + 65 = 144

Así se puede establecer que al final del año habrá 144 parejas de conejos.

Este manejo de los datos y su ordenamiento en una secuencia sirven como elemento motivador para introducir de forma intuitiva el concepto de sucesión.

Sucesión

Una sucesión se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a(1), a(2), \ldots, a(n)$$

El número a(1) es el primer término y en general a(n) es el enésimo término. Observe que para cada número natural n hay un número correspondiente a(n). Por ejemplo, en la siguiente sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

se puede establecer que 8 representa el cuarto término de la sucesión y que 20 representa el décimo. Nótese que aunque 20 no está descrito en forma explícita en la sucesión, el reconocimiento del patrón que describe esta sucesión permite predecir los términos sucesivos.

Algunas sucesiones se pueden definir mediante una fórmula para el enésimo término, la cual se denomina ley de formación o término general de la sucesión. Por ejemplo, a continuación se ofrecen algunas leyes de formación y su desarrollo tabular respectivo:

<table>
<tr><th>Ley de formación</th><th>Desarrollo</th></tr>
<tr><td>$a(n) = 2n - 1$</td><td><table><tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Término enésimo</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a(n) = \frac{3n-1}{5}$</td><td><table><tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Término enésimo</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td>1</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{11}{5}$</td><td>$\frac{14}{5}$</td><td>$\frac{17}{5}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Para la movilización de los conocimientos, se proponen los siguientes problemas cuyo nivel de dificultad es de *Reproducción*.

Determine la ley de formación que corresponde al desarrollo de cada una de las siguientes sucesiones.

a) $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$

Solución

Se debe considerar que la diferencia entre el numerador y el denominador es de 1, lo cual puede expresarse con *n* y (*n* + 1) respectivamente. Además, el signo de la fracción que se alterna puede expresarse con el uso de la potencia $(-1)^n$. Finalmente, se tiene que la ley de formación está dada por

$$a(n) = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

b) *9, 99, 999, 9999, …*

Solución

Se puede observar que los términos son valores cercanos a números que corresponden a potencias de base 10. De hecho, son valores que corresponden al antecesor de dichas potencias. Se puede escribir de la siguiente manera:

$$a(n) = 10^n - 1$$

c) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2} \ldots$

Solución

Aquí se evidencia en los numeradores una sucesión de números impares, y un denominador constante. Así, la ley de formación es

$$a(n) = \frac{2n-1}{2}$$

El manejo con sucesiones permite ejercitar en la/l estudiante la habilidad para el reconocimiento de patrones y el establecimiento de relaciones entre diferentes elementos, lo cual le permitirá más adelante tener un manejo adecuado de las diferentes formas de representación para obtención y manejo de modelos matemáticos.

Un poco de historia

El problema de los conejos de Fibonacci fue tomado del libro Historical topics for the Mathematics classroom (NCTM, 2006). Un problema como este puede ser desarrollado de forma histórica y ser también conectado a diferentes áreas de conocimientos como la arquitectura, el arte, la naturaleza, entre otros.

Los patrones formados por sucesiones aritméticas y geométricas son muy antiguos. El papiro Rhind contiene problemas relacionados con estas sucesiones, que fueron copiados por el escriba egipcio Ahmes, alrededor de 1650 A. C. En el año 1202, el matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci y considerado uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media en Europa, planteó problemas parecidos a los encontrados en dicho papiro, en su obra LiberAbaci (Libro del Ábaco), un libro con quince capítulos que popularizó el sistema de numeración hindo-arábico en Europa. En la época en que vivió Fibonacci no existía la imprenta. Sus libros, así como las copias de ellos, fueron escritos a mano.

Un problema famoso planteado por Fibonacci en la obra mencionada es el de la reproducción de conejos: suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja de conejos procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendremos al final de 1 año?

Los primeros números de Fibonacci son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.$ Se observa que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. La sucesión anterior se conoce como sucesión de Fibonacci, mientras que los números que aparecen en ella se llaman números de Fibonacci. Esta sucesión ha encontrado aplicaciones en las artes, la arquitectura, el mercado financiero y la razón áurea. Es realmente un tema interesante para un trabajo de investigación de los estudiantes.

Por ejemplo, en la flor del girasol se encuentran pequeños granos en forma de diamante, encerrados por arcos de curvas en forma de espirales logarítmicas con origen en el centro, de tal manera que el número de espirales en la dirección de las agujas del reloj y el número de espirales en la dirección contraria son términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci: 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 en un sentido y 144 en el otro.

Imagen cortesía de seaskylab y FreeDigitalPhotos.net

Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales. El número de espirales de una piña también sigue un patrón de acuerdo a la sucesión de Fibonacci: 8 y 13, o bien 5 y 8.

Según la filotaxia, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo la sucesión de Fibonacci.

Por lo general, las sucesiones como las de Fibonacci, cuyo término que ocupa la posición n depende de dos o más términos anteriores son muy importantes, y la expresión que permite calcular un término de la sucesión a partir de términos anteriores se denomina relación recursiva, y es usual decir que la sucesión es recursiva o definida recursivamente.

II. Proporcionalidad inversa

Actividad 2

A una velocidad de 40 km por hora, un automóvil emplea 8 horas y 15 minutos en recorrer el trayecto de una ciudad a otra.

a. *Establezca una ley de formación o modelo que permita establecer una relación entre la velocidad y el tiempo empleados para realizar dicho recorrido.*
b. *Haga una gráfica que ilustre esta situación.*
c. *¿Cuánto tiempo aproximadamente se hubiera tardado en hacer el recorrido si aumenta la velocidad a 78 km por hora?*

Análisis de la Actividad 2

Cuando se estudia un fenómeno se debe emplear formas de representación que permitan un acercamiento inicial para comprender y predecir el comportamiento de los elementos involucrados.

Se puede deducir fácilmente que si se duplica o triplica la velocidad, se disminuye en la mitad o la tercera parte el tiempo empleado para hacer el recorrido. A la vez, si se disminuye la velocidad a la mitad, el tiempo se duplicaría. Este razonamiento conduce fácilmente al desarrollo de la siguiente noción:

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes inversamente proporcionales son aquellas que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo, y al dividir una por un número la otra queda multiplicada por ese mismo número.

Por ejemplo, si 4 hombres hacen una obra en 6 días, 8 hombres harían la obra en 3 días y 2 hombres harían la obra en 12 días. Otras magnitudes inversamente proporcionales son:

- los días de trabajo y las horas diarias que se trabaja.
- la velocidad de un móvil y el tiempo empleado para recorrer un camino.
- El volumen de un gas y la presión atmosférica (Ley de Boyle).
- La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos y el cuadrado de la distancia entre ellos (Ley de Gravitación Universal).

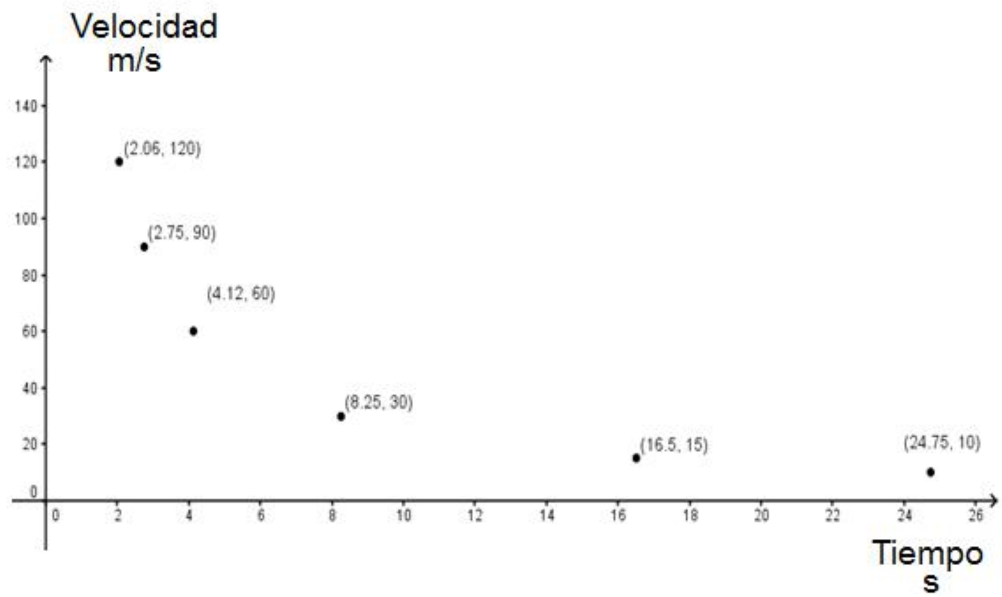
Continuando con el análisis de la actividad propuesta, si se retoman las ideas anteriores se puede construir una tabla que resuma en forma numérica lo discutido como por ejemplo::

Velocidad $\frac{km}{h}$	10	15	30	60	90	120
Tiempo h	24,75	16,5	8,25	4,125	2,75	2,0625

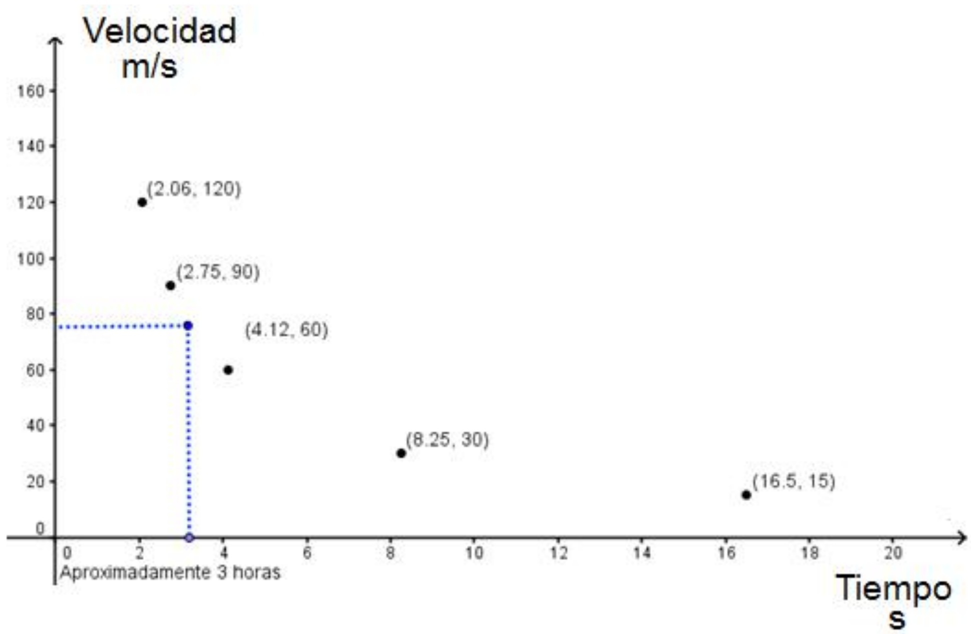
Nota: Para un correcto manejo de las unidades de medida, se expresa 8 horas y 15 minutos en su forma decimal 8,25.

En la tabla anterior, ya se puede intentar "estimar" el tiempo que tarda en recorrer el trayecto cuando aumenta la velocidad a 78 km por hora. En efecto, si se aumenta a esa velocidad, dicho valor se encuentra entre 60 y 90 km por hora, por lo que el tiempo requerido es un valor muy cercano a 3 horas.

Su representación gráfica sería la siguiente



Observe que aquí también se puede aproximar el tiempo que hubiera tardado en hacer el recorrido si aumenta la velocidad a 78 km por hora. Como aumenta la velocidad a 78 km por hora, en la representación gráfica se puede observar que el tiempo empleado para hacer el recorrido es un valor muy cercano a 3 horas.



Si se pone en juego la habilidad de reconocer patrones y comportamientos en los datos descritos anteriormente, se puede observar que el producto de la velocidad y el tiempo es constante. En efecto:

Velocidad $\frac{km}{h}$	10	15	30	60	90	120
Tiempo h	24,75	16,5	8,25	4,125	2,75	2,0625
Producto	247,5	247,5	247,5	247,5	247,5	247,5

De ese modo, si se designa con *t* el tiempo que dura en realizar el recorrido *y v* la velocidad, se puede establecer *la ley de formación* que relaciona las variables como $v \cdot \mathrm{t} = 247{,}5$, o bien $v = \frac{247{,}5}{t}$ o $t = \frac{247{,}5}{v}$.

El producto de dos magnitudes inversamente proporcionales es constante.

Generalizando, la representación algebraica de magnitudes *inversamente proporcionales* se caracteriza por tener la forma

$$y = \frac{k}{x} \text{ con k constante.}$$

donde la gráfica no pasa por el origen de coordenadas (0,0). La constante *k* se denomina *constante de proporcionalidad inversa.*

Para esta actividad, se puede afirmar que la constante de proporcionalidad inversa entre las variables es 247,5, la cual en el contexto del problema corresponde a la distancia en metros del recorrido. Así, se podría determinar más precisamente cuánto tiempo se requiere para hacer el trayecto si la velocidad alcanza los 78 km por hora:

$$v \cdot \mathrm{t} = 247{,}5$$
$$78 \cdot \mathrm{t} = 247{,}5$$
$$t = \frac{247{,}5}{78}$$
$$t = \frac{165}{52} = 3\frac{9}{52} \text{ horas}$$

No es correcto responder que se tarda aproximadamente 3,17 horas, pues podría prestarse para confusiones. Por eso, es importante considerar las diferentes formas de representar un número que ofrece la calculadora para ver cuál de ellas permite brindar una respuesta más comprensible. Se considera factible utilizar la representación de un número mixto para determinar cuántos minutos se le añaden a esas 3 horas. Como una hora equivale a 60 minutos, se tiene que

Un manejo adecuado de las unidades de medidas evidencia la conexión con el área de *Medidas*.

$\frac{9}{52}$ de 60 min equivale a $\frac{9}{52} \cdot 60 = 10\frac{5}{13}$ min

Ahora, un minuto equivale a 60 segundos, así

$\frac{5}{13}$ de 60 min equivale a $\frac{5}{13} \cdot 60 = 23\frac{1}{13}$ s

Con lo que a 78 km por hora se tarda aproximadamente 3 horas, 10 minutos y 23 segundos.

III. Proporcionalidad directa y función lineal

Actividad 3

Analice el siguiente problema:

En el mercado central de Heredia, 2 kilogramos de queso cuestan ¢ 3200 ¿Cuánto queso se puede comprar con ¢5000? ¿Cuánto dinero es necesario para comprar 7 kilogramos de queso?

Imagen cortesía de Suat Eman at *FreeDigitalPhotos.net*

a. Para esta situación, asigne y represente simbólicamente las variables involucradas.
b. Elabore una tabla que permita visualizar la cantidad de dinero que vale una determinada cantidad de queso.
c. ¿Qué puede observar respecto al comportamiento de los valores que va tomando la cantidad de kilos de queso y sus respectivos precios?
d. Para cada pareja de valores de la tabla construida previamente, determine la razón entre cantidad de kilogramos de queso y su precio correspondiente. ¿Qué puede observar al respecto?
e. Grafique en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos obtenidos en la tabla anterior ¿Qué puede observarse de la forma en que se disponen los puntos graficados?

Análisis de la Actividad 3

Si se realiza una reflexión acerca del problema anterior, se puede inferir fácilmente que si se duplica la cantidad de kilos de queso, lo mismo ocurre con su precio. De igual modo, si se disminuye en la mitad la cantidad de kilos, se disminuye en la mitad su precio. Denotando con *x* la cantidad de kilogramos de queso y *y* el precio en colones a pagar por el mismo, se puede completar la tabla solicitada de la siguiente forma

x (*kg*)	1	2	3	4	5	6	7
y (¢)	1600	3200	4800	6400	8000	9600	11 200

Proporcionalidad directa

Si dos magnitudes son tales que a doble, triple... cantidad de la primera corresponde doble, triple...cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

Algunos ejemplos de magnitudes directamente proporcionales son:

- El tiempo y las unidades de trabajo realizadas.
- El número de artículos y el precio.
- El radio y su correspondiente circunferencia.
- El tiempo y la distancia de un recorrido.

En esta actividad, es claro que conforme se aumenta (o disminuye) la cantidad de kilos de queso, el precio aumenta (o disminuye) a una razón de¢1 600 por kilo, situación que se refleja en la tabla siguiente que muestra la razón entre dichas cantidades:

$\frac{y}{x}$	1600	1600	1600	1600	1600	1600	1600

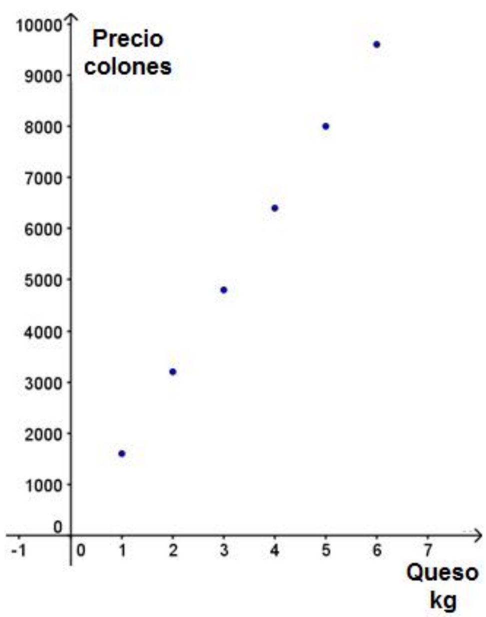
Se puede apreciar que la razón es constante, lo cual puede ser aprovechado para representar simbólicamente la relación entre sus variables:

$$\frac{y}{x} = 1600 \Rightarrow y = 1600x, \ \ x \neq 0$$

En efecto, esta característica se manifiesta cuando dos magnitudes son *directamente proporcionales*, y se puede generalizar dicha relación en la siguiente forma simbólica

$$\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = kx, \ \ x \neq 0$$

Por otra parte, al realizar la representación en el plano cartesiano, se observará que la disposición de los puntos tiene un comportamiento lineal.



Esto es característico en situaciones donde las magnitudes varían en *proporción directa*.

Actividad 4

José es un joven el cual usa con frecuencia el servicio de telefonía celular pos pago de una empresa para llamar a sus amigos durante el día. Él no es consciente de la forma en que se calcula el costo que debe pagar por dicho servicio y esta empresa le cobró durante este mes ¢23 600, lo cual considera exagerado pues él cree que solamente fueron 10 horas lo que aproximadamente el habló durante el mes. José no tiene en su teléfono servicio de Internet y necesita comprobar si realmente es correcto dicho cobro.

Análisis de la actividad 4

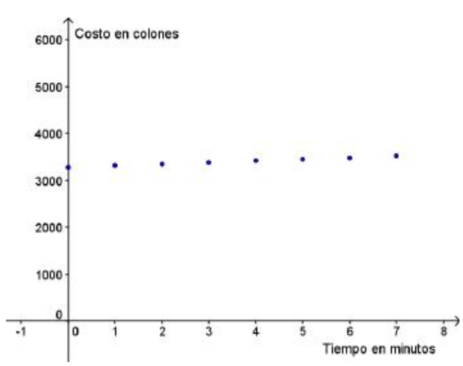
Es necesario primero buscar información acerca de la forma en que las empresas de servicio celular realizan el cálculo del costo de este servicio. Por ejemplo en el ICEexiste una tarifa básica de ¢ 3277 (i.v.i), la cual incluye 60 minutos de servicio. Después de ello, el costo por minuto de una llamada realizada entre las 6 am y las 11 pm es de ¢ 34.

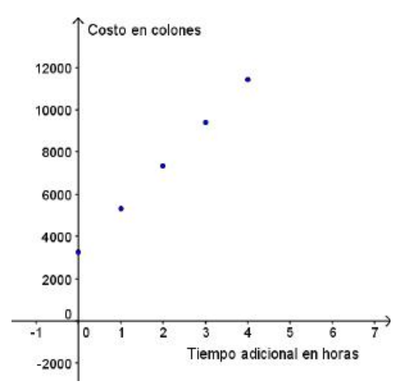
Las siguientes tablas muestran la forma de cálculo empleada, considerando el costo por minuto adicional y por hora adicional ($34 \cdot 60 \text{ min} = ¢2040$).

		Minutos adicionales							
Tiempo en minutos	Primeros 60 minutos	1	2	3	4	5	6	7	…
Costo en ¢	3277	3311	3345	3379	3413	3447	3481	3515	…

		Horas adicionales				
Tiempo en horas	Primera hora	1	2	3	4	…
Costo en ¢	3277	5317	7357	9397	11 437	…

La siguiente es una representación gráfica que permite ilustrar cómo va aumentando el costo a pagar por el uso del celular conforme transcurren los minutos y horas adicionales.





Aquí se puede apreciar que es más conveniente plantear esta situación en función de las horas adicionales, dado que José especula en dichas unidades el tiempo que duró hablando por celular.

Es importante indicar que el costo (al que denominaremos *C*) del servicio transcurrida cierta cantidad de horas adicionales *t* puede ser expresada mediante una fórmula. En efecto, esta se deduce a raíz del siguiente razonamiento: como ₡2040 es el precio que se debe pagar por hora adicional, el costo de la llamada se puede obtener por medio de la expresión $2\ 040t$. Hay un costo fijo de ₡3277 por la primera hora, por lo cual el costo por el servicio en general está dado por la expresión

$$C = 2040t + 3277$$

Así por ejemplo, si José habla aproximadamente durante 3 horas al mes, entonces habla 2 horas adicionales, por lo que la tarifa a pagar sería de

$$C = 2040 \cdot 2 + 3277 = ₡\,7357$$

Finalmente, como la tarifa pagada por José es de ₡23 600, se puede plantear que

$$23\ 600 = 2040t + 3277$$
$$23\ 600 - 3277 = 2040t$$
$$\frac{20\ 323}{2040} = t$$
$$9{,}96\ h = t$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, es evidente que José debe quedar convencido de que la empresa no cometió errores al calcular la tarifa.

Comparando esta actividad con la actividad 3, se puede observar que los modelos utilizados para representar dichas situaciones son similares; inclusive su representación gráfica es una secuencia de puntos alineados. Aprovechando los recurso obtenidos de ambas actividades se puede realizar un cierre de la sesión empleando el siguiente material:

Función lineal

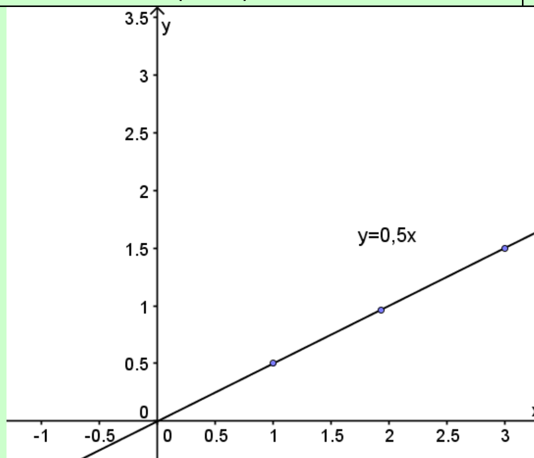
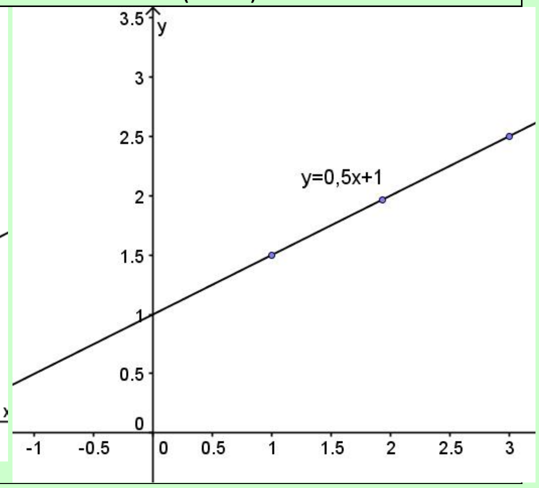
Se dice que una función es lineal si la fórmula tiene la forma:

$$y = \mathrm{kx} + \mathrm{b} \text{ o } f(x) = \mathrm{kx} + \mathrm{b},\ \mathrm{b} \neq 0$$

La pendiente k recibe por nombre constante de proporcionalidad y el término b se denomina ordenada en el origen porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen). Nótese que para el caso en que b = 0 la función lineal adopta la forma $y = \mathrm{kx}$ característica de una relación de proporcionalidad directa entre sus variables.

Cuando b ≠ 0, las funciones lineales no guardan proporción directa entre sus variables.

Observe:

Función lineal (b = 0)	Función lineal (b ≠ 0)
	

Si a partir de los puntos representados se determina la razón $\frac{y}{x}$ de sus coordenadas

Función lineal (b = 0)	Función lineal (b ≠ 0)
$\frac{y}{x} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$	$\frac{y}{x} = \frac{1,5}{1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{2,5}{3}$

se puede observar que para el caso de la función lineal (b ≠ 0) la razón entre los valores que toman sus variables no es constante y en consecuencia no hay proporcionalidad directa entre ellas.

Representación gráfica

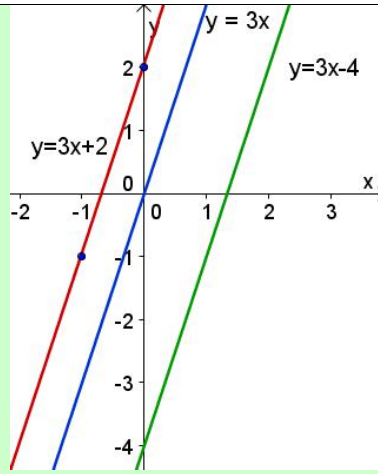
Las funciones lineales se representan mediante líneas rectas. El término independiente (b) produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica. Para trazar la gráfica se necesita obtener dos puntos:

Uno lo proporciona la propia ecuación, pues la ordenada en el origen (b) nos indica que la recta pasa por el punto (0, b).

El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Por ejemplo, en la relación descrita por la fórmula

$$f(x) = 3x + 2$$

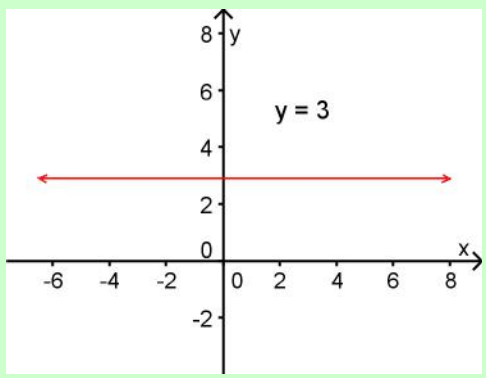
Si x = -1, entonces y = -1, con lo cual se obtiene el punto (-1, -1). Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función a continuación. Aparecen además las gráficas de y = 3x y y = 3x – 4 para visualizar la traslación que produce el término b.



Nota: Es importante observar que al unir los puntos estamos incluyendo valores que no se encuentran en la tabla (interpolación) y que corresponden a números que no han sido estudiados pero que lo serán posteriormente (los irracionales).

Casos particulares

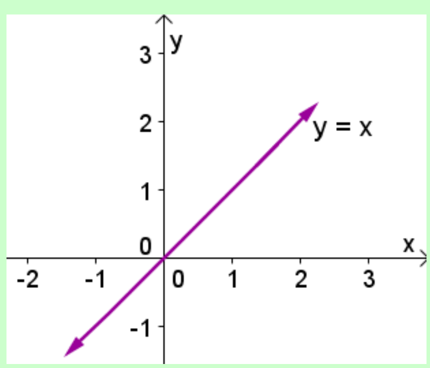
Si k = 0, la ecuación es y = b y la función se denomina constante.



Si k = 1 y b = 0, la fórmula

$$y = \mathrm{x}$$

corresponde a un tipo de función lineal denominado función identidad.



Actividad 5

Pedro monta un negocio de venta de pulseras hechas con abalorios. Él inicialmente invirtió 10 000 colones en el arreglo de una mesa que ocupa como lugar de trabajo. Por concepto de materiales, se calcula que la fabricación de cada pulsera tiene un costo de 100 colones. Él planea venderlas en 150 colones.

a. *Determine un modelo que permita obtener los gastos "R" en que incurre Pedro durante la fabricación de una determinada cantidad de pulseras "x". Considere aquí la inversión inicial hecha por él.*
b. *¿Cuántas pulseras debe vender Pedro para recuperar los gastos realizados?*

Análisis de la Actividad 5

Esta actividad permite fortalecer procesos *Plantear y resolver problemas* y *Representar*, ya que se busca utilizar modelos matemáticos que resuman las diferentes problemáticas planteadas.

Los gastos en que se incurre para producir las pulseras se obtienen al multiplicar su costo por la cantidad de ellas, al traducir esta relación a símbolos matemáticos se obtendría la expresión

$$R = 100\mathrm{x}$$

Considerando que hubo una inversión inicial, ésta se debe contemplar dentro de estos gastos, por lo que:

$$R = 100\mathrm{x} + 10\,000$$

De forma análoga se puede establecer el siguiente modelo para representar las ganancias producto de las ventas.

$$G = 150\mathrm{x}$$

Para responder a la pregunta c, se puede dar un proceso de ordenamiento de datos para reflejar o predecir cuando él recuperará el dinero invertido:

Cantidad de pulseras *x*	1	2	3	4	5	6	7	8
Gastos *R*	10 100	10 200	10 300	10 400	10 500	10 600	10 700	10 800
Ganancias *G*	150	300	450	600	750	900	1050	1200

Aquí se puede observar de una forma sencilla que Pedro recuperará su inversión cuando los gastos se equiparen a las ganancias. Sin embargo, seguir completando la tabla anterior puede resultar tedioso por lo que esto constituye una buena oportunidad para buscar una conexión con el tema de ecuaciones de primer grado y plantear la siguiente igualdad:

$$R = G$$

$$100x + 10\,000 = 150x$$

de donde se obtiene que $x = 200$, lo cual representa la cantidad de pulseras que tiene que vender Pedro para recuperar el dinero invertido y de ahí en adelante obtener ganancias.

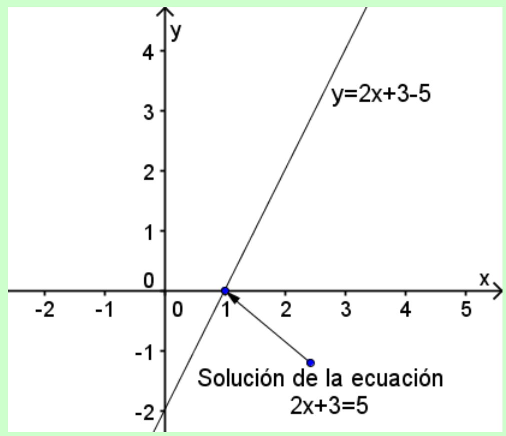
Nota: Los problemas descritos en las actividades 4 y 5 buscan establecer elementos de conexión entre la función lineal y las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Dichos temas no deben enseñarse separadamente y más bien se debe buscar su integración.

En general, resolver la ecuación $ax + b = c$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax + b$ sea igual a c. Este valor de x se conoce como raíz de la ecuación.

Cuando c = 0, la raíz de la ecuación

$$ax + b = 0$$

también se conoce como cero de la función representada algebraicamente por $y = ax + b$, y geométricamente corresponde a la abscisa del punto en donde la recta correspondiente corta el eje x.



La ecuación

$$ax + b = c$$

es equivalente a la ecuación

$$ax + b - c = 0$$

es decir, la raíz de $ax + b = c$ coincide con el cero de $y = ax + b - c$.

IV. Función cuadrática. Factorización de polinomio cuadrático. Ecuación cuadrática. Ceros de una función cuadrática

Actividad 6

Se patea un balón de futbol. La velocidad desarrollada por él es de 19,6 m/s con una dirección de 30° con respecto al suelo. La altura h en metros que alcanza el balón conforme transcurre el tiempo t en segundos está dado por el modelo

$$h = 9{,}8\mathrm{t} - 4{,}9t^2$$

a. *Realice una gráfica que represente el movimiento de dicho objeto.*
b. *¿En qué momentos la pelota toca el suelo?*

Análisis de la Actividad 6

Desde la perspectiva del estudiante y previo al concepto de función cuadrática, este habrá desarrollado habilidades en el reconocimiento de patrones para establecer relaciones entre variables y representarlas en forma algebraica o por medio de puntos en el plano cartesiano. Además, manejará las diferentes formas de representación de una relación con el objeto de interpretar información y resolver problemas. El desarrollo de la presente actividad debe contemplar estos conocimientos previos.

La relación descrita en el problema anterior, no corresponde a las que la/el estudiante manejó durante años anteriores. Esta situación forma parte de una temática relacionada con la *Física* denominada *movimiento parabólico,* que en el ámbito matemático puede enmarcarse dentro de lo que se denominan *funciones cuadráticas*.

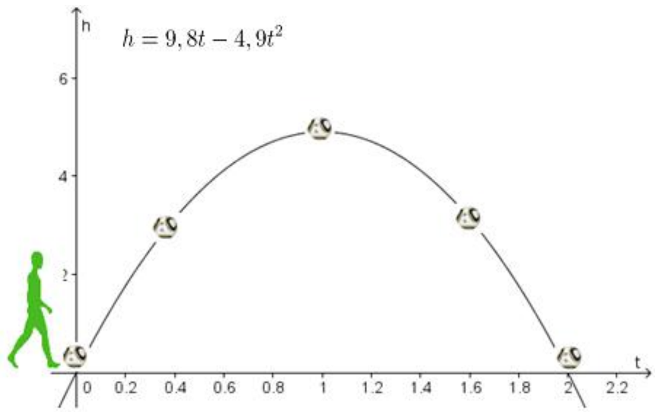
Función cuadrática

Una función cuadrática se caracteriza por tener la forma algebraica

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

En el desarrollo de esta actividad, se puede implementar el uso del programa *Geogebra,* para realizar la representación gráfica de la relación, o bien construir una representación tabular previa para luego graficar dichos valores, como por ejemplo la siguiente:

t (segundos)	0	0,5	1	1,5	2
h (metros)	0	3,675	4,9	3,675	0



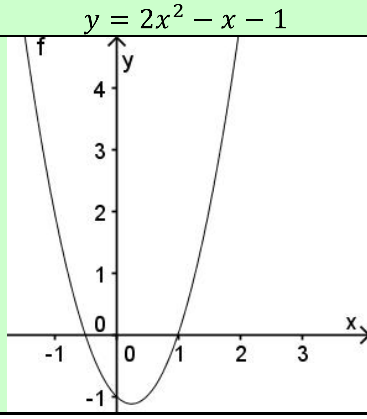
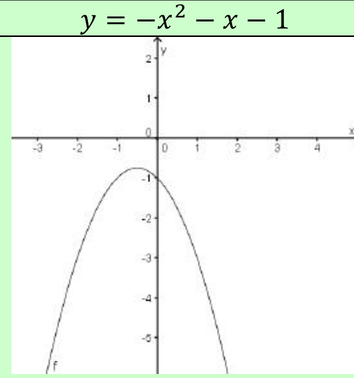
En ambas representaciones, se puede observar fácilmente que la pelota toca el suelo al momento de ser pateada (*t* = 0 s) y en *t* = 2 s. Este tipo de representación gráfica se denomina *parábola* y puede ser clave para interpretar algunas características de este tipo de relaciones.

Nota: En lo sucesivo, para la mayor parte de las actividades desarrolladas posteriormente se seguirán implementando situaciones de movimiento parabólico, porque esto facilita la comprensión e interpretación de sus gráficas. No obstante, cabe resaltar que hay muchas otras situaciones que se pueden modelar mediante el planteo de relaciones cuadráticas.

Ceros de una función cuadrática

En el ejemplo anterior, la representación gráfica permite visualizar los instantes en que la altura h de la pelota es cero. En una relación del tipo $y = ax^2 + bx + c$, sus ceros son los valores de “x” tales que y = 0 y corresponden a los valores donde la gráfica interseca al eje horizontal del plano cartesiano.

A manera de ejemplo, en la fórmula $y = 2x^2 - x - 1$, se puede observar por medio de su representación gráfica que los ceros de la relación corresponden a los valores $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Sin embargo, en el caso de $y = -x^2 - x - 1$, se da la ausencia de ellos.

$y = 2x^2 - x - 1$	$y = -x^2 - x - 1$
	

A continuación, se presenta una actividad donde se implementará un método para obtener los ceros de una función a partir de su fórmula. Se recurrirá inicialmente a la representación gráfica para argumentarlo.

Actividad 7

Busque otra forma de expresar las siguientes representaciones algebraicas de funciones cuadráticas, de manera que se puedan obtener sus ceros sin recurrir en el futuro a la representación gráfica.

a) $y = 8x - 4x^2$
b) $y = 4 - x^2$
c) $y = x^2 - 2\text{x} + 1$

Análisis de la actividad 7

Anteriormente, se habían determinado en la Actividad 6 los ceros de una función cuadrática mediante la representación gráfica. Sin embargo, es conveniente que también se pueda utilizar la representación algebraica para obtener dichos valores, sobre todo porque no siempre es posible tener a mano recursos tecnológicos que permitan graficar de forma rápida. Esta actividad es una buena oportunidad para introducir el concepto de ecuación de segundo grado y los métodos de factorización de expresiones cuadráticas, en función de la necesidad de resolver situaciones que respondan a funciones cuadráticas.

Para determinar los ceros de las funciones cuadráticas propuestas, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$0 = 8x - 4x^2 \qquad 0 = 4 - x^2 \qquad 0 = x^2 - 2\text{x} + 1$$

Como las ecuaciones anteriores son ajenas al conocimiento del estudiante (previamente se trabajó con ecuaciones de primer grado), se pueden utilizar para formalizar el siguiente concepto:

Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado tiene la forma canónica

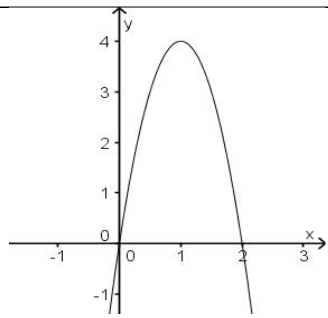
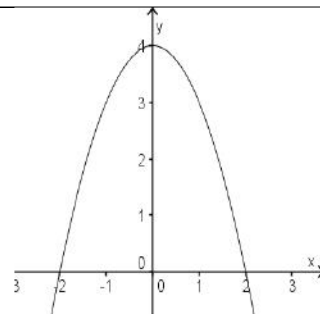
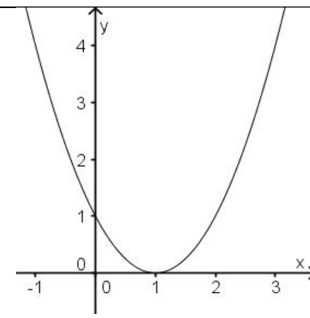
$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

> La factorización de expresiones cuadráticas es una noción que los estudiantes han trabajado en años anteriores en forma intuitiva, y puede ser aprovechada para establecer conexiones con la representación funcional de estas relaciones y formalizar otros métodos como el de inspección.

Retomando el desarrollo de la actividad 7, cabe resaltar que el estudiante tendrá habilidades previas que le permitirán expresar un polinomio en su forma factorizada mediante el uso de la propiedad distributiva y las fórmulas notables, sin entrar en detalles sobre dicho concepto.

En el caso de *a*), se puede aplicar la propiedad distributiva para escribir en su forma factorizada la expresión de la derecha. Para el caso de *b)* y *c)* se pueden aplicar productos notables.

Ahora, se puede recurrir a la representación gráfica de cada una de ellas y tratar de establecer una relación con las formas factorizadas obtenidas.

		
Ceros: *x = 0* y *x = 2*	**Ceros:** *x = 2* y *x = -2*	**Cero:** *x = 1*
Ecuación: $0 = x(8-4x)$	**Ecuación:**$0 = (2-x)(2+x)$	**Ecuación:** $0 = (x-1)^2$

Se debe promover la observación para que las/los estudiantes pueden deducir que los valores hallados anulan los factores en cada una de las ecuaciones anteriores. El docente formalizará que esos valores reciben el nombre de ceros de la ecuación. Se espera que las/los estudiantes determinen que esos valores son las soluciones de las ecuaciones que se pueden formar con dichos factores.

Se debe trabajar en cada caso de la siguiente forma:

$0 = 8-4x$ o $x = 0$	$0 = 2-x$ o $0 = 2+x$	$0 = x-1$
En el caso de *a)*	En el caso de *b)*	En el caso de *c)*

Finalmente, se puede afirmar que al expresar las funciones por medio de factores, es posible obtener sus *ceros.* Si se toma el ejemplo *b):*

Representación: $y = 4 - x^2$

Forma factorizada: $y = (2 + x)(2 - x)$

Obtención de los ceros:

$$0 = (2 + x)(2 - x)$$
$$0 = 2 + x \quad \text{ó} \quad 0 = 2 - x$$
$$-2 = x \ \text{ó} \ 2 = x$$

El desarrollo realizado para la obtención de los ceros se puede formalizar como uno de los procedimientos para resolver ecuaciones de segundo grado.

Nota: Resaltar la importancia de la factorización como una herramienta a utilizar en la resolución de algunos tipos de ecuaciones de segundo grado.

Actividad 8

Determine los valores que satisfacen la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Análisis de la actividad 8

Existen funciones cuadráticas en las que se pueden solicitar elementos como los trabajados en las actividades anteriores, cuya ecuación no corresponde a una expresión que se pueda factorizar fácilmente (o que no se pueda factorizar en los reales) para obtener soluciones reales. Sin embargo, el docente puede aplicar la completación de cuadrados para justificar la existencia e formalizar la fórmula general que determina las soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con$a \neq 0$ y considerarla como otra alternativa de resolución.

Procedimiento	**Justificación**
$ax^2 + bx + c = 0$	
$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$	Factor común *a.*
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$	Eliminación de *a*, pues $a \neq 0$. Suma y resta del término $\frac{b^2}{4a^2}$ que ayudará a completar el cuadrado.
$\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0$	Propiedad asociativa y conmutativa de la suma.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$	Factorización de los términos en la primera agrupación. Suma de los términos de la segunda.
$\left(\frac{2ax + b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$	Suma de los términos de la potencia.

$\dfrac{(2ax+b)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	Propiedades de potencias y despeje.
$(2ax+b)^2 = b^2-4ac$	Cancelación de denominadores, pues $a \neq 0$.
$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$	Aplicación de raíz cuadrada en cada miembro de la igualdad y propiedad del valor absoluto.
$2ax = -b \pm \sqrt{b^2-4ac}$	Despeje de *x*.
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Despeje de *x*.

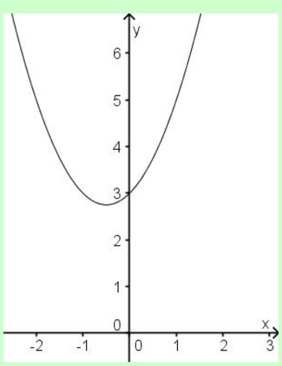
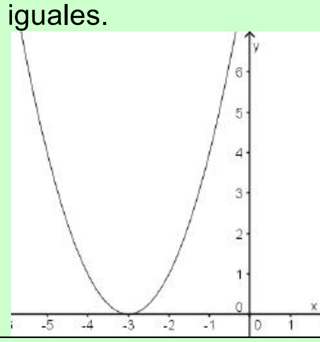
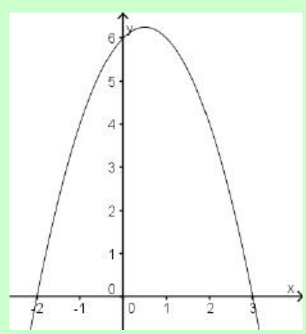
Es pertinente observar que de acuerdo con la expresión anterior, la existencia de dichas soluciones está sujeta a que la expresión $b^2 - 4ac$ sea mayor o igual que cero. Esto permite completar la formalización del concepto de ecuación de segundo grado, así como el concepto de discriminante *($\Delta = b^2 - 4ac$)* y su relación con el número de ceros y factores de una función cuadrática.

Fórmula general de una ecuación de segundo grado

La fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

se denomina fórmula general de una ecuación de segundo grado y determina sus soluciones (y además los ceros de la función cuadrática). El símbolo Δ se denomina discriminante de una ecuación de segundo grado y permite establecer el número de soluciones, ceros y factores de una expresión cuadrática:

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Se indefine la fórmula. Así, no hay ceros, ni soluciones y no es posible su factorización en $\mathbb{R}$. 	Solo queda la expresión $x = \dfrac{-b}{2a}$ Esto determina una única solución y cero. Sus dos factores serían iguales. 	Se obtienen dos soluciones, dos ceros y dos factores diferentes. 

En este punto es posible formalizar o efectuar un cierre dl tema ecuaciones de segundo grado así como la totalidad de los métodos de resolución.

No obstante, establecer la conexión de las ecuaciones de segundo grado con la función cuadrática es un asunto crucial. A manera de ejemplo, si se retoma el problema planteado en la actividad 6 y se solicita determinar en qué instantes después de pateado el balón este se encuentra a una altura de 2,45m, se puede plantear la siguiente ecuación y determinar la forma de resolverla

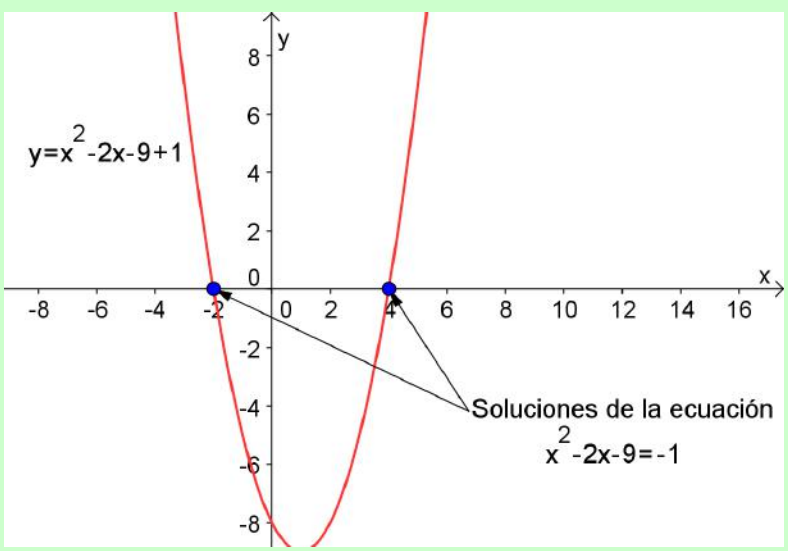
$$9{,}8t - 4{,}9t^2 = 2{,}45$$
$$9{,}8t - 4{,}9t^2 - 2{,}45 = 0$$
$$2{,}45(2t^2 - 4t + 1) = 0$$

Por fórmula general (en este caso implementando el uso de la calculadora), se puede obtener que los tiempos son aproximadamente 0,29 s y 1,71 s. Es importante que la elección del método sea establecido por el estudiante en consideración de la posibilidad de implementar la factorización de la fórmula de la función.

En general, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = d$ corresponde a determinar el valor de x para el cual el valor de la variable dependiente y en $y = ax^2 + bx + c$ sea igual a d. Este valor de x se conoce como una solución o raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = d$.

Cuando d = 0, la raíz de la ecuación $4x^2 + bx + c = 0$ también se conoce como cero de la función representada algebraicamente por $y = ax^2 + bx + c$ y geométricamente corresponde a la abscisa del punto en dónde la curva correspondiente corta el eje x.

La ecuación $ax^2 + bx + c = d$ es equivalente a la ecuación $ax^2 + bx + c - d = 0$, es decir, la raíz de $ax^2 + bx + c = d$ coincide con los ceros de $y = ax^2 + bx + c - d$. Observe la gráfica siguiente la cual ilustra esta afirmación:



Actividad 9

Determine la máxima altura h en metros que alcanza un balón conforme transcurre el tiempo t en segundos si la relación está descrita por la fórmula.

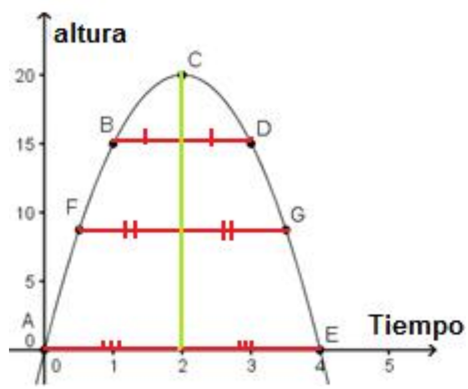
$$h = -5t^2 + 20t$$

Análisis de la Actividad 9

Es importante valorar el tipo de información que pueden generar las diferentes representaciones de una relación. Si se hace una representación tabular, se puede observar que los valores que toma la altura van creciendo pero luego de *t* = 2 s van decreciendo, lo cual es natural en el contexto del problema. De esa forma se puede establecer que la altura máxima del objeto es de 20 m cuando transcurren dos segundos.

t	*h*
0	0
0,5	8,75
1	15
1,5	18,75
2	20
2,5	18,75
3	15
3,5	8,75
4	0

Si se considera una representación gráfica de la situación, se puede observar que ésta permite confirmar lo descrito anteriormente y que el tiempo que tarda el balón para alcanzar su altura máxima corresponde a la semisuma de los tiempos correspondientes cuando el balón está a una altura determinada.



Si se toman los tiempos cuando *h* = 0 (ceros de la función), vemos que

$$\frac{0+4}{2} = 2$$

Si utilizamos la fórmula para evaluar se obtiene efectivamente que la pelota alcanza una altura máxima de

$$h = -5(2)^2 + 20 \cdot 2 = 20\ m$$

Ahora bien, si se generaliza esta idea para obtener una expresión algebraica que permita determinar el punto máximo (o mínimo) de una función cuadrática en su forma general$y = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se pueden tomar los ceros de la función dados por la fórmula general y aplicar la semisuma de ellos para determinar su coordenada *x,* la cual se denotará x_m:

$$x_m = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}$$

$$x_m = \frac{\frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a}}{2}$$

$$x_m = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2}$$

$$x_m = \frac{-b}{2a}$$

Ahora, la coordenada *y* de dicho punto máximo se obtiene evaluando en la función. Denótese con y_m

$$y_m = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b.\frac{-b}{2a} + c$$

$$y_m = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_m = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_m = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_m = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

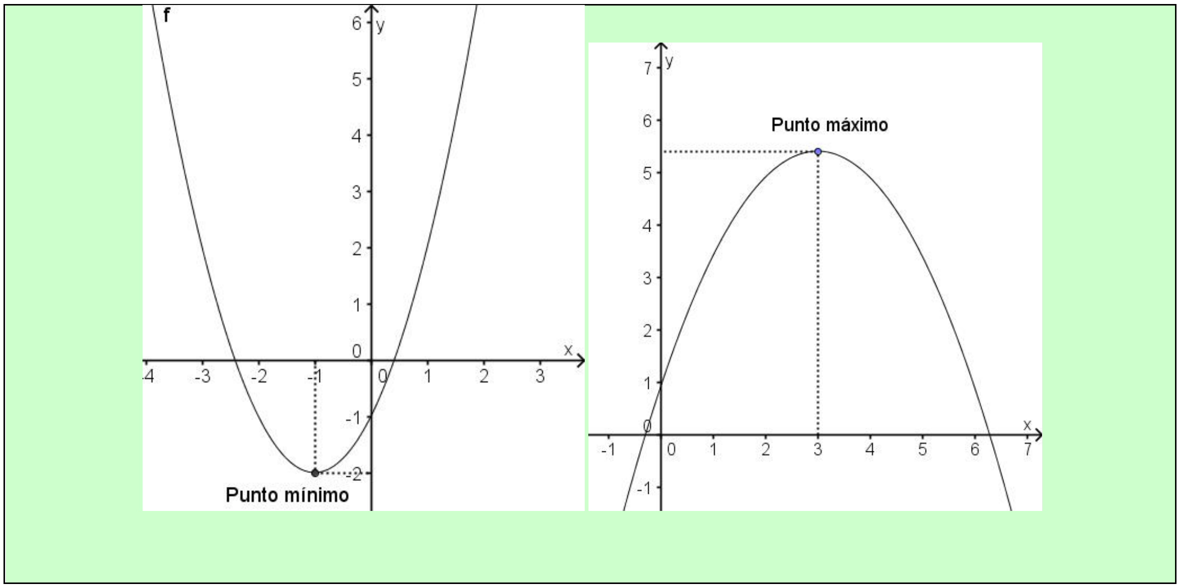
$$y_m = \frac{-\Delta}{4a}$$

Con el desarrollo anterior, se puede formalizar la noción de *vértice*.

Vértice de una parábola

El vértice de una parábola corresponde al punto máximo o mínimo en la gráfica de una función cuadrática. Su ubicación está determinada por la fórmula

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$



Es muy importante considerar que los ceros permiten de forma indirecta obtener la abscisa del punto máximo o mínimo de una función cuadrática, lo cual permite subrayar la importancia que tiene la factorización para establecer formas de representación gráfica de un modo más sencillo. Por ejemplo, en la función cuadrática cuya fórmula corresponde a

> La factorización y resolución de ecuaciones que usan trinomios de segundo grado permiten activar procesos de argumentación y representación en el tema de función cuadrática.

$$y = x^2 + 5\mathrm{x} + 6$$

su forma factorizada

$$y = (\mathrm{x} + 2)(\mathrm{x} + 3)$$

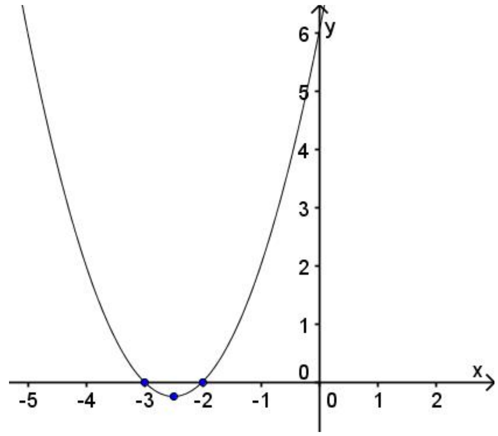
permite obtener los ceros de la función $\mathrm{x} = -2$ y $\mathrm{x} = -3$, con lo cual se puede obtener la coordenada "*x*" del vértice:

$$x_V = \frac{-3+-2}{2} = -2,5$$

De ese modo, su ordenada estaría dada por

$$y_V = (-2,5+2)(-2,5+3) = -0,5 \cdot 0,5 = -0,25$$

y estos elementos (ceros y vértices) pueden utilizarse para representar gráficamente la función.

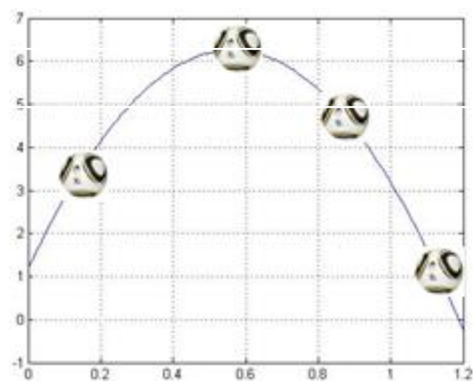


No siempre se puede obtener la forma factorizada (algunas veces es difícil su obtención) de una función cuadrática, por lo que el uso de la fórmula general y la fórmula del vértice deben ser alternativas que los estudiantes deben saber utilizar para cuando se amerite.

Actividad 10

La altura de un balón que es lanzado hacia arriba depende del tiempo que éste dura en el aire, como se muestra en la siguiente gráfica.

Encuentre una expresión algebraica equivalente a $f(t)$ *que permita determinar fácilmente la altura máxima que alcanza el balón.*



Nota: La altura (medida en pies, 1 pie = 0,3048 metros) del balón en función del tiempo (medido en segundos) desde el instante en que se lanza corresponde a

$$f(t) = -16t^2 + 18t + \frac{19}{16}$$

Análisis de la Actividad 10

Aproximar el vértice encontrando algunas imágenes de la función ayuda a identificar cómo manipular la expresión. Se procede a calcular el punto máximo de la trayectoria del balón,

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{9}{16}, \frac{25}{4}\right)$$

Como se puede apreciar de la coordenada *y,* el punto máximo se alcanza en $\frac{25}{4}$ pies.

Ahora inician los procesos de factorización,

Caso I	**Caso II**
La primera opción consiste en sacar -16 como factor común y factorizar la expresión restante, se obtiene: $$-16\left(t-\frac{19}{16}\right)\left(t+\frac{1}{16}\right)$$	La segunda opción consiste en sacar $\frac{1}{16}$a factor común y luego factorizar la expresión restante, se obtiene: $$\frac{1}{16}(-16t+19)(16t+1)$$

En los dos casos anteriores las expresiones algebraicas ayudan a encontrar los ceros de la función pero no la altura máxima que alcanza la expresión.

La estrategia que beneficia y debe adoptarse es la de extraer -16 y luego completar cuadrados

$$-16\left(t^2-\frac{18t}{16}-\frac{19}{16^2}\right)$$

$$-16\left[\left(t^2-\frac{18t}{16}+\frac{9^2}{16^2}\right)-\frac{9^2}{16^2}-\frac{19}{16^2}\right]$$

$$-16\left[\left(t-\frac{9}{16}\right)^2-\frac{100}{16^2}\right]$$

$$-16\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{100}{16}$$

En este caso se tiene que el término $-16\left(t-\frac{9}{16}\right)^2$es siempre negativo o cero y por lo tanto la altura nunca va a superar los $\frac{100}{16}$ pies, los cuales se alcanzan cuando $t=\frac{9}{16}$ segundos.

Esta actividad permite hacer énfasis en maneras de representación algebraicas diferentes que permiten obtener de forma fácil elementos propios de una relación cuadrática. Anteriormente, se vio que la forma factorizada de una relación cuadrática es idónea para la identificación de los *ceros.*

Esta actividad muestra que implementando factor común y *completación de cuadrados* es posible identificar el vértice de la parábola sin necesidad de su representación gráfica. En general, la función cuadrática de la forma

$$y = ax^2+bx+c$$

puede expresarse con este procedimiento en la forma:

$$y=a\left(x-h\right)^2+k$$

donde *h* y *k* corresponden a las coordenadas *x* e *y* del vértice.

V. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolla en los Fundamentos de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema para iniciar la lección.
2. Trabajo estudiantil independiente
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para noveno año:

Conocimiento	**Habilidad específica**
Función cuadrática	Identificar situaciones dadas mediante funciones con representación algebraica del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema, el cual será desarrollado en grupos de 4 estudiantes, el docente debe tener claro qué quiere lograr con él.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

- ✓ Investigar patrones o regularidades en sucesiones, tablas u representaciones geométricas
- ✓ Representar mediante tablas relaciones entre dos cantidades que varían simultáneamente.
- ✓ Representar cantidades en expresiones matemáticas mediante el uso de letras tales como *m, n, a* en lugar del valor faltante.
- ✓ Reconocer la relación entre dos cantidades en una expresión matemática.

Es importante que durante el planeamiento y desarrollo de una actividad de esta índole se consideren aspectos como los siguientes:

a. El docente no debe sugerir la respuesta al estudiante, más bien su rol debe ir orientado a promover la discusión por medio de *buenas preguntas* para que el estudiante pueda avanzar.

b. El docente debe planificar las posibles etapas en las que podría desarrollarse la actividad, procurando anticipar las posibles estrategias que las/los estudiantes realizarían (buenas o malas) para estar preparado (a) para reaccionar y actuar ante ellas.

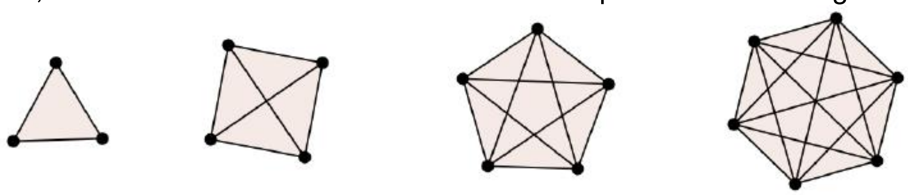
Problema

¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono regular de 50 lados?

Trabajo estudiantil independiente

Se espera que las/los estudiantes lean el problema hasta comprender su alcance y que realicen comentarios sobre su grado de dificultad. Se espera que utilicen nociones previas como el reconocer los polígonos regulares y la identificación de los elementos que lo componen (vértices, lados, diagonales). Si existen debilidades en estos conceptos, el docente puede intervenir recomendando bibliografía pertinente para el repaso de los mismos durante la realización de la actividad.

Posteriormente, los estudiantes comenzarán a realizar los primeros intentos gráficos.



El estudiante descubrirá que aún si pudiera dibujar una figura de 50 lados y contar la cantidad total de diagonales, ese trabajo demandaría mucho esfuerzo y concentración. De esa forma, él debe poner en juego sus habilidades de reconocimiento y búsqueda de patrones para buscar una estrategia más sencilla de explorar.

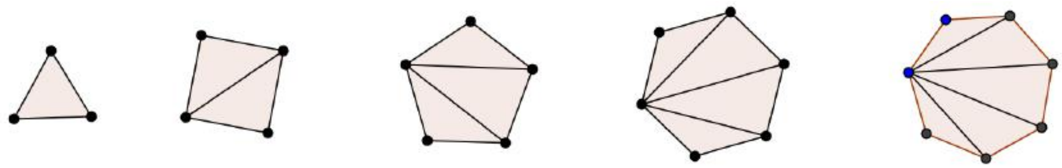
Sin embargo, si aun así el estudiante considera dibujar una figura de 50 lados y contar sus diagonales, el docente debe intervenir para que el estudiante busque una alternativa más acorde con el quehacer matemático; podría sugerir que establezca relaciones entre la cantidad de ciertos componentes de la figura (vértices, lados, diagonales).

Es de esperarse que haya intentos por abortar la actividad, para lo cual el docente debe dialogar con el estudiante recalcando el hecho de que un problema conlleva un nivel alto de esfuerzo y que inclusive han existido problemas cuya resolución se dio después de muchos años, tal es el caso del Teorema de Fermat.

Más adelante, se espera que el estudiante utilice nociones de tabulación de datos ya trabajadas en años anteriores y que resuma la información que brindan las figuras para intentar buscar una ley de formación o patrón que pueda aproximarnos a la respuesta esperada.

Número de lados	Cantidad de diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14

Aun así, es de esperarse que se le dificulte encontrar una relación entre las variables involucradas. El/la docente debe estar atento a esta situación y puede recomendar al estudiante que intente buscar una relación alternativa entre la cantidad de lados y el número de diagonales que se pueden trazar **desde un vértice:**



Así, el estudiante puede tabular la siguiente información

Número de lados	**Cantidad de diagonales desde un vértice**	**Cantidad de diagonales**
3	0	0
4	1	2
5	2	5
6	3	9
7	4	14

y tratar de deducir la relación existente entre sus elementos.

Discusión interactiva y comunicativa

Por medio de una exposición se entabla la discusión de los resultados obtenidos por los diversos grupos, así como las dificultades encontradas y los caminos explorados. Se hace una retroalimentación cruzada entre profesores y estudiantes. Así por ejemplo, puede ser que algunos hayan descrito su estrategia de forma verbal argumentando que el número total de diagonales se obtiene multiplicando el número de lados por la cantidad de diagonales desde un vértice y dividiendo el resultado por 2 recurriendo a la representación tabular para argumentar su parecer. De ese modo, la respuesta al problema sería

$$50 \cdot 47 \div 2 = 1\ 175 \text{ diagonales}$$

Puede ocurrir que otros estén de acuerdo con dicha participación y la enriquezcan manifestando que encontraron una *ley de formación*, pues lograron identificar que el número de diagonales desde un vértice equivale al número de la cantidad de lados disminuido en tres. Simbólicamente, para el número de lados *n* la cantidad de diagonales desde un vértice *d* está dada por

$$d = n - 3$$

El docente puede intervenir para que verifiquen la veracidad de su modelo o su estrategia, solicitándoles que lo prueben dibujando una figura de 8 lados y que cuenten la totalidad de diagonales para comparar los resultados.

Clausura o cierre

El/la docente, apoyado por las ideas aportadas por los estudiantes, formaliza por medio de una fórmula la estrategia ganadora que se implementó

$$D(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$$

e introduce la noción de *función cuadrática* como aquella que relaciona sus variables mediante la expresión algebraica de segundo grado como la siguiente:

$$y = ax^2 + bx + c,\ \text{con } a, b, c \in R,\ a \neq 0$$

Una vez descrita la forma general de una función cuadrática, se pueden implementar nuevos problemas que permitan la visualización de elementos en su gráfica como los ceros, el vértice, la concavidad, etc. Además, destacar la existencia de otros modelos cuadráticos que permitan entender la realidad del entorno, como por ejemplo los modelos de movimiento parabólico:

Una pelota es lanzada a nivel del suelo. La altura "h" a la que se encuentra dicha pelota después de haber transcurrido cierta cantidad de segundos "t" está dada por la fórmula

$$h(t) = -4t^2 + 11{,}7t$$

a. *¿En qué momentos la pelota toca el suelo?*
b. *Estime la altura máxima que toma la pelota y el tiempo que le toma el lograrla.*
c. *¿Cuál es la altura de la pelota transcurrido 1 segundo?*
d. *¿Cuánto tiempo demora la pelota en alcanzar una altura de 5 metros?*

El desarrollo de esta situación no solo permitirá el cierre y de los conocimientos trabajados en este caso los ceros de una función y el vértice de una parábola, sino que buscará justificar la necesidad de encontrar valores para *x*, dado un valor particular de *y*, e introducir métodos que resuelvan ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Bibliografía

Función lineal. Recuperado en junio, 20, 2011, de http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/3_eso/apuntes/teoria%20funciones%20lineales.pdf

The National Council of Teachers of Mathematics (2006) *Historical topics for the Mathematics classroom*. Reston: NCTM, Inc.

Golden Ratio. Recuperado en mayo, 10, 2011 de http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

Chaves,C. y León, A. (2003). *La biblia de las matemáticas*. México: Editorial Letrarte, S.A.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: International Thomson learning editores, S.A.

García, M. *Matemática: Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado. Aportes para la enseñanza*. *Nivel Medio*. Buenos Aires: Gobierno de la ciudad.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de estudios Matemáticas. San José,* Costa Rica.

Lecturas recomendadas

Felgueres, C. (2006). Función lineal. Recuperado de http://web.educastur.princast.es/ies/stabarla/paginas/funciones/4_func_lin.htm

Godino, J. y Batanero, C.(2008). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Recuperado dehttp://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Mesa, Y. y Villa J. (2007, mayo). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática.*Revista virtual universidad Católica del Norte.* Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/issue/view/14

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

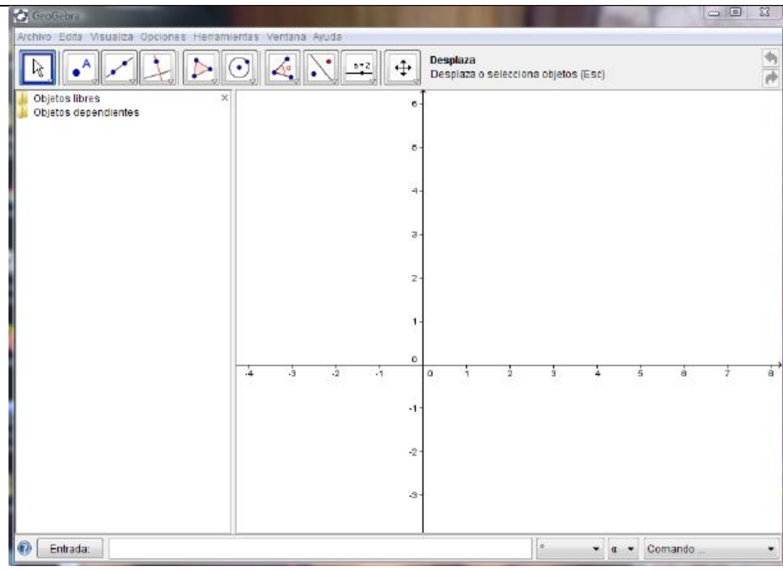
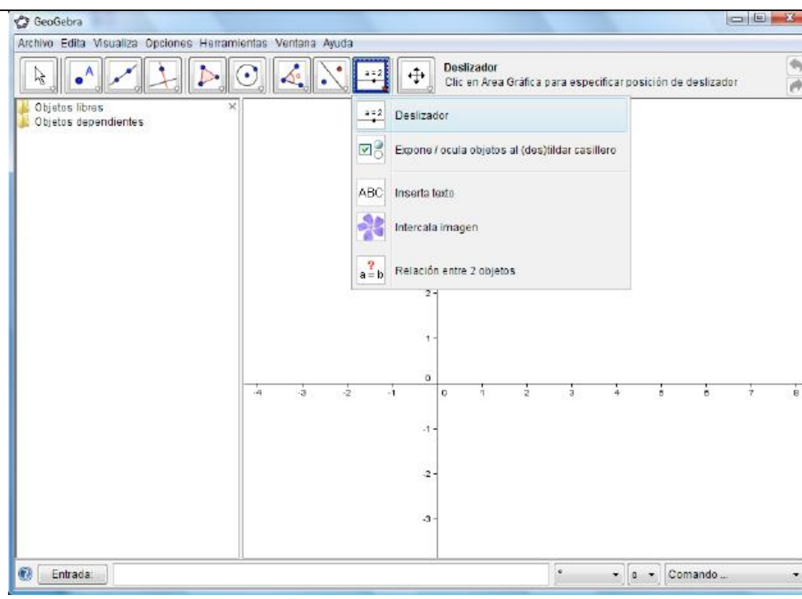
Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

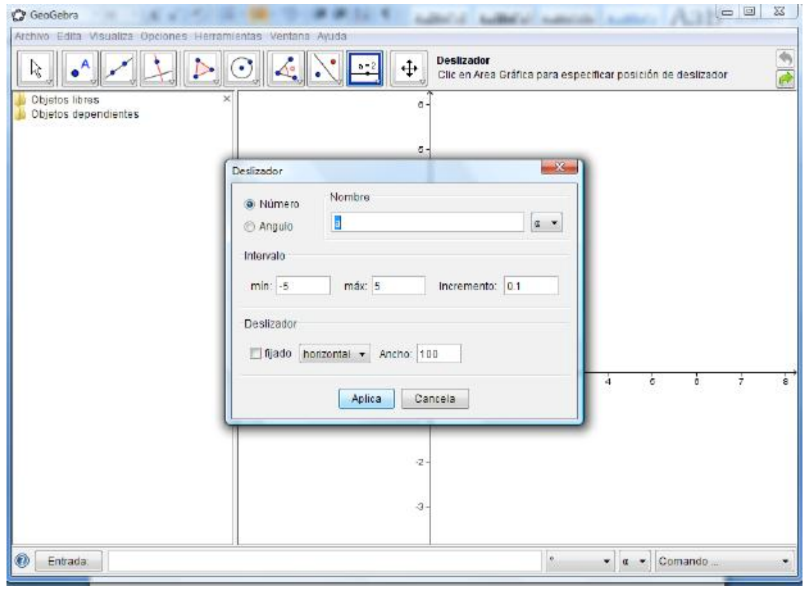
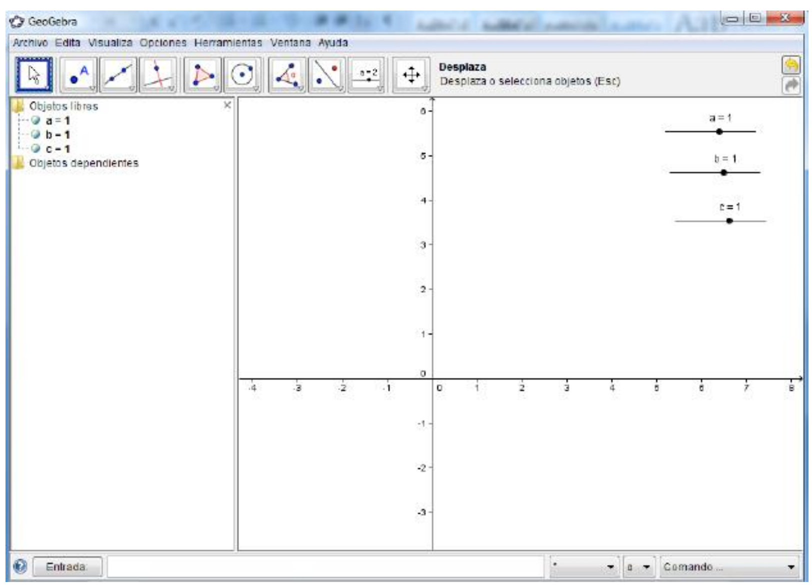
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

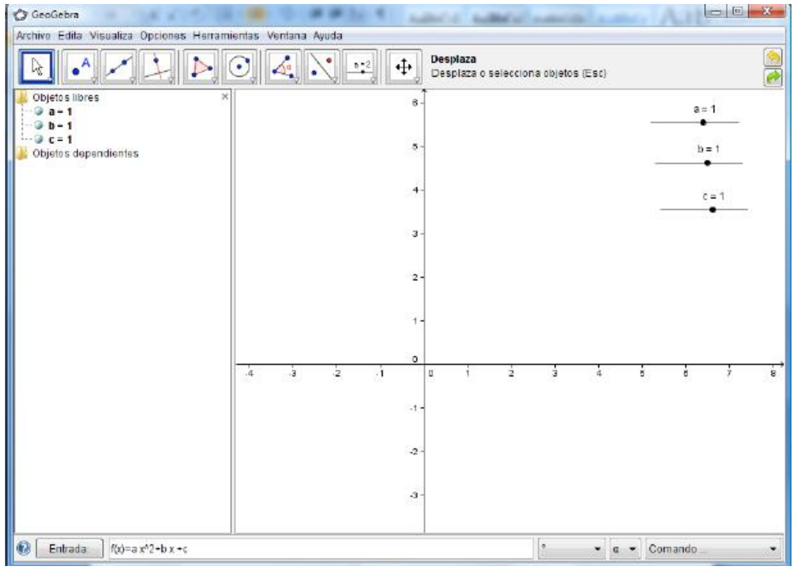
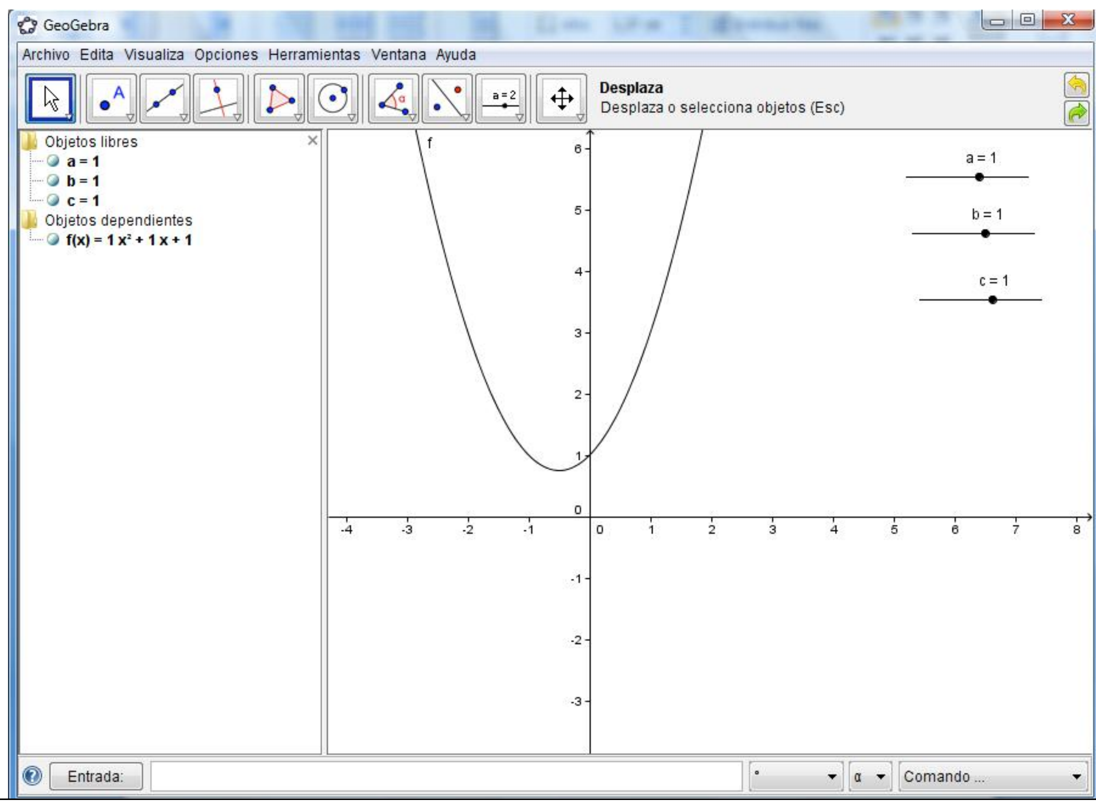
Schoenfeld, A. (2011). *Howwethink*. New York: Routledge.

Anexo

Tener herramientas para visualizar las gráficas de una relación es importante para reconocer algunos de sus elementos de una forma más ágil. Por esa razón, se incluye a continuación un pequeño tutorial para graficar diversas relaciones cuadráticas (u otras), utilizando el programa *Geogebra*, el cual es un software de tipo gratuito y muy fácil de descargar. Solo se describirá cómo graficar las relaciones, pero esta herramienta tiene un amplio potencial para ser utilizado en el aula.

1. Se accesa el programa.	
2. Los recuadritos ubicados en la parte superior contienen las diversas herramientas que se pueden usar. Se deben definir previamente los valores de las constantes *a, b, c* presentes en la forma algebraica de la relación cuadrática. Esto se logra ubicando el cursor en la esquina inferior izquierda del penúltimo recuadro, donde tendrá que activar la herramienta *Deslizador.*	

3. Se hace click en cualquier región del área de trabajo y sale un recuadro donde se pueden definir algunas características del deslizador. Luego, puede oprimir *Aplica* y aparecerá el deslizador que corresponde a la constante *“a”*. Se le denomina así pues al deslizar con el cursor el punto ubicado en el segmento, permite ir variando los valores que puede tomar éste.	
4. Con sólo hacer click en cualquier parte del área de trabajo se pueden obtener los otros deslizadores para las constantes *b* y *c.* **Importante:** para poder usar los deslizadores o trasladarlos se debe oprimir la tecla *Escape (*o bien el primer recuadro que tiene imagen de cursor, en la barra de herramientas*)* para deshabilitar la herramienta del *Deslizador* y proceder a la manipulación.	

5. Ahora, se procede a escribir la expresión algebraica general de la relación cuadrática en la esquina inferior izquierda donde hay un recuadro de *Entrada* y oprimir *Enter.* Luego, aparece la parábola que puede ser manipulada arrastrando el puntito presente en los deslizadores. **Importante:** se debe dejar un espacio entre expresiones que se multiplican, tal es el caso de **a x^2** y **b x**.	
	

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas, que forma parte del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autor
Miguel González Ortega

Revisor
Marianela Zumbado Castro

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública (2011). *Curso bimodal para el Tercer Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Relaciones y Álgebra.* San José, Costa Rica: autor.