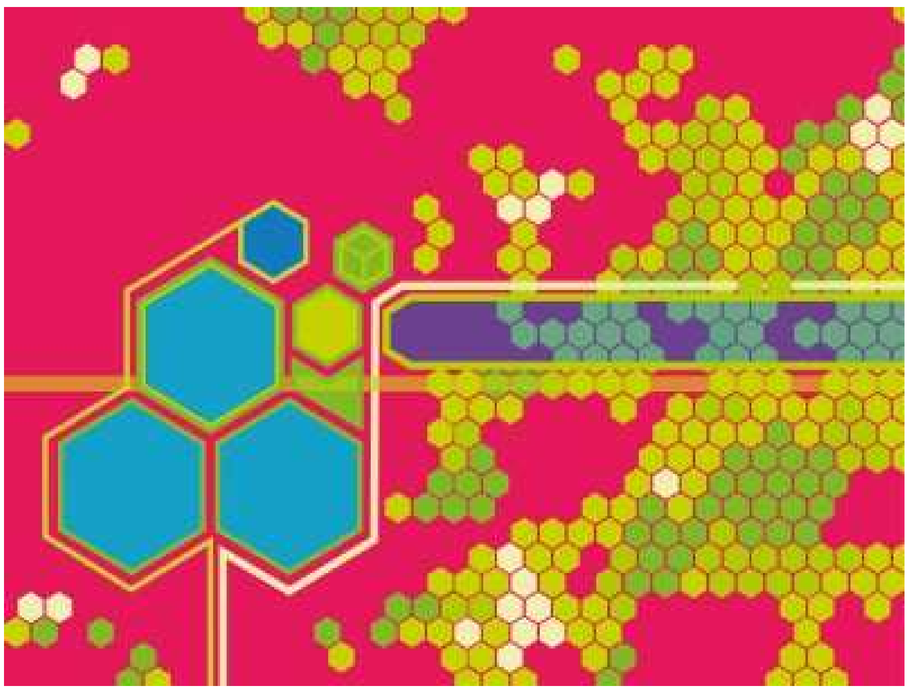
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque en resolución de problemas



Geometría

2012

Presentación

El *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Segundo Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar áreas como *Números* y *Medidas* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. Luego, *Geometría* sigue la misma línea, solo que incorporando contenidos como geometría analítica y transformaciones geométricas. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora. Por último, *Relaciones y Álgebra* que no estaba presente en el plan anterior y busca por medio del uso de representaciones ir evolucionando hacia el uso y comprensión del concepto de variable para modelar relaciones. Estas cinco unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Segundo Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.
En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

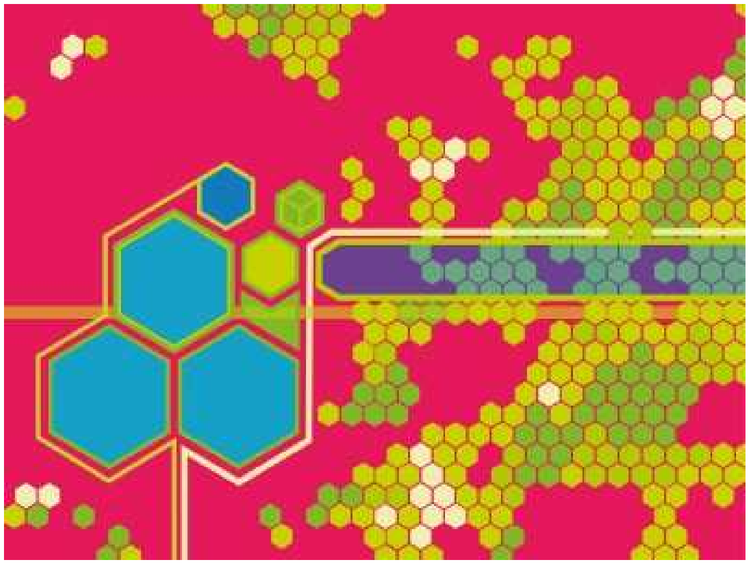
Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Geometría



Habilidad general

Dada una serie de actividades seleccionadas con fines didácticos, conocer y aplicar la resolución de problemas como estrategia metodológica utilizando conocimientos básicos de geometría para su implementación en Educación Primaria.

Introducción

Este material propone actividades seleccionadas con fines didácticos en donde se busca desarrollar algunos conocimientos básicos de la geometría, mediante la metodología de resolución de problemas y a su vez poniendo en práctica elementos relevantes de la fundamentación teórica de los nuevos Programas de Estudio en Matemática.

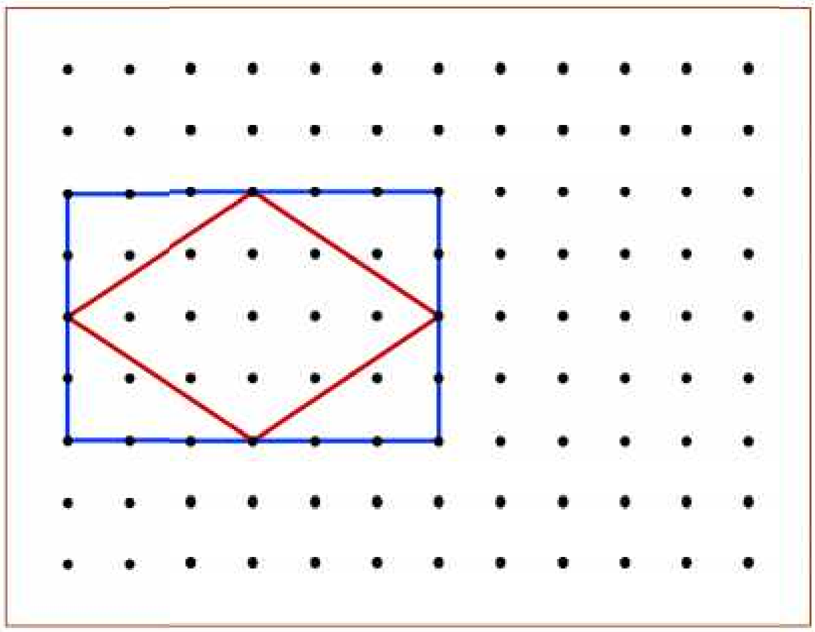
Las actividades propuestas en este material no están contextualizadas necesariamente a la realidad de sus estudiantes o de la zona educativa donde usted se desempeña como docente. Es importante que el educador las estudie y realice las adaptaciones pertinentes para su utilización en el salón de clases o bien pueda implementar nuevas situaciones.

Tabla de contenido

I. Paralelogramos

Actividad 1

Utilizando el geoplano y ligas de colores construya, con una liga, un rectángulo de 6 unidades de largo y 4 unidades de ancho. Luego con una liga de otro color, construya un cuadrilátero cuyos vértices estén en los puntos medios (clavos) de los lados del cuadrilátero. Considere la siguiente figura ilustrativa:



Conteste las siguientes preguntas:

1. *¿Qué características presenta la figura formada por la liga roja?*
2. *¿Qué fracción representa la superficie encerrada por el cuadrilátero de liga roja con respecto a la superficie que encierra el rectángulo de liga azul? Argumente su respuesta.*
3. *Si un cuadro completo representa una unidad de superficie, ¿cuántas unidades de superficie tiene el rectángulo de liga azul y cuántas tiene el cuadrilátero de liga roja?*
4. *Si L representa la longitud del largo del rectángulo y A la longitud del ancho, entonces represente una fórmula para el área de la superficie encerrada por la liga roja.*

Análisis de la Actividad 1

El propósito de esta actividad es construir la fórmula para calcular el área de la superficie de un rombo a partir de la del rectángulo.

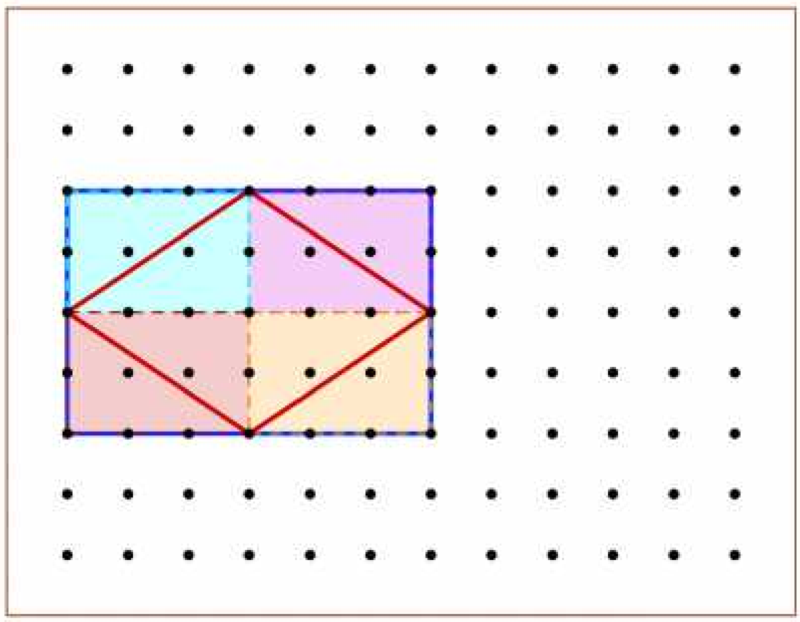
En el punto 1 se pretende reconocer paulatinamente el cuadrilátero representado por la liga roja tomando en cuenta las características del rectángulo representado por la liga azul. Por ejemplo, es importante que el estudiante intuitivamente se dé cuenta que los lados del cuadrilátero (liga roja)

son de la misma longitud y que los lados opuestos son segmentos paralelos, o también que los ángulos internos opuestos son congruentes (tienen la misma medida).
Analizando y discutiendo la información brindada por cada estudiante se puede llegar a la conclusión de que la figura representada por la liga roja es un rombo.

Para el punto 2 se quiere motivar al estudiante a pensar en una estrategia novedosa para poder saber qué parte de la superficie del rectángulo representa la superficie del rombo. Pueden haber estrategias que pueden sorprender al docente por su originalidad; el mismo no debe cortar esta iniciativa sino potenciarla, por ejemplo pidiéndole al estudiante explicar ante el grupo su idea. Esto fomentará procesos de comunicación en el aula.

Toda idea o conjetura es valiosa, el maestro deberá valorar y discutir cada una de las ideas y resaltar los aspectos relevantes y atinados; pero también tiene la obligación de justificar aquellos aspectos que no son correctos. Además, no sólo basta con indicar al estudiante que está equivocado, hay que argumentar pedagógicamente el porqué.

Una forma de examinar o razonar la pregunta 2 es la siguiente:



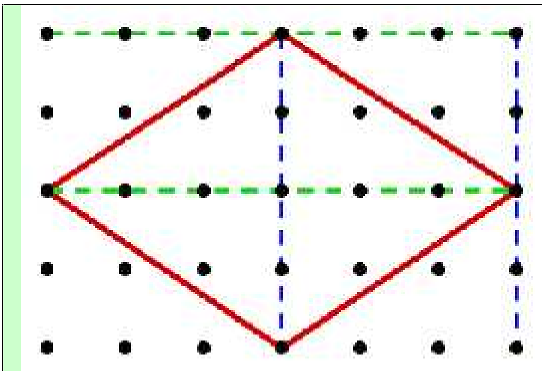
En la imagen anterior se muestra como con otras cuatro ligas de diferentes colores se divide el rectángulo en cuatro rectángulos de iguales dimensiones. Esto ayuda a visualizar que el rombo está compuesto por cuatro mitades de los rectángulos menores que conforman el rectángulo mayor. Luego al razonar, cuatro mitades de un rectángulo menor son equivalentes a dos rectángulos menores, y estos a su vez, son equivalentes a la mitad del rectángulo mayor.

Por el anterior análisis, se puede concluir que en este caso la superficie del rombo es la mitad de la superficie del rectángulo.

Para la pregunta 3, se busca que el estudiante utilice la información encontrada en las preguntas anteriores para dar su respuesta. Contando los cuadros del rectángulo, hay 30, por lo que 15 cuadros equivaldrían a la superficie del rombo. Es importante aclarar que al unir estos 15 cuadros no se formará un rombo, simplemente es una equivalencia.

La pregunta 4, tiene como objetivo precisar la fórmula del área del rombo tomando en cuenta los datos del rectángulo. En este momento el estudiante sabe que para este caso el área de la superficie del rombo es la mitad del área de la superficie del rectángulo; por lo que si el área del rectángulo es L×A entonces el área del rombo será (L × A) ÷ 2.

Seguidamente, se puede precisar la fórmula del área del rombo definiendo sus diagonales y relacionándolas con el largo y el ancho del rectángulo.



Área de un rombo

Área del rombo con vértices en los puntos medios de los lados de un rectángulo es igual a la mitad del área del rectángulo:

Área del rombo = $(L \times A) \div 2 = (D \times d) \div 2$; donde D es la diagonal mayor y d es la diagonal menor.

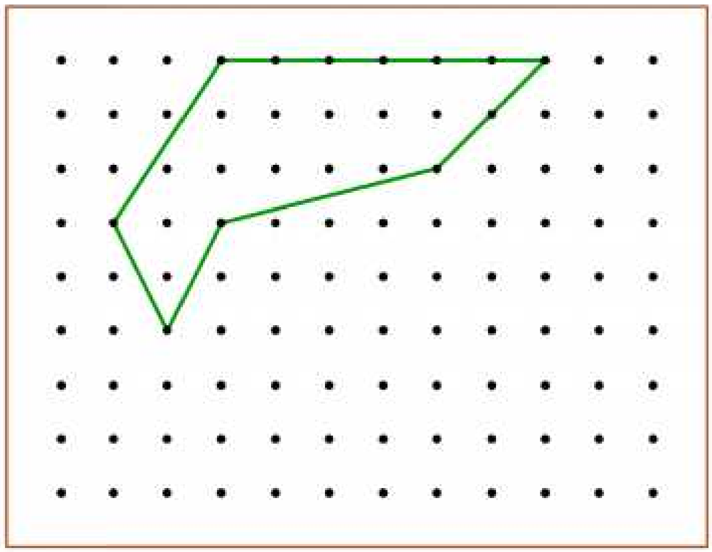
Se puede utilizar el geoplano y esta misma estrategia para construir fórmulas de áreas de romboides y trapecios.

Si bien se promueve el uso de problemas en contextos reales, los abstractos se consideran muy importantes. Lo que se pretende en última instancia es la construcción de capacidades para la manipulación de los objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta.

II. Cálculo y estimación de áreas de superficies

Actividad 2

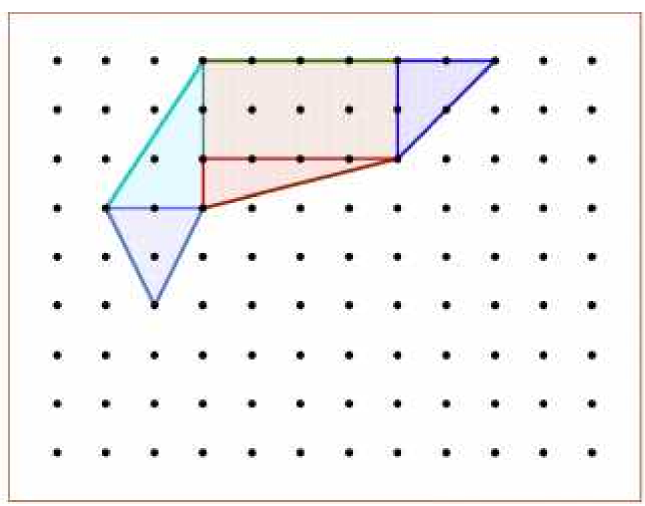
Utilizando una liga forme en el geoplano el siguiente polígono. Luego formule y aplique una estrategia para calcular su área.



Análisis de la Actividad 2

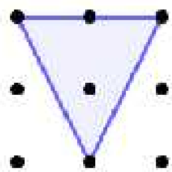
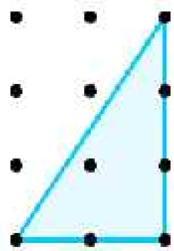
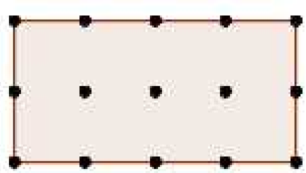
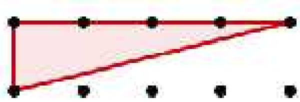
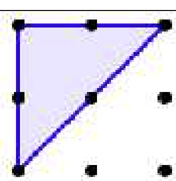
En esta actividad lo que se busca es potenciar en el estudiante diversas estrategias para encontrar el área de una figura poligonal no conocida.

Una posible estrategia es la descomposición de la figura en varios polígonos conocidos cuyas fórmulas ya han sido estudiadas. La idea es calcular el área de cada polígono conocido que compone la figura original, para luego así obtener el área de la superficie total de la figura poligonal no conocida. La imagen de la derecha muestra una forma de descomponer la figura del problema:



Es claro, que esta no es la única forma de descomponer la figura, por esto el docente debe ser flexible en las diferentes descomposiciones que utilice el estudiante. Asimismo, el estudiante puede utilizar otro tipo de ideas no contempladas por el docente; en este caso deberá valorar su validez y sacar conclusiones del razonamiento diferente.

En el caso de la figura anterior, el polígono original se descompone en cuatro triángulos y un rectángulo; pero pudo haberse descompuesto también en tres triángulos y un trapecio rectángulo. Utilizando la descomposición realizada no sólo se puede obtener el área, sino también repasar algunas características de las figuras:

Polígono	**Nombre**	**Características**	**Cálculo del área**
	Triángulo isósceles acutángulo	• Tiene dos lados de igual medida. • Tiene dos ángulos internos de igual medida. • Tiene todos sus ángulos internos agudos. • La base mide 2 unidades, y la altura también.	A = (2×2)÷2 = 2 unidades cuadradas
	Triángulo escaleno rectángulo	• Tiene todos sus lados de diferente medida. • Tiene todos sus ángulos internos de diferente medida. • Tiene un ángulo interno recto y dos agudos. • La base mide 2 unidades y la altura 3 unidades.	A = (2×3)÷2 = 3 unidades cuadradas
	Cuadrilátero Rectángulo	• Tiene cuatro lados. Los lados opuestos miden lo mismo. • Tiene cuatro ángulos internos rectos. • Las diagonales miden lo mismo. • El largo mide 4 unidades y el ancho 2 unidades.	A = 4×2 = 8 unidades cuadradas
	Triángulo escaleno rectángulo	• Tiene todos sus lados de diferente medida. • Tiene todos sus ángulos de diferente medida. • Tiene un ángulo interno recto y dos agudos. • La base mide 4 unidades y la altura 1 unidad.	A = (4×1)÷2 = 2 unidades cuadradas
	Triángulo isósceles rectángulo	• Tiene dos lados de igual medida. • Tiene dos ángulos internos de igual medida. • Tiene un ángulo interno recto y dos agudos. • La base mide 2 unidades y la altura 2 unidades.	A = (2×2)÷2 = 2 unidades cuadradas
Total de las áreas:			A=2+3+8+2+2 = 17 unidades cuadradas

Actividad 3

La siguiente imagen representa la superficie del Parque Nacional Braulio Carrillo. Encuentre una estimación del área de la superficie real del parque si la imagen está en una cuadrícula con cuadrados de lado que representan 50 hectómetros o lo que es lo mismo 5 kilómetros.

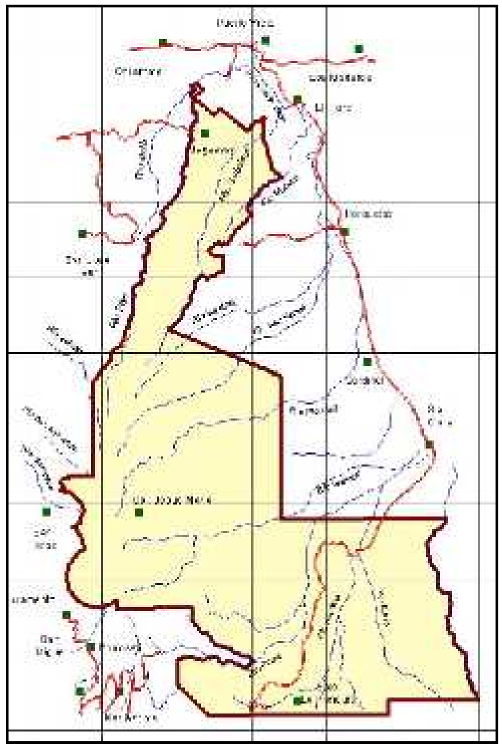


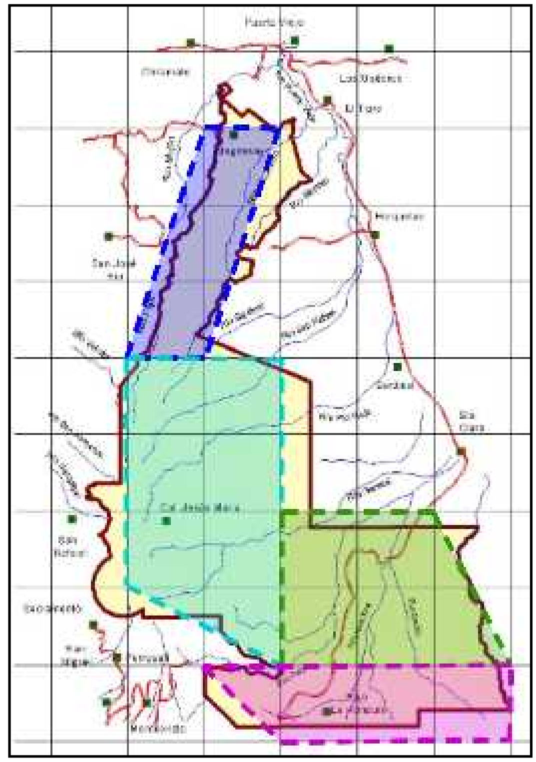
Imagen tomada del Decreto N° 20358-MIRENEM, MINAET y SINAC

Análisis de la Actividad 3

Como puede verse en la imagen anterior, la superficie del Parque no es poligonal y además es muy irregular, por lo que no habrá una fórmula explícita para calcular su área.

Una estrategia similar a la realizada en la *Actividad 2* se puede aplicar para aproximar el área de una superficie no poligonal como esta. De lo que se trata es de “cubrir” la superficie del Parque con polígonos conocidos como trapecios, romboides, triángulos, rectángulos, etc. y luego calcular y sumar sus áreas para lograr una estimación del área. Se puede decir que este sería un *modelo geométrico* de la superficie del Parque.

La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos es parte sustancial del enfoque que se propone trabajar con problemas en contextos reales. Los modelos emergen siempre que se quiera representar la realidad. Un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones). Pueden existir varios modelos sobre una realidad con distintos grados de representación de la misma. Identificar, construir o usar un modelo de una situación real es una manera de *matematizar* esa realidad.

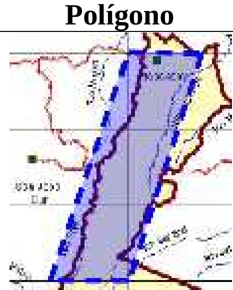


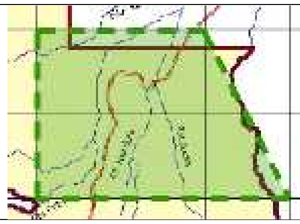
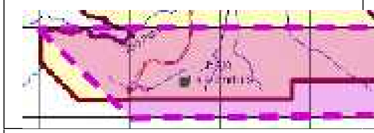
Por ejemplo, en la imagen de la derecha se visualiza una escogencia y acomodo de polígonos para aproximar el área de la superficie, o sea un modelo geométrico.

Es importante aclarar que al no ser una figura poligonal no se podrá ocupar totalmente la superficie del Parque; esto quiere decir que no calzarán exactamente los polígonos escogidos con el trazo de la superficie. Otro aspecto a tomar en cuenta es que no hay un modelo único ni tampoco un solo resultado correcto, la escogencia de los polígonos puede variar y por lo tanto habrá diferencias entre las estimaciones.

En este caso se escogieron tres trapecios rectángulos y un romboide. Tomando en cuenta que en la escala propuesta la cuadrícula está formada por cuadrados de lados equivalentes a 50hm o 5km entonces se puede calcular el área de cada cuadrilátero.

Trabajando en kilómetros se tiene:

Polígono	Nombre	Características	Cálculo del área
	Romboide	• Base = 5km. • Altura= 15km.	A = 5×15 = 75 km^2
	Trapecio rectángulo	• Base mayor=20km • Base menor=15km • Altura=10km	A = (20+15) ×10÷2 = 175km^2

	Trapecio rectángulo	• Base mayor=15km • Base menor=10km • Altura=10km	A = (15+10) ×10÷2 = 125km^2
	Trapecio rectángulo	• Base mayor=20km • Base menor=15km • Altura=5km	A = (20+15) ×5÷2 = 87,5km^2
Total de las áreas:			A=75+175+125+87,5 = 462,5km^2

En el cuadro anterior se visualiza que se puede lograr una aproximación del área de la superficie del Parque mediante la composición de figuras, en este caso: tres trapecios rectángulos y un romboide. Calculando el área de los polígonos y sumándolas se obtiene que el área de la superficie del Parque Nacional Braulio Carrillo es de 462,5 km^2 aproximadamente. Según el Sistema de Información Geográfica de Costa Rica SIG, la superficie del Parque tiene un área de 47 238 hectáreas que es equivalente a 472,38 kilómetros cuadrados, por lo que se logra una aproximación aceptable respecto a los datos reales.

Además, este problema crea conexiones con el área de medidas al trabajar con hectómetros o con kilómetros, al tener claro que un kilómetro cuadrado equivale a 100 hectáreas (término muy utilizado para los terrenos). También crea conexión con la materia de Ciencias ya que se puede describir el Parque explicando que posee una gran diversidad biológica, un gran potencial para la investigación científica y un banco natural de semillas para la recuperación de las áreas del país que han sido devastadas; esto a su vez, desarrolla el eje transversal *"Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible"*.

Es importante resaltar que si se hubiera utilizado mayor cantidad de polígonos tal vez se pudo haber llegado a una mejor aproximación.

Otra estrategia posible, es tomar en cuenta que cada cuadro de la cuadrícula equivale a 25 km^2, por lo que se pudo dividir la figura en cuadrados de 25 km^2 y triángulos de 12,5 km^2.

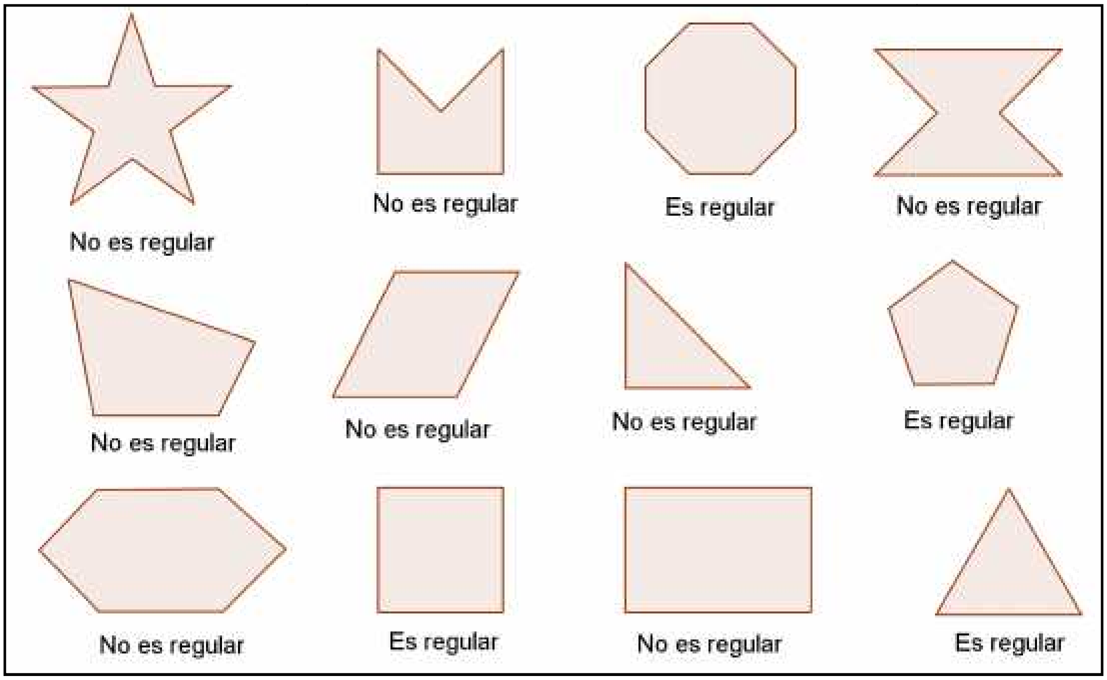
Es importante aclarar y subrayar que esta no es la única forma de estimar el área de una figura no poligonal, esto hace que el problema motive la creatividad y la originalidad. Por lo tanto, habrá gran variedad de resultados, unos con mejor aproximación que otros.

Nota: Es conveniente tener presente que la superficie del parque no es llana, al contrario, es montañosa como se muestra en la siguiente imagen. Hay que tener claro que lo que se pretende es *matematizar* el problema buscando apenas una aproximación de la superficie plana de un mapa.

III. Polígonos regulares e irregulares

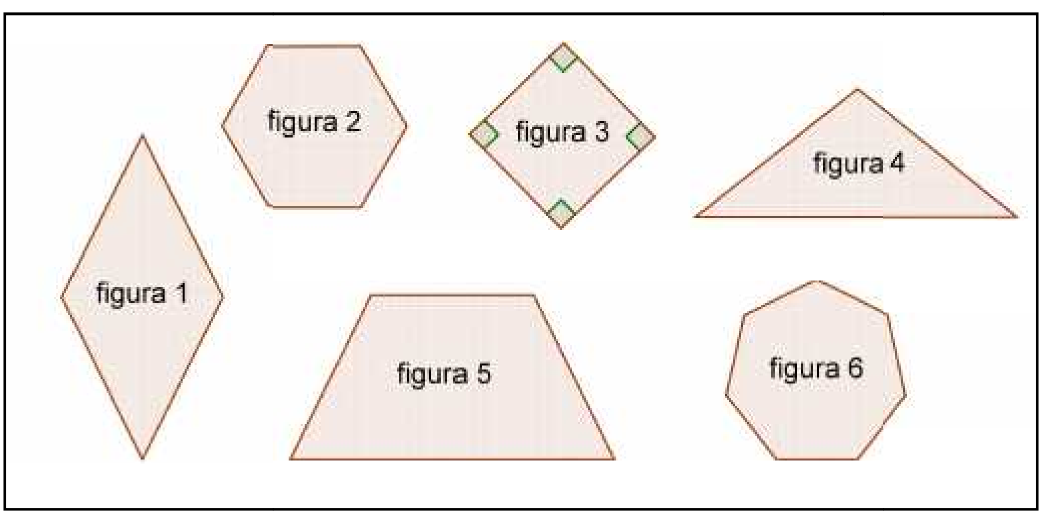
Actividad 4

Considere los siguientes polígonos con su respectiva información:



Identifique las similitudes y diferencias que presentan los polígonos de acuerdo a la característica que se les asigna (regular o no regular).

Con base a la anterior información, clasifique los siguientes polígonos en regulares y no regulares. Justifique su respuesta.



Análisis de la Actividad 4

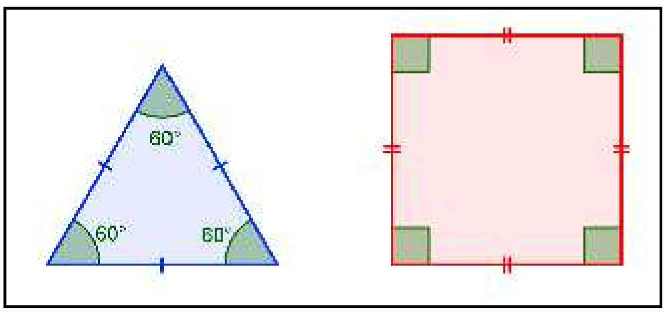
La idea básica de esta actividad es introducir el concepto de polígono regular mediante la observación de similitudes y diferencias entre las figuras, para luego poder conseguir conjeturas y provocar discusión pedagógica en el aula.

Hay que tener claro que para esta actividad el estudiante no conoce los términos de polígono regular ni de polígono irregular. Lo que se intenta hacer es mostrar una serie de imágenes clasificadas de acuerdo a estos nombres, para que ellos puedan mediante la visualización sacar conclusiones respecto a cuáles características tienen en común los polígonos regulares, que no poseen los polígonos irregulares. Es como un misterio, reto o acertijo a investigar. Aquí se privilegia y se promueve en el estudiante la intuición mediante la percepción de particularidades en figuras.

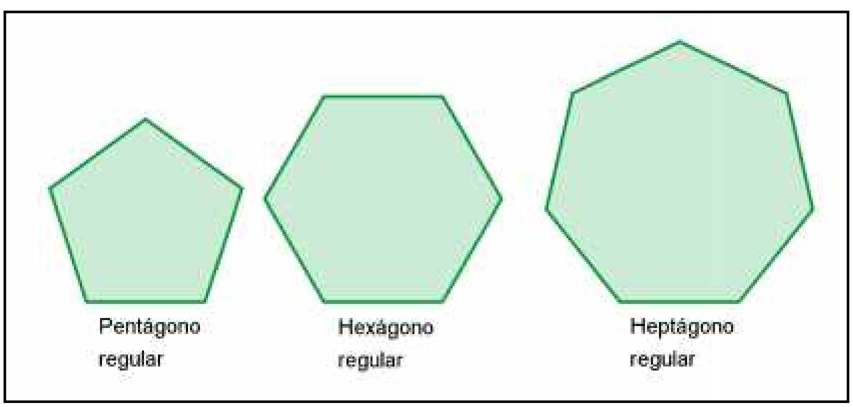
Luego de la discusión con los estudiantes acerca de las similitudes y diferencias que presentan los polígonos de acuerdo a la clasificación de los polígonos en regulares e irregulares, se podrá introducir el concepto de polígono regular con las dos características claves:

1. Los lados del polígono son congruentes (tienen igual medida).
2. Los ángulos internos son congruentes (tienen igual medida).

También, se puede hacer la relación con polígonos conocidos que son regulares, como lo son el triángulo equilátero y el cuadrado:



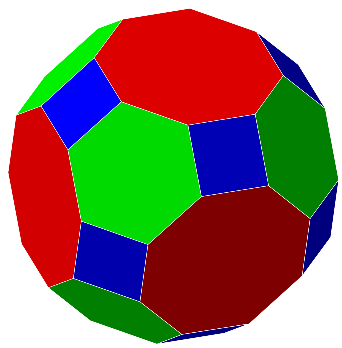
Luego, indicar que para polígonos de más lados, se añade el término *regular*, por ejemplo:



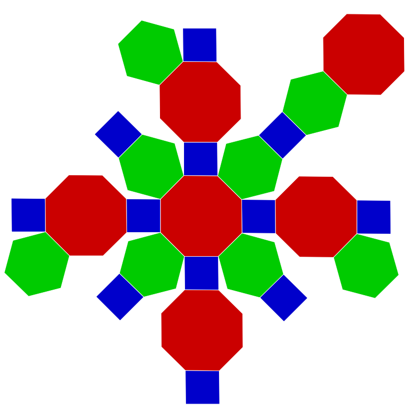
Es recomendable, también poder identificar estos polígonos en la naturaleza por ejemplo en la estructura de una colmena de abejas:

Imágenes cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Además, en cuerpos sólidos como el siguiente:



En la anterior figura se visualizan cuadrados (azul), hexágonos regulares (verde) y octágonos regulares (rojo). Una pregunta interesante es de ¿cuántos polígonos está compuesto el poliedro, de acuerdo a la cantidad de lados? Se pueden hacer conjeturas y también hacer un modelo geométrico plano con el que se podría construir el poliedro:



Una relación interesante es la siguiente:

- 12 cuadrados de 4 lados son en total 48 lados diferentes,
- 8 hexágonos de 6 lados son en total también 48 lados diferentes y
- del mismo modo 6 octágonos de 8 lados son en total 48 lados diferentes.

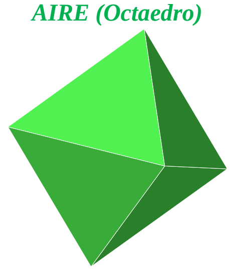
¿A qué se debe esta relación?

Un poco de historia

Un poliedro es una figura tridimensional delimitada por caras poligonales planas. Un poliedro regular es un poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares de iguales dimensiones. Euclides, un matemático griego, demostró que solo existen cinco poliedros regulares (llamados “sólidos cósmicos” por los pitagóricos).

El filósofo Platón (428-348) admiraba tanto estos cuerpos que las consideraba como creaciones divinas, por lo que construyó su representación del mundo tomando esos cinco poliedros como elementos primarios.

AIRE (Octaedro)

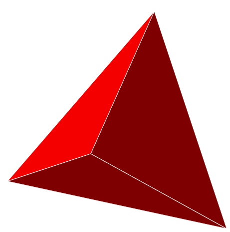


Está formado por 8 triángulos equiláteros.

AGUA (Icosaedro)

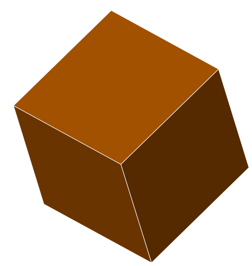
Está formado por 20 triángulos equiláteros

FUEGO (Tetraedro)



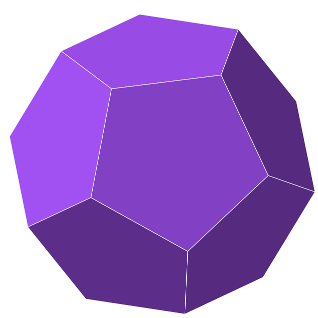
Está formado por 4 triángulos equiláteros

TIERRA (Cubo)



Está formado por 6 cuadrados

COSMOS (Dodecaedro)



Está formado por 12 pentágonos regulares

IV. Cuerpos sólidos

Actividad 5

Considere la siguiente imagen de un pequeño librero:

De acuerdo a la imagen anterior, realice lo siguiente:

1. *Repinte dos segmentos paralelos y dos segmentos perpendiculares. Justifique su escogencia.*
2. *Si esta librera es desarmable indique en cuantas partes se puede descomponer.*

Análisis de la Actividad 5

El propósito de esta actividad es poder visualizar en una imagen en tres dimensiones, objetos geométricos en dos dimensiones, tomando en cuenta la representación espacial del librero sobre una superficie plana (lo que se llama *perspectiva*).

Si no se toma en cuenta que la imagen tiene una perspectiva puede que se confundan ángulos rectos con agudos u obtusos. Por ejemplo, dos segmentos perpendiculares son los señalados en verde en la figura de la derecha, si no se toma en cuenta la perspectiva de la imagen se puede pensar que los segmentos forman un ángulo obtuso y no recto.

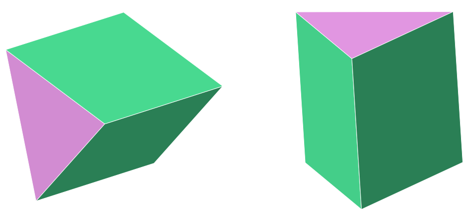
Además, como es natural, este librero está perpendicular al piso aunque no parezca así visualizando la imagen una figura plana.

Los segmentos rojos claramente se notan que son paralelos.

Lo mismo ocurre con las partes planas del librero. Por ejemplo, la tabla señalada con contorno rojo es un rectángulo, pero si no se toma en cuenta la perspectiva podría pensarse que es un romboide o incluso un trapezoide. Además, este plano es perpendicular al plano de la tabla señalada con contorno verde.

El libreo está compuesto por siete tablas rectangulares: una que representa el fondo, dos laterales que están en planos paralelos y perpendiculares a la tabla del fondo. También, hay que notar que la tabla superior es paralela a la inferior y éstas, a su vez, con las dos repisas.

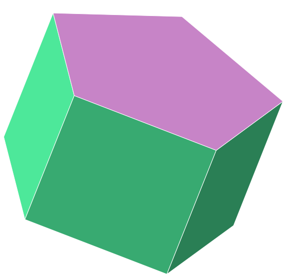
Este problema sirve para introducir el concepto de prisma como un cuerpo limitado por dos polígonos planos, paralelos e iguales, llamados bases (que en este caso son dos rectángulos paralelos) y por tantos paralelogramos como lados tenga cada una de las bases. Esto quiere decir que, si las bases son triángulos, estaremos hablando de un prisma triangular como el de la siguiente figura:



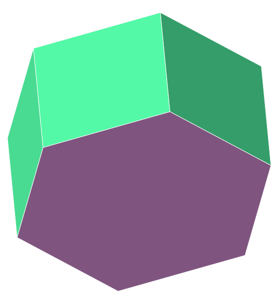
En este caso, las bases son triángulos equiláteros y es un prisma recto ya que sus caras laterales son rectángulos.

Las bases triangulares son paralelas y las caras laterales son perpendiculares a las bases.

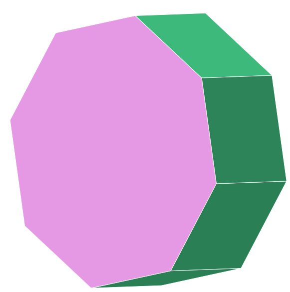
De acuerdo con la cantidad de lados de las bases así se llamará el prisma:



Prisma pentagonal



Prisma hexagonal



Prisma octogonal

Nota: En Educación Primaria sólo se trabajará con prismas rectos, como los que se han mostrado.

V. Circunferencia

Actividad 6

Lea el siguiente texto tomado del libro TERREMOTOS Y TSUNAMIS O MAREMOTOS (1994, p. 50):

Se requiere lecturas de tres estaciones sismográficas para ubicar el epicentro de un sismo., tal como se muestra en la figura de la derecha.

Determinación del epicentro.

Asuma que un científico encontró que la distancia de la Estación A al epicentro de un sismo es 1.000 kilómetros. El epicentro, por lo tanto, podría estar en cualquier punto sobre un círculo de radio 1.000 kilómetros alrededor de la Estación A.

El científico dibuja este círculo alrededor de su estación en un mapa. Asumamos que los científicos en las estaciones B y C también leen los registros y determinan que las distancias al epicentro desde la estación B es de 500 kilómetros y de 400 kilómetros desde la estación C. Ellos dibujan círculos alrededor de sus estaciones en B y C sobre los mapas, usando la distancia al epicentro como radio del círculo, de la misma forma que se hizo anteriormente. El epicentro del sismo, mostrado en la figura anterior, es el punto donde se interceptan los tres círculos en el mapa.

Nota: En la lectura anterior se está utilizando el término círculo como sinónimo de circunferencia; sin embargo no son equivalentes. La *circunferencia* es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia fija (radio) de un punto fijo (centro). La *circunferencia*, junto con su interior se llama *círculo*.

Considere la siguiente noticia que se publicó el 13 de febrero del 2012 el periódico La Nación:

Sismo de 6 grados despertó a Costa Rica

Un sismo entre magnitud 5,5 grados y 6,1 en la escala de Richter sacudió hoy a las 4:55 a.m. la costa del Pacífico central de Costa Rica.

El informe preliminar del Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica (Ovsicori) lo ubica en 6 grados y con localización a 34 kilómetros al suroeste del Estero Garita, en el cantón de Aguirre, Puntarenas. Según sus sismógrafos, el movimiento ocurrió a 14 kilómetros de profundidad.

La Red Sismológica Nacional lo registró con magnitud de 5,5 grados en Richter y lo ubica a 37 kilómetros al suroeste de Dominical de Osa, a una profundidad de 20 kilómetros.

Si el punto rojo en el siguiente mapa indica la localización del epicentro del sismo del 13 de febrero del 2012, ubique tres estaciones terrestres hipotéticas con las cuales se pudiera determinar la ubicación del epicentro. Trace las circunferencias e indique su radio en kilómetros (utilice la escala del mapa).

Imagen tomada de Google Maps

Análisis de la Actividad 6

El propósito de esta actividad es reflexionar acerca de la utilidad de la circunferencia en las diversas ocupaciones que existen en el mundo real. Aquí se crea un enlace entre el concepto de circunferencia y el estudio de los sismos.

El estudio de la circunferencia tiene amplias conexiones con diferentes áreas, por lo que es importante desarrollar este tema de manera integrada con situaciones cotidianas o reales que ocurren en el contexto del estudiante. En este caso, se sabe que Costa Rica es un país altamente propenso a temblores y terremotos, esto debido a la gran cantidad de volcanes y a que se encuentra en la zona de convergencia de la Placa de Cocos y la Placa del Caribe; esto a su vez crea vínculos con temas de la materia de Estudios Sociales.

Al igual que en otras actividades de esta unidad, se crea la oportunidad de implementar diversas estrategias y de obtener diferentes soluciones acertadas. También, es claro que para la precisión de la respuesta es elemental que el estudiante utilice correctamente instrumentos como la regla y el compás para las mediciones y trazos.

Además, el uso de escalas en los mapas en problemas geométricos crea importantes vínculos con el área de Medidas. En este caso, el poder entender que una determinada medida en milímetro o centímetros en un mapa equivaldrá a una medida en kilómetros o millas, es un conocimiento útil para cualquier persona.

Una posible solución al problema es ubicar las estaciones en los siguientes pueblos:

A: Jacó
B: San Marcos
C: San Isidro del General

En este caso, tomando en cuenta la escala del mapa la medida aproximada de los radios de las circunferencias son los siguientes:

Circunferencia con centro en el punto:	**Medida del radio (en km)**
A	72
B	58
C	60

Nota: Este procedimiento es ideal si consideramos que el material del que está compuesta la tierra es uniforme. Sin embargo, en la realidad esto es muy diferente. La tierra está compuesta por diferentes capas. Por esta razón las ondas se comportan de diferente manera al atravesar de un medio a otro. El cálculo de la distancia epicentral se vuelve entonces más complejo y son necesarios sistemas más especializados que requieren de mayor tiempo para efectuar una localización de gran precisión.

VI. Simetrías

Actividad 7

El maestro Felipe realizó con su grupo una gira educativa que recorría varios edificios históricos de Costa Rica. El maestro tomó varias fotos de las fachadas de estos edificios e hizo un cartel para una exposición de la asignatura de Estudios Sociales:

Edificios históricos de Costa Rica

Museo de los niños

Museo de Cartago (Antiguo Cuartel)

Antigua Biblioteca Mario Sancho de Cartago

Parroquia María Auxiliadora

Basílica de nuestra Señora de los Ángeles

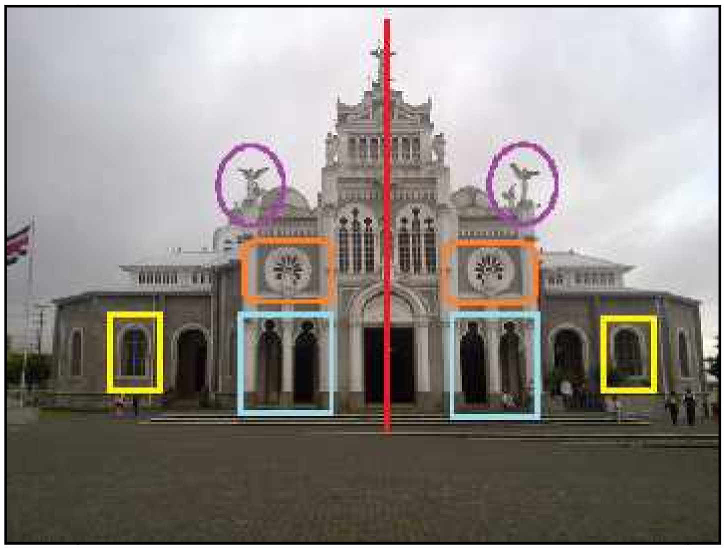
Teatro Nacional

Luego de la exposición, el docente preguntó a sus estudiantes, ¿Qué características en común tienen estos edificios?

Evelyn, una estudiante que le gusta mucho las matemáticas, sólo se refirió a características geométricas que tienen las fachadas de estos edificios, ¿A cuáles características se habrá referido Evelyn?

Análisis de la Actividad 7

En esta actividad se trata de observar que al trazar una línea visual vertical en el centro de los edificios, estos tienen en común que a ambos lados de la línea imaginaria hay elementos similares. Así se puede mostrar, por ejemplo, en la imagen de la Basílica de nuestra Señora de los Ángeles en Cartago:



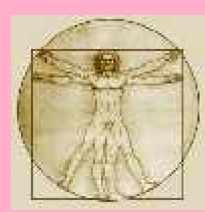
En la imagen anterior, se nota que los elementos del lado izquierdo de la línea roja son iguales o semejantes a los que están a su derecha; además, están ubicados a la misma distancia y en la posición equivalente con respecto a la línea visual.

Intuitivamente, cuando una imagen o un cuerpo es dividido en dos partes por una línea o un plano y las partes resultantes son iguales entre sí entonces se dice que la imagen o el cuerpo presenta alguna simetría o es simétrica.

Simetría, del latín *symmetrĭa*, es la correspondencia exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un todo.

Aunque la idea de simetría es utilizada instintivamente por las personas, es importante definir el *principio de simetría* como la disposición de los distintos elementos de un todo de forma ordenada y con mutua correspondencia, que genera una forma proporcionada y equilibrada.

Un ejemplo de simetría es *El hombre Vitrubio* de Leonardo da Vinci, una obra que representa un cuerpo humano perfectamente simétrico.



El *principio de la simetría*, no solamente es utilizado en la geometría, sino también en áreas como la biología, la mineralogía, el arte, la arquitectura, la física, entre otras. Por ejemplo, la mayoría de especies animales tiene simetría bilateral y pertenece por tanto al grupo Bilateria, aunque hay especies como los erizos y las estrellas de mar que presentan simetría radial secundaria (las fases de desarrollo tempranas y las larvas poseen simetría bilateral que posteriormente se pierde en el adulto).

La simetría bilateral permite la definición de un eje corporal en la dirección del movimiento, lo que favorece la formación de un sistema nervioso centralizado y la cefalización:

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

En geometría, la simetría es la correspondencia exacta en la disposición de los puntos o partes de un cuerpo o figura respecto a un centro, eje o plano. Esta simetría puede ser esférica (existe bajo cualquier rotación posible), axial (cuando hay un eje que no conduce a ningún cambio de posición en el espacio con los giros a su alrededor) o reflectiva (definida por la existencia de un único plano)

Para la educación primaria se trabajará la simetría axial, la cual es la que presenta un objeto alrededor de un eje (una recta), de modo que un sistema tiene simetría axial cuando todos los semiplanos tomados a partir de cierto *eje y* conteniéndolo presentan idénticas características.

Por ejemplo, en el caso de las siguientes imágenes de insectos se puede notar que al trazar un eje los elementos de ambos semiplanos presentan características similares:

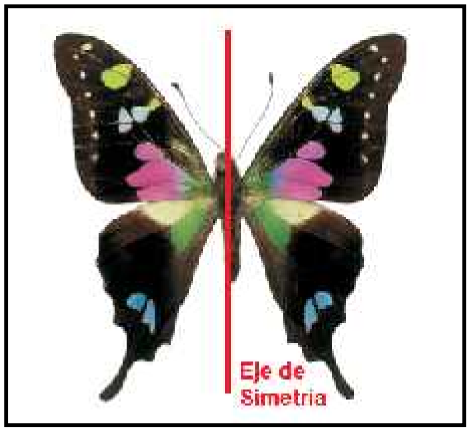
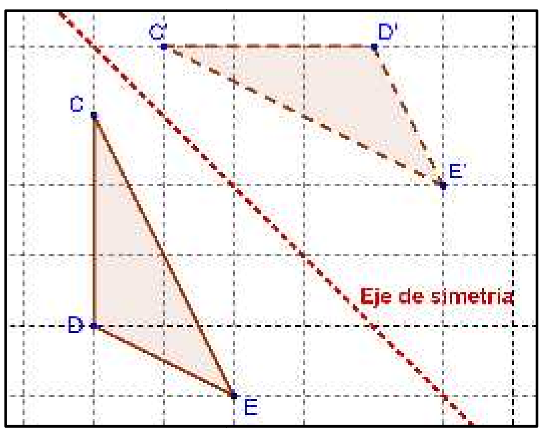


Imagen con derechos adquiridos por el MEP

La simetría axial se da cuando los puntos de una parte coinciden con los puntos de la otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de *eje de simetría*. Los elementos (puntos, segmentos, etc) en los cuales coinciden se llaman elementos homólogos:



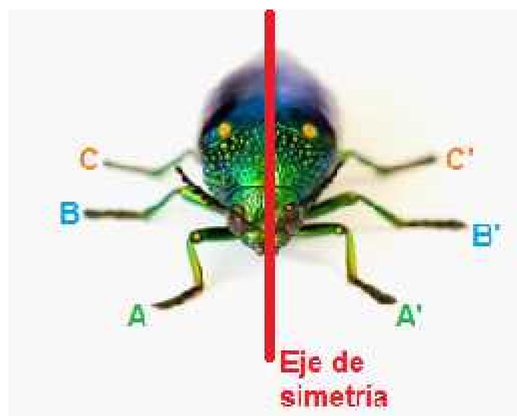


Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

En las anteriores figuras se ilustra que la simetría axial no solo se presenta entre un objeto y su reflexión (caso de los triángulos), pues muchas figuras que mediante una línea pueden partirse en dos secciones que son simétricas con respecto a la línea (caso del insecto).

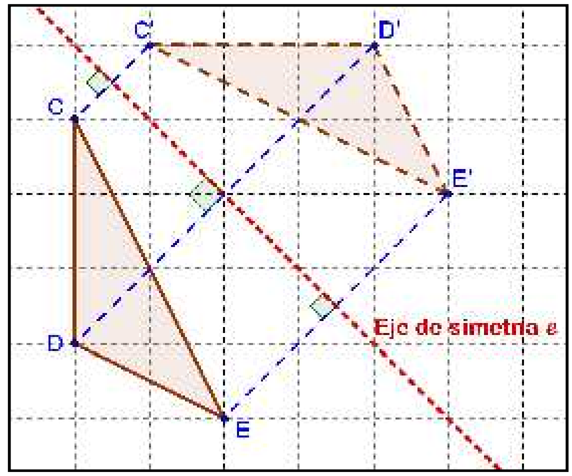
Tomando en cuenta el eje de simetría y la correspondencia de las partes, en la figura del insecto la *pata A'* es homóloga a la *pata A* y la *pata B'* es homóloga a la *pata B.*

En el ejemplo de los triángulos, el punto C' es homólogo al punto C, así como el punto D' con D y E' con E. En la simetría axial se da el mismo fenómeno que en una imagen reflejada en el espejo, por ejemplo en la anterior imagen de los triángulos el triángulo CDE se ve reflejado al otro lado del eje de simetría (espejo) por el triángulo C'D'E'. Esto se explica ya que el eje de simetría es mediatriz de los segmentos CC', DD' y EE', o sea, estos segmentos son cortados perpendicularmente en su punto medio por el eje de simetría. A estos puntos se les llama *puntos homólogos*, es decir, si P' es un punto homólogo a P entonces el eje de simetría es la mediatriz del segmento PP'.

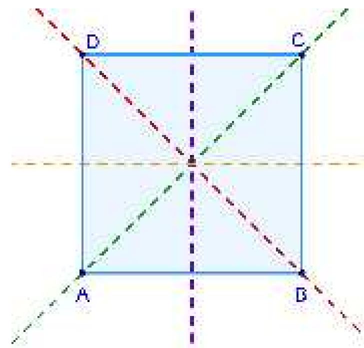
Por lo tanto, dada una recta *e* se llama simetría axial de eje *e* al movimiento que transforma a un punto P en otro punto P' verificando que:

- El segmento PP' es perpendicular a *e*.
- Los puntos P y P' equidistan del eje *e*.

Dicho de otra forma el eje *e* es la mediatriz del segmento PP'.



La simetría axial se puede dar también en un objeto con respecto de uno o más ejes de simetría. Por ejemplo, el cuadrado ABCD presenta cuatro ejes de simetría.



Intuitivamente, si se dobla una figura plana sobre un eje trazado, y se observa con toda claridad que los puntos de las partes opuestas coinciden, es decir, ambas partes son congruentes, se puede decir que la figura presenta simetría axial. Como en el caso de la siguiente fotografía:

Imagen suministrada gratuitamente por FreeDigitalPhotos.net

VII. Puntos y figuras en el plano cartesiano

Actividad 8

Observe el siguiente mapa del centro de la ciudad de Cartago:

Imagen tomada de Google Maps

Suponga que Juan está ubicado en la esquina noroeste del Gimnasio del Colegio de San Luis Gonzaga (Avenida 5, calle 5) y se dirige hacia la parada del bus donde vive (Parada de Buses hacia San Rafael, Avenida 4, calle 6). Qué trayectoria puede hacer Juan, suponiendo que cada cuadra representa un cuadrado de aproximadamente 100 metros de lado. Utilice los puntos cardinales para hacer la trayectoria sabiendo que las avenidas van de Este a Oeste y las calles de Norte a Sur.

Análisis de la Actividad 8

Es común que las personas manejen conocimientos intuitivos para ubicar lugares y poder dar direcciones tomando como referencia a un edificio o parque conocido; esto requiere evidentemente de un manejo adecuado de los puntos cardinales y de su sentido de ubicación espacial.

En el planteo de esta actividad, es claro que dado un punto de referencia u origen (esquina noroeste del Gimnasio del Colegio de San Luis Gonzaga) y gracias a la disposición en cuadrantes, conocidos como "cuadras", que caracteriza a la mayoría de los centros de ciudad, es posible realizar la ubicación específica de cualquier lugar con base en dos datos o coordenadas para realizar el respectivo desplazamiento.

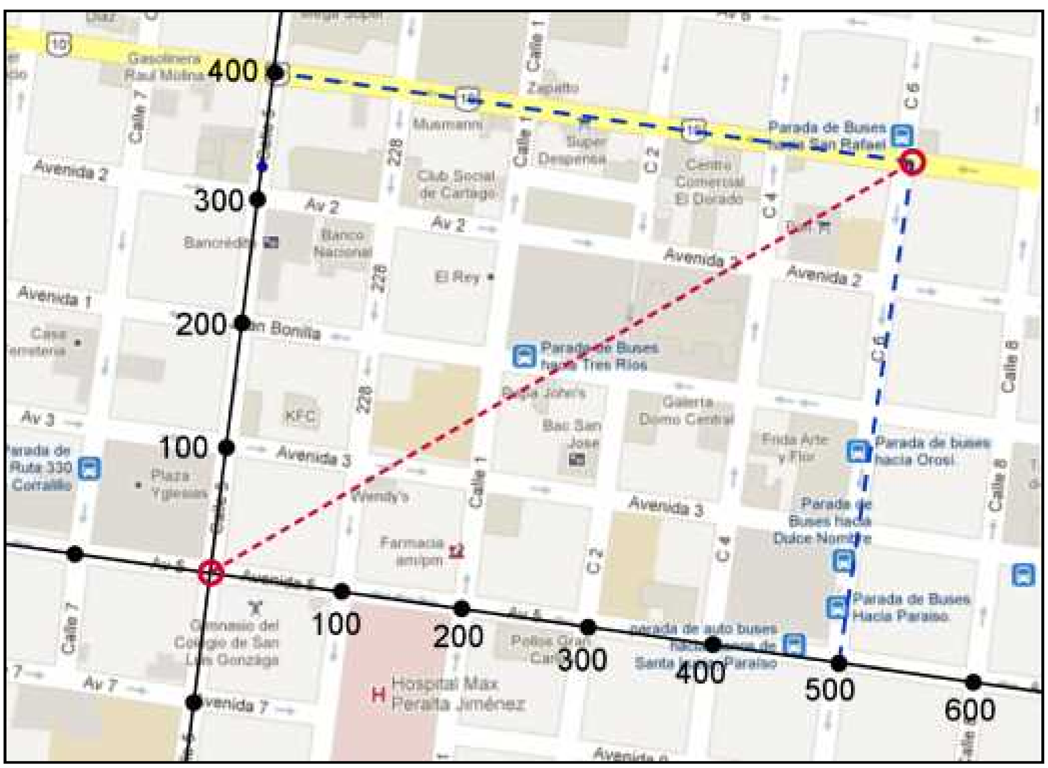
Entonces, considerando que las avenidas van de Este a Oeste y las calles de Norte a Sur y suponiendo que cada "cuadra" representa un cuadrado de aproximadamente 100 metros de lado, se persigue que el estudiante pueda comunicar un recorrido utilizando longitudes y puntos cardinales.

Es muy posible que haya varias respuestas correctas, por ejemplo "del gimnasio del Colegio de San Luis Gonzaga:

- 400 metros Norte y 500 metros Este"
- 500 metros Este y 400 metros Norte"
- 200 metros Norte, 500 metros Este y 200 metros Norte"

Ahora bien, la idea es utilizar este problema para introducir la representación de puntos y figuras utilizando el sistema de coordenadas cartesianas en el primer cuadrante.

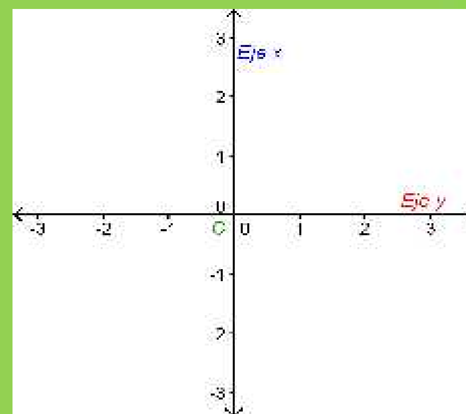
Lo primero por hacer es ubicar el punto de referencia u origen, que en este caso será el punto de intersección entre la avenida 5 y la calle 5. Luego para representar los ejes del sistema de coordenadas cartesianas se puede trazar una recta en la avenida 5 y otra perpendicular a ella en el punto de origen (o sea pasará por la calle 5). Para la escala, se puede tomar la longitud de los cuadrantes, o sea 100 metros. Por último se coloca el punto que queremos ubicar (estación de bus de San Rafael) en 500 metros Este y 400 metros Norte de la esquina noroeste del Gimnasio de Colegio de San Luis Gonzaga.



Tomando el sistema de coordenadas construido podemos ubicar otros lugares tomando como referencia nuestro punto de origen. Por ejemplo, el Banco Nacional de Costa Rica está 300 metros Norte y aproximadamente 75 metros al Este de nuestro punto de referencia.

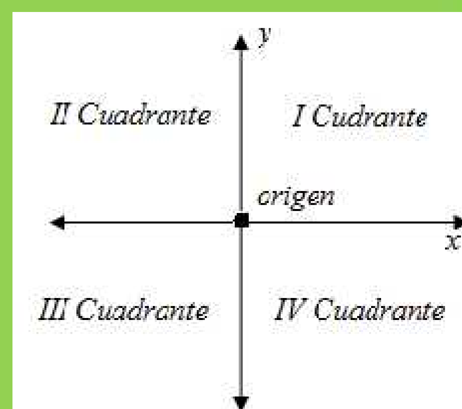
Una forma de ubicar un punto en el plano es utilizando dos coordenadas. Para resolver problemas de esta índole se creó el sistema de coordenadas cartesianas, llamado así por el matemático francés René Descartes (1596-1650). Este agiliza y simplifica la identificación de puntos pertenecientes a un plano en forma de pares ordenados.

Sistema de coordenadas cartesianas



El sistema de coordenadas cartesianas consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, designadas como *eje x* y *eje y*, que se intersecan en un punto que se llamará **origen**, designado con la letra *O*. Usualmente el eje x, también llamado *eje de las abscisas*, lo representa la recta horizontal y el eje y, también llamado *eje de las ordenadas*, suele ser representado por la recta vertical.

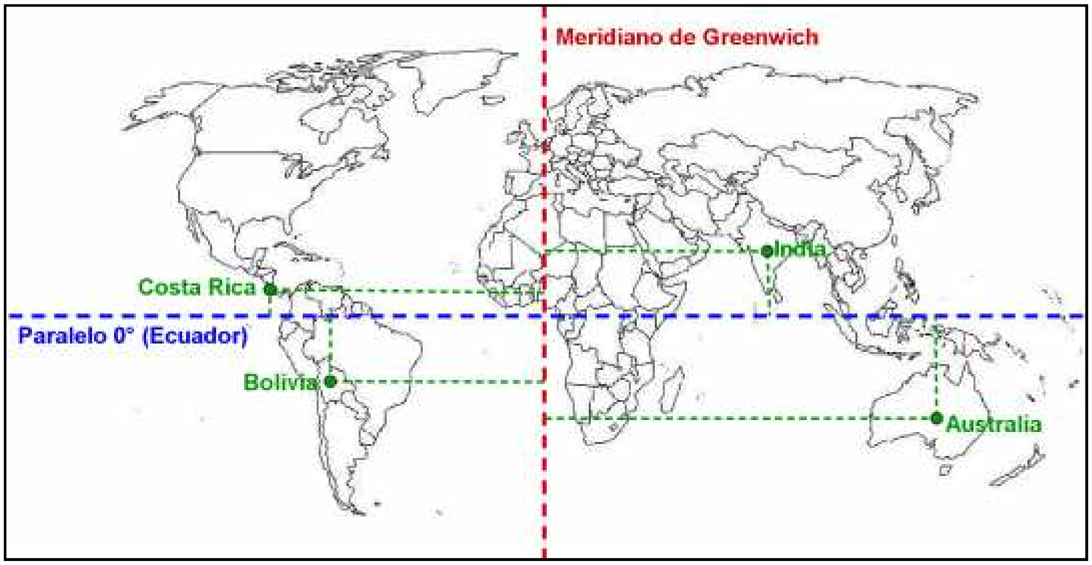
Cuadrantes



Al igual que utilizamos la recta numérica para representar el conjunto de los números reales, el plano cartesiano se utiliza para representar las parejas ordenadas de números reales. Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro semiplanos llamados cuadrantes, se enumeran de I a IV en el sentido contrario al que giran las manecillas de un reloj iniciando en el cuadrante superior derecho. Los puntos sobre los ejes de coordenadas **no** se consideran parte de algún cuadrante.

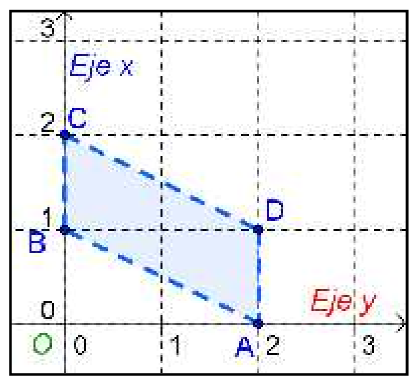
Nota: En segundo ciclo solamente se trabajará en el primer cuadrante, donde todas las coordenadas son positivas.

También se puede variar la actividad 4 para crear conexión con la materia de Estudios Sociales, tomando como eje de las ordenadas al (meridiano de Greenwich) y al eje de las abscisas como al paralelo 0 (llamado ecuador terrestre). Así se podría visualizar la utilidad de las matemáticas ubicando por ejemplo países como Costa Rica, Bolivia, la India y Australia.



Asimismo, también se pueden construir figuras ubicando puntos en el plano cartesiano y uniéndolos con segmentos. Por ejemplo, visualizar el polígono que se forma al ubicar los puntos A(2,0), B(0,1), C(0,2), D(2,1) y trazar los segmentos AB, BC, CD y DA.

En educación primaria, es recomendable utilizar papel cuadriculado para que sea mucho más fácil ubicar los puntos.

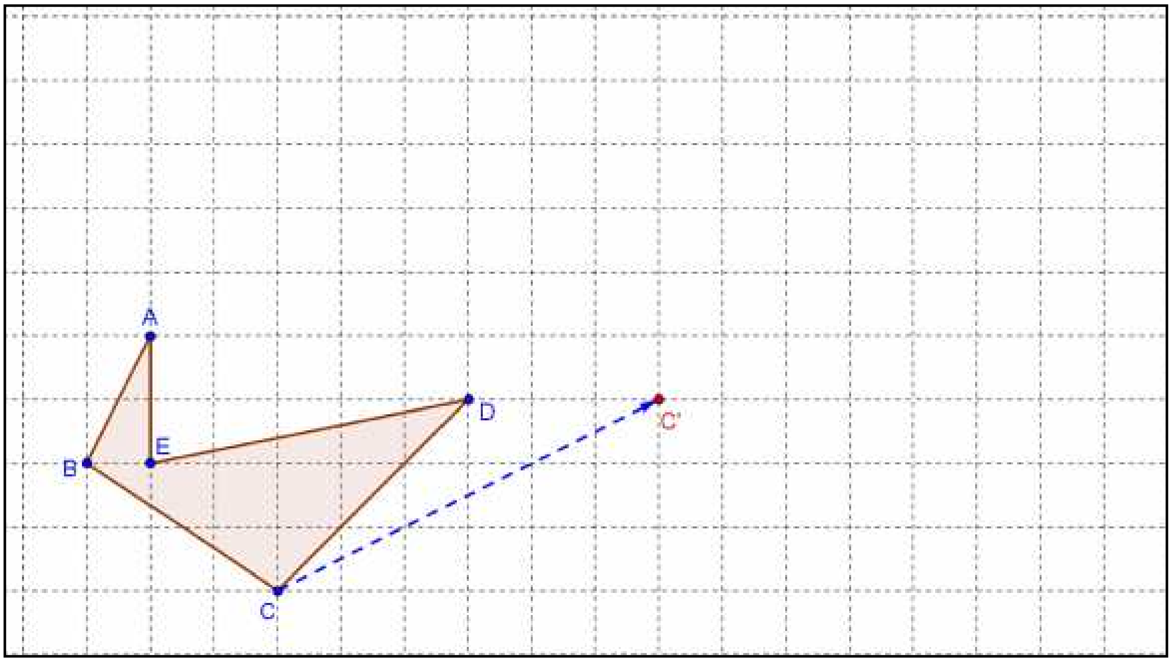


Romboide

VIII. Transformaciones (Traslación)

Actividad 9

Observe la siguiente figura:



Utilizando papel cuadriculado, realice lo siguiente:

1. *Dibuje el polígono ABCDE como se presenta en la figura.*
2. *El punto C' de la figura representa un movimiento del punto C. Realice el mismo movimiento para los demás puntos del polígono y denótelos respectivamente como A' B' D' y E'.*
3. *Una los puntos construyendo el polígono A'B'C'D'E'.*
4. *¿Qué similitudes encuentra entre los polígonos?*
5. *¿Qué diferencias encuentra entre los polígonos?*

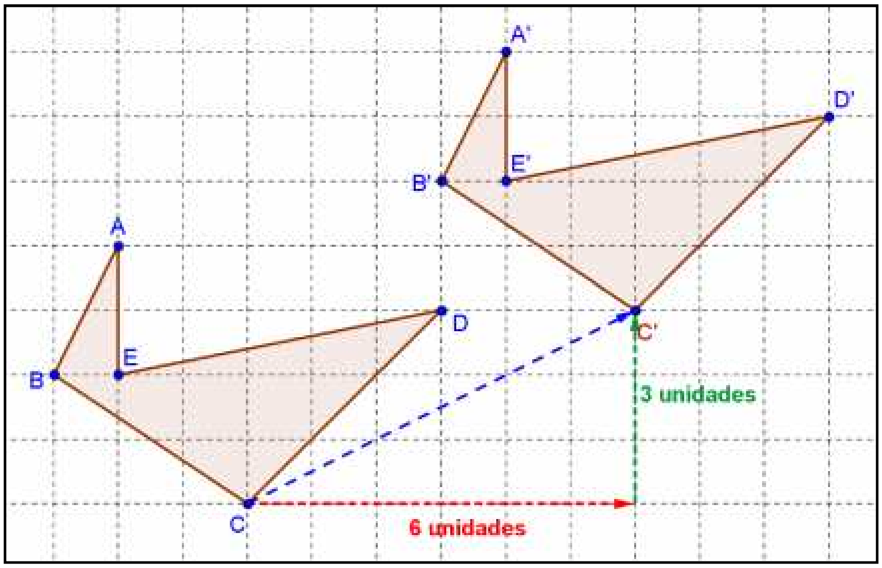
Análisis de la Actividad 9

En el mundo real la mayoría de los objetos no están estáticos sino están en movimiento, por lo que aunque no se haya estudiado antes el tema de las traslaciones hay que tener presente que los estudiantes viven en mundo dinámico.

El propósito de esta actividad es que mediante la intuición se pueda introducir el concepto de traslación de figuras; para esto es de mucha utilidad el papel cuadriculado.

Luego de los diferentes trazos realizados, es importante preguntar a los estudiantes cuál fue el movimiento que siguió cada punto de la figura original. Puede haber respuestas muy variadas ya que se apela a la intuición y creatividad del estudiante.

Al final, lo que se quiere es poder concluir que cualquier traslación se puede definir como un movimiento horizontal y/o un movimiento vertical. Por ejemplo, en el caso de la actividad cada punto tuvo que trasladarse 6 unidades a la "derecha" y 3 unidades hacia "arriba".



Esta acción crea una figura con las mismas dimensiones de la original y la misma orientación pero en diferente posición, a esto se le llama *traslación geométrica.* Es decir:

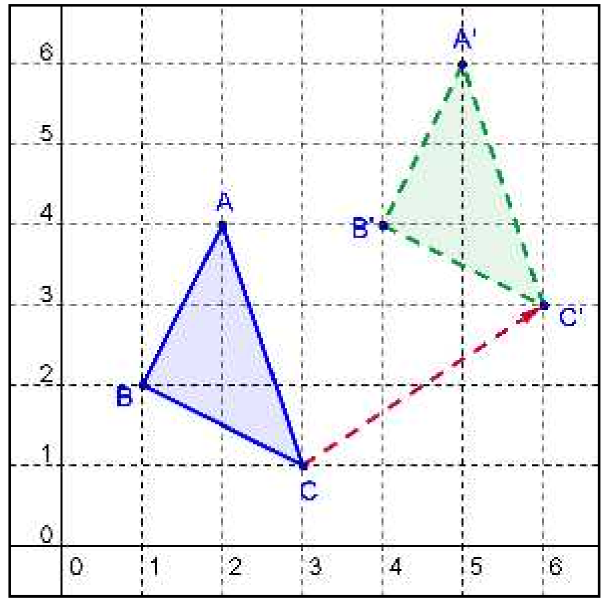
1. La figura trasladada es idéntica a la figura inicial.
2. La figura trasladada conserva la misma orientación que la figura original.

Por lo tanto, las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados.

En la traslación efectuada en la *Actividad 9* se pudo haber utilizado un sistema de coordenadas cartesianas para agilizar el traslado de los puntos; esto se podría realizar sumando 6 unidades a la abscisa y 3 unidades a la ordenada de cada punto de la figura.

Por ejemplo, en la imagen de la derecha se muestra la traslación de un triángulo en un sistema de coordenadas cartesianas. El triángulo ABC tiene las siguientes coordenadas A(2,4), B(1,2), C(3,1) y el triángulo A'B'C' tiene como coordenadas A'(5,6), B(4,4), C(6,3) por lo que la traslación realizada fue sumar 3 unidades a la abscisa y 2 unidades a la ordenada:

- A'(5,6) = (2**+3**, 4**+2**)
- B'(4,4) = (1**+3**, 2**+2**)
- C'(6,3) = (3**+3**, 1**+2**)



Nota: La traslación realizada, en el ejemplo anterior, se llama traslación de vector (3,2); y en general, una traslación que consiste en sumar *a* unidades a la abscisa y *b* unidades a la ordenada se conoce como *traslación de vector (a,b).*

Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base a dos etapas:

Etapa 1: el aprendizaje de conocimientos.
Etapa 2: la movilización y aplicación de los conocimientos.

La primera etapa es aquella en la que se va a realizar el aprendizaje de conocimientos nuevos, la segunda ocurre una vez realizada la primera y busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados. Esta última etapa puede realizarse en cualquier momento posterior, no necesariamente de forma inmediata a la primera. En la primera etapa sí resulta conveniente que se realice en una lección o en una secuencia de lecciones.

Se propone aquí un estilo de organización de la lección donde se promueve la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos siguiendo cuatro pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema para iniciar una lección.
2. Resolución o aporte de ideas por parte de los estudiantes, individualmente o en subgrupos.
3. Discusión interactiva y comunicación frente al conjunto del grupo de las soluciones o ideas aportadas por los estudiantes.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para cuarto año.

Concepto	**Habilidades específicas**
Triángulos Clasificación según la medida de sus lados: - Equilátero - Isósceles - Escaleno Clasificación según la medida de sus ángulos: - Acutángulo - Rectángulo - Obtusángulo	• Clasificar triángulos de acuerdo con las medidas de sus ángulos. • Clasificar triángulos de acuerdo con las medidas de sus lados. • Estimar, por observación, si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. • Estimar, por observación, si un triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

1. Propuesta de un problema para iniciar una lección.

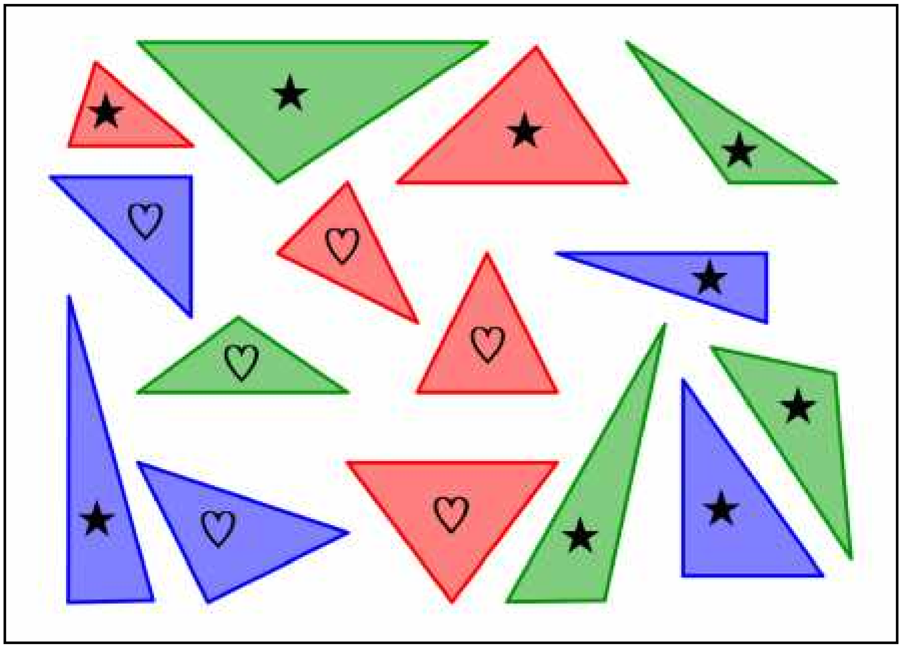
Antes de plantear el problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con ella? Luego, para este momento, es importante que el maestro tenga claro cuáles son las habilidades desarrolladas anteriormente.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

- ✓ Clasificar ángulos de acuerdo con su medida (agudo, recto, obtuso). (Tercer año)
- ✓ Estimar por observación (en dibujos y objetos del entorno) si un ángulo es recto, agudo u obtuso. (Tercer año)
- ✓ Identificar diversos elementos de los triángulos (lado, vértice, ángulo, base, altura). (Cuarto año)

Planteamiento del problema:

Observe los triángulos del siguiente recuadro:



De acuerdo a su color,

- *¿Qué características en común visualiza en los triángulos de color azul?*
- *¿Qué características en común visualiza en los triángulos de color rojo?*
- *¿Qué características en común visualiza en los triángulos de color verde?*

De acuerdo al símbolo en su interior (estrella o corazón)

- *¿Cuál es la diferencia entre los triángulos con una estrella en su interior de los triángulos con un corazón en su interior?*

2. Resolución o aporte de ideas por parte de los estudiantes mediante el trabajo en los subgrupos.

En esta etapa se espera que los estudiantes pregunten sobre algunos de los aspectos que aparecen en el problema y que no tengan claro.

Lo que se pretende en esta actividad es introducir el tema de clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos y de acuerdo a la medida de sus lados. Para esta actividad se requiere que el estudiante reconozca la figura de un triángulo e identifique los elementos que la componen (lados, vértices y ángulos internos); además debe saber conocer la clasificación de los ángulos de acuerdo a su medida (agudo, recto y obtuso) e identificarlos en el entorno.

Como puede verse en el recuadro, ya se pueden hacer ciertas clasificaciones naturales: de acuerdo al color (azul, rojo y verde) o de acuerdo a los dibujos en su interior (corazón y estrella), los cuales son identificables para el estudiante. Ahora la idea es asociar intuitivamente esta clasificación que es habitual al estudiante con características de los triángulos mediante la observación y la exploración.

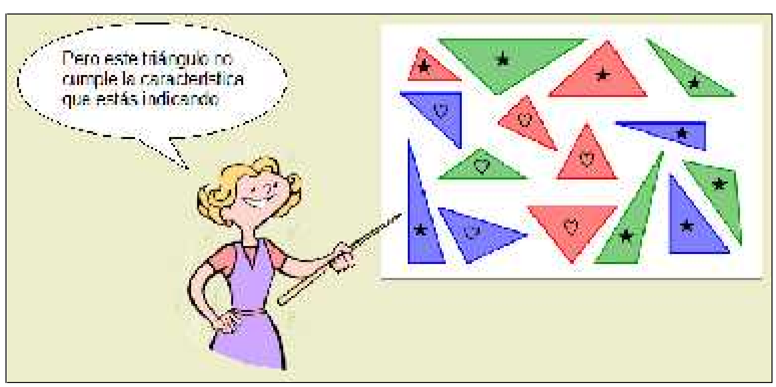
El estudiante puede darse cuenta que los triángulos de color azul tienen una particularidad, y ésta es que tienen un ángulo recto. Sin embargo, hay que tener claro que esta característica no surgirá inmediatamente de los estudiantes, probablemente hayan muchas conjeturaras muy heterogéneas entre los estudiantes acerca de qué característica tienen en común los triángulos. Puede haber conjeturas que relacionan la clasificación a la posición de las figuras, al tamaño, a la similitud de las medidas de los lados para algunos triángulos, etc. Por ende, del docente no debe desesperarse y dar la respuesta a la pregunta o dar “pistas” que fuercen la respuesta en el estudiante. Primero, es importante para este enfoque metodológico, brindar suficiente tiempo para la observación, la exploración, la conjetura, argumentación, comunicación y la discusión en el grupo.

Para este tipo de actividades se les debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación entre los estudiantes y estimularlos para que se enfrenten a las interrogantes propuestas. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con los estudiantes para orientar el desarrollo de su trabajo y plantear preguntas generadoras que encausen a lo que se quiere llegar, pero debe permitir la discusión entre los jóvenes en relación con la búsqueda de soluciones.

3. Discusión interactiva y comunicación frente al conjunto del grupo de las soluciones o ideas aportadas por los estudiantes.

En este momento, el docente discute las posibles respuestas de los estudiantes y revisa la primera parte de la actividad. Se debe valorar todas las estrategias utilizadas y agruparlas de acuerdo a su similitud.

El docente al interactuar con el grupo puede apoyarse en varias estrategias: interrogación, la formulación de contraejemplos. En este caso en particular los contraejemplos son muy útiles, ya que no basta con indicar que una conjetura no es correcta o es imprecisa, el estudiante debe convencerse del porqué de su error.



También, puede captar que los triángulos verdes en cambio tienen un ángulo “más abierto” el cual tienen que asociarlo con el ángulo obtuso (ya que es mayor que el ángulo recto); y por último, los ángulos internos de los triángulos rojos son todos agudos.

Se clasifican las soluciones correctas y las incorrectas y se discute en cada caso por qué las características propuestas para las clasificaciones de acuerdo a su color o símbolo no se dan para cada elemento de grupo.

Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

4. Clausura o cierre.

Luego, de identificar estas características, el docente podrá precisar la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus ángulos:

- Los triángulos azules se llaman triángulos rectángulos, ya que tienen un ángulo interno recto y dos agudos.
- Los triángulos verdes se llaman triángulos obtusángulos, ya que tienen un ángulo interno obtuso y dos agudos.
- Por último, los triángulos rojos se llaman triángulos acutángulos por que tienen sus tres ángulos internos agudos.

Ahora, con respecto la diferencia entre los triángulos con una estrella en su interior de los triángulos con un corazón en su interior, al final se debe observar que los triángulos con una estrella en su interior tienen todos sus lados de diferente medida a diferencia de los otros (corazón) que tienen dos o todos los lados de igual medida. Similarmente, esta respuesta no es inmediata, se deben dar los procesos antes indicados y el tiempo apropiado para el obtener esta conclusión. Luego de esto, el docente puede darle nombre a esta distinción:

- Los triángulos con un corazón en su interior se llaman escalenos, ya que tienen todos sus lados de diferente medida.

- Los triángulos con una estrella en su interior se llaman isósceles, ya que tienen al menos dos lados de igual medida. Un caso particular de los triángulos isósceles son los triángulos que tienen todos sus lados de igual medida, a estos se les llamará triángulos equiláteros.

Además, no se puede perder de vista que hay triángulos de un mismo color con diferente dibujo en su interior (estrella o corazón). Esto quiere decir que un mismo triángulo se puede clasificar tanto de acuerdo a la medida de sus ángulos como a la medida de sus lados. Por ejemplo:

Esto se puede resumir mediante un cuadro similar:

Clasificaciones	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Escaleno	x	x	x
Isósceles	x	x	x
Equilátero	x	-	-

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Autor

Luis Hernández

Revisor

Christiane Valdy
Hugo Barrantes
Susanne Blaise

Editor gráfico

Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública (2012). *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Geometría.* San José, Costa Rica: autor.

Bibliografía

Clemens, S., O'Daffer, P. & Cooney, T. (1998). *Geometría*. México: Pearson.

Conceptos Digitales C.R. (2007). *Maptak*. Recuperado de http://www.maptak.com/cresp/pn/pn/3brau.html

Lorca E. & Recabarren, M. (1994). *Terremotos y Tsunamis o Maremotos.* La sismología de la tierra y los volcanes. Recuperado de http://www.crid.or.cr/digitalizacion/pdf/spa/doc14988/doc14988-3.pdf

Mayorga A., Carranza, J. & Altamirano, P. (2012, febrero). *La Nación*. Sismo de 6 grados despertó a Costa Rica. Recuperado de http://www.nacion.com/2012-02-13/Sucesos/Sismo-de-6-grados-d-esperto-a-Costa-Rica.aspx

MINAET & SINAC. (2009, setiembre). *Decreto N° 20358-MIRENEM*. Recuperado de http://crbio.cr/site/paginas/ASP/mapas/p02_dec20358_mirenem.jpg

Ruiz, A. & Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Lecturas recomendadas

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Costa Rica: EUNED

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: AcademicPress.

Schoenfeld, A. (2011). *Howwethink*. New York: Routledge.