Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas

Medidas

2012

Presentación

El *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Segundo Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar áreas como *Números* y *Medidas* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. Luego, *Geometría* sigue la misma línea, solo que incorporando contenidos como geometría analítica y transformaciones geométricas. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora. Por último, *Relaciones y Álgebra* que no estaba presente en el plan anterior y busca por medio del uso de representaciones ir evolucionando hacia el uso y comprensión del concepto de variable para modelar relaciones. Estas cinco unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Segundo Ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.
En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías.
En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Medidas

Habilidad general

Dada una serie de situaciones seleccionadas con fines didácticos, conocer y aplicar conceptos básicos sobre diversos tipos de medidas: tiempo, longitud, moneda, capacidad, temperatura.

Introducción

Este material propone situaciones seleccionadas con fines didácticos en donde se busca desarrollar algunos contenidos sobre medidas mediante la metodología de resolución de problemas utilizando un enfoque orientado a la educación a distancia.

Se privilegia el trabajo con situaciones en contexto, donde el uso de diversas medidas juega un importante papel. Esto pone en evidencia la utilidad de las matemáticas.

Las actividades que se describen en este material están dirigidas a docentes de enseñanza primaria; por este motivo puede que algunas de ellas no sean replicables con los estudiantes de II ciclo, tal como se desarrollaron aquí. Es importante que la o el docente las estudie y realice las adaptaciones pertinentes para su utilización en el salón de clases o bien las utilice como una guía para implementar nuevas situaciones.

Tabla de contenido

I. Medidas de longitud

Actividad 1

"Los griegos habían imaginado diversos sistemas métricos, combinando de ordinario las relaciones decimales y las relaciones sexagesimales, estas últimas tomadas de la metrología oriental; así el estadio, medida corriente de las grandes distancias, vale 600 pies. Pero el valor del pie varía entre 0,27 y 0,35 metros, y por tanto la del estadio entre 162 y 210 metros. Otra unidad, el codo, es frecuentemente empleada como medida de longitud: vale un pie y medio. En cuanto al pie mismo, se divide en 16 «dedos» o dáctilos. Se ve la dificultad de los cálculos con un sistema semejante, al que todavía hay que añadir las medidas de origen extranjero, como la pasaranga persa, que vale 30 estadios (un poco más de 6 km) y que Herodoto y Jenofonte emplean con frecuencia. Las medidas de peso y de capacidad no eran menos complicadas ni menos variables de ciudad a ciudad." (Chamoux, F. (2000). La civilización griega. Barcelona: Optima, p. 234).

De acuerdo con la lectura anterior:

1. *Establezca las diversas relaciones entre el dedo, el pie, el codo, el estadio y la pasaranga.*
2. *Establezca las relaciones entre esas medidas y el centímetro y el metro; para ello tome el pie como equivalente a 3 dm.*
3. *¿Cuántos dedos mide usted?, ¿cuántos estadios recorre aproximadamente para ir de su casa a la institución donde trabaja?*

Análisis de la Actividad 1

Esta actividad tiene como propósito aprovechar la historia para conocer unidades de medida que fueron empleadas en otras épocas. El conocimiento de ellas y su relación con las que se utilizan en la actualidad, permite a los historiadores conocer detalles de la vida de civilizaciones pasadas.

Las relaciones entre el dedo, el pie, el codo, el estadio y la pasaranga se obtienen de los datos que brinda la lectura. Un pie son 16 dedos y un codo es 1,5 pies, luego, 1 codo equivale a $16 \times 1{,}5 = 24$ dedos y, entonces, 1 dedo = 1/24 = codos. Un estadio son 600 pies, luego, un estadio equivale a $16 \times 600 = 9600$ dedos; entonces, 1 dedo = 1/9600 estadios. De la misma manera se obtienen las demás relaciones; todas ellas se pueden leer en la siguiente tabla:

Medida	Dedos	Pies	Codos	Estadios	Pasarangas
Dedo	1	1/16	1/24	1/9 600	1/288 000
Pie	16	1	2/3	1/600	1/18 000
Codo	24	1,5	1	1/400	1/12 000
Estadio	9600	600	400	1	1/30
Pasaranga	288 000	18 000	12 000	30	1

Por ejemplo, un estadio equivale a 9600 dedos o 600 pies o 400 codos o 1/30 de pasaranga.

Tomando el pie como 3 dm (es decir, 30 cm) y como un dedo equivale a 1/16 de pie, entonces 1 dedo = 3/16 dm o, de modo equivalente, 1 dedo = 30/16 cm pues 1 dm = 10 cm. Por otra parte, 1 dedo = 3/160 m, pues 1 dm = 1/10 m. A partir de esto y según la columna con el encabezado *Dedos* en la tabla anterior se obtiene:

Medida	Dedos	cm	m
Dedo	1	30/16	3/160
Pie	16	30	3/10
Codo	24	24×30/16=45	24×3/160=0,45
Estadio	9600	9600×30/16=18 000	9600×3/160=180
Pasaranga	288 000	288 000×30/16=540 000	288 000×3/160=5400

Las respuestas correspondientes a la pregunta 3 dependen, desde luego, de datos particulares. Dado que 1 dedo = 3/160 m, entonces 1 m= 160/3 dedos; entonces si, por ejemplo, usted mide 1,7 m, entonces mide 1,7×160/3 dedos = 90,66 dedos. Un estadio son 180 m, entonces 1 m = 1/180 estadios, de manera que si usted recorre aproximadamente 900 m para ir de su casa al trabajo, entonces recorre 9000×1/180 = 5 estadios.

Una actividad como esta sería interesante en la clase para hacer conexión con *Estadística y probabilidad*, por ejemplo, midiendo con una regla la longitud de los pies de cada estudiante (en centímetros) se ilustra la variabilidad que podría representar en aquel momento de la historia la unidad de medida *pie*.

Además de ver la variabilidad que se presenta en la longitud de los pies de cada estudiante, esta actividad impulsa la necesidad de utilizar alguna medida de resumen como la moda o la media aritmética.

Unidades de longitud del Sistema Internacional de Unidades (SI)

Una actividad como la anterior puede servir para introducir el tema de las unidades de longitud del sistema internacional de unidades. Es importante que quede en evidencia la simplicidad de la relación entre las unidades de dicho sistema frente lo complejo de la relación entre las unidades de otros sistemas como el griego antes expuesto.

La unidad básica de longitud del SI es el metro cuyo símbolo es m. Sus múltiplos más utilizados cotidianamente son: decámetro (dam), hectómetro (hm), kilómetro (km) y sus submúltiplos más utilizados en la vida cotidiana son: decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm). Existe otros submúltiplos que miden longitudes muy pequeñas y son utilizados en las investigaciones científicas: micrómetro (μm), nanómetro (nm), etc.

Para facilitar la escritura de las relaciones entre las unidades, se utiliza, para múltiplos muy grandes de 10, la notación 10^n que corresponde a un 1 seguido por n ceros, por ejemplo, $10^5 = 100\ 000$. La relación entre las unidades de medida mencionadas antes se da en las siguientes tablas.

Unidad	**nm**	[illegible]	**mm**	**cm**	**dm**	**m**
nm	1	0,001	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
[illegible]	10^{3}	1	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001
mm	10^{6}	10^{3}	1	0,1	0,01	0,001
cm	10^{7}	10^{4}	10	1	0,1	0,01
dm	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	0,1
m	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10	1
dam	10^{10}	10^{7}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10
hm	10^{11}	10^{8}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}
km	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}

Unidad	**dam**	**hm**	**km**
nm	0,000 000 000 1	0,000 000 000 01	0,000 000 000 001
[illegible]	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
mm	0,000 1	0,000 01	0,000 001
cm	0,001	0,000 1	0,000 01
dm	0,01	0,001	0,000 1
m	0,1	0,01	0,001
dam	1	0,1	0,01
hm	10	1	0,1
km	10^{2}	10	1

Por ejemplo:

- 3 cm = 3×1000=3000 µm
- 5 dam=5×0,01=0,05 km
- 73 dm=73×0,001=0,073 hm

II. Medidas de superficie

Actividad 2

Las unidades de medida que se utilizan de manera oficial en nuestro país son las que establece el Sistema Internacional de Medidas. Sin embargo, por diversas razones, en la comercialización de ciertos productos se utilizan otras unidades tales como el galón, la pulgada, la vara. Por ejemplo, usualmente la longitud y diámetro de los tornillos se da en pulgadas; el grosor y el ancho de las piezas de madera se proporciona en pulgadas y su longitud en varas.

Suponga que se quiere colocar un piso de madera en una superficie cuya área es 60 m^2. Se va a utilizar tablas de 1 pulgada de grueso y 5 pulgadas de ancho; el tipo de madera que se va a usar cuesta, para estas dimensiones, 1200 colones la vara. Además, se considera que el desperdicio de madera que se produce cuando se coloca el piso es del 5%. ¿Cuánto costará la madera que debe comprarse para colocar dicho piso? Nota: una pulgada equivale a 2,54 cm y una vara equivale a 83,5 cm.

Análisis de la Actividad 2

Nos desenvolvemos en un mundo con usos y costumbres particulares. En la escuela se adquieren conocimientos que deben relacionarse con ellos. Una actividad como la anterior remite a una situación en contexto, completamente real, que pone en evidencia ese tipo de relaciones necesarias entre los aprendizajes escolares y los usos y costumbres propios del medio en que las personas interactúan.

En cuanto a la situación propuesta, en primer lugar se debe realizar una lectura cuidadosa que permita saber cuáles son los datos relevantes para responder la interrogante que se plantea. La primera parte es una información general que sitúa en el contexto pero que no brinda datos en particular. En la segunda parte se dan siete datos (incluidos los dos de la nota). Dado que el área del piso tiene que ver con el ancho de la madera, la información sobre su grosor no es (para responder la interrogante) un dato relevante; los seis datos restante sí lo son.

El área a cubrir mide 60 m^2; como el desperdicio se calcula en un 5% y el cinco por ciento de 60 es 3, debe calcularse la cantidad de madera como si se fuera a cubrir 63 m^2.

Según la información de la nota,

$$5\ pulgadas = 5 \times 2{,}54\ cm = 12{,}7\ cm.$$

De modo que el área de una tabla de 5 pulgadas de ancho y 1 vara de largo es

$$12{,}7 \times 83{,}5\ cm^2 = 1060{,}45\ cm^2.$$

Puesto que un metro cuadrado equivale a 10 000 cm^2, entonces el número de tablas de una vara que se necesitan para cubrir un metro cuadrado es $10000 \div 1060{,}45 = 9{,}43$. Para cubrir 63 m^2, se requerirán $63 \times 9{,}43 = 594{,}09$ varas. Como la madera se vende en varas completas se deberá comprar al menos 595 varas y esto costará $595 \times 1200 = 714\ 000\ colones.$

Esta actividad puede simplificarse un poco para ser llevada a cabo en el salón de clase con las niñas y los niños. Cuando se estudian las medidas de longitud puede pedírseles que investiguen a cuánto equivalen una pulgada y una vara en centímetros, puede que los datos que obtengan sean muy aproximados a los que aquí se dan aunque no exactamente los mismo.

Por ejemplo, muchas personas hacen estimados de medidas convirtiendo la pulgada en 2,5 cm y la vara en 83 cm (o, incluso, 80 cm). Sería interesante que pregunten a personas que trabajan con madera (carpinteros, aserraderos, depósitos) sobre la forma en que trabajan con este tipo de medida y las conversiones que realizan.

Unidades de superficie en el Sistema Internacional de Unidades (SI)

Una actividad como la anterior puede servir para introducir el tema de las unidades de superficie. El metro cuadrado (cuyo símbolo es m^2) es una unidad de medida de superficie, en el SI es lo que se conoce como una unidad derivada; es decir, expresa una magnitud que es el resultado de combinar magnitudes tomadas como fundamentales, en este caso, el metro.

Sus múltiplos más utilizados cotidianamente son: decámetro cuadrado (dam^2), hectómetro cuadrado (hm^2), kilómetro cuadrado (km^2) y sus submúltiplos más utilizados en la vida cotidiana son: decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2), milímetro cuadrado (mm^2).

La relación entre las unidades de medida mencionadas antes se da en la siguiente tabla.

Unidad	**mm^2**	**cm^2**	**dm^2**	**m^2**	**dam^2**	**hm^2**	**km^2**
mm^2	1	0,01	0,0001	0,000 001	0,000 000 01	0,000 000 000 1	0,000 000 000 001
cm^2	10^2	1	0,01	0,0001	0,000 001	0,000 000 01	0,000 000 000 1
dm^2	10^4	10^2	1	0,01	0,0001	0,000 001	0,000 000 01
m^2	10^6	10^4	10^2	1	0,01	0,0001	0,000 001
dam^2	10^8	10^6	10^4	10^2	1	0,01	0,0001
hm^2	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	0,01
km^2	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1

Por ejemplo:
3 hm^2=3×0,01=0,03 km^2
8 dm^2=8×10000=80000 mm^2

Por otra parte, en la medición de terrenos se utiliza comúnmente el término hectárea (cuyo símbolo es ha), que es equivalente a un hectómetro cuadrado; 100 hectáreas equivalen a un kilómetro cuadrado.

Por ejemplo: 5000 m^2 = 5000×0,0001 hm^2 =0,5 hm^2=0,5 ha.

III. Medidas de capacidad

Actividad 3

En un documento de la Dirección de Desarrollo Tecnológico del Instituto Costarricense de Acueductos y Alcantarillados, disponible en http://www.aya.go.cr/Administracion/DocumentosBoletines/Docs/131210115709stimaciondeconsumodeaguaenunacasa.pdf, *se presenta la siguiente información:*

CONSUMO DE AGUA EN UNA VIVIENDA POR CADA MINUTO

- **Duchándose**:

Por cada minuto que pasa con el tubo abierto consume ~ **12 litros de agua.**

- **En el lavatorio**:

Lavándose los dientes, lavándose las manos, afeitándose, etc.
Por cada minuto que pasa con el tubo abierto consumirá ~ **6 litros de agua.**

- **Pila de la cocina**:

Lavando y/o restregando los platos, o lavando los alimentos, etc.
Por cada minuto que pasa con el tubo abierto consumirá ~ **8 litros de agua.**

- **Lavando el vehiculo o regando plantas**:

Por cada minuto que pasa con el tubo abierto consumirá ~ **10 litros de agua.**

- **En servicio sanitario**:

Cada vez que jala la cadena se consumen en promedio **10 litros de agua.**

La siguiente imagen es parte de un recibo de agua en el que se consigna la cantidad de metros cúbicos de agua consumidos en una vivienda durante un cierto período de tiempo.

Fecha de vencimiento: 11/06/2012

INFORMACION DEL CONSUMO

Tipo Consumo	Número Hidrómetro	Lectura Anterior	Lectura Actual	Consumo m3
Agua	07403774	3055	3104	49

Desde: 26/04/2012 Hasta: 28/05/2012

Suponga que la distribución de gasto de agua en la familia que habita esa vivienda es la siguiente:

- *Cada miembro tarda en la ducha, en promedio, 4 minutos diariamente.*
- *Cada miembro utiliza el lavatorio, en promedio, 12 minutos por día.*

• *La familia utiliza la pila de la cocina alrededor de 50 minutos por día.*
• *Se riegan las plantas en promedio 15 minutos diarios.*
• *Cada miembro de la familia hace en promedio cuatro "jaladas de cadena" del servicio sanitario por día.*

Establezca una estrategia que le permita estimar cuántos miembros tiene la familia.

Análisis de la Actividad 3

En la vida real, la toma de decisiones o la obtención de información que permite inferir otro tipo de información implica, a menudo, la necesidad de obtener datos de diferentes fuentes. Esta actividad procura evidenciar ese tipo de situaciones, mediante la relación de información que proviene de dos fuentes: una información general que hace un estimado del gasto de agua según la actividad doméstica que se realice y una información específica sobre el consumo de agua de una familia; pero hay un tercer tipo de información, la manera en que dicha familia utiliza el agua. Los tres tipos de información dados permiten estimar el número de miembros de la familia en cuestión.

Para establecer una estrategia que permita estimar el número de miembros de la familia, se debe observar que la forma de gastar el agua se puede clasificar en dos tipos: la que gasta la familia como tal (uso de la pila de la cocina y riego de las plantas) la que gastan los miembros de ella individualmente (las demás actividades). Con lo anterior en mente, se puede proponer una estrategia que siga los siguientes pasos:

- Cálculo del número de días que cubre el período considerado (esta información la da el recibo). En este caso particular es 32 días.
- Cálculo del agua que diariamente consume la familia (esta información se puede obtener de dos datos que brinda el recibo: consumo del período y número de días). En este caso es $49 \div 32 = 1{,}53125\ m^3$.
- Cálculo de la cantidad de agua que gasta la familia como tal por día. En la pila de la cocina $50 \times 8 = 400\ l$, en el riego $15 \times 10 = 150\ l$; en total $550\ l$.
- Cálculo de la cantidad de agua que gasta cada miembro. En la ducha $4 \times 12 = 48\ l$, en el lavatorio $12 \times 6 = 72\ l$, jalando la cadena del servicio sanitario $4 \times 10 = 40\ l$. En total 160 litros.
- Relacionar todos los datos obtenidos para obtener un estimado del número de miembros.

Observe que la estrategia permite reducir la información que se brinda, en datos numéricos que pueden combinarse mediante operaciones; sin embargo, para hacer el cálculo definitivo, falta un conocimiento de tipo general. Si un problema como este se propone a la clase, para introducir ese conocimiento, la o el estudiante propondrá la estrategia y sentirá la necesidad del mismo si quiere estimar cuántos miembros tiene la familia. Observe que lo que el problema pide es establecer la estrategia, pero tiene la idea de introducir la inquietud de que algo falta si se quiere ir más allá.

La etapa de clausura permitirá introducir el hecho de que 1 litro equivale a un decímetro cúbico y que, por lo tanto, 1 metro cúbico contiene 1000 litros.

Con lo anterior se puede estimar el número de miembros de la familia. El gasto de la familia en litros es $1{,}53125 \times 1000 = 1531{,}25\ l$. El gasto diario menos el gasto de la familia como tal es $1531{,}25 - 550 = 981{,}25\ l$. Como cada miembro de la familia gasta

160 litros diarios, entonces se puede estimar su número mediante la división: $981{,}25 \div 160 = 6{,}132$. En conclusión, de acuerdo con la información brindada, se puede decir que la familia tiene seis miembros.

La información que aquí se brinda sobre la forma en que la familia utiliza el agua es hipotética. En una actividad escolar, podría proponerse un proyecto que permita obtener información de este tipo en las familias de las y los estudiantes, mediante el uso de un cuestionario; esto conecta con el área de *Estadística y Probabilidad*. Por otra parte se podría aprovechar para crear conciencia sobre el manejo responsable de los recursos naturales; esto conecta con uno de los ejes transversales del sistema educativo: “Cultura ambiental para el desarrollo sostenible”.

Unidades de capacidad en uso con el SI

Una actividad como la anterior puede servir para introducir el tema de las unidades de capacidad. La unidad básica de capacidad es el litro (cuyo símbolo es *l*). Es una unidad que no pertenece al Sistema Internacional pero juegan un papel importante y, por lo tanto, el Comité Internacional la aprobó como una unidad fuera del SI pero que puede usarse con el SI.

Sus múltiplos más utilizados son: decalitro (dal), hectolitro (hl), kilolitro (kl) y sus submúltiplos más utilizados en la vida cotidiana son: decilitro (dl), centilitro (cl), mililitro (ml).

La relación entre las unidades de medida mencionadas antes se da en la siguiente tabla.

Unidad	**ml**	**cl**	**dl**	**l**	**dal**	**hl**	**kl**
ml	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001
cl	10	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01
dl	10^2	10	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
l	10^3	10^2	10	1	0,1	0,01	0,001
dal	10^4	10^3	10^2	10	1	0,1	0,01
hl	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1	0,1
kl	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1

Por ejemplo: 12 dl=12×0,1 l= 1,2 l.

Por otra parte, 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico. Otras medidas de capacidad utilizadas son:

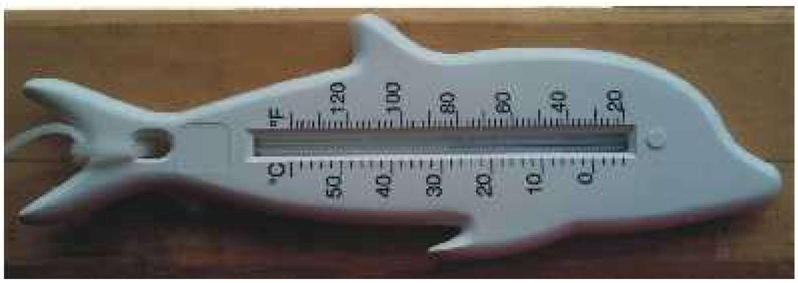
- El **galón**, usada en Gran Bretaña, donde equivale a 4,546 litros y en Estados Unidos, donde equivale a 3,785 litros. El galón de Estados Unidos es el que se utiliza con cierta frecuencia en Costa Rica.
- La **botella** equivalente a 756,3 ml.

Según lo anterior, 1 galón (de Estados Unidos) equivale aproximadamente a 5 botellas.

IV. Medidas de temperatura

Actividad 4

La temperatura es una magnitud física, pero, por su relación con las sensaciones fisiológicas de frío y caliente, es intuitiva. Por otra parte es difícil acceder a su medida directa. De hecho, la temperatura está relacionada con la energía media de las moléculas de un cuerpo, por lo que es inaccesible a la observación directa y debe medirse indirectamente por la relación entre la temperatura y otras propiedades físicas de la materia. Para medirla se utilizan instrumentos diversos y diferentes escalas. La más utilizada en Costa Rica es la escala que mide la temperatura en grados Celsius (^{o}C); también se utiliza con cierta frecuencia la escala que mide en grados Fahrenheit (^{o}F). Otras escalas usan grados Kelvin (K) o grados Rankin (R). Observe el aparato que se ve en la siguiente figura; ahí se muestran las escalas Celsius y Fahrenheit.



Con base en la figura:

1. *¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 0 ^{o}C?*
2. *¿A cuántos grados Celsius equivalen 100 ^{o}F?*
3. *¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 100 ^{o}C?*
4. *¿Qué relación se puede establecer entre grados centígrados y grados Fahrenheit?*
5. *Se sabe que x grados Kelvin equivalen a z+273,15 grados Centígrados, ¿a cuántos grados Fahrenheit equivalen 350 grados Kelvin?*

Análisis de la Actividad 4

Esta actividad pone en evidencia relaciones entre unidades de medidas que se pueden obtener a partir de la lectura atenta de dispositivos de uso cotidiano; en este caso en particular mediante la observación de un termómetro que trae dos escalas. Aunque la escala más utilizada en nuestro país es la Celsius (o centígrada), algunas indicaciones relacionadas con la temperatura, especialmente si provienen de otros países, se dan en la escala Fahrenheit (por ejemplo, algunas recetas de cocina indican que el horno debe ponerse a determinada temperatura dada en grados Fahrenheit).

En cuanto a las interrogantes que se proponen en la actividad:

1. Observando el termómetro que aparece en la figura, se ve que 0 ^{o}C equivalen aproximadamente a 32 ^{o}F (de hecho son 32 ^{o}F).

2. De la figura se ve que 100 ^{o}F equivalen aproximadamente a 38 ^{o}C (de hecho son 37,777 ^{o}C).

3. Para saber a cuántos grados Fahrenheit equivalen 100 ^{o}C se debe establecer un patrón que permita extrapolar el dato a partir de los datos que aparecen en la figura. La primero

que se observa es que la relación entre ambas escalas no parece ser una proporción directa; a 40 °F equivalen aproximadamente 5 °C, si la proporción fuera directa a 80 °F equivaldrían aproximadamente 10 °C, sin embargo, según la figura, equivalen aproximadamente a 27 °C. En el termómetro de la figura, los grados Celsius aparecen señalados cada dos (con una rayita) y tiene asociado un número cada 10; esto ayuda. Observe que: $0°C \approx 32°F$, $10°C \approx 50°F$, $20°C \approx 68°F$, …, $50°C \approx 122°F$. Se ve que al aumentar en 10 los grados Celsius se aumenta en 18 los grados Fahrenheit; esto es un patrón. De esta manera se concluye que $100°C \approx 212°F$ (de hecho, $100°C = 212°F$).

4. Aunque no existe una proporcionalidad directa entre *x* (en grados Celsius) y *z* (en grados centígrados), del análisis anterior sí parece que hay una cierta proporcionalidad: aumentar o disminuir 10 °C equivale a aumentar o disminuir 18 °F, es decir un aumento o disminución de 1 °C equivale a un aumento o disminución de 9/5 °F y como $0°C = 32°F$, entonces $x\ °C = \frac{5}{9}(z-32)°F$, con lo que se ve que la proporcionalidad no es entre x y z sino entre *x* y *z – 32*.

5. Puesto que $x\ K = (z + 273{,}15)°C$, entonces $350\ K = 76{,}85\ °C$, y como $z\ °F = (\frac{9}{5}x + 32)°C$, entonces $76{,}85\ °C$ equivalen a $\left(\frac{9}{5} \times 76{,}85 + 32\right)\ °F = 170{,}33\ °F$.

Una actividad como esta puede ser propuesta en diferentes niveles educativos, adaptando las preguntas al nivel de los conocimientos previos de los estudiantes. Las preguntas 3 y 4 conectan con el área de *Relaciones y Álgebra* y pueden servir, según el nivel, para introducir el razonamiento algebraico; la 3 mediante la búsqueda de un patrón numérico y la 4 en un nivel superior en la búsqueda de un patrón que puede establecerse mediante una ecuación. La etapa de clausura de una actividad como esta deberá establecer la relación existente entre las dos escalas.

Unidades de temperatura

Este tipo de actividades permite introducir el concepto de medida de la temperatura y las unidades que se utilizan para ello.

La unidad de temperatura del Sistema Internacional es el Kelvin (K); sin embargo, en las situaciones cotidianas se utilizan los grados Celsius (°C), también conocidos como grados centígrados y los grados Fahrenheit (°F).

Como se mencionó antes:

$$x\ (K) = (z + 273{,}15)(°C),$$

o, de modo equivalente:

$$z\ (°C) = (x - 273{,}15)(K).$$

Mientras que

$$x\ °C = \frac{5}{9}(z-32)\ °F$$

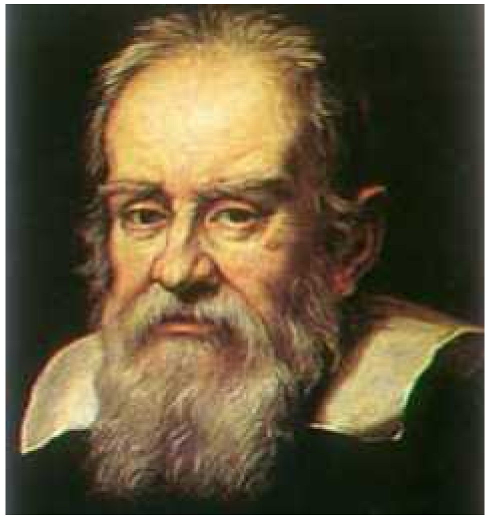
o, de modo equivalente:

$$z\ (°F) = \left(\frac{9}{5}x + 32\right)\ (°C).$$

Por ejemplo, si la temperatura de un horno es de 150 °C, entonces su temperatura en grados Fahrenheit es $z = \frac{9}{5} \times 150 + 32 = 302$.

Una historia interesante

Ninguno de los contemporáneos de Galileo podía compararse con él en cuanto a la capacidad de ver la presencia de las leyes fundamentales en los fenómenos más sencillos. Es bien conocido todo lo que él fue capaz de comprender meditando acerca de la caída de los cuerpos sobre la Tierra. Menos conocido es el hecho de que él fue de los primeros (si no el primero) que escribió sobre la naturaleza mecánica del calor. La situación que motivó a Galileo a expresar sus opiniones al respecto es sumamente curiosa.



Galileo Galilei (1564-1642)

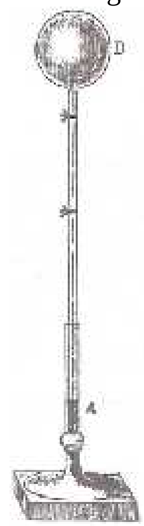
En el otoño de 1618 sobre Roma aparecieron dos cometas. Los fenómenos celestes siempre provocaron miedo y esperanza, y el interés por la ciencia en Roma creció súbitamente. La gente reclamaba explicaciones y pronósticos.

En diciembre de ese mismo año el Académico Cesarini escribe desde Roma a Galileo: “Incluso la gente que no se interesa de nada está conmovida y hasta los más holgazanes de la ciudad saltan de sus camas, así que puede Ud. imaginarse la excitación que ha producido la aparición de estos cometas y la cantidad de rumores tontos a que han dado lugar”. En torno a la naturaleza de los cometas surgió una gran discusión. En ella participaba en nombre de los jesuitas Oricio Grassi, y en el de la Academia Florentina, su presidente Marco Guidusi, discípulo de Galileo. En las intervenciones de ambos las consideraciones sobre los objetivos generales de la ciencia ocupan un lugar destacado. En la polémica también intervino Galileo, que publicó un libro titulado “El saggiatore” (el pesador de oro) en el cual expone detalladamente sus puntos de vista sobre la naturaleza de los fenómenos físicos. Su título tan singular para nosotros sonaba como un desafío a Grassi, el libro del cual se llamaba “Pesos para la verdad”. El libro de Galileo se considera una obra maestra de la prosa italiana y hasta el presente sirve como ejemplo inigualable de literatura polémica.

En su libro Galileo escribe, en particular, sobre el calentamiento de los cuerpos sólidos por fricción y presenta otros argumentos acerca de la naturaleza mecánica del calor. Sin embargo, Galileo no sabía que por vía mecánica pueden calentarse no sólo los cuerpos sólidos sino también los líquidos y hasta los gases. En esto se veía limitado por la ausencia de datos cuantitativos sobre el calor.

En tiempos de Galileo los naturalistas no sabían medir prácticamente nada. Hasta la medición más simple de longitud o volumen encontraba dificultades, pues no existían patrones de longitud de general aceptación. Las medidas de longitud en diversos lugares eran diferentes y era sumamente embarazoso compararlas. Medir el tiempo era aún más complicado. Claro que existían en uso relojes: de sol, de agua, de arena, etc., pero ellos no servían para realizar mediciones precisas de cortos intervalos de tiempo. Se dice que en su juventud Galileo observó el balanceo de una lámpara en la catedral de Pisa y que midió el período de estas oscilaciones contando los latidos de su propio pulso. Galileo pudo descubrir las leyes de la mecánica únicamente porque fue uno de los primeros en comprender la importancia de realizar mediciones precisas.

El estudio de los fenómenos térmicos fue abordado por Galileo desde esas mismas posiciones: ante todo se ocupó del problema de cómo medir la temperatura de los cuerpos. Los termómetros construidos por Galileo (por el año 1597) consistían de un balón de cristal D lleno de aire, de cuya parte inferior descendía un tubo parcialmente lleno de agua que terminaba en un recipiente A lleno también de agua (vea la figura).



Cuando el aire en el balón se dilataba o comprimía, el nivel del agua del tubo variaba, lo cual indicaba la temperatura, por ejemplo, de las manos que tocaban el balón. Sin embargo, la altura de la columna de agua dependía tanto de la temperatura como de la presión atmosférica y efectuar mediciones algo precisas con este termómetro era imposible. En los tiempos de Galileo no se conocía el barómetro. Sólo su discípulo Torricelli pudo más tarde establecer la relación entre la altura de la columna de mercurio y la presión atmosférica. En esos tiempos la propia idea de que el aire podría presionar sobre la tierra parecía absurda. Por eso el termómetro de Galileo medía una magnitud bastante indefinida, pero incluso tal termómetro permitía comparar la temperatura de diferentes cuerpos en un mismo momento y lugar.

Tomado de: Smorodinski, Y. (1983) La temperatura. Moscú: Mir.

V. Diversas medidas

Actividad 5

El siguiente texto es un fragmento de una información aparecida en el periódico La Nación:

"**2012 es el peor de los últimos cinco años en incendios forestales**

En el 2012, el país vivió la peor temporada de incendios forestales en los últimos cinco años. Desde enero hasta abril, el fuego consumió 34 287 hectáreas; 24 789 hectáreas más que en el 2011.

La cantidad de terreno quemado equivale a casi 500 veces el Parque Metropolitano La Sabana.

…

Según Luis Diego Román, se atendieron 105 incendios forestales. …

La mayoría de los focos de fuego se dio en el Pacífico norte (75%), seguido por el Pacífico central (12%) y el Pacífico sur (9%).

…

Debido a estos incendios forestales, Costa Rica emitió 402 417 toneladas de dióxido de carbono a la atmósfera. Asimismo, la atención de incendios demandó ₡ 581 millones, monto que provino tanto de recursos estatales como aportes dados por el Banco Nacional…" (Soto, Michelle. *La Nación*, 22 de junio de 2012. P. 16A)

Con base en el texto anterior:

1. *Enuncie cuatro distintas unidades de medida que ahí aparecen y diga a qué tipo de medida corresponden.*
2. *Se sabe que una hectárea es igual a un* hm^2*, con base en los datos suministrados en la información, ¿cuántos* km^2 *mide aproximadamente el Parque Metropolitano La Sabana?*
3. *¿Se puede deducir de la información cuántas hectáreas aproximadamente se quemaron en el Pacífico norte?, explique.*

Análisis de la Actividad 5

La información que proporcionan los periódicos y revistas tiene, a menudo, contenido matemático. Dado que las medidas están estrechamente ligadas a la vida cotidiana, estas aparecen con mayor frecuencia. Una lectura atenta permite detectar dónde aparecen y se puede incluso inferir cosas que no están explícitas en la información, pero que pueden ser deducidas de los datos que la misma proporciona. También, los datos brindados pueden inducirnos a error si la lectura no es atenta. En el caso particular del fragmento propuesto, la información numérica brindada es bastante amplia; el artículo completo trae aún más datos numéricos.

Con respecto a lo que se propone como interrogantes:

1. Aparecen cuatro unidades de medida: el colón que refiere a moneda, el año que es una unidad de medida de tiempo, la hectárea que es una unidad de medida de superficie y la tonelada que es una unidad de medida de masa.

2. Dado que 1 $km^2 = 100\ hm^2$, entonces 34 287 hectáreas equivalen a 342,87 kilómetros cuadrados (pues una hectárea equivale a 1 hectómetro cuadrado). Dice la información que 34 287 hectáreas son casi 500 veces el Parque Metropolitano la Sabana, entonces, el área de dicho parque es aproximadamente $342{,}87 \div 500 = 0{,}68574\ km^2$.

3. De la información no se puede deducir cuántas hectáreas aproximadamente se quemaron en el Pacífico norte. La información que aparece al respecto (75%) está ligada con la del número de incendios (“focos de fuego”) y no con la del número de hectáreas quemadas.

Este tipo de actividad propicia la lectura razonada, la búsqueda de información relevante y la posibilidad de relacionar datos diversos; refiere a la actitud de *Confianza en la utilidad de las matemáticas*. En particular, la lectura que se acaba de proponer puede ser utilizada también en el área de números para hacer preguntas interesantes, diferentes a las hechas en esta actividad. Por ejemplo, en el contexto de los números se puede preguntar: ¿qué porcentaje de incendios se dio en la vertiente del Pacífico?, ¿cuántos incendios hubo en el Pacífico central?, etc. El artículo completo trae otra información numérica; dice, por ejemplo, que 2 775 personas ayudaron a combatir el fuego, entre otras.

La etapa de clausura de una actividad como esta permite introducir diversas unidades de medida.

VI. Recomendaciones metodológicas

Como se desarrolló en la fundamentación teórica de los nuevos programas de estudio, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta la siguiente situación, relacionada con el desarrollo de una habilidad propuesta para sexto año.

Conocimientos	Habilidades específicas
Diversas medidas • Moneda: colones, dólares, euros	Realizar conversiones monetarias: colones a dólares, colones a euros y viceversa.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

1. Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema el docente debe tener claro ¿qué quiere lograr con ello? Luego, para este momento, es importante que la profesora o el profesor tenga claro cuáles son las habilidades desarrolladas anteriormente.

Tomando en cuenta esto, se partirá de habilidades adquiridas en niveles anteriores como:

- ✓ Aplicar el uso del sistema monetario nacional en situaciones ficticias o del entorno.
- ✓ Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta y la multiplicación de números con decimales.

En este momento los estudiantes manejan con soltura las operaciones con números enteros y decimales, así como el sistema monetario costarricense (conocimiento de la moneda, las denominaciones y las relaciones entre ellas).

Planteamiento del problema:

Una pequeña empresa tiene una cuenta en colones en la que hay ₡ 6 568 535.
Para realizar transacciones en el extranjero necesita abrir una cuenta en dólares, para ello decide tomar una octava parte del monto depositado en la primera cuenta. Además, debe transferir a otra empresa la suma de 1370 euros. Utilice la información que se brinda en la siguiente imagen:

Tipo de Cambio

Moneda	Cambio
$US Compra	492.7500
$US Venta	501.7500
€ Compra / $	1.2427
€ Venta / $	1.2727

Ver más indicadores

Oficinas y Cajeros

http://www.bancobcr.com/ *(02 de julio de 2012)*

Después de esto, ¿cuánto dinero le queda a la empresa en su cuenta en colones?

2. Trabajo estudiantil independiente

En esta etapa se espera que los estudiantes pregunten sobre algunos de los aspectos que aparecen en el problema y que no tengan claro. Se le debe guiar para que tengan claro lo que significa el tipo de cambio de compra y de venta. Además es importante que se discutan diferentes estrategias para abordar el problema integralmente.

Para este tipo de actividades se les debe brindar el tiempo adecuado para que puedan discutir y trabajar el problema. Es importante promover la participación entre los estudiantes y estimularlos para que se enfrenten al problema. En esta etapa el rol del docente es completamente activo, debe involucrarse con los estudiantes para orientar el desarrollo de su trabajo y plantear preguntas generadoras que encausen a lo que se quiere llegar, pero debe permitir la discusión entre los jóvenes en relación con la búsqueda de soluciones.

3. Discusión interactiva y comunicativa.

En este momento, el docente discute las posibles respuestas de los estudiantes y revisa la primera parte de la actividad. Se debe valorar todas las estrategias utilizadas y agruparlas de acuerdo con su similitud.

Es útil la estrategia de considerar primero cantidades más pequeñas de dinero para familiarizarse con la situación y tener una noción más clara de los datos.

Luego se deberá abordar el problema de forma integral, determinando primero qué cantidad de colones corresponde a un octavo de la cuenta y traduciéndola a dólares (cambio colones a dólares). Posteriormente se realizará el cambio de 1370 euros a colones para restarlos de la cantidad inicial.

Se clasifican las soluciones. Es importante que aunque alguna solución no sea correcta, puede haber seguido una estrategia válida. Los errores cometidos se pueden clasificar y comentar con los estudiantes cuáles son de tipo de cálculo y cuáles provienen de una estrategia que no lleva a la solución.

Es fundamental que estos resultados sean discutidos en una plenaria.

4. Clausura o cierre

Se conoce el sistema monetario nacional; entonces el objetivo principal de la actividad es establecer que existen sistemas monetarios diferentes y que hay “tipos de cambio”, es decir, formas de pasar de un sistema monetario a otro. Es importante que al final el estudiante sepa que existe un tipo de compra y un tipo de venta de las monedas y qué significa esto.

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Autor

Hugo Barrantes

Revisor

Christiane Valdy
Luis Hernández
Susanne Blais

Editor gráfico

Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:

Ministerio de Educación Pública (2012). *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Medidas.* San José, Costa Rica: autor.

Bibliografía

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Chamoux, F. (2000). *La civilización griega*. Barcelona: Optima.

Fundación Polar (s. f.). *Matemática para todos*. Caracas: autor.

Guedj, D. (2011). *El imperio de los números*. Barcelona: Blume.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Costa Rica: EUNED

Smorodinski, Y. (1983). *La temperatura*. Moscú: Mir.

Soto, M. (2012, 22 de junio). 2012 es el peor de los últimos cinco años en incendios forestales. *La Nación*.

Lecturas recomendadas

Clemens, S., O'Daffer, P. & Cooney, T. (1998). *Geometría*. México: Pearson.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: AcademicPress.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think*. New York: Routledge.