Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas

Probabilidades

2012

Presentación

El *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Segundo Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar áreas como *Números* y *Medidas* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. Luego, *Geometría* sigue la misma línea, solo que incorporando contenidos básicos como geometría analítica y transformaciones geométricas. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora. Por último, *Relaciones y Álgebra* que no estaba presente en el plan anterior y busca por medio del uso de representaciones ir evolucionando hacia el uso y comprensión del concepto de variable para modelar relaciones. Estas cinco unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Segundo ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías.
En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Índice

I. Introducción

En la Probabilidad la intuición tiene un papel determinante. En primer lugar, esta permite desde edades tempranas que el niño comprenda el entorno por sus propios medios antes de ser capaz de entender la complejidad del modelo matemático y, en segundo lugar, prepara el conocimiento analítico que tendrá que emplear posteriormente (Batanero, 2001). Por esta razón, debe tomarse en cuenta que no sólo se aprende en las aulas, sino también en el entorno familiar y social, por lo que las creencias y la forma de pensar de una persona se modifican progresivamente, a partir de las experiencias y la interacción con los objetos y el mundo real.

En este sentido, las estrategias metodológicas que se utilicen para favorecer el aprendizaje, deben propiciar en las y los estudiantes modificaciones de conductas y creencias, así como la generación de habilidades por medio de la participación activa y considerando el contexto que les rodea. Se requiere generar actividades que combinen diferentes recursos, y no iniciar mediante la definición de conceptos abstractos, como se ha acostumbrado en los métodos tradicionales de enseñanza. Garfield & Ahlgren (1988) indican que aunque la fundamentación teórica es vital, ésta debe efectuarse una vez que los niños han logrado obtener intuiciones básicas de los conceptos y hayan generado habilidades para su implementación.

El educador de primaria tiene un reto trascendente al educar niños, ya que requiere de ingenio y creatividad para motivarlos y hacerlos que se interesen por los conocimientos que se espera que vayan a aprender. En este sentido, el uso de actividades lúdicas en las clases es un valioso recurso que les permitirá aprender mientras juegan.

Particularmente, en materia de Probabilidad, se recomienda que su enseñanza se inicie con juegos que describan situaciones cuyo resultado sea incierto como, por ejemplo, los juegos de selección o rifas, lanzamientos de dados o monedas, entre otros. Una vez identificada la incertidumbre o aleatoriedad de los resultados en una situación, se debería realizar una descripción simplificada y así modelar su comportamiento probabilístico aunque sea a un nivel básico; pero que permita generar conclusiones claras al respecto (Batanero 2002).

De acuerdo con lo anterior, la inclusión de la Probabilidad en el currículo de primaria, tiene como objetivo básico ayudar al niño a adquirir las habilidades necesarias para comprender la presencia de lo incierto o aleatorio en la vida cotidiana y la importancia de las probabilidades para lograr una mejor comprensión de las situaciones aleatorias y por ende tomar decisiones fundamentadas sobre ellas.

Este material está dirigido a docentes de primaria, dentro del proceso de sensibilización para la implementación de los nuevos programas de Matemáticas. En este sentido, pretende ser de apoyo en cuanto a conocimientos y tipos de actividades que podrían realizar al abordar el tema de Probabilidad. Se aprovecha la intuición generada en el Primer ciclo para profundizar paulatinamente en conocimientos concretos relacionados con eventos y sus representaciones con el propósito de generar, en el niño(a), un mayor potencial para la toma de decisiones al enfrentar situaciones de incertidumbre. Se introduce al estudiante en el cálculo básico de probabilidades en función de juegos aleatorios y problemas sencillos. Por medio de la utilidad que los niños puedan identificar en la aplicación de los conceptos propuestos, se espera desarrollar en los alumnos una fuerte motivación e interés hacia las Matemáticas, lo cual favorecerá su integración al proceso educativo.

II. Generalidades acerca de la Probabilidad

Actividad 1. Reflexión para el docente

Reflexione sobre las siguientes preguntas y encuentre posibles respuestas.

1. *¿Qué es la Probabilidad?*
2. *¿Para qué sirve la Probabilidad?*
3. *Indique algunas situaciones cotidianas en las que se utilizan conocimientos probabilísticos.*
4. *¿Cuál es la importancia de generar aprendizaje en Probabilidades desde los primeros años de la escuela?*

Análisis de la Actividad 1

1. La reflexión sobre las preguntas anteriores es fundamental si se desea orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad con niños y niñas. Es muy importante que el educador comprenda la importancia de esta área para el desarrollo de un ciudadano, específicamente el aporte que ofrece para potenciar el razonamiento crítico y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

2. Las Probabilidades permiten modelar situaciones aleatorias (ocasionadas por lo inesperado) que constituyen incertidumbre para las personas. Un ser humano regularmente debe enfrentar situaciones para las cuales el resultado es inesperado.

3. Por ejemplo, las siguientes situaciones tienen implícita la noción de incertidumbre:

   a) Regar o no las plantas de jardín, debido a que la actividad podría ser innecesaria pues puede llover.
   b) Visitar o no a una persona que está enferma de gripe, pues cabe la posibilidad de contagiarse.
   c) Tomar el sol para broncearse, debido a que puede contraer una enfermedad por el exceso de exposición al sol.
   d) Comprar un boleto de lotería, aunque tiene pocas posibilidades de salir favorecido con el premio respectivo.

   También en algunos de los juegos cotidianos que las y los niños practican, la incertidumbre o azar está presente, por ejemplo en el juego piedra-papel-tijera.

4. Un conocimiento adecuado sobre las probabilidades de que los hechos ocurran o no, puede ayudar a la persona a tomar decisiones acertadas. Lo importante es que, un(a) ciudadano(a) desde sus primeros años, pueda identificar situaciones cotidianas cuyos resultados no son predecibles con anterioridad puesto que se requiere tener un conocimiento de probabilidades para modelar los posibles resultados e identificar aquellos que tienen una mayor posibilidad de ocurrencia.

   No se pretende saturar a las y los estudiantes de conceptos formales ni mecanizados, sino despertar su interés hacia la utilidad de las probabilidades desde un punto de vista intuitivo. Se les debe ir introduciendo paulatinamente en los conocimientos, iniciar con la identificación de situaciones aleatorias simples y la determinación de eventos más probables que otros, vincular el concepto de probabilidad con los niveles de ocurrencia de un evento, entre otros.

Lo más importante es favorecer la identificación de situaciones aleatorias como aquellas para las cuales no es posible conocer el resultado que se va a obtener, pero que por medio de las probabilidades se puede modelar las probabilidades de ocurrencia de estos resultados, lo cual facilita la toma de decisiones.

***

1. Las probabilidades

Al iniciar el estudio de un tema particular es importante conocer algunas generalidades de su desarrollo a través de la historia. Ello permite valorar el aporte de la disciplina en la historia e identificar el tipo de problemas que propiciaron su evolución, así como conocer las soluciones que se fueron presentando en la historia. Por esta razón, se introduce una pequeña reseña histórica sobre el desarrollo de las Probabilidades.

La historia de las Probabilidades inicia en épocas muy antiguas. Seguidamente se presenta una referencia con el propósito de identificar algunas situaciones de incertidumbre, para las cuales las personas de esa época~~,~~ tenían que buscar soluciones o tomar decisiones puesto que eran parte de su diario vivir. El fragmento de historia que sigue fue adaptado de las siguientes fuentes:

- *http://cipri.info/resources/HIST-1-1-6-probabilidad.pdf*
- *http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/salinero_probabilidad.pdf*

Antecedentes de las Probabilidades

Hoy en día, es incuestionable el impacto que la Teoría de Probabilidad ha tenido en el pensamiento científico moderno y su influencia se nota en campos tan diversos como ecología, explotación de recursos renovables y no-renovables, demografía, medicina, comunicaciones, computación, investigación de operaciones, finanzas, economía, actuaría, etc. Sin embargo, la teoría de probabilidad no siempre gozó de un estatus privilegiado y de tanta popularidad entre los científicos; de hecho, a diferencia de otras ramas clásicas de la matemática, su certificación como teoría matemática se dio hasta el siglo XX con la axiomatización propuesta por A. N. Kolmogorov (1903-1987) en los años treinta. Por otra parte, desde la óptica moderna, su origen podría parecernos más bien modesto y hasta un tanto frívolo: la teoría de probabilidad surge de la necesidad por comprender los juegos de azar, esto es, juegos de apuestas en los que predomina fuertemente una componente de incertidumbre.

La Teoría de Probabilidad tiene una larga historia, y en ella están plasmadas las huellas de científicos de gran talla como Galileo, Fermat, Pascal, Huyguens, Jean y Jacques Bernoulli, Gauss, Laplace, Kolmogorov, Wiener, entre muchos otros. Su desarrollo, como el de cualquier disciplina científica, no se dio por la simple acumulación de avances o resultados parciales; por el contrario, la historia de la probabilidad está llena de paradojas, interpretaciones místicas o ambiguas, agrias disputas entre sus protagonistas, revaloración de conceptos “olvidados”, etc. Después de su axiomatización, la Teoría de Probabilidad experimentó una gran aceptación y una expansión sin precedentes, pero aún continúan las controversias sobre su significado, campo de validez y la posibilidad de axiomáticas alternativas a la de Kolmogorov.

Como se mencionó, la probabilidad matemática tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos. Los primeros estudios "científicos" sobre fenómenos aleatorios se centraban en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.

2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como el 'problema del reparto de apuestas'.

Aunque ahora puede parecer una cuestión sencilla, en aquella época no lo era, y varios estudiosos de la época erraron al intentar resolverlos, generalmente porque no tenían en cuenta todos los posibles resultados o porque estos resultados no eran igualmente probables

La primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en juegos de azar fue el Libro de los Juegos de Azar de Girolamo Cardano (1501–1576), escrito en 1565, aunque no publicado hasta 1663. Cardano era un jugador empedernido y su obra es más bien un manual para jugadores; contiene descripciones de juegos y las precauciones a tomar para que los rivales no hagan trampas, y sólo una pequeña parte está dedicada al estudio del azar: problemas tales como calcular todos los resultados posibles al lanzar dos o tres dados y las frecuencias con que aparecían, hallar la probabilidad de que al lanzar un dado una serie de veces salga un determinado número al menos una vez, o calcular las frecuencias de los valores de la suma de las caras de una tirada de dos dados.

En la resolución de estos problemas, Cardano trabajó con los conceptos de la definición clásica de probabilidad, aunque no los definió. En concreto, Cardano introdujo la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables y esbozó de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la "ley de los grandes números".

Galileo Galilei (1564–1642) también se dedicó a resolver problemas sobre dados. Su obra, Sobre la Puntuación en Tiradas de Dados, calculaba el número de resultados posibles tirando tres dados. A pesar de que ya se sabía desde mucho tiempo antes que hay 216 posibilidades diferentes, Galileo fue el primero que llegó a esta conclusión a través del simple cálculo $216 = 6^3$. Sin embargo, la principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores.

El desarrollo de la teoría de la probabilidad experimentó un gran avance en Francia a mediados del siglo XVII con la correspondencia que mantuvieron Blaise Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) durante 1654. Antoine Gombaud, caballero de Méré, filósofo y literato que jugaba compulsivamente, pidió a Pascal que le resolviese el problema del reparto de apuestas. Pascal y Fermat lo resolvieron correctamente por medios diferentes pero equivalentes, aunque el desconocimiento de la teoría general les hizo pensar que eran resultados distintos. Once años más tarde, en 1665, Pascal publicaba su Tratado sobre el Triángulo Aritmético, la más importante contribución realizada hasta entonces en el campo de la combinatoria. El libro comienza con la construcción de lo que se dio en llamar el triángulo de Pascal, aunque era conocido desde hacía más de 500 años en diversas partes del mundo.

Hacia el último cuarto del siglo XVII, existía ya un gran volumen de conocimientos sobre sucesos aleatorios, acompañados por un buen número de problemas correctamente planteados y resueltos. Pero todos estos conocimientos se enfocaban a problemas concretos limitados a los juegos de azar, y ningún estudioso había sido capaz de dar una definición general de la probabilidad.

El primer estudioso de la probabilidad que no se centró en juegos de azar fue el comerciante inglés John Graunt (1620–1675), quien en 1662 abordó problemas sobre demografía o "política aritmética", como se la llamaba entonces. Graunt se propuso encontrar un método preciso para estimar la edad promedio de los habitantes de Londres mediante la edad de defunción; haciendo esto introdujo el concepto de 'frecuencia de un suceso', remarcando el cierto grado de aleatoriedad presente en las proporciones obtenidas. También demostró que en Londres la proporción de nacimientos de niños y niñas no era igual sino 14:13 y elaboró la primera tabla de mortalidad. Graunt comprendió que cuántas más observaciones hacía más precisos eran los resultados, anticipando el principio estadístico de estabilidad de las medias.

El primero en dar la definición clásica de probabilidad fue Jakob Bernoulli (1654–1705) en su obra El Arte de Predecir –publicada póstumamente en 1713—, muy influenciado por los trabajos de Graunt y Petty que habían demostrado las ventajas de incluir en sus tablas no sólo los números absolutos, sino también las proporciones respecto del total. Más adelante, el matemático francés exiliado en Inglaterra Abraham De Moivre (1667–1754) aceptó la definición dada por Bernoulli y la reformuló en términos modernos: «una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que el suceso pueda o no pueda ocurrir, tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso».

Era necesaria una formalización más grande de los conceptos probabilísticos y hubo que esperar al desarrollo de las teorías de conjuntos y de la medida que tuvo lugar a finales del siglo XIX y comienzos del XX, debido principalmente a Georg Cantor (1845–1918), Émile Borel (1871-1956) y Henri Lebesgue (1875–1941). Ya en 1909, Borel consideró la importancia de la teoría general de la medida para la construcción de la fundamentación de la teoría de la probabilidad, pero no fue hasta 1933 cuando A. N. Kolmogorov se propuso construir una teoría de la probabilidad de una manera rigurosa, basándose en axiomas fundamentales.

2. El azar y lo aleatorio

Los conceptos de azar y aleatoriedad no son de simple comprensión para un niño, al respecto, los profesores Godino y Batanero (2002) indican lo siguiente:

> Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Las operaciones aritméticas básicas se pueden también concretizar en operaciones con objetos físicos (juntar o separar colecciones, etc.) que tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los operandos primitivos al deshacer la operación).
>
> Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en una ruleta, desde una posición inicial, impulsándola hacia la derecha, es muy poco probable que un impulso a la izquierda devuelva la aguja a su posición inicial. Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de aleatoriedad y probabilidad. (pág. 754)
> **Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. En Godino, J. (2002). Matemática y su Didáctica para Maestros: Manual para el estudiante.Pág.753-761**
> *http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/*

Por esta razón, de acuerdo con diferentes investigaciones en el campo, el primer paso para enfrentar la enseñanza de la probabilidad consiste en promover en las y los niños la habilidad de diferenciar las situaciones aleatorias de las deterministas. Para lograr esto, se debe aprovechar las intuiciones con que las y los niños llegan a la escuela. Desde que el niño está muy pequeño es común que en su interacción con otros niños utilicen juegos que tienen incluidos, implícitamente, principios aleatorios. Entre los juegos más comunes se encuentran: "*de tin marín de do pingüé…*", "*zapatito cochinito…*", "*piedra-papel-tijera*", entre otros.

Aunque de forma intuitiva, ellos consideran que los resultados de estos juegos dependen del azar (lo que significa que intuitivamente consideran que el resultado de los juegos es inesperado y todos tienen oportunidad de ganar). El profesor debe aprovechar estas ideas intuitivas de los niños para favorecer la identificación de las situaciones aleatorias de las deterministas.

3. Situaciones aleatorias y situaciones deterministas

Actividad 2

Analice las siguientes situaciones:

1. *Suponga que se seleccionan dos niños: Ana y Manuel, los niños pasan delante del grupo y proceden a jugar:*

"Zapatito cochinito cambia de pie"

Pierde el estudiante que sale seleccionado dos veces continuas. Repiten cinco veces el juego, en todas ellas Ana inicia el juego.

2. *Ahora se seleccionan otros dos niños: Víctor y Karol, pasan al frente del grupo y juegan*

"Piedra-papel-tijera"

Juegan varias veces.

De acuerdo con lo anterior:

¿Cuál de estos juegos considera que es más justo para los participantes y por qué?

Análisis de la actividad 2

Respecto al primero de los juegos, debido a que Ana inicia, se presenta la siguiente secuencia:

Inicia el juego	Ana	zapatito	
	Manuel	cochinito	
	Ana	cambia	
	Manuel	De	
	Ana	Pie	Ana cambia de pie

Se reinicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Ana	cambia
Manuel	De
Ana	Pie

Ana pierde

Observe que es posible determinar que Ana va a perder, sin necesidad de realizar el juego, por lo que, aunque se repita cinco o más veces siempre se puede determinar quién va a perder. Para este caso, Ana estaría perdiendo en las cinco oportunidades.

La situación planteada no cambia aunque se incluyan más jugadores, por ejemplo qué ocurre si Cindy también entra al juego, y le toca el tercer turno:

Inicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Cindy	Cambia
Ana	De
Manuel	Pie

Manuel cambia de pie

Se reinicia el juego

Ana	zapatito
Manuel	cochinito
Cindy	cambia
Ana	de
Manuel	pie

Manuel pierde

Aunque ahora el que pierde es Manuel, nuevamente es predecible que iba a perder sin necesidad de realizar el juego.

¿Qué pasa con el otro juego?

Debido a que Víctor y Karol deben seleccionar piedra, papel o tijera, en teoría se dan muchas posibilidades de selección, el siguiente cuadro resume estas posibilidades:

Víctor juega	Karol juega	Resultado
Piedra	Piedra	Empate
Piedra	Papel	Gana Karol
Piedra	Tijera	Gana Víctor
Papel	Piedra	Gana Víctor
Papel	Papel	Empate
Papel	Tijera	Gana Karol
Tijera	Piedra	Gana Karol
Tijera	Papel	Gana Víctor
Tijera	Tijera	Empate

Observe que hay tres formas por las cuales Víctor puede ganar, tres formas por las cuales Karol puede ganar y tres posibles resultados de empate. Pero debido a que no es posible determinar con anticipación la selección que va a realizar cada uno, resulta imposible tener la certeza sobre quién va a ganar el juego.

Entonces este juego se considera justo, pues ambos jugadores tienen la misma oportunidad de ganar y el resultado del juego es incierto.

***

El primer juego planteado en la actividad 2, tiene un resultado que se puede predecir sin ponerlo en práctica. Toda situación para la cual pueda ser posible determinar con anticipación el resultado se le llama ***determinista***. Por lo que, aunque los niños tienden a utilizar estos juegos para la selección de un ganador, desde un punto de vista intuitivo, consideran que todos los que juegan tendrían opción de ganar, lo cual es incorrecto.

De forma contraria, en el segundo juego, no es posible predecir lo que va a ocurrir, incluso si se realizara bajo las mismas condiciones una y otra vez, siempre el resultado es inesperado, pues va a depender de la selección entre piedra, papel y tijera que haga cada uno de los jugadores, y si esa selección se realiza espontáneamente, entonces el resultado es incierto. Aquellas situaciones para las cuales no es posible determinar el resultado del experimento sin antes llevarlo a la práctica se denominan ***aleatorias*** y se dice que el resultado del experimento depende del azar.

Observe que intuitivamente los niños creen que ambos juegos permiten escoger un ganador en forma indeterminada; no obstante, solamente uno de ellos está en la categoría de aleatorio. En este sentido, se insiste en que el docente debe aprovechar estas ideas intuitivas para favorecer el aprendizaje de los conceptos, de modo que los niños cambien sus intuiciones erróneas y fortalezcan las correctas.

De acuerdo con lo anterior se tiene:

Situaciones aleatorias y deterministas

Se dice que una situación (o experimento) es **aleatoria** si no es posible conocer o predecir con anterioridad el resultado que se va a obtener. Es decir, para conocer el resultado se requiere llevar a la práctica la situación.

Al jugar “piedra-papel-tijera”, cualquiera de los dos que jueguen tendrá oportunidad de ganar, pues no se puede conocer con certeza el ganador. Para conocer el ganador el juego debe llevarse a la práctica.

Por su parte, una situación (o experimento) se denomina **determinista**, si es posible determinar o predecir matemáticamente el resultado sin necesidad de llevarla a la práctica.

En el caso del juego “*Zapatito cochinito cambia de pie*” no es necesario llevarlo a la práctica para saber quién va a perder, pues al tener el párrafo del juego cinco palabras es posible identificar a quién le va a tocar la última palabra y por ende se puede conocer de antemano quien va a perder.

Actividad 3

Considere las siguientes dos situaciones:

1. *Suponga que usted selecciona una mandarina cualquiera. Se desea determinar con exactitud la cantidad de gajos que tiene esta mandarina.*

2. *Ahora suponga que usted va a la pulpería a comprar arroz, pero no está seguro del número de kilos que puede comprar con el dinero que lleva, por lo que primero consulta el precio por kilo.*

Determine si la identificación del número de gajos antes de pelar la mandarina, o del precio que va a pagar por el número de kilos de arroz comprado, son situaciones aleatorias o deterministas.

Análisis de la actividad 3

El número de gajos de las mandarinas es variable, normalmente varía entre ocho y doce gajos, es por ello que el número de gajos de otra mandarina podría estar en este rango (o incluso podría tener un número diferente). Debido a lo anterior, no es viable determinar previamente (sin pelarla o realizar algún otro análisis) la cantidad de gajos que dicha mandarina podría tener. Por lo tanto, esta situación se puede considerar como aleatoria.

Por otro lado, al tener la posibilidad de conocer el precio de un kilo de arroz, un comprador sabe con exactitud, antes de realizar la compra, la cantidad de kilos de arroz que puede adquirir con el dinero que dispone, por lo que la situación se considera como determinista.

***

4. Experimentos aleatorios y eventos

Antes de continuar es importante destacar que tanto en los programas de estudio como en este documento, se utilizan los términos ***situaciones aleatorias*** y ***experimentos aleatorios*** como sinónimos. Además a los posibles resultados de una situación aleatoria se les llamarán ***eventos***.

De acuerdo con lo anterior, para el experimento aleatorio de la actividad 2, en la que Víctor y Karol juegan *piedra-papel-tijera* se pueden señalar como eventos simples, los siguientes:

1. Karol gana el juego.
2. Víctor gana el juego.
3. El juego queda empatado.

Pero también se pueden establecer combinaciones entre ellos, por ejemplo: el juego queda empatado o lo gana Karol, se considera como un solo evento que consiste en combinar dos eventos. Del mismo modo se pueden definir otros.
Entre otros eventos que se podrían definir, para la situación descrita en la actividad 3, algunos ejemplos de eventos son:

1. La mandarina tiene nueve gajos.
2. La mandarina tiene ocho gajos.
3. La mandarina no tiene diez gajos.

5. Eventos seguros, probables e imposibles

Los conceptos evento seguro, evento probable y evento imposible forman parte del lenguaje común de las y los ciudadanos, por lo que el profesor debe utilizar adecuadamente estas ideas para generar las habilidades correspondientes.

En los análisis de probabilidades, los juegos con dados, con monedas o con urnas con bolas de diferentes colores o numeradas, entre otros juegos, son muy ilustrativos.

Los juegos de azar tienen una importante historia que puede ser utilizada por el docente para motivar a los estudiantes. Seguidamente se incluye una pequeña referencia histórica sobre el antecesor del dado.

El hueso astrágalo

Los sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas. La presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo en las excavaciones arqueológicas más antiguas parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 4 000 años. La utilización del astrágalo en culturas más recientes ha sido ampliamente documentada. Existen en las pirámides de Egipto pinturas que muestran juegos de azar que datan del año 3 500 a. C. y Heródoto se refiere a la popularidad y difusión en su época de los juegos de azar, especialmente la tirada de astrágalos y dados.

Los dados más antiguos se remontan a unos 3 000 años antes de Cristo y se utilizaron en el juego así como en ceremonias religiosas. Los juegos con dados se originaron en los tiempos del Imperio Romano (siendo una de las causas que provocó su caída), aunque no se conocen apenas las reglas con las que jugaban. Uno de estos juegos, denominado "hazard", palabra que en inglés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe "al-azar", que significa "dado".

Tomado de http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article2118

Actividad 4

Considere la siguiente actividad.

Suponga que se lanzan dos monedas. Considere los siguientes resultados o eventos:

A: se obtiene un escudo y una corona.
B: se obtiene a lo sumo dos escudos.
C: se obtiene al menos tres escudos.

Describa cada uno de los eventos anteriores

Análisis de la actividad 4

Cuando se lanzan dos monedas, los posibles resultados que se pueden obtener se representan en la figura.

Puede notarse que se presentan cuatros posibles resultados simples. Por esta razón, el evento A puede ocurrir de dos formas distintas, la primera moneda escudo y la segunda corona, o la primera corona y la segunda escudo. Por esto se dice que es un ***evento probable***, pues puede ocurrir o no ocurrir en este experimento. Por otro lado, el evento B: *se obtiene a lo sumo dos escudos*, significa que se obtienen dos o menos escudos (no más de dos); como puede notarse dicho evento ocurrirá siempre, pues al lanzar dos monedas el número máximo de escudos que se puede obtener es dos. De este modo el evento B siempre ocurre, independientemente del resultado, por ello se dice que es un ***evento seguro***. Finalmente, el evento C: se obtiene al menos tres escudos, significa que se podría obtener tres escudos o más, lo cual es imposible pues solamente se tienen dos monedas, por ello se dice que C es un ***evento imposible***.

***

III. Eventos o resultados más probables, menos probables o igualmente probables

Los conceptos de más probable o menos probable, al igual que los anteriores, forman parte del lenguaje de los niños, aunque no siempre se utilizan adecuadamente. Analice la siguiente actividad:

Actividad 5

Una familia debe decidir entre las playas del Caribe o las del Pacífico Central para realizar un paseo en los primeros días del mes de octubre. Debido a que van a ir a acampar no es conveniente que llueva, por ello deben seleccionar el lugar que tenga menos probabilidades de lluvia en esas fechas.

¿En cuál de las regiones Huetar Atlántica o Pacífica Central, es más probable que llueva en los primeros días del mes de octubre?

Análisis de la actividad 5

Las condiciones climatológicas varían mucho dentro de las diferentes regiones del país, pero normalmente se han marcado épocas en las que en unas regiones llueve más que en otras. Casualmente, el mes de octubre es uno de los más lluviosos en la Región Pacífico Central, pero no es así en la Región Huetar Atlántica, donde más bien, se aprovecha la ausencia de lluvias en los primeros días de octubre para realizar los famosos Carnavales de Limón. Por esta razón, es más probable que llueva en la Región Pacífico Central.

***

Eventos o resultados más probables, menos probables e igualmente probables

Normalmente, la identificación de eventos más probables o menos probables, está asociada, intuitivamente, a la experiencia vivida por las personas. Tal como se analizó en la actividad 5, la experiencia sobre el comportamiento del clima ayuda a determinar que un evento es ***más probable*** que otro.

Debido a que se requiere la construcción paulatina del concepto de probabilidad durante toda la Primaria, es recomendable, nuevamente, iniciar con ideas intuitivas. De modo que se asocian los eventos ***más probables*** o ***menos probables*** a las posibilidades de ocurrencia que tiene uno u otro evento. Cuando se cree que las posibilidades de ocurrencia son las mismas para ambos eventos se dice que son ***igualmente probables***.

Hay que hacer la observación, que a medida que se analicen nuevos conceptos, la intuición será desplazada poco a poco por un análisis más formal desde el punto de vista teórico.

Actividad 6

Suponga que se construye un dado de tal manera que dos de sus caras queden con el número cinco, ninguna con el uno y el resto con los números usuales en un dado (2, 3, 4, 6).

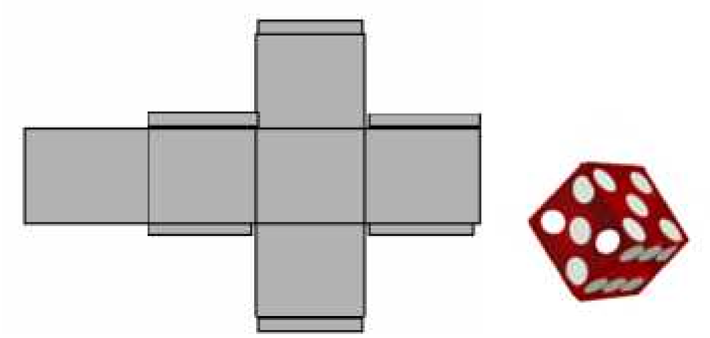


Figura 1

Si se lanza este dado, con base en lo anterior, responda las siguientes preguntas:

a. *¿Obtener un tres es igualmente probable que obtener un dos? ¿Por qué?*
b. *¿Obtener un cinco es más probable que obtener un cuatro? ¿Por qué?*
c. *¿Es probable obtener un uno?*

Análisis de la Actividad 6

Para el análisis de esta actividad es recomendable determinar el número de resultados posibles del experimento. En este caso se consideran seis resultados que son igualmente probables:

2, 3, 4, 5, 5, 6

Observe que el cinco aparece dos veces, y el uno no aparece, esto obedece a la forma en que fue construido el dado, por ello las respuestas a las interrogantes son:

a. Es igualmente probable obtener un tres que obtener un dos, debido a que los seis resultados se consideran igualmente probables.

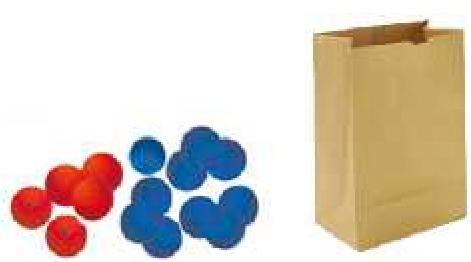
b. El evento obtener un cinco es más probable que el evento obtener un cuatro debido a que hay dos formas de obtener un cinco y solamente una forma de obtener un cuatro.

c. No es probable obtener un uno, debido a que no hay resultados posibles que permitan obtener un uno, se dice que este evento es imposible.

***

Actividad 7

Suponga que en una bolsa de papel se incluyen cinco bolas rojas y diez bolas azules



Si se extrae una bola en forma aleatoria (sin ver qué color se está escogiendo) y se definen los eventos A y R como sigue:

A: Obtener una bola de color azul.
R: Obtener una bola de color rojo.

¿Cuál de esos eventos es más probable y por qué?

Análisis de la Actividad 7

La respuesta a esta actividad es simple, debido a que hay más bolas azules que rojas y se supone que las 15 bolas tienen la misma probabilidad de selección, entonces es más probable obtener una bola azul que obtener una bola roja.

***

1. Resultados de un experimento y su representación

Para el estudio de estos conceptos se puede volver a analizar las actividades 4, 6, 7 y 2. Primeramente en la actividad 4, al lanzar dos monedas, se determinaron cuatros resultados diferentes, los cuales se representaron en la figura

Resultado 1

Resultado 2

Resultado 3

Resultado 4

Este grupo representa el ***número total de posibles resultados*** del experimento, el cual contiene cuatro resultados igualmente probables. Si se representa con una E obtener un escudo y con una C obtener una corona, cada resultado del experimento se puede expresar por un par de letras donde se combinan E y C. Los cuatro ***resultados simples***, en el mismo orden en que aparecen en la figura serían:

CC, CE, EC, EE

En segundo lugar, considere la actividad 6 en la cual se construye un dado de tal manera que dos de sus caras tienen el número cinco, ninguna con el uno y el resto con los números usuales en un dado. Cada una de las caras de este dado genera un posible resultado, por ello hay seis posibles resultados igualmente probables (2, 3, 4, 5, 5, 6), pues las dos caras que generan un cinco como resultado se consideran resultados diferentes.

La situación anterior se observa mejor en la actividad 7, en la cual a pesar de que hay cinco bolas rojas y diez bolas azules, las 15 bolas constituyen el total de resultados posibles en el experimento de extraer una bola aleatoriamente. Por ello, la selección de cada bola se considera un resultado simple.

Por último, al retomar la actividad 2, en la cual Víctor y Karol participan en el juego denominado *piedra-papel-tijera*. Después de analizar el problema se determinó que el experimento podría generar solamente uno de los siguientes resultados:

	Víctor juega	**Karol juega**	**Resultado**
1	Piedra	Piedra	Empate
2	Piedra	Papel	Gana Karol
3	Piedra	Tijera	Gana Víctor
4	Papel	Piedra	Gana Víctor
5	Papel	Papel	Empate
6	Papel	Tijera	Gana Karol
7	Tijera	Piedra	Gana Karol
8	Tijera	Papel	Gana Víctor
9	Tijera	Tijera	Empate

En total hay nueve resultados diferentes, que constituyen todos los posibles resultados del experimento, en el mismo orden de la tabla son: (Piedra, Piedra), (Piedra, Papel), (Piedra, Tijera), (Papel, Piedra), (Papel, Papel), (Papel, Tijera), (Tijera, Piedra), (Tijera, Papel) y (Tijera, Tijera).

Elementos a favor de un evento

La actividades 6 y 7 dejan entrever claramente, que cuando los resultados simples de un experimento son igualmente probables, entonces es más probable aquel evento que tenga más resultados simples a su favor. En caso que dos eventos tengan la misma cantidad de resultados simples a su favor, entonces son igualmente probables.

IV. Definición clásica de Probabilidad

Los conocimientos previos preparan el camino para introducir el concepto de probabilidad de una manera natural.

Actividad 8

Suponga que en un grupo de quinto año, los 32 estudiantes utilizan regularmente distintos medios de transporte para trasladarse del hogar a la escuela y viceversa. La siguiente tabla muestra el número de estudiantes que utilizan un determinado medio de transporte:

Medios de transporte	***Número de estudiantes***
Transporte público	*12*
Bus o buseta privada	*8*
Vehículo familiar o de vecinos	*4*
Caminando	*8*
Total	***32***

De acuerdo con la información anterior, si se selecciona a una o un estudiante del grupo mediante una rifa, considere los siguientes eventos:

A: El estudiante viaja en transporte público a la escuela.
B: El estudiante viaja en bus o buseta privada a la escuela.
C: El estudiante viaja en vehículo familiar o de vecinos a la escuela.
D: El estudiante va caminando a la escuela.

Resuelva lo siguiente:

1. *Ordene los eventos anteriores de menor a mayor probabilidad.*

2. *Determine la razón de estudiantes que viajan en transporte público entre el total de estudiantes. ¿Cómo se puede interpretar este valor?*

3. *Determine la razón anterior pero ahora para los otros eventos.*

4. *Ordene de menor a mayor las razones determinadas en los incisos 2. y 3. Compare los resultados con los resultados obtenidos en el inciso 1.*

5. *Determine la suma de las razones obtenidas para los cuatro eventos.*

Análisis de la actividad 8

1. De acuerdo con lo que se ha venido desarrollando, el evento menos probable es C, pues solamente cuatro estudiantes viajan regularmente a la escuela en un vehículo familiar o de vecinos. Siguen en orden creciente los eventos B y D, los cuales son igualmente probables debido a que ambos medios de transporte son utilizados por la misma cantidad de estudiantes, y el evento más probable es A, debido a que es el medio más utilizado por los

estudiantes. Entonces, al ordenar estos eventos de menor a mayor en términos de las probabilidades se obtendría: C-D-B-A (o C-B-D-A).

2. La razón de estudiantes que viajan regularmente en transporte público entre el total de estudiantes es $\frac{12}{32} = 0{,}375$. Se interpreta como la proporción de estudiantes del grupo que viaja a la escuela por medio de transporte público.

3. Del mismo modo, las proporciones de los eventos B, C y D son respectivamente, $\frac{8}{32} = 0{,}250$, $\frac{4}{32} = 0{,}125$ y $\frac{8}{32} = 0{,}250$.

4. De acuerdo con los resultados de los incisos 2. y 3. se tiene que las razones determinadas correspondientes a los eventos, se ordenan de menor a mayor de la siguiente forma: C-D-B-A (o C-B-D-A). Puede notarse que mantienen el mismo orden generado en el inciso 1.

5. Finalmente, la suma de las razones correspondientes a los eventos A, B, C y D sería: $0{,}375 + 0{,}250 + 0{,}125 + 0{,}250 = 1$.

***

Definición clásica o laplaciana de probabilidad

En la actividad 8 se consideraron cuatro eventos correspondientes a los diferentes medios de transporte que utilizan los estudiantes de un grupo particular para llegar a la escuela. Para cada evento se determinó la razón de estudiantes que utiliza cada medio de transporte respecto al total de estudiantes del grupo correspondiente. Esta razón se utiliza normalmente como una forma de medir la probabilidad del evento.

A esta forma de definir la probabilidad de un evento se le denomina probabilidad clásica o Laplaciana, en honor al famoso matemático Pierre-Simon Laplace.

De acuerdo con esta definición, la probabilidad de un evento A, se define como la razón del número de resultados simples favorables al evento A entre el número total de resultados posibles del experimento.

Es importante aclarar que esta definición se puede aplicar solamente en los casos en que los resultados simples del experimento sean igualmente probables.

Actividad 9

Considere un experimento en el que se retome las actividades 6 y 7, y determine:

1. *La probabilidad de obtener un cinco en la actividad 6.*

2. *La probabilidad de obtener una bola roja en la actividad 7.*

Análisis de la actividad 9

1. En la actividad 6, de las seis caras del dado, en dos de ellos se tiene un cinco, por ello, al lanzar el dado la probabilidad de obtener un cinco es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$.

2. En la actividad 7, hay cinco bolas rojas y diez bolas azules, por ello si se extrae una bola aleatoriamente la probabilidad que sea roja sea roja es $\frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0{,}333$.

Actividad 10

Analice de nuevo la actividad 8, para la selección aleatoria de una o un estudiante, considere los siguientes eventos:

A: El estudiante viaja en tren a la escuela.
B: El estudiante viaja en bus público o transporte privado
C: El estudiante no viaja en lancha a la escuela

Utilizando el concepto de probabilidad clásica o laplaciana, determine la probabilidad de los eventos A, B y C anteriores.

Análisis de la actividad 10

Bajo el concepto de probabilidad clásica, para determinar la probabilidad de un evento se requiere conocer el número de resultados simples a favor de dicho evento. Según los datos generados en la actividad 8, no hay estudiantes que viajen en tren a la escuela, por ello el número de resultados simples a favor del evento A es cero, por lo que el evento A se considera como un evento imposible y su probabilidad es $\frac{0}{32} = 0$.

En el caso del evento B, se tiene que 12 estudiantes viajan regularmente en bus particular y 8 utilizan bus o buseta privada, por lo que hay 20 estudiantes a favor de este evento, con lo cual la probabilidad que el estudiante seleccionado viaje en bus privado o en bus o buseta particular es $\frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Finalmente, respecto al evento C, debido a que no hay estudiantes que viajen en lancha a la escuela en este grupo, entonces los 32 estudiantes del grupo no viajan en lancha a la escuela, esto significa que el evento C es un evento seguro pues incluye todos los resultados simples del experimento. Por ello, la probabilidad que un estudiante no viaje en lancha a la escuela es $\frac{32}{32} = 1$.

Probabilidad de un evento seguro y de un evento imposible

La actividad 10 es un buen ejemplo de los resultados que se obtienen al determinar la probabilidad de un evento imposible o de un evento seguro.

Si A es un evento imposible, entonces no existen resultados a favor de este evento, por ello, en general **la probabilidad de un evento imposible es 0**.

Por otro lado, para un evento seguro B, todos los resultados del experimento se consideran a favor de ese evento, por esta razón **la probabilidad de un evento seguro es 1**.
Las anteriores son dos propiedades básicas de las probabilidades.

Actividad 11

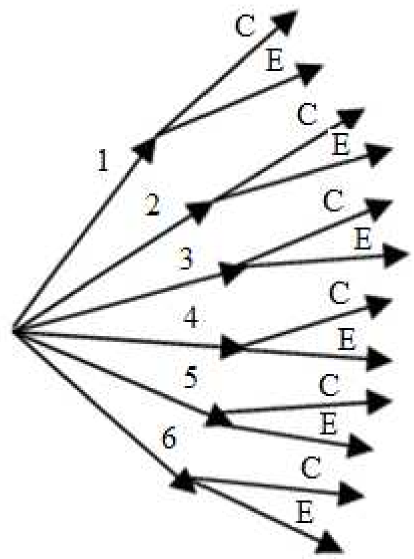
Considere un juego en el que se lanza un dado y una moneda de 100 colones. Dos niñas: María y Karol están jugando, María gana si el resultado es un número par o si se obtiene un escudo. En caso contrario gana Karol.

1. *¿Cuál de las dos niñas tiene más probabilidad de ganar?*

2. *Si jugaran muchas veces, ¿qué porcentaje de juegos se esperaría que ganara Karol?*

Análisis de la Actividad 10

Para resolver la actividad, primeramente se requiere determinar el número de resultados simples del experimento. Un dado tiene seis caras numeradas de uno a seis, la moneda por su parte tiene dos caras (Escudo o Corona), por ello en total hay 12 resultados simples e igualmente probables, ellos son:



También se pueden representar por (1,C), (1,E), (2,C), (2,E), (3,C), (3,E), (4,C), (4,E), (5,C), (5,E), (6,C) y (6,E).

1. De estos doce resultados hay seis en los que el número que aparece es par: (2,C), (2,E), (4,C), (4,E), (6,C) y (6,E). Además, hay seis resultados para los cuales el resultado es escudo: (1,E), (2,E), (3,E), (4,E), (5,E), y (6,E). No obstante, de estos últimos, hay tres resultados que se repiten en ambos: (2,E), (4,E), y (6,E).

   Por lo anterior, debido a que María gana si en el resultado obtenido aparece un número par o un escudo, entonces hay nueve resultados favorables para que María gane: (2,C), (2,E), (4,C), (4,E), (6,C), (6,E), (1,E), (3,E), y (5,E). La probabilidad de que María gane es $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

   Por otro lado, solamente hay tres resultados favorables de que Karol gane: (1,C), (3,C) y (5,C), por ello la probabilidad de que Karol gane es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Entonces es más probable que María gane el juego que Karol gane el juego.

2. De acuerdo con lo anterior, debido a que la probabilidad que Karol gane un juego es 0,25; entonces al repetir una cantidad grande de juegos se esperaría que Karol ganara el 25% de ellos.

Las últimas actividades desarrolladas dejan en evidencia la fuerte conexión existente entre el análisis de las probabilidades con *Números*, en especial con fracción, razones, proporciones y porcentajes.

****

Créditos

Esta unidad didáctica es parte del *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Autor

Ana Lucía Alfaro Arce

Marianela Alpízar Vargas

Edwin Chaves Esquivel

Revisor

Christiane Valdy
Jonathan Espinoza González
Susanne Blaise

Editor gráfico

Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:

Ministerio de Educación Pública (2012). *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas. Unidad didáctica Probabilidades.* San José, Costa Rica: autor.

Bibliografía

Alfaro, A.L., Alpízar, M. y Chaves, E. (2011). Unidad didáctica: Estadística. Formación continua. Materiales para Tercer Ciclo. San José, Costa Rica.

Alfaro, A.L., Alpízar, M. y Chaves, E. (2010). Estrategias didácticas para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en I y II Ciclo de la Educación General Básica. Presentado en el III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada, España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia inaugural de las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.

Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. En Godino, J. (2002). Matemática y su Didáctica para Maestros: Manual para el estudiante.Pág.753-761

Chaves, E. y Hernández, L.A. (2011). Unidad didáctica: Probabilidades. Formación continua. Materiales para Tercer Ciclo. San José, Costa Rica.

Chaves, E. (2011). Unidad didáctica: Estadística y probabilidad. Formación continua. Materiales para el Primer Ciclo. San José, Costa Rica.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. (2004). Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Director: Juan D. Rodino. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistic: implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Consejo Superior de Educación. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2011). Propuesta de Apoyo curricular en matemáticas para el I y II Ciclos de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Borrador en trámite de aprobación por el Consejo Superior de Educación. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2004). Programas de estudios I y II ciclo de la Educación General Básica. San José, Costa Rica.