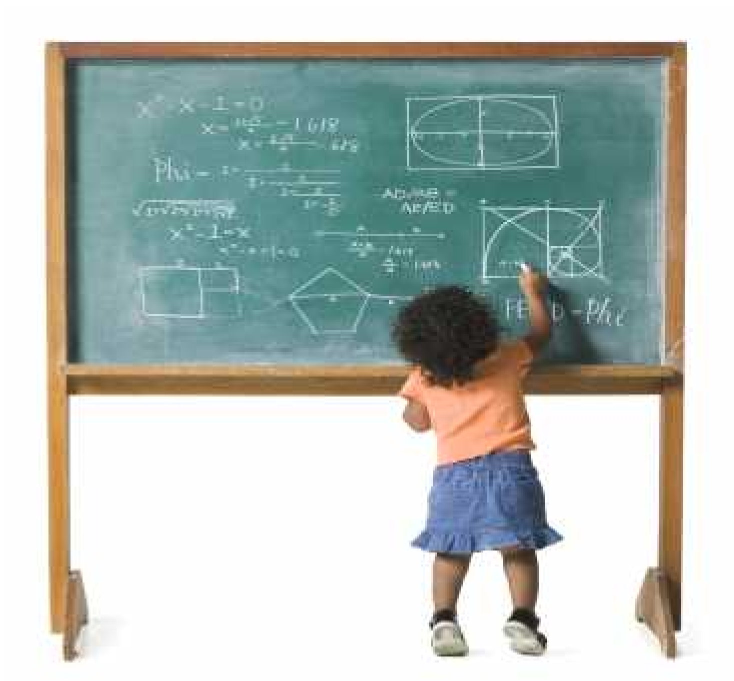
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas



Relaciones y Álgebra

2012

Presentación

El *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de resolución de problemas* forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Este proyecto ha buscado y buscará apoyar la reforma de la educación matemática en Costa Rica por medio de la elaboración de un nuevo currículo escolar y de documentos de apoyo curricular, la capacitación de docentes y la creación de medios que apoyen la implementación de los programas, objetivos macro a realizar con base en prácticas exitosas en la enseñanza de las matemáticas y resultados positivos de la investigación tanto a nivel nacional como internacional. La población con la que este proyecto trabaja directamente son educadores de primaria y secundaria que deben enseñar matemáticas, asesores pedagógicos y nacionales, y otros funcionarios del MEP.

Este proyecto cobra gran trascendencia luego de conocerse en el 2011 los resultados en el rendimiento de Costa Rica en las pruebas PISA 2009+, que revelan que el país posee importantes debilidades en matemáticas. El progreso nacional obliga a medidas de gran envergadura para poder responder con seriedad a esta realidad. Este proyecto ofrece una respuesta integral a los desafíos colocados por este diagnóstico ineludible de tomar en cuenta.

El curso bimodal para el Segundo Ciclo posee como objetivo familiarizar a los docentes con el enfoque principal de los nuevos programas de estudio: la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. Para ello incluye dos tipos de unidades didácticas: el primero busca aportar elementos de la fundamentación del currículo, y el segundo presentar varias situaciones educativas en las diversas áreas matemáticas de este ciclo mediante las cuales se pueda trabajar con ese enfoque. Dominar los principales elementos de la fundamentación general es indispensable para poder comprender y llevar a las aulas con efectividad los nuevos programas. Es por eso que se solicita a los participantes de este curso comenzar con una amplia dedicación a su estudio y a la realización de las prácticas que se incluyen. Solo así será posible visualizar y manejar con propiedad las otras unidades. No obstante, se da flexibilidad al participante para realizar las prácticas a lo largo de todo el curso.

Se ha decidido, en cuanto al segundo tipo de unidades, abarcar áreas como *Números* y *Medidas* que en lo que refiere a contenidos no posee gran diferencia con los programas anteriores, aunque el enfoque sí es muy distinto. Luego, *Geometría* sigue la misma línea, solo que incorporando contenidos básicos como geometría analítica y transformaciones geométricas. *Estadística y Probabilidad* aunque sí se contemplaba en los programas anteriores, no existía un trabajo continuo y articulado de los conceptos estadísticos y de probabilidad como el que se ofrece ahora. Por último, *Relaciones y Álgebra* que no estaba presente en el plan anterior y busca por medio del uso de representaciones ir evolucionando hacia el uso y comprensión del concepto de variable para modelar relaciones. Estas cinco unidades poseen una gran unidad que se la brinda el propósito de todo el curso: comprender y usar el enfoque del currículo. No todos los tópicos del Segundo ciclo se incluirán en este curso, solo algunos que son más novedosos o que se prestan mejor para mostrar el enfoque. Es decir, este curso no pretende ofrecer una capacitación completa. Se busca dar algunos elementos al docente para que éste en el desarrollo de su acción profesional autónoma siga ampliando su dominio del enfoque curricular, de los contenidos programáticos y de la forma de trabajarlos en las aulas.

En la elaboración de esta unidad han participado diversas personas como autores, revisores, editores temáticos y de estilo y forma y varios colaboradores. Ha sido producto de un amplio esfuerzo colectivo realizado con mucha seriedad y profesionalismo, con mucho cariño y con ritmos de tiempo muy intensos.

En el 2013, sin embargo, se desarrollarán otros cursos bimodales en esencia con los mismos propósitos, pero esta vez enfatizando algunas dimensiones incluidas en los programas, como el uso de la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías. En el 2014, otros cursos bimodales brindarán mayor atención a la Estadística y Probabilidad.

A partir del 2013 se aportarán cursos totalmente virtuales que permitirán repetir los cursos bimodales con otra modalidad, y reforzar los medios para ampliar la capacitación a más educadores.

A partir del 2013 también se contará con una comunidad virtual especializada para la educación matemática que permitirá integrar varias de las diversas acciones de capacitación y de implementación de los programas, y servir como un medio dinámico para compartir experiencias y para obtener recursos didácticos.

Para la implementación eficaz de los nuevos programas y para avanzar en la reforma de la Educación Matemática en el país, se está diseñando este año un plan de transición, y también se llevarán a cabo planes piloto en la Primaria y Secundaria del 2012 al 2014.

Todas estas acciones poseen un efecto integrador y sinérgico.

Deseamos que este curso pueda resultarles de gran provecho y sobre todo de motivación para avanzar en los cambios que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren nuestros niños y jóvenes.

Cordialmente

Ángel Ruiz

Director general
Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.*

Relaciones y Álgebra

Habilidades generales

Conocer y aplicar algunos conceptos del área de *Relaciones y Álgebra* para Segundo ciclo en el planteamiento de problemas para el aula.

Introducción

El Álgebra se ha visto como la disciplina de la manipulación de símbolos y operaciones con cantidades variables, exclusiva de la enseñanza secundaria e introducida muchas veces desligada de lo que se trabaja en la enseñanza Primaria. Esta concepción ahora cambia, ya que se pretende que los estudiantes vayan desarrollando algunos de los elementos básicos del razonamiento algebraico desde primaria, tales como: el representar, el generalizar, el reconocimiento de patrones y regularidades, etc.

A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente el uso de las variables como una forma de modelizar situaciones o como incógnitas de una ecuación.

Precisamente Godino y Font (2003) establecen al respecto que:

> Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización, y como hemos visto se pueden, y deben, iniciar desde la educación primaria. (p. 778).

En este material se proponen actividades que permiten introducir la identificación y designación de las variables para establecer relaciones en situaciones del contexto real y que permitan la creación de modelos matemáticos. Por otro lado, también se proponen recomendaciones metodológicas de cómo ir introduciendo el uso de variables como incógnitas en el tratamiento de ecuaciones sencillas.

Se retoma el trabajo con sucesiones matemáticas, sobre todo el uso de formas de representación que permitan la comprensión del patrón resultante. Se procura buscar la evolución hacia la representación de una sucesión mediante su ley de formación o término general.

Finalmente, se proponen actividades para desarrollar el tema de razones, proporción directa y porcentajes, desde la perspectiva del nuevo enfoque de resolución de problemas.

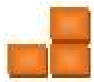
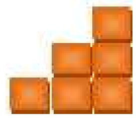
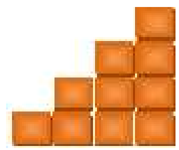
Las actividades que se describen en este material pueden ser desarrolladas por los estudiantes en el salón de clase e inclusive pueden ser mejoradas para ser adaptadas a la realidad de la institución educativa donde se desarrollen.

Tabla de contenidos

I. Sucesiones

Actividad 1

a) *Determine cuántos cuadritos tendrá la décimo tercera figura.*

1er	*2°*	*3er*	*4°*	…
				

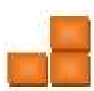
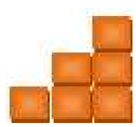
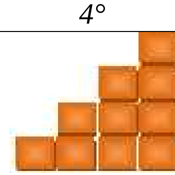
b) *¿Cuál número falta en la siguiente secuencia numérica?*

3, 5,11, 29, ____, 245,…

Análisis de la Actividad 1

Durante el Primer ciclo se ha venido trabajando el reconocimiento de patrones en sucesiones tanto numéricas como geométricas, con el propósito de ir propiciando la construcción del razonamiento algebraico necesario para introducir el uso de variables y símbolos que permitirán establecer relaciones entre diversos elementos del contexto real. Es por eso que se continúa con este proceso retomando este tipo de situaciones.

Para el caso de la sucesión *a)* se puede observar que la cantidad de cuadritos que poseen las columnas que conforman las figuras guardan correspondencia con una secuencia de números naturales consecutivos. El patrón que contribuye a dar solución al problema es sumar los números naturales consecutivos hasta el ordinal que describe la posición de la figura.

1er	*2°*	*3er*	*4°*	…
 1	 1 + 2	 1 + 2 + 3	 1 + 2 + 3 + 4	

Así, para la decimo tercera figura, se tiene que:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 91 cuadritos.

La sucesión descrita en *b)* no es tan trivial pues requiere del reconocimiento de dos operaciones para establecer el patrón existente, además de que dicha sucesión es del tipo recursivo, es decir, sucesiones donde cada término depende del anterior para ser calculado.

Fomentar una actitud perseverante en el estudiantado permite afrontar estas experiencias como retos a superar y evitar frustraciones innecesarias.

Es conveniente el uso de la estrategia del ensayo y error para valorar qué operaciones permiten describir la sucesión dada. Si se observa la diferencia entre términos consecutivos, se notará que va triplicando:

Sucesión	3		5		11		29		?		245
Diferencia entre términos		2		6		18		**54**			

Esto permitirá establecer que la diferencia entre el término buscado y el anterior es de 54, por lo que dicho término corresponde a 83. Como una forma de verificar si el resultado es correcto, se puede observar que al triplicar 54, esto corresponde a la diferencia entre 245 y 83.

También, otra forma de obtener el término faltante es observar que cada término se puede obtener al triplicar el término anterior y restar 4.

Nota: es importante que cada estudiante sea capaz de expresar verbalmente la estrategia que permite establecer el patrón de una sucesión, pues de ese modo se facilita el uso de representaciones simbólicas mediante el uso de variables.

Un poco de historia

La sucesión planteada en la parte *a)* de la actividad anterior es muy singular desde el punto de vista histórico pues fue Gauss (1777-1885) quien de niño propuso una forma para encontrar la suma de los primeros *n* números naturales. Gauss nació en una ciudad al norte de Alemania y desde pequeño fue un niño con habilidades para la suma de números. Tal como lo describe Carrillo (2002):

> Un día, con el fin de mantener la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta tarea, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Carl su pizarra sobre la mesa, diciendo: "ya está"; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5.050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss.(p. 27)

Este fue su razonamiento: primero colocó los números del 1 al 100 en progresión aritmética tanto en forma creciente como decreciente.

1	2	3	4	…	98	99	100
100	99	98	97	…	3	2	1

Luego, observó que al sumar hacia abajo los términos de ambas progresiones el resultado era el mismo: 101.

1	2	3	4	…	98	99	100
+ 100	99	98	97	…	3	2	1
101	101	101	101	…	101	101	101

Como dicho resultado se repite sucesivamente 100 veces, el resultado de la suma sucesiva de dichos resultados se obtiene al multiplicar 100 × 101, lo cual equivale a 10 100. Pero este resultado es el doble de la suma originalmente planteada, por lo que si se divide entre dos se obtiene 5050 lo cual corresponde al resultado esperado.

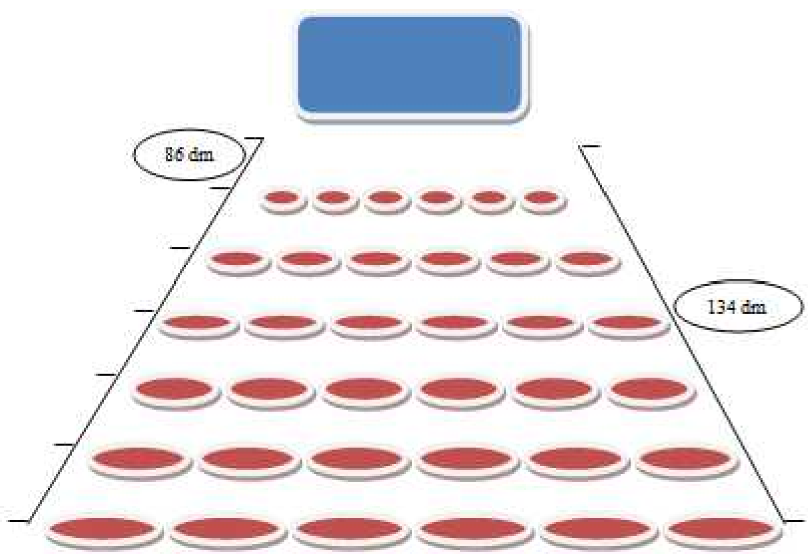
Actividad 2

Juan, Laura y Frank son tres amigos, los cuales se pusieron de acuerdo para ir al cine. Lastimosamente las presas vehiculares y las filas en la boletería hicieron que no todos ellos pudiesen tomar buenos lugares para ver la película, por lo que tuvieron que sentarse en filas diferentes. Juan tomó asiento en la primera fila, la cual se encuentra a 86 dm de la pantalla. Laura se colocó en la sexta fila a 134 dm de distancia de la pantalla. De Frank sólo se sabe que está en la décimo sexta. Determine a qué distancia se encuentra Frank de la pantalla.

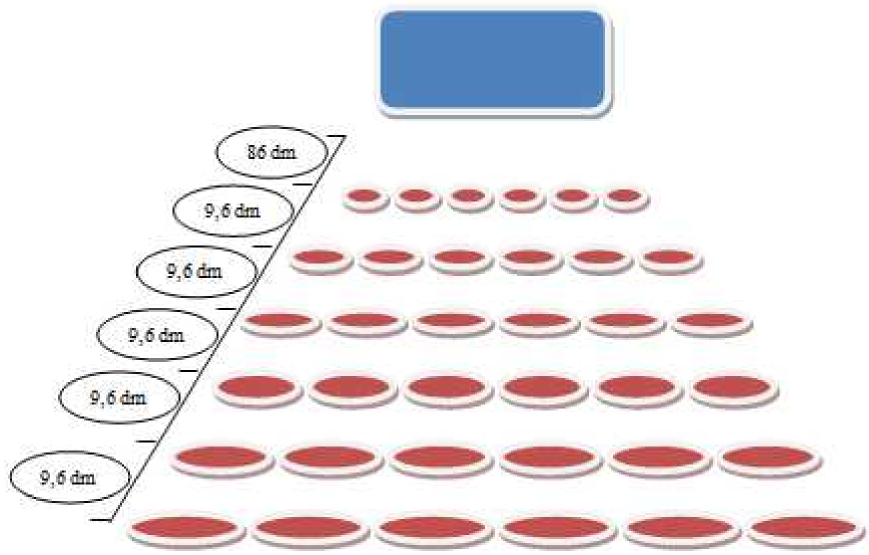
Análisis de la Actividad 2

Esta actividad permite ver la aplicabilidad que tiene el tema de sucesiones a situaciones de un contexto real para el estudiante. Durante el Primer ciclo se reforzó el reconocimiento de patrones para ir facilitando el camino hacia el desarrollo de un razonamiento algebraico por parte del estudiante. Por ello, es indispensable aplicar procesos que se han desarrollado conforme se ha avanzado el trabajo con sucesiones, como lo son el *Representar* y el *Razonar y argumentar*.

En efecto, se puede realizar una representación gráfica de la situación por medio de la cual se pueden obtener algunos datos relevantes.



Ahí se puede apreciar que la distancia entre una fila y otra es uniforme. La distancia de la 1^{era} fila a la 6° corresponde a 134 – 86 = 48 dm y como hay 5 espacios entre filas se tiene que la distancia entre una fila y otra es de 48 ÷ 5 = 9,6 dm.



Ahora, se puede resumir la información obtenida mediante la tabla siguiente, donde *n* representa la fila donde estaría Frank:

N° de fila	1	2	3	4	5	6	…	16
Distancia de la pantalla en dm	86	95,6	105,2	114,8	124,4	134	…	?

Se puede seguir sumando 9,6 dm hasta llegar a la fila 16 y concluir así que Frank estaría a 230 dm de la pantalla. Es importante retomar el uso de representaciones como esquemas y tablas para facilitar la comprensión del problema y elaborar una estrategia. En este caso, la representación de los datos nos permitió deducir fácilmente que la distancia entre una fila y la otra es constante.

A continuación se brindan algunos conocimientos relacionados con sucesiones:

Sucesión

Una sucesión se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a(1), a(2), \ldots, a(n)$$

El número $a(1)$ es el primer término y en general $a(n)$ es el enésimo término. En algunos casos se considera el cero como un número natural, por lo que el primer término en ocasiones es $a(0)$ por lo que $a(n)$ representaría el $n + 1$ – ésimo término.

Observe que para cada número natural n hay un número correspondiente $a(n)$. Por ejemplo, en la siguiente sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

Se puede establecer que 8 representa el cuarto término de la sucesión y que 20 representa el décimo. Nótese que aunque 20 no está descrito en forma explícita en la sucesión, el reconocimiento del patrón que describe esta sucesión permite predecir los términos sucesivos.

Retomando el desarrollo de la actividad 2, otra forma de darle solución hubiese sido representar por medio de variables la estrategia utilizada para encontrar el patrón de la sucesión. En efecto, si se denota con n el número de fila y con $a(n)$ su distancia respecto a la pantalla, entonces se puede observar lo siguiente:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$a(n)$	86 $86 + \mathbf{0} \times 9{,}6$	95,6 $86 + \mathbf{1} \times 9{,}6$	105,2 $86 + \mathbf{2} \times 9{,}6$	114,8 $86 + \mathbf{3} \times 9{,}6$	124,4 $86 + \mathbf{4} \times 9{,}6$	134 $86 + \mathbf{5} \times 9{,}6$

La distancia de la fila 2 a la pantalla se obtiene sumando a 86 dm una sección de 9,6 cm que hay de la fila 1 a la 2. La distancia de la fila 3 a la pantalla se obtiene sumando a 86 dm dos secciones de 9,6 cm que hay de la fila 1 a la 3. Si se continúa el proceso, para determinar la distancia de la fila n a la pantalla, entonces habría que sumarle a 86 dm las $n – 1$ secciones que hay de la fila 1 a la n. Simbólicamente:

$$a(n) = 86 + (n - 1) \times 9{,}6$$

De esta forma, como Frank está en la fila 16, estaría a una distancia de

$$a(16) = 86 + (16 - 1) \times 9{,}6 = 230 \text{ dm.}$$

Término general de una sucesión

Algunas sucesiones se pueden definir mediante una fórmula para el enésimo término, la cual se denomina *ley de formación o término general de la sucesión*. Esta se obtiene cuando se logra expresar de forma verbal la operación que permite definir el patrón de la sucesión y se utilizan variables para su representación.

Por ejemplo, a continuación se ofrecen algunas leyes de formación y su desarrollo tabular respectivo. Los datos de la tabla se generan cuando se sustituyen valores naturales en la variable n y se obtiene el resultado respectivo.

<table>
<tr><th>Término general</th><th>Desarrollo</th></tr>
<tr><td>$a(n) = 2n - 1$</td><td><table><tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Término enésimo</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a(n) = \frac{3n-1}{5}$</td><td><table><tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Término enésimo</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td>1</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{11}{5}$</td><td>$\frac{14}{5}$</td><td>$\frac{17}{5}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

II. Variables

Constantes y variables

Actividad 3

Una maestra ha decidido realizar ventas para sufragar los gastos propios del inicio del curso lectivo. Para ello organizó con un grupo de padres y madres de su grupo la elaboración de unas bolsitas con frutas, las cuales fueron donadas por estos. Se acordó vender cada bolsita en 375 colones.

a) Elabore una tabla que muestre la ganancia producto de las ventas de cada bolsita de frutas.
b) Describa cómo se procedería a calcular la ganancia según la cantidad de bolsitas de frutas que se vendan.
c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles cantidades cambian conforme se realizan los cálculos? ¿Cuáles no?

Análisis de la Actividad 3

Este problema describe una posible situación que se suele presentar en una institución educativa, lo cual es conveniente para hacer ver al estudiante que las Matemáticas están presentes en situaciones cotidianas.

Desde el Primer ciclo se espera que el estudiante pueda construir e interpretar tablas sencillas, por lo cual se espera que puedan elaborar una representación como la siguiente:

Cantidad de bolsitas vendidas	1	2	3	4	5	6	7	…	30
Ganancia en colones	375	750	1125	1500	1875	2250	2625		11 250

Para obtener la ganancia por las ventas es necesario multiplicar la cantidad de bolsitas vendidas por 375.

Es necesario brindar espacios para que cada estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus aportes e ideas. El docente puede dirigir la discusión por medio de preguntas que permitan al estudiante expresar su parecer acerca de qué cantidades varían y cuáles no. Así establecer que las cantidades que varían conforme se dan los resultados son las ganancias producto de las ventas y la cantidad de bolsitas que se vendieron. Esto se puede apreciar en la siguiente tabla:

Cantidad de bolsitas vendidas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**	**30**
Ganancia en colones	375 × **1** = **375**	375 × **2** = **750**	375 × **3** = **1125**	375 × **4** = **1500**	375 × **5** = **1875**	375 × **6** = **2250**	375 × **7** = **2625**	**…**	375 × **30** = **11 250**

El precio de cada bolsita es la única cantidad que no presenta cambios en cada uno de los resultados.

Cantidad de bolsitas vendidas	1	2	3	4	5	6	7	…	30
Ganancia en colones	375 × 1 = 375	375 × 2 = 750	375 × 3 = 1125	375 × 4 = 1500	375 × 5 = 1875	375 × 6 = 2250	375 × 7 = 2625		375 × 30 = 11 250

De acuerdo con lo anterior, es posible trabajar los siguientes conocimientos:

Constantes y variables

Una *constante matemática* es aquella cantidad que no cambia su valor durante una serie de cálculos efectuados. En referencia al problema anterior, 375 es una *constante* pues al realizar cada una de las operaciones que permitieron completar la tabla, este valor permaneció invariante.

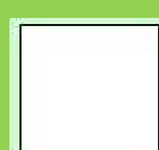
Algunas constantes suelen representarse mediante letras. Tal es el caso de la constante π que corresponde a la razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro y el número e, base de un logaritmo natural.

Una *variable* es una cantidad que según el contexto toma diferentes valores. Para denotarlas, se utilizan letras del alfabeto: a, b, c, etc. Por ejemplo, en el problema anterior se puede considerar "**ganancia en colones**" y "**cantidad de bolsitas vendidas**" como dos variables diferentes que se podrían representar con las letras G y b respectivamente.

La representación simbólica de la relación existente entre un grupo de variables se denomina *modelo o fórmula*. Del problema anterior, se podría resumir que la **ganancia en colones** "G" según la **cantidad de bolsitas vendidas** "b" está dada por la fórmula:

$$G = 375 \times b$$

En Geometría, las fórmulas representan modelos de cómo se pueden simplificar procedimientos para el cálculo del área y el perímetro en figuras dadas. Por ejemplo, un estudiante que le piden establecer una estrategia para determinar cuántos centímetros mide el borde de un cuadrado podrá deducir sin dificultad que todos los cuadrados tienen 4 lados congruentes y que bastaría multiplicar por 4 uno de ellos, o bien sumar dichos lados. De esa forma, durante una etapa de discusión el docente puede enfatizar en que 4 representa una *constante* pues todos los cuadrados tienen dicha cantidad de lados y que el cálculo depende de la medida del lado l el cual representa la variable. Así se puede introducir el concepto de perímetro y proponer como modelos las fórmulas:



$P = 4 \times l$ o $P = l + l + l + l$

Actividad 4

Una compañía de tarjetas para ocasiones especiales decide que donará 150 colones a una organización de beneficencia por la compra de cada tarjeta de la temporada navideña. El precio de cada tarjeta es de 950 colones.

a) Determine una fórmula que permita calcular la cantidad de dinero que percibirá la organización benéfica.
b) Determine una fórmula que permita calcular la cantidad de dinero que percibiría la compañía de tarjetas por la venta de cada tarjeta navideña.
c) ¿Cuánto dinero recibirán tanto la compañía como la organización benéfica por la venta de 73 tarjetas?

Análisis de la Actividad 4

Antes de escribir las fórmulas correspondientes, es conveniente tener establecidas y simbolizadas las variables involucradas. Se podría establecer por ejemplo:

t: el número de tarjetas vendidas.

D: la cantidad de dinero que recibirá la organización benéfica por cada tarjeta vendida.

G: la cantidad de dinero que recibirá la compañía por cada tarjeta vendida.

De ese modo, los estudiantes pueden determinar que el dinero que va a recibir la institución benéfica se obtiene al multiplicar 150 colones por la cantidad de tarjetas vendidas, lo cual pueden expresar simbólicamente como sigue:

$$D = 150 \times t$$

Considerando que por cada tarjeta vendida, la compañía recibe 950 – 150 = 800 colones, la cantidad de dinero que recibirá queda descrita por la fórmula:

$$G = 800 \times t$$

Las fórmulas anteriores permiten determinar la cantidad de dinero que recibirán tanto la compañía como la organización benéfica por la venta 73 tarjetas. La organización benéfica percibiría un total de

$$D = 150 \times t$$

$$D = 150 \times 73$$

$$\text{D} = 10\ 950 \text{ colones}$$

En el caso de la compañía, sus ingresos corresponden a

$$G = 800 \times t$$

$$G = 800 \times 73$$

$$G = 58\ 400 \text{ colones}$$

Si bien es cierto que en muchas situaciones se ha venido trabajando las sucesiones y el reconocimiento de patrones de una manera verbal o mediante la utilización de representaciones tabulares, es conveniente que paulatinamente se recurra a la representación simbólica del patrón presente en ellas para facilitar el cálculo de ciertos términos, tal y como se vio en la actividad 2.

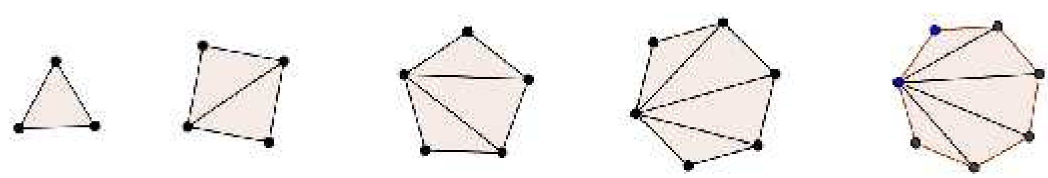
Dependencia e independencia entre variables

Actividad 5

¿Cuántas diagonales desde un vértice se pueden trazar en un polígono de 20 lados? Represente simbólicamente las variables involucradas en este problema y determine un modelo que permita obtener el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, en un polígono regular.

Análisis de la Actividad 5

Se espera que los estudiantes realicen los primeros intentos gráficos para comprender el enunciado del problema. El docente debe estar atento por si existen problemas respecto a la comprensión de la noción de diagonal trazada desde un vértice y realizar preguntas que redirijan al estudiante hacia la noción correcta.



Posteriormente se pueden resumir los datos en una tabla como la mostrada a continuación:

Cantidad de lados	3	4	5	6	7	8	…
Cantidad de diagonales desde un vértice	0	1	2	3	4	5	…

Apelando al reconocimiento de patrones, los estudiantes pueden notar que el valor que corresponde al número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice se obtiene al restar tres del valor concerniente al número de lados del polígono. Ellos pueden representar la variable "cantidad de diagonales desde un vértice" con d y "número de lados" con n para formular la siguiente expresión:

$$d = n - 3$$

La misma puede ser utilizada para responder al problema:

$$d = n - 3$$
$$d = 20 - 3$$
$$d = 17 \text{ diagonales.}$$

En la etapa de clausura, el docente debe realizar preguntas que hagan referencia a la relación de dependencia que existe entre las variables involucradas con el objeto de formalizar los siguientes conceptos.

Dependencia de variables

Cuando se simbolizan variables presentes en una situación del contexto real y se determina una fórmula que las relaciona, hay una relación implícita de dependencia entre ellas. En efecto, del ejemplo anterior se puede observar que para obtener el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un polígono regular es necesario conocer su número de lados. Es así como se puede asegurar que d es una *variable dependiente* pues depende de n para poder ser calculada. Por otra parte, n se suele denominar *variable independiente ya que no depende de otra.*

En general cualquier fórmula matemática permite establecer una relación de dependencia entre dos variables, así por ejemplo:

- La fórmula

$$A = b \times h \div 2$$

permite obtener el área de un triángulo cualquiera si se conoce la medida de su base b y su altura h. En este caso, el área A depende de los valores que pueden tomar las variables b y h.

- En la fórmula

$$C = 6{,}28 \times r$$

r es la *variable independiente* y C *es la variable dependiente*. Esta permite determinar la medida aproximada de la circunferencia dependiendo de la medida de su radio.

III. Escalas

Actividad 6

La siguiente actividad se puede realizar en subgrupos. Los y las estudiantes necesitarán una regla e hilo para desarrollarla. Además, el docente facilitará a cada uno un mapa para resolver el siguiente problema:

La familia González Carballo decidió vacacionar al Pacífico Norte, específicamente a Playa Tamarindo, pasando previamente por Filadelfia, Belén y Portegolpe. Cuando llegaron a Liberia, decidieron bajar y cenar en uno de los restaurantes del lugar. Ahí, Miguelito (el hijo mayor) observó un letrero donde lee que su destino está a 69 km. En la mesa, su madre encuentra un mapa turístico como el que se muestra al final de este problema, donde revisa el trayecto a recorrer. Ella observa que de camino está la ciudad de Filadelfia y le pregunta a Miguelito: ¿cómo a cuántos kilómetros estamos de Filadelfia? Él le responde: Supongo que como a 25 km. De acuerdo con lo anterior, ¿qué tan acertada es la estimación propuesta por Miguelito?

Imagen tomada de: http://www.govisitcostarica.co.cr/travelInfo/mapLg.asp?mapID=55

Análisis de la Actividad 6

Actividades como esta permiten promover un aprendizaje más colaborativo y participativo pues su resolución puede ser abordada utilizando diversas estrategias.

Es claro que si se pretende estimar la cantidad de kilómetros que hay desde Liberia a Filadelfia, hay que tener una noción de cómo puede ayudar la información del mapa para buscar adaptar el mismo a la realidad. Así por ejemplo, se puede buscar la forma de determinar cuál es longitud del desplazamiento en cm que hay entre un punto y otro en el mapa. Para ello se pueden utilizar diferentes estrategias:

a. Con la regla se puede medir segmentos del trayecto para ir sumándolos y obtener así dicho desplazamiento. A continuación se muestran las medidas obtenidas de una impresión del mapa:

Al sumar las medidas de los segmentos, se obtiene que entre Liberia y Tamarindo hay 14, 8 cm.

b. También, con el hilo se puede obtener un trayecto más delineado y por tanto, una mejor aproximación de dicho desplazamiento.

En la misma impresión del mapa, se procedió cuidadosamente a hacer coincidir el hilo con el trayecto entre los dos lugares. Al final se midió la cantidad de hilo utilizada y este midió 14,5 cm.

Hay que rescatar que no todos pueden obtener el mismo dato pues pueden existir dificultades con la manipulación del hilo o una mala utilización de la regla, por lo que el docente debe estar atento sobre todo a lo segundo. Algunas diferencias significativas entre las medidas encontradas pueden ser discutidas para que los estudiantes argumenten cuáles pudieron ser las posibles fuentes de error.

Luego de obtener la medida del recorrido en el mapa, el siguiente paso es investigar cuántos kilómetros en la realidad corresponden por cada centímetro en el mapa. Como Miguelito observó que de Liberia a Tamarindo hay 69 km y en el mapa esa distancia corresponde a 14, 8 cm, entonces se puede realizar, con la calculadora, la siguiente división:

$$69 \div 14{,}8 = 4{,}66 \text{ aproximadamente}$$

Esto representa que cada centímetro en el mapa corresponde a 4,66 km de la distancia real.

Finalmente, del mapa descrito en la parte a) se puede obtener que de Liberia a Filadelfia hay 6,5 cm, por lo que la distancia real sería:

$$6{,}5 \times 4{,}66 = 30{,}29 \text{ km.}$$

Así Miguel hizo una estimación razonable, aunque la diferencia entre su estimación y la realidad fuese de poco más de 5 km.

Esta actividad permite valorar la importancia de buscar representaciones de objetos o situaciones cuyas medidas en la realidad no permitirían ser representadas. Por ejemplo, las distancias entre dos lugares en el mundo se representan e interpretan en un mapa adecuando sus medidas para que guarden proporción con la distancia real. También las maquetas de los arquitectos guardan una proporción con las edificaciones que se construirán en la realidad.

Escalas

Es la proporción de aumento o disminución que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones representadas de un objeto. En efecto, para representar un objeto de grandes dimensiones, deben dividirse todas sus medidas por un factor mayor que uno, en este caso denominado **escala de reducción**.

Hay dos tipos de escalas:

a. La numérica

Se expresa mediante una **fracción** que indica la **razón** de la distancia entre dos lugares señalados en un mapa y su correspondiente en el terreno. Normalmente se expresa en relación con la unidad, así una escala **1 : 50 000** significa que cada unidad del mapa corresponde en la realidad a 50 000.

Así por ejemplo, en el problema de la actividad anterior se obtuvo que cada centímetro del mapa representa aproximadamente 4,66 km de la realidad, con lo que la escala real de dicho mapa se expresaría de la forma siguiente:

$$\frac{1\ cm}{4{,}66\ km} = \frac{1\ cm}{4660\ cm}\ o\ bien\ 1 : 4660$$

b. La escala gráfica

Representa lo mismo que la numérica, pero lo hace mediante una línea recta o **regla graduada**. Colocando la escala sobre el mapa, puede calcularse la distancia real existente entre dos puntos.

En el mapa utilizado en la actividad anterior, la longitud **total de la línea** segmentada que se ubica en el recuadro naranja, en la parte inferior izquierda es 5 km, en tanto que cada **fracción** de la misma puesta sobre el mapa equivale a 1 km en la realidad.

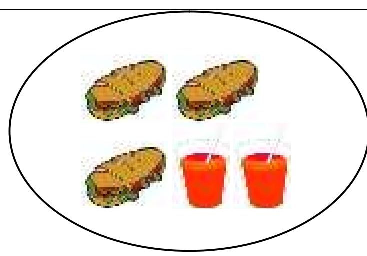
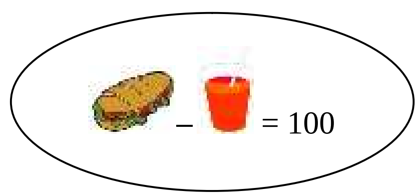
IV. Ecuaciones

Actividad 7

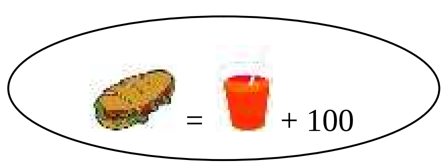
Eduardo fue a la soda para comprar la merienda de él y la de su compañera Diana. Compró dos vasos de refresco natural y tres emparedados de jamón en 1550 colones. Diana le dice a Eduardo que cuánto dinero le debe por el emparedado y el refresco que le encomendó y éste le respondió: "te daré una pista: la diferencia entre un emparedado y la bebida es de 100 colones, siendo el primero más caro". ¿Cuál es el precio de un emparedado y de un vaso de refresco?

Análisis de la Actividad 7

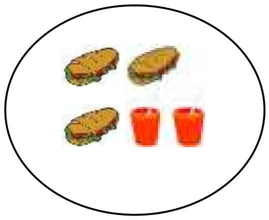
Esta actividad tiene por objeto inducir en el estudiante el tratamiento del concepto de variable como incógnita o valor desconocido. Según Godino y Font (2003) antes de hacer uso de variables para la resolución de ecuaciones es necesario que previamente se consideren algunas etapas donde el y la estudiante recurra inicialmente a establecer medios gráficos de representación que cumplan el papel de esos valores que se desconocen. Es así como los y las estudiantes, aprovechando su bagaje y experiencia en aspectos relacionados a la resolución de problemas, recurran a formas gráficas de representar la situación planteada y así poder discutir algunas estrategias de resolución, lo cual permite activar el proceso *Representar*. Por ejemplo, podrían establecer los siguientes esquemas:

I	**II**
 1550 colones	

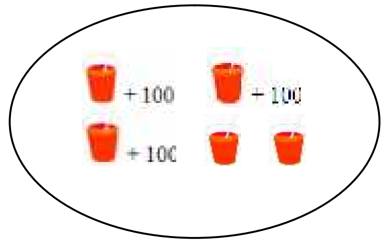
y deducir a partir de **II** que el precio de un emparedado equivale al de un refresco más 100 colones



Así, tres emparedados y dos refrescos equivalen a cinco refrescos más 300 colones, lo cual, a su vez equivale a 1550 colones.

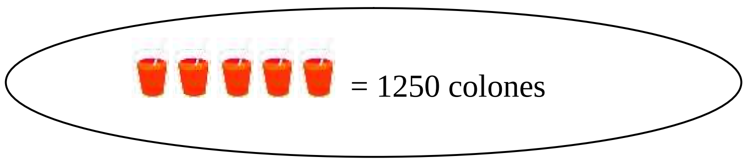


es equivalente a



= 1550 colones

Los estudiantes pueden deducir fácilmente que cinco vasos de refresco equivaldrían a 1250 colones, dado que como ya se tienen 300 colones dicha cantidad permite completar el monto total.

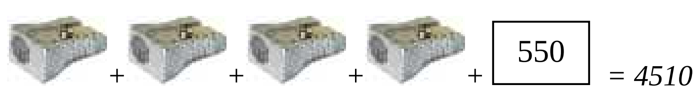


Así, repartiendo equitativamente dicho monto entre los 5 vasos de refresco, se obtiene que cada vaso tiene un valor de 250 colones y en consecuencia, como el emparedado es 100 colones más caro, éste tendría un precio de 350 colones.

Es importante que el docente sugiera en este momento a los estudiantes revisar o comprobar su respuesta para valorar si cumple con las condiciones del problema. Además, ello constituye una forma de activar el proceso de *Razonar y argumentar*.

Actividad 8

Observe la siguiente representación:



Plantee un problema que se pueda modelar mediante el dibujo anterior y resuélvalo.

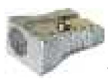
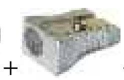
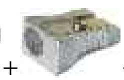
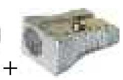
Análisis de la Actividad 8

Para dar continuidad a lo desarrollado en la actividad 7, es importante que el y la estudiante se forme la idea de que los dibujos usados representan una cantidad, la cual se desconoce y tiene que determinar. Con el afán de que además pueda darle una contextualización real, se solicita que plantee un problema que haga referencia a dicha representación para que indirectamente sea capaz de asignar a la ilustración un significado y asociarla con la interrogante del problema a plantear.

Un estudiante puede pensar en una situación donde se representa el costo de una compra realizada en una librería y plantear el siguiente problema:

Rodrigo fue con su madre a una librería y compraron cuatro tajadoress y un borrador para que la clase los use en caso de que alguien no haya llevado materiales. Por dicha compra, ellos cancelaron 4510 colones. Si el borrador valía 550 colones, ¿cuál es el precio de cada tajador?

En cuanto a su resolución, de la ilustración anterior se puede desprender que el precio de los cuatro tajadores corresponde a lo que le falta a 550 colones para completar el precio total. Así, su precio sería de 4510 – 550 = 3960 colones.

 +  +  +  *= 3960 colones*

Finalmente como el precio de cada tajador es el mismo, entonces se obtiene que

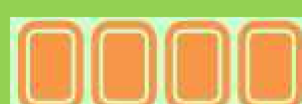
$$3960 \div 4 = 990 \text{ colones}$$

lo cual corresponde al precio de cada uno.

Estas dos actividades han tenido como propósito inicial que el estudiante asocie mediante una representación la noción de incógnita para que a la hora de trabajar con la obtención del valor faltante o resolución de una ecuación, sea más fácil para el estudiante asociar este proceso como la obtención de un valor desconocido que hace verdadera una igualdad. Esto conlleva a la formalización de los siguientes conocimientos:

Las variables como incógnitas

Existen situaciones donde el uso de ilustraciones permite representar valores desconocidos que se presentan durante el planteo de un problema. Por ejemplo, cuando se expresa que “si cuatro envases de jugo de naranja tienen un costo de 1250 colones, ¿cuánto cuesta cada uno de ellos?”, esto se puede representar esquemáticamente como

 $\rightarrow$ 1250 colones

Pero lo anterior puede ser representado mediante el uso de variables. En efecto, las cajas de jugo utilizadas para representar su valor monetario pueden ser cambiadas por una letra (o variable), que permite representar simbólicamente dicha situación.

Supóngase que se utilizará la letra n para representar el valor del envase de jugo de naranja. Como la suma de los cuatro envases de jugo de naranja es de 1250 colones, éstas se pueden representar de la forma siguiente:

$$n + n + n + n = 1250$$

o bien, como es la suma sucesiva de cuatro cantidades iguales, se puede representar también como:

$$4 \times n = 1250$$

Lo anterior refleja uno de los usos que se le da a la noción de variable en matemáticas: la representación de un valor desconocido o *incógnita* en una igualdad.

Ecuación

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más incógnitas. Se llama *solución de la ecuación* al valor que debe tomar la *incógnita* para que la igualdad sea verdadera. Por ejemplo, en la ecuación

$$b - 8 = 17$$

$b = 11$ no es *solución* de la ecuación ya que el miembro izquierdo de la igualdad es diferente al de la derecha:

$$11 - 7 \neq 17$$

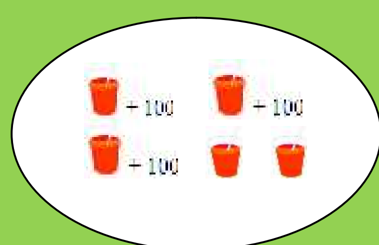
De hecho, el valor que corresponde a la *solución* de dicha ecuación es $b = 25$ pues

$$25 - 8 = 17.$$

Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación consiste en determinar el valor de la *incógnita* para que la igualdad sea verdadera.

Si se hace referencia a la actividad 7, cuando se obtuvo la siguiente representación



= 1550 colones

se pudo deducir que al sumar los 5 vasos de refresco y los 300 colones hacen un total de 1550 colones, por lo que si se resta al total los 300 colones, se obtiene que los 5 vasos de refresco tienen un costo de 1250 colones.

Siendo r la incógnita que representa el valor de un vaso de refresco, la situación anterior se representa mediante la siguiente secuencia de pasos:

$$5 \times r + 300 = 1550$$
$$5 \times r = 1550 - 300$$
$$5 \times r = 1250$$

Como 5 vasos de refresco tienen un valor de 1250 colones se puede deducir que al dividir 1250 por 5 se puede obtener el precio de cada refresco

$$5 \times r = 1250$$
$$r = 1250 \div 5$$
$$r = 250$$

Lo anterior refleja algo importante: cuando en uno de los miembros de la ecuación se le realiza una operación a la incógnita, su valor se puede obtener mediante la aplicación de la operación inversa al otro miembro de la igualdad.

Así, ecuaciones como las siguientes pueden ser resueltas de la forma siguiente:

$8 \times r = 120$ $r = 120 \div 8$ $r = 15$	$a + 317{,}34 = 657{,}5$ $a = 657{,}5 - 317{,}34$ $a = 340{,}16$	$c - 23 = 20$ $c = 20 + 23$ $c = 43$	b ö $12 = 5{,}6$ $b = 5{,}6 \times 12$ $b = 67{,}2$

Muchos de los problemas que han de resolver los alumnos de primaria consisten en hallar un número desconocido que cumpla ciertas condiciones. La formulación de esta pregunta suele ser en forma de enunciado, por lo que es importante que los estudiantes sientan la confianza de expresar lo planteado en el problema mediante una ecuación matemática.

Actividad 9

Joaquín dispone de 865 000 colones para comprar dólares en un banco, pues en esta semana realizará un viaje de negocios al extranjero. Si el precio del dólar durante ese día fue de 512,50 colones, ¿cuántos dólares podrá comprar Joaquín para sus gastos en dicho viaje?

Análisis de la Actividad 9

La modelización matemática de situaciones en contexto real conviene ser trabajada al finalizar la etapa de primaria para ir inculcando en el estudiante una forma de expresión algebraica que le permita simplificar procesos de cálculo y resolución de problemas. Por eso, conviene utilizar situaciones sencillas de modelar para que el estudiante adquiera confianza para plantear ecuaciones y así ver la utilidad de las matemáticas en dicho proceso.

Si se asigna una *incógnita* para denotar la cantidad de dólares que comprará Joaquín, por ejemplo d. Además, se investiga cómo están relacionadas las cantidades que intervienen en el problema para expresarlo de manera verbal. Por ejemplo:

Si se multiplica la cantidad de dólares por el precio en colones de cada uno, se obtiene como resultado la cantidad de colones necesaria para comprarlos.

Ahora, aprovechando lo estudiado acerca de la representación simbólica de relaciones, se puede expresar en forma simbólica lo anterior. En efecto, siendo C la cantidad de colones necesaria para comprar los dólares y p su respectivo precio al momento de la compra, dicha situación puede ser modelada mediante la expresión:

$$C = d \times p$$

Como son conocidas C y p, se sustituyen en la fórmula anterior para obtener

$$865\,000 = d \times 512{,}50$$

Al resolver la ecuación anterior, se obtiene que la cantidad de dólares que comprará Joaquín es de

$$d \times 512{,}50 = 865\,000$$

$$d = 865\,000 \div 512{,}50$$

$$d = 865\,000 \div 512{,}50$$

$$d = \$1687{,}80 \text{ aproximadamente}$$

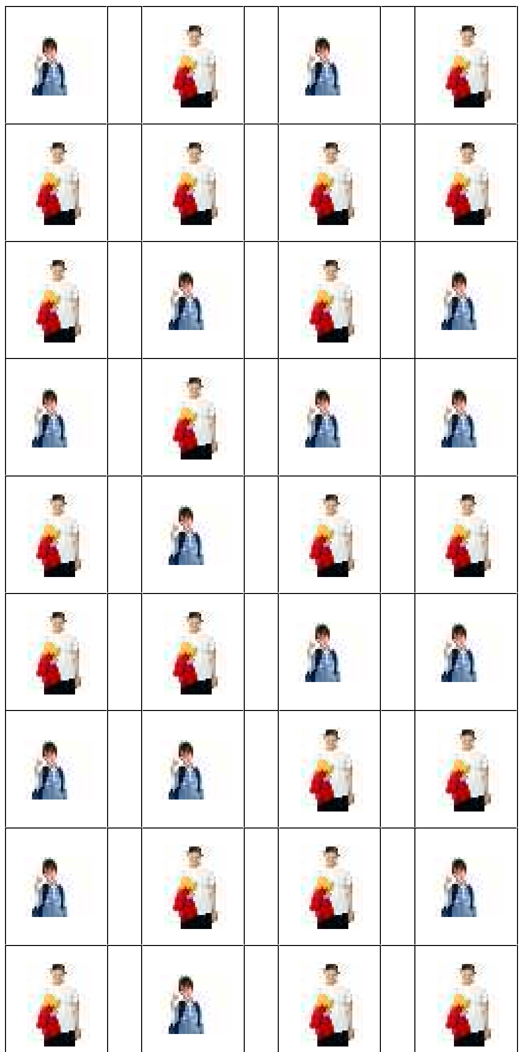
V. Razón, proporción directa y porcentajes

Actividad 10

En el grupo 6 – A, la maestra decidió formar las filas de tal forma que la cantidad de hombres por cada una sea la misma y que esto también se cumpla para el caso de las mujeres (la cantidad de niñas no necesariamente es igual a la de niños en cada fila). Si en el grupo hay 35 estudiantes de los cuales 20 son mujeres, ¿cuántas filas se pueden formar bajo estas condiciones?

Análisis de la Actividad 10

En esta actividad es conveniente promover el uso de representaciones así como una estrategia basada en el ensayo y el error para explorar la manera de resolver el problema. Por ejemplo, se puede proponer que por cada fila haya 5 niñas lo cual lleva a la conformación de 4 filas; sin embargo en cada una no se podría distribuir equitativamente la cantidad de niños.



Fila 1		Fila 2		Fila 3		Fila 4

Si se decide que en cada fila se coloquen 4 niñas, eso hace que se formen 5 filas, lo cual sí permite distribuir equitativamente la cantidad de niños.

Fila 1		Fila 2		Fila 3		Fila 4		Fila 5

Otra forma de resolver dicho problema es observar que al tener 20 niñas, necesariamente hay 15 niños, por lo que al ser ambas cantidades múltiplos de 5, entonces al dividirlas por 5 se conformarían 5 filas, cada una de ellas con igual cantidad de varones así como de mujeres.

Es importante que las estrategias utilizadas sean expuestas a los demás y así discutir su sencillez, ingenio o pertinencia. Esto permite activar el proceso *Comunicar*.

Razón

La razón de dos cantidades *a* y *b* es la comparación de ellas por medio de un cociente o división. Se puede denotar de las siguientes formas:

$$a:b;\ a \text{ ö } b;\ \frac{a}{b}.$$

Para el caso del problema planteado en la actividad 10, hubiese bastado obtener la razón entre la cantidad de niñas y niños que conforma el grupo 6 – A y deducir a partir de ahí cuántas filas son necesarias para cumplir con las disposiciones de la docente. En efecto,

$$\frac{20 \text{ niñas}}{15 \text{ niños}} = \frac{4 \text{ niñas}}{3 \text{ niños}}.$$

Lo anterior permite establecer que por cada fila se distribuyen 4 niñas y 3 niños, lo que indica que cada fila tendría 7 niños y se necesitarían

$$35 \div 7 = 5 \text{ filas}$$

para ordenar todos los estudiantes.

Otro ejemplo: si se sabe que un automóvil se llenó con 42 litros de gasolina y recorrió un total de 384 kilómetros, entonces la razón entre la cantidad de litros de gasolina respecto a la cantidad de kilómetros recorridos está dada por

$$\frac{42\ l}{384\ km} = \frac{7\ l}{64\ km}.$$

Esto permite establecer que por cada 7 litros de gasolina, dicho automóvil recorre aproximadamente 64 kilómetros.

Actividad 11

La selección de futbol femenino de la escuela disputará un importante partido que le garantizará – en caso de ganar- un cupo en la final de los juegos estudiantiles 2012. Como cualquier detalle es importante para lograr el éxito de las 18 muchachas, un grupo de padres y madres de las jugadoras se hace cargo de elaborar las bebidas con las que ellas se hidratarán durante el partido. Una madre compra un recipiente (con una medida incorporada) que contiene la mezcla de hidratante en polvo el cual ofrece las siguientes indicaciones para la elaboración:

Para preparar aproximadamente	*Mezcla de hidratante en polvo*
3,79 litros	*4 medidas*
18,95 litros	*20 medidas*
34,11 litros	*36 medidas (todo el envase)*

Si cada una de las jugadoras cuenta con un recipiente de 591 ml,

a. *¿Cuántas medidas de la mezcla de polvo hidratante son necesarias aproximadamente para elaborar las bebidas de las jugadoras de acuerdo con las indicaciones de elaboración descrita en la etiqueta?*
b. *¿Qué relación se puede observar al obtener la razón entre la cantidad de agua y la cantidad de medidas de la mezcla de polvo hidratante para cada una de las tres parejas de datos?*

Análisis de la Actividad 11

Esta actividad puede ser desarrollada en subgrupos para lograr un aprendizaje activo y colaborativo. Puede permitirse el uso de la calculadora cuando se amerite. Conviene destacar que en forma implícita este problema permite fomentar el deporte y la recreación, así como los cuidados necesarios durante su desarrollo, lo que permite inculcar una *Educación para la Salud.*

Inicialmente hay que considerar la obtención de la cantidad total de líquido necesaria para llenar los envases de las jugadoras. Como son 18 y cada una porta un envase de 591 *ml*, entonces se necesita elaborar $18 \times 591 = 10\ 638$ *ml* de bebida hidratante.

Durante la acción estudiantil es necesario estar pendiente sobre el manejo de las unidades ya que la información suministrada en la etiqueta está en litros. Realizando la conversión correspondiente, se obtiene que 10 638 *ml* = 10,638 *l*.

Con la información suministrada en la etiqueta se espera que los estudiantes investiguen cuántos litros de agua son necesarios para elaborar la bebida hidratante con una medida de mezcla en polvo, por lo que pueden obtener la razón entre dichas cantidades:

$$\frac{18{,}95\ l}{20\ medidas} = \frac{0{,}9475\ l}{1\ medida}.$$

Lo que permite establecer que por cada medida de mezcla de polvo hidratante se puede elaborar 0,9475 *l* de bebida. Finalmente, si se dividen el total de líquido requerido por 0,9475 *l* se obtiene aproximadamente 11,23 lo cual significa que con un poco más de 11 medidas se puede elaborar la bebida hidratante para las jugadoras.

Durante la etapa de discusión de los resultados, es importante que el docente promueva la comunicación de las estrategias empleadas por los estudiantes. Particularmente, indagar si otros grupos utilizaron diferentes datos de la etiqueta para obtener la razón que permitió dar la respuesta al problema.

Proporción

Los números *a, b, c* y *d* forman una proporción si la razón entre *a* y *b* es la misma que para *c* y *d.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La igualdad anterior también puede ser expresada de la siguiente forma:

$$a : b :: c : d$$

la cual expresa "*a* es a *b* como *c* es a *d*. Los números *a* y *d* se denominan *extremos*, *b* y *c* se denominan *medios.*

En la actividad 11, los datos suministrados en la etiqueta del envase que contiene polvo hidratante guardan una *proporción* pues las razones que se forman al comparar las medidas de polvo hidratante con la cantidad de líquido son equivalentes:

$$\frac{18{,}95\ l}{20\ medidas} = \frac{0{,}9475\ l}{1\ medida} \qquad \frac{3{,}79\ l}{4\ medidas} = \frac{0{,}9475\ l}{1\ medida} \qquad \frac{34{,}11\ l}{36\ medidas} = \frac{0{,}9475\ l}{1\ medida}$$

Además, se puede observar que al incrementar cinco veces las medidas de mezcla de polvo hidratante, también se incrementa en cinco veces la cantidad de líquido necesaria para hacer la bebida con las especificaciones de la etiqueta. Si se compara la razón entre la cantidad de líquido a preparar y la correspondiente a las medidas de polvo necesarias, se ve que también existe una proporción entre ellas que refleja esta relación.

Para preparar aproximadamente	*Mezcla de hidratante en polvo*
3,79 litros	***4 medidas***
18,95 litros	***20 medidas***
34,11 litros	*36 medidas (todo el envase)*

$$\frac{18{,}95\ l}{3{,}79\ l} = 5 \qquad \frac{20\ medidas}{4\ medidas} = 5$$

También es fácil observar que si se disminuye en una novena parte la cantidad de medidas, se reduce en una novena parte la cantidad de líquido y que existe una proporción entre dichas cantidades.

Para preparar aproximadamente	*Mezcla de hidratante en polvo*
3,79 litros	***4 medidas***
18,95 litros	*20 medidas*
34,11 litros	***36 medidas (todo el envase)***

$$\frac{3{,}79\ l}{34{,}11\ l} = \frac{1}{9} \qquad \frac{4\ medidas}{36\ medidas} = \frac{1}{9}$$

Esta característica que se presenta en los datos de esta actividad también está presente en muchas otras situaciones que se viven a diario y permite formalizar el siguiente conocimiento:

Proporción directa

Si dos cantidades son tales que a **doble, triple, etc.** cantidad de la primera corresponde **doble, triple, etc.** cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son *directamente proporcionales.*

Una proposición equivalente a la anterior sería:

Si dos cantidades son tales que a **la mitad, la tercera parte, etc.** de la cantidad de la primera corresponde **la mitad, la tercera parte etc.** de la cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son *directamente proporcionales*.

Por ejemplo, es natural que cuando se va de compras y se conoce que el kilo de papas tiene un costo de 600 colones, se deduzca de manera inmediata que si se desea comprar 4 kilogramos entonces se debe multiplicar dicho precio por cuatro para calcular el monto a pagar. Por otra parte, si sólo se desea comprar medio kilogramo entonces hay que pagar la mitad del precio establecido. Es así que podemos considerar que la cantidad de kilogramos de papas y el precio a pagar por ellas son cantidades *directamente proporcionales*.

Otras cantidades que mantienen proporción directa son:

- La cantidad en gramos de un ingrediente y la porción del alimento que se elabora con él.
- La cantidad de kilómetros que puede viajar un automóvil y los litros de gasolina.
- La cantidad de kilogramos de un producto y el precio a pagar por él.
- La cantidad de horas trabajadas por una persona y el salario que ésta recibe.

El reconocer la existencia de una *proporción directa* entre cantidades permite implementar un procedimiento rápido y sencillo para calcular alguna de ellas. En efecto, vale la pena resaltar que en toda proporción el producto de los *medios* es igual al producto de los *extremos.* Así, retomando lo desarrollado en la actividad 11 se puede verificar este hecho:

3,79 : 4 :: 18,95 : 20

4 ò 18,95 = 75,80

3,79 ò 20 = 75,80

De ese modo, al saber que son necesarios 10,638 *l* para llenar los recipientes de las jugadoras, entonces se puede plantear la proporción

18,95 : 20 :: 10,638 : *a*

donde ***a*** representa la cantidad de medidas necesarias para la elaboración de 10,638 *l* de bebida. Como el producto de los extremos es igual que el de los medios, se puede plantear la ecuación

$$18{,}95 \times a = 20 \times 10{,}638$$

la cual al resolverse se tiene que

$$18{,}95 \times a = 212{,}76$$

$$a = 212{,}76 \div 18{,}95$$

$$a = 11{,}23 \text{ aproximadamente}$$

lo que corresponde a lo obtenido en la actividad 11.

Regla de tres simple

La regla de tres es un procedimiento que permite calcular una determinada cantidad cuando se conoce que existe una relación de proporción con otra dada. Así, dada la proporción

$$a : b :: c : d \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si se desea conocer el valor de uno de los *medios* (por ejemplo *b*), se multiplican los *extremos* y el resultado se divide por el *medio*.

$$b = a \times d \div c$$

si se desea conocer el valor de uno de los *extremos* (por ejemplo *d*), se multiplican los *medios* y el resultado se divide por el *extremo*.

$$d = b \times c \div a$$

Tomando como referencia lo desarrollado en la actividad 11, como las cantidades guardan proporción directa, al ser necesarios 10,638 *l* de bebida para las jugadoras, entonces con los datos que suministra la etiqueta se puede plantear la proporción

$$34{,}11 : 9 :: 10{,}638 : d$$

donde *d* es la cantidad de medidas necesarias para elaborar dicha cantidad de bebida. Aplicando regla de tres se obtiene

$$d = \frac{9 \times 10{,}638}{34{,}11} = 11{,}23 \text{ aproximadamente}$$

Otro ejemplo: Según estudios realizados, se recomienda que una persona adolescente consuma 1300 mg de calcio diarios para prevenir problemas óseos. Una porción de 230 g de yogurt descremado contiene 345 mg de calcio. ¿Cuántos gramos de yogurt descremado son necesarios para que un joven cumpla dicha cuota de calcio?

Solución:
Es posible observar que si se aumenta la cantidad de gramos de yogurt, la cantidad de miligramos de calcio debe aumentar en la misma proporción que la primera, por lo que existe una proporcionalidad directa entre las magnitudes. Así se pueden plantear los datos de la siguiente forma

Cantidad de yogurt	230 g	a
Cantidad de calcio	345 mg	1300 mg

donde a representa la cantidad de yogurt recomendada para un adolescente. Aplicando regla de tres se obtiene:

$$a = \frac{230 \times 1300}{345} = \frac{299000}{345} = 867g \text{ aproximadamente}$$

Actividad 12

Amanda es una joven que suele acompañar a sus padres a realizar diversas compras. En esta oportunidad vio en una de las tiendas un pantalón que le gustaba y vio en él una etiqueta donde estaba escrito 15% de descuento. Ella, al no comprender el mensaje le preguntó a su padre acerca del mismo. Éste le respondió que un descuento es una cantidad que le restan al valor original del artículo para venderlo más barato y que en el caso del pantalón que deseaba, ese descuento sería de 15 colones por cada cien colones de su valor. De ese modo Amanda entró a la tienda y vio que el precio del pantalón es de 37 500 colones sin la aplicación del descuento. Si ella desea comprar dicho pantalón, ¿cuánto dinero deberá pagar?

Análisis de la Actividad 12

Este problema representa una situación muy común como lo es el uso de porcentajes para determinar descuentos o impuestos que se hacen sobre el precio de un artículo. Dado lo común de esta situación en el diario vivir, permite ver de forma natural la utilidad de las Matemáticas a través de su resolución.

Dicha actividad puede ser desarrollada en parejas con el objeto de fomentar la comunicación de ideas, el razonamiento y la argumentación en los estudiantes.

Una estrategia podría ser el ver cuántas veces caben 100 en 37 500 y luego multiplicar dicho monto por 15. Esto permitiría conocer cuánto dinero corresponde al descuento. Finalmente se aplicaría este descuento restando este monto del precio original del pantalón. A continuación una descripción de las operaciones por realizar:

$37\,500 \div 100 = 375$ $375 \times 15 = 5625$ colones $37\,500 - 5625 = 31\,875$ colones

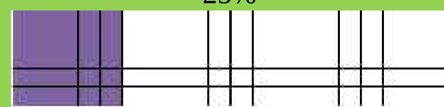
El porcentaje es una de las representaciones numéricas más empleadas por las personas para el tratamiento de la información y la expresión de cantidades en términos relativos. Es por ello que se considera importante abordar este conocimiento para garantizar su comprensión.

Porcentaje o tanto por ciento

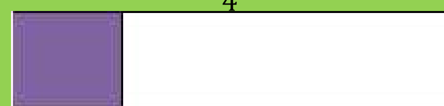
Tanto por ciento o porcentaje es una expresión que indica una parte de un todo, considerado este como si fuera 100. Se representa con el símbolo % que se lee “por ciento”.

Así, 25 % es una forma de representar 25 centésimas partes de un todo, de ahí que esta expresión sea equivalente a la fracción $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Es decir, 25% representa la cuarta parte de un todo. Además, el 100% representaría la totalidad.

25%



$\frac{1}{4}$



100%

Cuando se dice que el 44% de los costarricenses accede Internet desde su celular significa que 44 de cada 100 personas lo accesa de esa forma en Costa Rica. Si se estima que actualmente la población costarricense es aproximadamente de 4 301 712 habitantes, es posible determinar dicha cantidad de personas.

Cálculo del tanto por ciento de una cantidad

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad existen varios métodos. Retomando la situación sobre el porcentaje de personas que accesa Internet desde su teléfono celular, se puede observar que si dicho porcentaje se duplica, también se duplicaría la cantidad de personas, o bien, si dicho porcentaje se reduce a la mitad, pues a la mitad se reduciría el número de personas, por lo cual existe una relación de proporcionalidad directa entre un porcentaje y la cantidad del que se obtiene el mismo. Como se desea conocer qué cantidad de personas representa 44% de la población costarricense, se puede reconocer que 100% representa la totalidad de la misma y a la vez plantear que:

$$\text{4 301 712 personas} \xrightarrow{representan} \text{100\% de la población}$$
$$a \text{ personas} \xrightarrow{representan} \text{44\% de la población}$$

con lo cual se puede plantear la siguiente proporción:

$$4\,301\,712 : 100\% :: a : 44\%$$

Aplicando regla de tres, se obtiene que aproximadamente:

$$a=\frac{44\times 4\,301\,712}{100}=1\,892\,753 \text{ personas}$$

ingresan a Internet por medio de sus teléfonos celulares.

Otra forma de realizar este cálculo es reconocer que 44% de 4 660 000 es equivalente a resolver la operación:

$$\frac{44}{100} \times 4\,301\,712 \quad \text{o bien} \quad 0{,}44 \times 4\,301\,712$$

Retomando lo desarrollado en la actividad 12, se puede plantear lo siguiente:

$$37\,500 \text{ colones} \xrightarrow{\text{representan}} 100\% \text{ del valor del pantalón.}$$
$$b \text{ colones} \xrightarrow{\text{representan}} 15\% \text{ del valor del pantalón.}$$

$$37\,500 : 100\% :: b : 15\%$$

Aplicando regla de tres, se obtiene

$$b = \frac{15 \times 37\,500}{100} = \frac{562\,500}{100} = 5625 \ colones$$

Al restar este monto del precio original del pantalón, se obtiene 31 875 colones.

Actividad 13

La población del país experimentó en la última década un crecimiento, al pasar de 3 810 179 habitantes en el 2000 a 4 301 712 en el 2011.

Fuente: http://www.inec.go.cr/Web/Home/pagPrincipal.aspx# (7 de mayo del 2011)

a. Estime cuál fue el porcentaje aproximado de aumento que registró la población costarricense durante esa década.

b. Calcule dicho porcentaje.

Análisis de la Actividad 13

Esta actividad pone de manifiesto la importancia de realizar estimaciones para anticipar la coherencia de los resultados que se esperan al resolver un problema. Además permite activar procesos como *Conectar* al utilizar elementos propios del área de *Números* como lo es la estimación.

Por otra parte, el docente puede orientar inicialmente la discusión acerca de las estimaciones que proponen sus estudiantes, realizando preguntas que permitan activar el proceso *Razonar y argumentar*. Se puede hacer una afirmación a la clase que sea errónea para ver las reacciones que ellos manifiestan, por ejemplo, el docente expresa “pienso que ese porcentaje es aproximadamente de 25%” y un estudiante podría decir “no me parece pues la diferencia es de aproximadamente 500 000 habitantes y si eso correspondiese a 25% entonces representaría la cuarta parte de la población con lo que esta sería de 2 000 000 de habitantes”.

Así, producto de la discusión los estudiantes podrían seguir proponiendo nuevas aproximaciones. Es evidente que éstas deben ser menores que 25%; es más, alguien puede notar que dicha diferencia es superior a la décima parte del total.

Una vez acordada una estimación razonable, para determinar el valor exacto de dicho porcentaje, se obtiene primero la diferencia entre la población del año 2011 y la del 2000, que corresponde a 491 533 habitantes. Luego, retomando lo aprendido en actividades anteriores, al existir una proporción directa entre los porcentajes y las cantidades de las cuales ellos se obtienen, se puede plantear la proporción

$$3\,810\,179 \text{ habitantes} \xrightarrow{representan} 100\% \text{ de la población.}$$
$$491\,533 \text{ habitantes} \xrightarrow{representan} a\ \% \text{ de la población.}$$

$$a : 491\,533 :: 100\% : 3\,810\,179$$

y aplicando regla de tres simple, se obtiene aproximadamente:

$$a = \frac{100 \times 491\,533}{3\,810\,179} = 12{,}9\%.$$

Esta actividad refleja la conveniencia de usar problemas en donde los estudiantes puedan poner a prueba el sentido numérico desarrollado en años anteriores, para hacer buenas estimaciones utilizando la noción de porcentaje.

Determinando el porcentaje que representa una cantidad

Para obtener el porcentaje que representa una cantidad respecto a otra se puede aplicar un procedimiento similar al desarrollado en la actividad 13. Por ejemplo, si en un aula hay 32 estudiantes de los cuales 18 son hombres, entonces para determinar el porcentaje de hombres que hay, se puede plantear la proporción

$$32 \text{ estudiantes} \xrightarrow{representan} 100\% \text{ de la clase.}$$
$$18 \text{ estudiantes} \xrightarrow{representan} a\ \% \text{ de la clase.}$$

$$a : 18 :: 100\% : 32$$

Por regla de tres simple:

$$a = \frac{100 \times 18}{32} = 56{,}25\%.$$

Así se tiene que aproximadamente 56% de las personas de tal grupo son hombres.

Otra forma de determinar dicho porcentaje es por medio de la razón entre la cantidad de hombres del grupo y el total de estudiantes del mismo

$$\frac{18}{32} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

Dicha representación es equivalente a 56,25% de acuerdo a lo visto anteriormente.

VI. Recomendaciones metodológicas

En los *Fundamentos* de los nuevos Programas de Matemáticas, se promueve el énfasis en una organización de las lecciones, con base en 4 pasos o momentos centrales:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Para ilustrar esta propuesta, se presenta el siguiente problema relacionado con el desarrollo de una habilidad propuesta para 6° Año:

Conocimiento	**Habilidad específica**
Representación. Plano de coordenadas.	Identificar y representar en un plano de coordenadas puntos que satisfacen una relación entre dos cantidades que varían simultáneamente.

Si se quiere desarrollar en los estudiantes estas habilidades, se deberían planear los siguientes cuatro momentos:

1. Propuesta de un problema

Antes de plantear el problema el docente debe tener claro qué quiere lograr con él. Se partirá de habilidades desarrolladas en niveles anteriores como:

- ✓ Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
- ✓ Calcular potencias cuya base y exponente corresponden a números naturales.

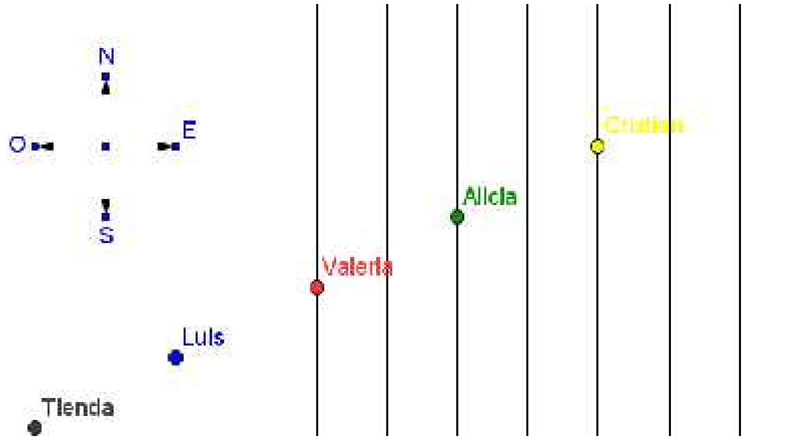
Es importante que durante el planeamiento y desarrollo de una actividad de esta índole se consideren aspectos como los siguientes:

a. El docente no debe sugerir la respuesta al estudiante; más bien su rol debe ir orientado a promover la discusión por medio de *buenas preguntas* para que el estudiante pueda avanzar.

b. El docente debe planificar las posibles etapas en las que podría desarrollarse la actividad, procurando anticipar las posibles estrategias que un estudiante realizaría (buenas o malas) para estar preparados sobre cómo el docente debe reaccionar y actuar ante ellas.

Problema a plantear:

Luis, Alicia, Felipe, Valeria y Cristian son un grupo de compañeros que trabajan repartiendo volantes con información sobre promociones que se darán el fin de semana en la tienda de zapatos para la cual trabajan. Se giraron instrucciones para establecer los lugares donde se distribuirán al público dichos volantes. Como Felipe llegó tarde, desconoce dónde debe ir a trabajar. El gerente le brinda un croquis cuadriculado de la ciudad como el que se muestra a continuación, enfatizando en que los puntos de distribución siguen una tendencia o patrón que le permitirán saber en qué lugar le corresponde trabajar.

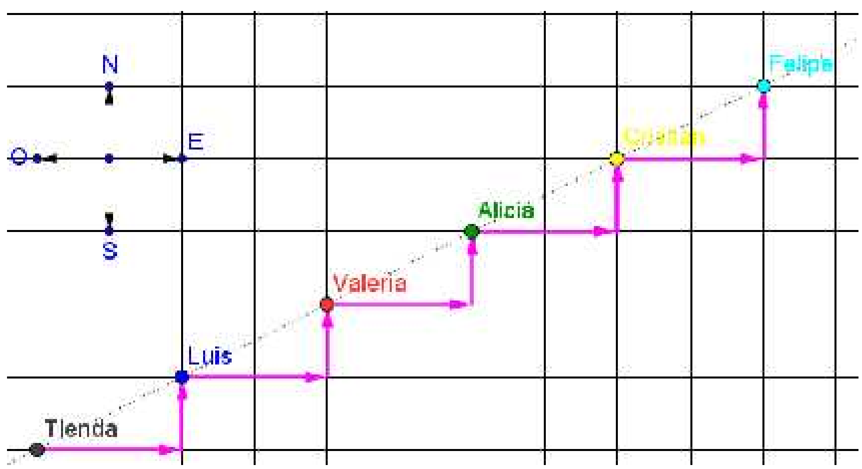


Ayuda a Felipe a determinar el patrón que permite establecer no sólo su posición sino la de cada uno de sus compañeros.

2. Trabajo estudiantil independiente

Los estudiantes pueden trabajar conformando subgrupos para intentar reconocer el patrón presente en la ilustración. Se podría notar que los compañeros de Felipe están distribuidos sobre una línea recta imaginaria, la cual permitiría deducir que él se ubica 200 m Este y 100 m Norte de donde se ubica Cristian.

Curiosamente, cada uno de los compañeros de Felipe se ubica 200 m Este y 100 m Norte de alguno de ellos, a excepción de Luis cuyo punto de referencia está respecto a la tienda, con lo que este podría ser uno de los patrones que se pueden deducir para la establecer su ubicación.



Alternativamente, se puede ver que respecto a la tienda donde laboran, cada uno de ellos se desplazó al Este el doble de lo que corresponde caminar hacia el Norte. Además cada uno de ellos fue girando hacia el norte cada dos cuadras. La siguiente representación tabular permite visualizar desde otra perspectiva este hecho:

Persona	**Luis**	**Valeria**	**Alicia**	**Cristian**	**Felipe**
Desplazamiento al Norte (m)	100	200	300	400	?
Desplazamiento al Este (m)	200	400	600	800	?

De la información anterior se puede concluir que Felipe debe caminar 1 km al Este y 500 m al Norte para llegar al punto de distribución que le corresponde.

Es necesario que el docente esté atento a intervenir de forma adecuada para que el estudiante utilice la representación tabular como una forma más de representación.

Es importante que durante esta etapa, el docente realice preguntas relacionadas con el desarrollo del problema, esto con el afán de activar el proceso de *Razonar y argumentar* en el estudiante. Por ejemplo, si ya han encontrado el patrón que permite predecir la posición que ocupará Felipe, se puede cuestionar por qué necesariamente él debe ubicarse al final de la línea imaginaria demarcada con anterioridad y no entre algunos de sus compañeros.

3. Discusión interactiva y comunicativa.

Aquí se entabla la discusión de los resultados obtenidos en los diversos subgrupos de trabajo por medio de una sesión plenaria que dirige el docente. Lo cual permite activar el proceso *Comunicar.*

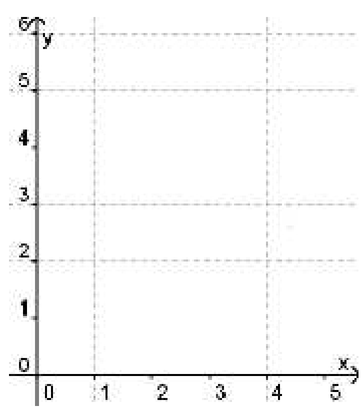
Es importante que los estudiantes realicen la exposición de las estrategias obtenidas con el afán de explorarlas y evaluar así su pertinencia.

4. Clausura o cierre.

En esta etapa se trabajará con el siguiente conocimiento:

Plano cartesiano

El plano cartesiano es un sistema de referencias que se encuentra conformado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, que se cortan perpendicularmente en un determinado punto. A la horizontal se la llama *eje de las abscisas* o *eje x* y al vertical *eje de las ordenadas* o *eje y*. El punto en el cual se cortarán se denomina origen.



Su finalidad es ofrecer una forma de representación alternativa a la representación tabular que permita describir la relación existente entre dos variables. En efecto, suponga que se brinda la siguiente tabla, la cual representa el valor que toma el área *A* de un rectángulo, cuyo ancho es de 2 cm y de largo *l*:

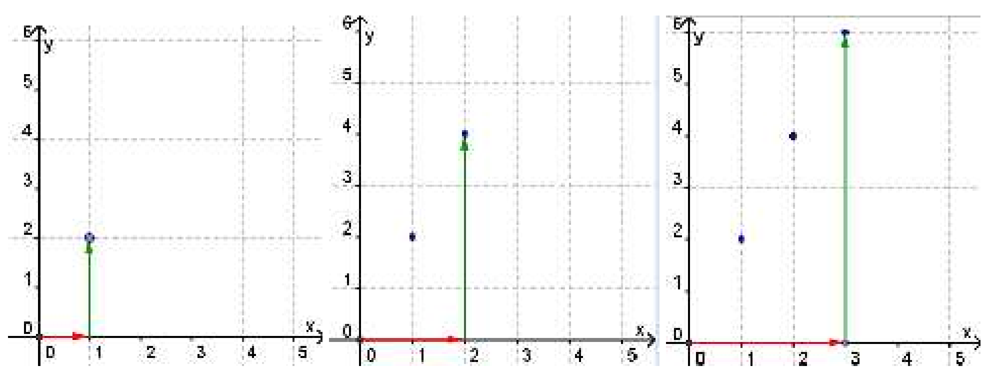
l	1	2	3	4
A	2	4	6	8

Cada una de las parejas de datos se representará de la forma (*l*, *A*) la cual recibe por nombre *par ordenado* pues el valor que toma la variable independiente va de primero y el que toma la dependiente va de segundo. Así, se pueden formar los siguientes pares:

(1, 2) (2, 4) (3, 6) (4, 8)

Cada uno de los pares anteriores se representará en el plano cartesiano mediante un punto, cuya forma de ubicarse se describe a continuación:

1. Para ubicar el par (1, 2), el primer valor indica que hay que desplazase una unidad hacia la derecha sobre el eje *x* a partir del origen.
2. A partir de ahí, el segundo valor indica que hay que desplazarse dos unidades hacia arriba y colocar el punto que corresponde a dicho par ordenado. De forma análoga se ubican los otros pares.



Como se observó durante el desarrollo de la actividad, es posible representar un problema de diferentes maneras: gráfica (en el plano cartesiano), tabular y simbólicamente.

El origen de la denominación de *plano cartesiano* como tal se ha efectuado en honor al reconocido matemático y filósofo francés del siglo XVII René Descartes.

Créditos

Esta sección de autoevaluación es parte del *Curso bimodal para el Segundo Ciclo: Enfoque de Resolución de problemas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación y cuenta con el soporte administrativo de la Fundación Omar Dengo.

Autor

Miguel González Ortega

Revisor

Christiane Valdy
Edison de Faria
Marianela Alpízar Vargas
Susanne Blaise

Editor gráfico

Miguel González Ortega

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

Bibliografía

Carrillo, F. (2002, mayo). El Príncipe de las Matemáticas. *Apuntes de historia de las matemáticas 1(2)*. Recuperado de http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-2-3-gauss.pdf

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/edumat-**maestros**/manual/7_Algebra.pdf.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de estudios Matemáticas. San José,* Costa Rica.