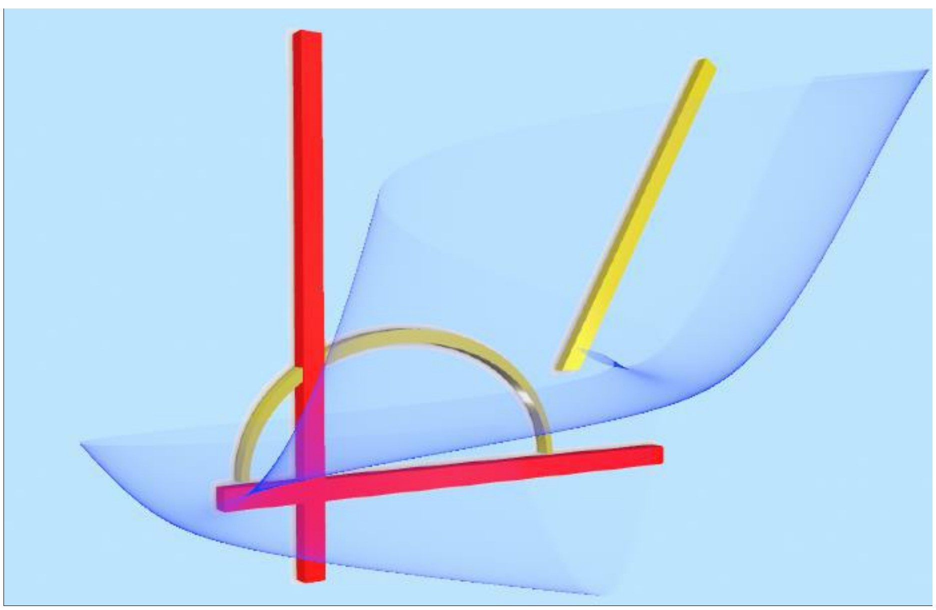
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Mini MOOC
Colección Preparación Matemáticas Bachillerato
Relaciones y álgebra



PMB-RA01: Generalidades de funciones
Material complementario
Costa Rica

2017

Tabla de contenidos

Índice alfabético

Introducción

Este documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatematica.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Generalidades de funciones* (http://minimoocs.reformamatematica.net/).

El propósito del Mini MOOC *Generalidades de Funciones* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se describen diferentes conocimientos vinculados con las funciones matemáticas: dominio, rango o recorrido, imagen y preimagen, operación con funciones, composición de funciones e inversa de una función, para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

Al inicio del documento se le proporciona un índice alfabético en el que se da un listado, en orden alfabético, de los temas o contenidos con el número de página donde aparecen. Si usted hace clic sobre dicho número, será remitido a la página donde se proporciona el concepto, tema o contenido correspondiente. Se puede regresar al índice alfabético desde cualquier página haciendo clic sobre la palabra Índice que aparece en el encabezado de todas ellas.

Es importante aclarar que el presente documento no es un libro de texto y tampoco es exhaustivo. Procuramos que sea autosuficiente para los propósitos de este mini MOOC pero no está pensado para ser utilizado como un medio para organizar la acción de aula.

Generalidades acerca de funciones

Conjuntos numéricos

Un **conjunto** es una colección de objetos que poseen una o varias características en común. Cuando los objetos son números el conjunto se llama **conjunto numérico**. Utilizamos letras mayúsculas para denotar los conjuntos y doble llaves { } para encerrar sus elementos o bien un criterio que define los elementos (notación por comprensión)
Si A es un conjunto y si x es un elemento de A, escribimos $x \in A$ (se lee "x pertenece a A" o bien "x es un elemento de A"). Si y no es un elemento de A escribimos $y \notin A$ (se lee "y no pertenece a A" o bien "y no es un elemento de A").
Un conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto vacío** y se representa por $\emptyset$ o bien por { }.

Ejemplo 1 ___________________

a. $A = \{2,3,5,7,11,13\}$ es el conjunto de los 6 primeros números primos.
b. $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,\cdots\}$ los tres puntos $\cdots$ indican que el patrón continua sin finalizar. Este es el conjunto de los números naturales, los que se utilizan para "contar".
c. $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ es el conjunto de los números enteros.
d. $\mathbb{Q} = \left\{x : \ x = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q \neq 0\right\}$ el conjunto de los números racionales. Esta es una notación por comprensión y se lee: el conjunto de los números x tales que $x = \frac{p}{q}$ con p, q enteros y q es distinto de cero.
e. $B = \{m : m = 2k, \ \ k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$ el conjunto de los números pares.
f. $C = \{m : m$ es un número natural y $2 < m \leq 10\}$ el conjunto de los números naturales mayores que 2 y menores o iguales a 10.
El conjunto $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
g. $\mathbb{I} = \{x : x$ es un número real pero no es racional$\}$ es el conjunto de los números irracionales. Los elementos de $\mathbb{Z}$ no pueden ser escritos como el cociente de dos números enteros como por ejemplo los números $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{25}, e$ el número de Euler (base de los logaritmos naturales), $3{,}144512122122212222\cdots$ existe un patrón pero no existe un grupo de dígitos que se repite (número decimal infinito no periódico).

Operaciones con conjuntos

- Un conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si cada elemento de A es elemento de B. Cuando A es un **subconjunto** de B se dice que A está contenido en B y se denota como $A \subseteq B$. Ejemplo: $\{1,3,5,8,15\} \subseteq \{1,2,3,5,8,12,15\}$
- La **unión** de dos conjuntos A y B, denotada como $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B.
  Ejemplo: $\{1,5,13,20\} \cup \{3,5,20,50,100\} = \{1,3,5,13,20,50,100\}$
- La **intersección** de dos conjuntos A y B, denotada como $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos comunes a A y a B.
  Ejemplo: $\{1,5,13,20\} \cap \{3,5,20,50,100\} = \{5,20\}$
  Dos conjuntos A y B son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$ (conjunto vacío)
- El **complemento** de un conjunto A, denotado como A^C es el conjunto que contiene todos los elementos que no pertenecen a A respecto a un conjunto D que contiene a A.
  Ejemplo: Si A es el conjunto de todos los números pares entonces su complemento respecto al conjunto de los números naturales es es conjunto de todos los números impares.

Ejemplo 2 ___________________

a. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ corresponde al conjunto de los números reales.
b. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ por lo tanto, el conjunto de los números racionales y el de los irracionales son disjuntos.
c. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ el conjunto de los números naturales es subconjunto de los números enteros y el conjunto de los números enteros es subconjunto de los números racionales pues todo número entero x puede ser escrito como una fracción con denominador 1.
d. Respecto al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^C = \mathbb{I}$. De igual forma $\mathbb{I}^C = \mathbb{Q}$.

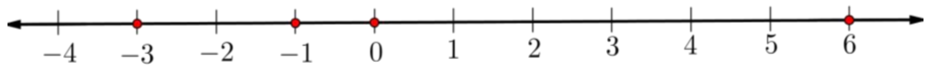
La recta numérica

Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales: a cada número real se le puede asignar un único punto de una recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta se le puede asignar un único número real.
En una recta, seleccionamos un punto arbitrario O el cual le asignamos el número cero. Posteriormente seleccionamos un punto que corresponderá al número 1. A una unidad de medida del cero, al lado opuesto al punto asignado a 1, seleccionamos el punto correspondiente al número -1. Repetimos este procedimiento para ubicar los números positivos y los negativos como puntos en la recta que se denomina **recta numérica**.

Ejemplo 3 ___________________

Represente los números $-3, -1, 0, 6$ en la recta numérica.

Solución



Recta numérica

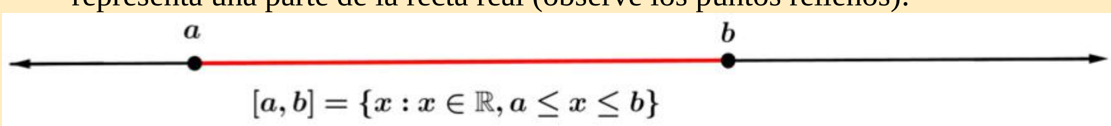
Relaciones de orden en la recta numérica

Si el punto correspondiente al número a está a la izquierda del punto correspondiente al número b en la recta real entonces a es **menor que** b. Escribimos $a < b$.
Si el punto correspondiente al número a está a la derecha del punto correspondiente al número b en la recta real entonces a es **mayor que** b. Escribimos $a > b$.
Decimos que $a \leq b$ (a es **menor o igual que** b) si $a < b$ o bien $a = b$.
Análogamente, $a \geq b$ (a es **mayor o igual que** b) si $a > b$ o bien $a = b$.
Ejemplos: $2 \leq 5,\ -10 < -5,\ 8 \geq 8$.

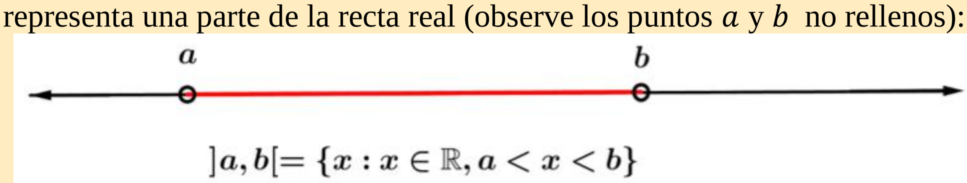
Intervalos en la recta numérica

Los intervalos en la recta numérica son subconjuntos de los números reales.

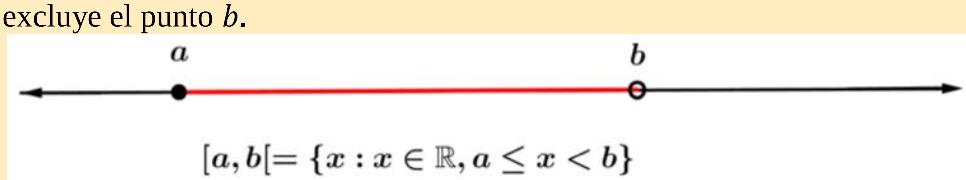
1. Si $a < b$ entonces el intervalo cerrado que incluye los puntos a, b y todos los puntos que se encuentran entre ellos se denota como $[a, b]$ y gráficamente representa una parte de la recta real (observe los puntos rellenos):



2. Si $a < b$ entonces el intervalo abierto que excluye los puntos a, b pero incluye todos los puntos que se encuentran entre ellos se denota como $]a, b[$ y gráficamente representa una parte de la recta real (observe los puntos a y b no rellenos):



3. De igual forma $[a, b[$ incluye el punto a y todos los puntos entre a y b pero excluye el punto b.



4. La semirrecta a la izquierda del punto correspondiente al número a se denota como $]-\infty, a[$

$$]-\infty, a[= \{x : x \in \mathbb{R}, -\infty < x < a\}$$

5. La semirrecta a la derecha del punto correspondiente al número a se denota como $]b, \infty[$

$$]b, \infty[= \{x : x \in \mathbb{R}, b < x < \infty\}$$

Relación

Una ***relación*** entre dos variables reales es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida A (subconjunto no vacío de los números reales $\mathbb{R}$), un número real "y" de un conjunto de llegada B (subconjunto no vacío de los números reales $\mathbb{R}$).

Una relación entre dos variables reales también puede ser representada por un conjunto de pares ordenados en donde el primer elemento del par pertenece al conjunto de partida A y el segundo elemento pertenece al conjunto de llegada B:

$$\{(x, y): x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo 4 ____________________

1. Si $A = \{1,2,3\}$ es el conjunto de partida y $B = \{0,3,6,9,10\}$ el conjunto de llegada entonces el conjunto de pares ordenados $\{(1,0), (1,3), (2,6), (3,9), (3,10)\}$ representa una relación.

2. La ecuación $10x + 3y - x^2 - 5 = 0$ relaciona dos variables. Podemos considerar que "x" es la variable de entrada mientras que "y" es la variable de salida. Si despejamos "y" en términos de "x" obtendremos la relación entre las variables x, y

$$y = \frac{x^2 - 10x + 5}{3}$$

En este caso podemos considerar como conjunto de entrada y de salida $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.

Definición de función.

Una **función** real de variable real es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida A **un único número** real "y" de un conjunto de llegada B. Considere A y B subconjuntos no vacío de los números reales $\mathbb{R}$.

El conjunto de partida A es conocido como ***dominio*** de la función.
El conjunto de llegada B se llama ***codominio*** de la función.

Para simbolizar la correspondencia entre los dos conjuntos no vacíos A y B que representa una función, que denotaremos por f, se utiliza la siguiente notación: $f: A \rightarrow B$.

En este caso el único número real "y" de B (se dice que "y pertenece a B", y se escribe $y \in B$) que corresponde al número real "x" de A, $x \in A$, se denomina ***imagen** de x*, y se denota como $f(x)$. También se dice que x es una ***preimagen*** de y.

Por definición de función cada preimagen sólo puede tener una imagen, pero una imagen puede tener varias preimágenes, puesto que la restricción se impone sobre las imágenes (un *único* número real "y").

El conjunto de los elementos "*f(x)*" de B para elementos x de A se conoce como ***imagen***, ***rango, ámbito o recorrido*** de la función.

Una función también puede ser representada por un conjunto de pares ordenados. La abscisa del par pertenece al dominio y la ordenada al codominio de la función.

Ejemplo 5 ____________________

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{0,3,6,9,10\}$ entonces el conjunto de pares ordenados $\{(1,0),(2,6),(3,10)\}$ representa una función con dominio A. Observe que cada elemento del dominio A está relacionado con un único elemento de B. La imagen (recorrido, rango, ámbito) de la función es el conjunto $\{0,6,10\}$.

Por otro lado el conjunto de pares ordenados $\{(1,0),(2,3),(2,6),(3,10)\}$ no representa una función con dominio A pues el elemento 2 de A está asociado a dos elementos distintos de B, los números reales 3 y 6. El conjunto dado representa una relación pero no una función.
Una función matemática es una relación pero no toda relación representa una función.

Criterio de una función.

La representación simbólica que involucra la imagen *"y"* la preimagen "*x*", y la correspondencia *"f"* se escribe como $y = f(x)$, y es conocido como ***criterio de la función***. Decimos que "*x*" es la ***variable independiente*** mientras que "*y*" es la ***variable dependiente***.

La notación $f(x)$ se lee "*f de x*". Representa la aplicación de la regla de correspondencia al elemento *x* del dominio de la función. Observe que la notación $f(x)$ **no significa** *f* multiplicado por *x*.

La representación $y = f(x)$ que denominamos anteriormente como *criterio de la función*, también se conoce como *forma estándar, normal o explícita* de la función.

Ejemplo 6 ____________________

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio y $B = \{1, 4, \ 9, 16, 25, \ 36, 49\}$ el codominio de la función cuyo criterio es $f(x) = x^2$.

a. ¿Cuál es el rango (recorrido, ámbito o imagen) de la función
b. ¿Cuál es la imagen de 3?
c. ¿Cuál es la preimagen de 25?
d. ¿Cuál es la preimagen de 49?

Solución

Como $f(x) = x^2$ entonces la regla de correspondencia en forma verbal es "eleve al cuadrado cada preimagen". El conjunto de preimágenes es el dominio *A* mientras que las imágenes son:

$$f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 4, f(3) = 3^2 = 9, f(4) = 4^2 = 16, f(5) = 5^2 = 25$$

Todas ellas pertenecen al conjunto *B* dado previamente como codominio de la función.

a. El rango, ámbito, recorrido o imagen de la función es el conjunto de las imágenes de la función, que en este caso es el conjunto (que denotaremos con la letra R)

$$\text{R} = \{1, 4, 9, 16,25\}$$

En este caso el ámbito o rango R es un subconjunto del codominio *B*.
b. La imagen de 3 es $f(3) = 9$.
c. Para encontrar la preimagen de 25, tenemos que 25 es la imagen de algún elemento *x* del dominio, por lo tanto basta dar el valor 25 a "*y*" en el criterio $y = x^2$.
La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = -5, \ x = 5$.
Pero $x = -5$ no es elemento del dominio dado mientras que $x = 5$ sí lo es.
Por lo tanto la preimagen de 25 es 5.
d. Para encontrar la preimagen de 49 hay que resolver la ecuación $x^2 = 49$. Ambas soluciones $x = -7, \ x = 7$ no pertenecen al dominio de la función. Por lo tanto 49 no tiene preimagen.

Ejemplo 7

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio de una función cuyo criterio es $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$.

a. ¿Cuál es el rango (recorrido o ámbito) de la función?
b. ¿Cuál es la imagen de 5?
c. ¿Cuál es la preimagen de $-\frac{13}{6}$?
d. ¿Cuál es la preimagen de $-2{,}25$?

Solución

En este ejemplo no se da el codominio de la función.
Como $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$ entonces:

a. El rango de la función dada es el conjunto de las imágenes de la función.

$f(1) = \frac{1+1}{1+2} - 3 = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$; $f(2) = \frac{2+1}{2+2} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$
$f(3) = \frac{3+1}{3+2} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$; $f(4) = \frac{4+1}{4+2} - 3 = \frac{5}{6} - 3 = -\frac{13}{6}$
$f(5) = \frac{5+1}{5+2} - 3 = \frac{6}{7} - 3 = -\frac{15}{7}$
Entonces el rango de la función es el conjunto $\left\{-\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{13}{6}, -\frac{15}{7}\right\}$.

b. La imagen de 5 es $f(5) = -\frac{15}{7}$.

c. La preimagen de $-\frac{13}{6}$ es 4 conforme se observa en la parte a. Pero otra forma de determinarlo consiste en resolver la ecuación $f(x) = -\frac{13}{6}$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -\frac{13}{6}$$

Esto equivale a $\frac{x+1}{x+2} = -\frac{13}{6} + 3 = \frac{5}{6}$ que puede ser escrito como

$6(x+1) = 5(x+2)$. Multiplicando obtenemos $6x + 6 = 5x + 10$, y así

$6x - 5x = 10 - 6$. Simplificando tendremos $x = 4$, la preimagen de $-\frac{13}{6}$.

d. Para la preimagen de -2,25 tenemos que resolver la ecuación $f(x) = -2{,}25$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -2{,}25$$

Operando como antes, $\frac{x+1}{x+2} = -2{,}25 + 3 = 0{,}75$ es decir, $x + 1 = 0{,}75x + 1{,}5$ lo que, al simplificar queda $x - 0{,}75x = 1{,}5 - 1$ que es equivalente a $0{,}25x = 0{,}5$. Por lo tanto $x = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2$

que pertenece al dominio de la función.
La respuesta podría ser obtenida sin resolver ecuación si sabemos que $-2{,}25 = -\frac{9}{4}$.

Diferencia entre función y relación

La principal diferencia entre una función y una relación es que en una función cada elemento del dominio tiene una *única* imagen. En una relación esta condición no es necesaria: un elemento del dominio puede tener varias imágenes.
Por lo tanto, toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo 8 ___________________

1. La relación $x^2 + y^2 = 4$ tiene forma de una ecuación que relaciona dos variables. Si "*x*" es la variable de entrada y "*y*" la de salida entonces $y^2 = 4 - x^2$, y por lo tanto

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

   Para cada valor de entrada "*x*" entre -2 y 2, es decir $-2 < x < 2$, existen dos valores distintos para la salida "*y*". Por ejemplo, si la entrada $x = 1$ entonces $y = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$ son dos valores distintos para la variable de salida "*y*", por lo tanto la relación

$$x^2 + y^2 = 4$$

   no representa una función.

2. En la relación $y^3 + 2x^2 = x - 1$, si consideramos a "*x*" como variable de entrada y "*y*" como variable de salida entonces podemos despejar $y^3 = x - 1 - 2x^2$, y por lo tanto $y = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. Aquí no aparecen los dos signos $\pm$ debido a que el índice de la raíz es 3, un número impar. Para cada valor de la entrada "*x*" se obtiene un único valor para la salida "*y*". Por lo tanto la "ecuación" $y^3 + 2x^2 = x - 1$ representa una función que se escribe en forma estándar (normal o explícita) como $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. En este caso el dominio de la función f es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$, pues no existe restricción para la variable independiente o de entrada "*x*".

Ejemplo 9 ___________________

El peso de una persona no es función de su altura. Dada la altura de una persona no se puede determinar su peso en forma exacta, es decir, dos personas con una misma altura pueden tener pesos distintos. Dicha relación no representa una función.

Gráfica de una función

La **gráfica de una función real de una variable real** f es el conjunto de los puntos (x, y) del plano cartesiano donde la variable independiente "x" pertenece al dominio de la función y la variable dependiente "y" satisface $y = f(x)$, es decir, "y" es la imagen de "x" al aplicar la regla de correspondencia f.

Para construir la gráfica de una función es conveniente construir primeramente una tabla para la función, que contenga algunos puntos de la forma $(x,\ f(x))$ para x en el dominio de la función, y unirlos con una línea continua cuando los puntos intermedios (entre dos puntos de la tabla) sean parte del dominio de la función. Esto nos proporciona una parte de la gráfica de la función.

Algunos de los puntos que son importantes para la construcción de la gráfica son:

- Los ***ceros de la función*** (si pertenecen al dominio), que son los puntos donde la gráfica de la función ***interseca al eje de las abscisas.*** Tales puntos son las raíces o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
- También el punto donde la gráfica de la función ***interseca el eje de las ordenadas***. La ordenada de dicho punto se conoce ***ordenada en el origen***, el valor $y = f(0)$ suponiendo que $x = 0$ pertenece al dominio de la función.

En resumen, la gráfica de una función $f: A \to B$ con criterio $y = f(x)$ es el conjunto de los pares ordenados $(x, f(x))$ con $x \in A$ que podemos representar como:

$$\text{Gráfica de } f = \{(x, y): x \in A, y = f(x) \in B\}$$

Ejemplo 10

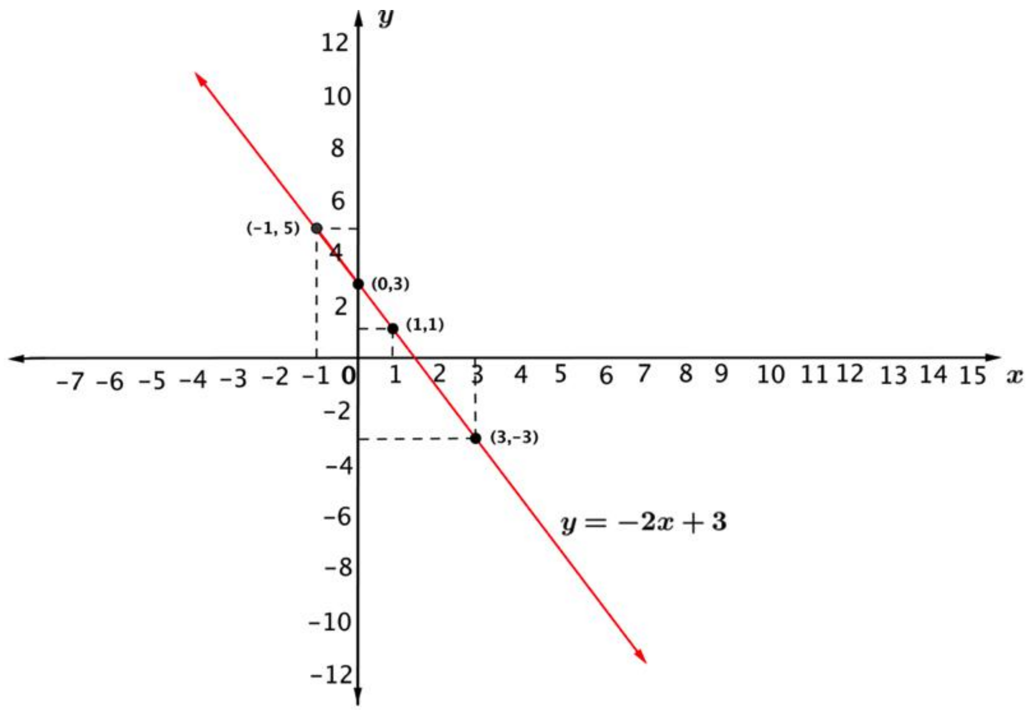
1. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = -2x + 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Primeramente construiremos una tabla con dos columnas (podrían ser dos filas). En la primera columna daremos algunos valores para la variable independiente o de entrada "x" y en la otra columna escribiremos los valores de $f(x)$.

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = -2(-1) + 3$ =5
0	$f(0) = -2(0) + 3 = 3$
1	$f(1) = -2(1) + 3$ =1
3	$f(3) = -2(3) + 3$ =-3

Representando los puntos (-1, 5), (0,3), (1, 1), (3, -3) en el plano cartesiano y uniéndolos con una línea continua (lo podemos hacer pues el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales) obtendremos la siguiente representación gráfica:



Entre más puntos contenga la tabla, mejor es la representación gráfica para la función. En este ejemplo bastarían dos puntos pues la gráfica es una recta

Otro dato importante para dibujar la gráfica consiste en determinar la intersección con el eje de las abscisas. Tales puntos son las raíces, ceros o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, que en este caso es $-2x + 3 = 0$ de donde $x = \frac{3}{2}$. Obtenemos el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Luego, se halla la intersección en el eje de las ordenadas, para ello se debe buscar el punto que satisface $y = f(0) - 2 \cdot 0 + 3 = 3$. La ordenada en el origen es $y = 3$, y el punto correspondiente es $(0{,}3)$.

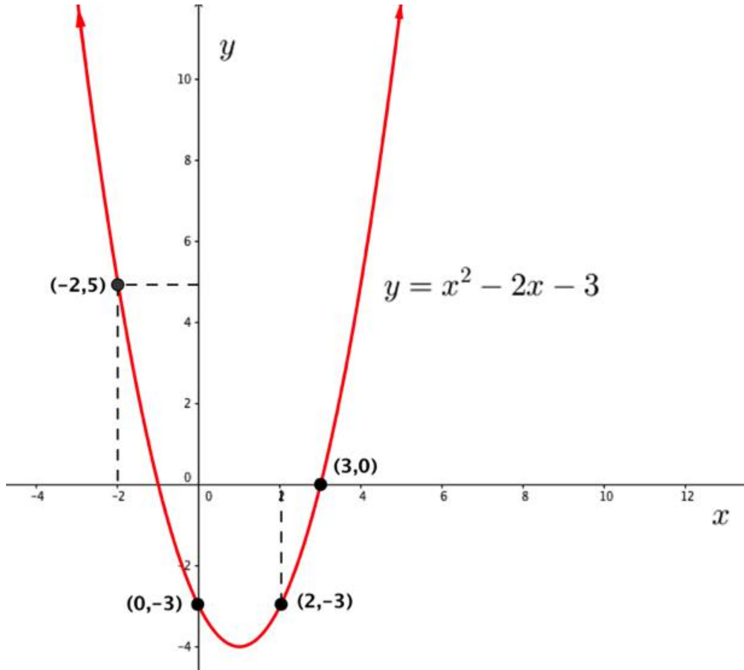
2. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Construimos una tabla con algunos pares ordenados (puntos) de la gráfica de la función

x	*f*(*x*)
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$
0	$f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$
2	$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$
3	$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$

La gráfica de la función es una parábola que se abre hacia arriba, conforme se muestra abajo.

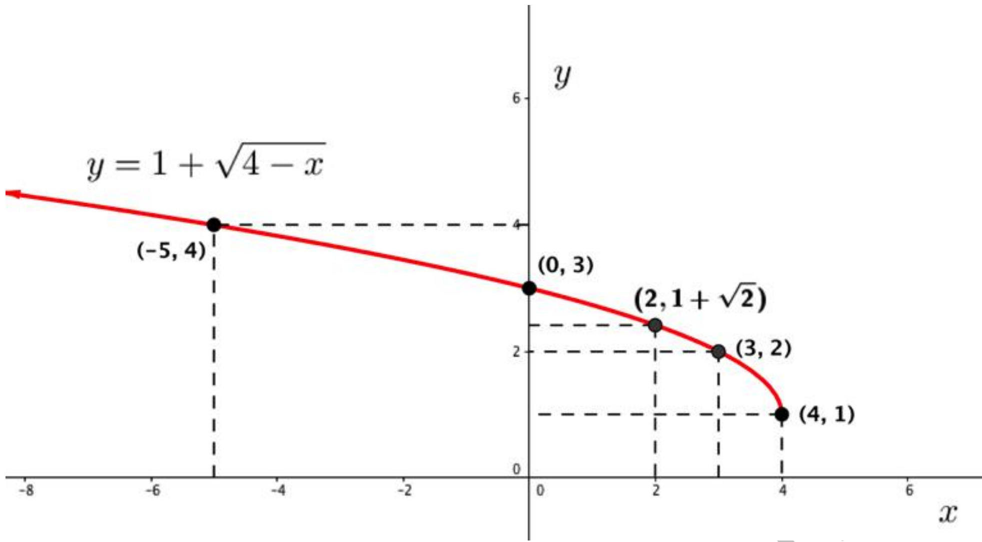


3. Considere la función $f\colon]-\infty,\ 4] \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x}$. Represente gráficamente la función dada.

   La tabla con algunos puntos de la gráfica es:

x	$f(x)$
-5	$f(-5) = 1 + \sqrt{4\text{—}5} = 4$
0	$f(0) = 1 + \sqrt{4 - 0} = 3$
2	$f(2) = 1 + \sqrt{4 - 2} = 1 + \sqrt{2}$
3	$f(3) = 1 + \sqrt{4 - 3} = 2$
4	$f(4) = 1 + \sqrt{4 - 4} = 1$

   Abajo vemos la gráfica de la función.

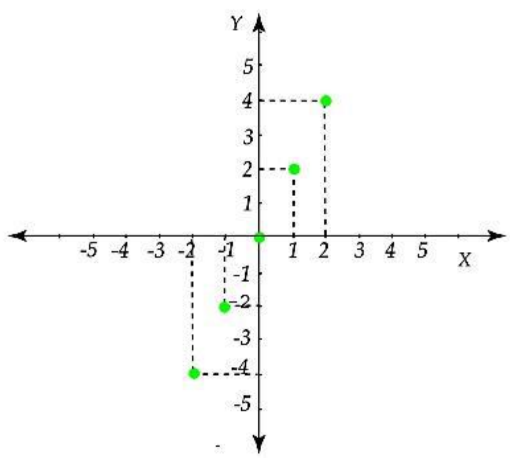


Ejemplo 11 ____________________

Considere los conjuntos A = {−2, −1, 0, 1, 2} y B = {−6, −5, −4, −2, 0, 1, 2, 4, 6} y $f: A \to B$ con criterio $f(x) = 2x$. Represente la función f graficamente.

Solución:

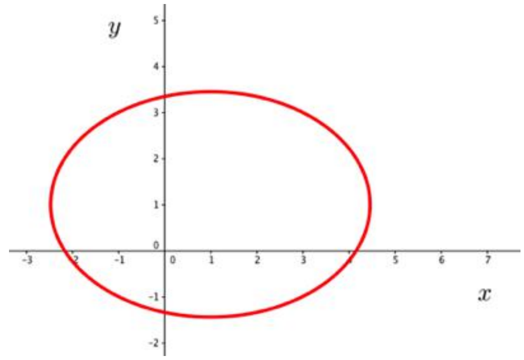
Note que el dominio de dicha función es discreto por lo que a la hora de dibujar la gráfica en el sistema de coordenadas no podemos unir los puntos mediante una línea continua. La gráfica de la función consta de cinco puntos "aislados".



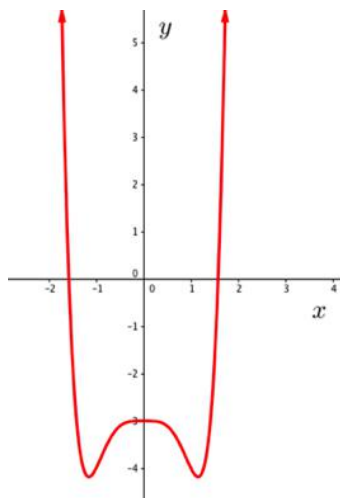
Ejemplo 12 ____________________

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?

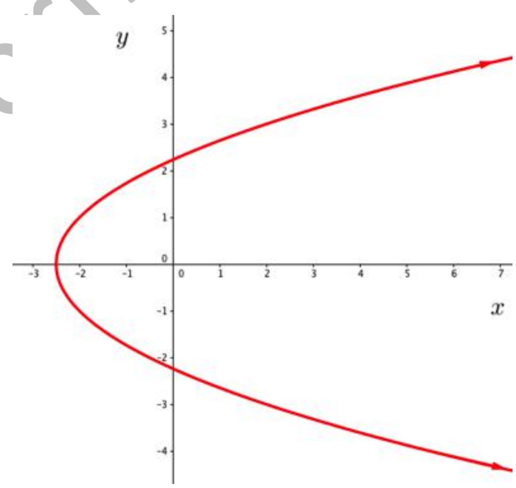
a)



b)

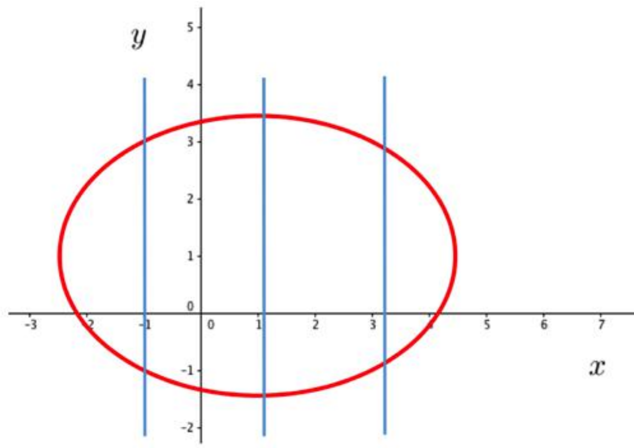


c)

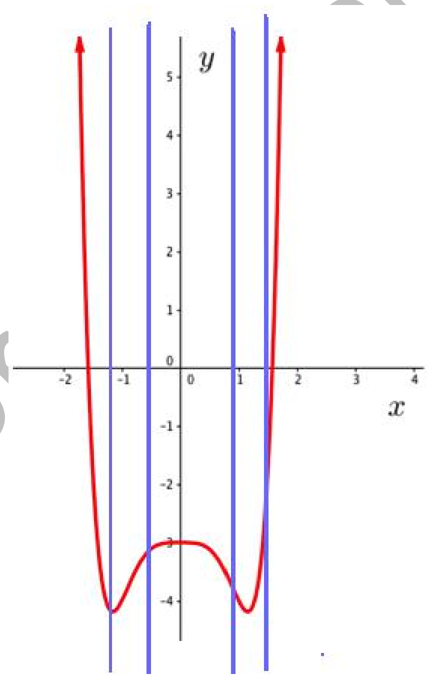


Solución:

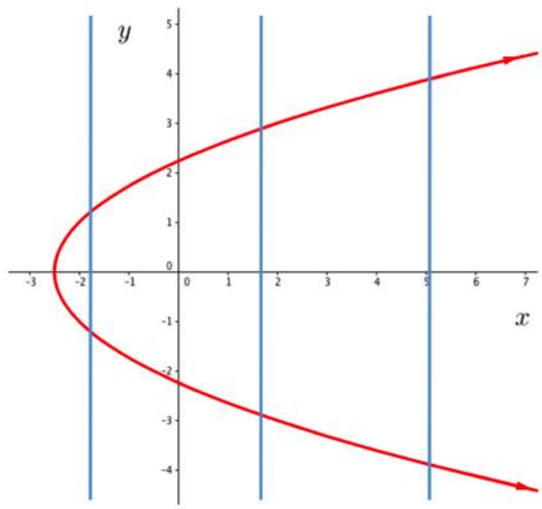
a) La gráfica corresponde a una *relación* pero no a una función pues existen rectas verticales que intersecan a la gráfica en más de un punto. Esto quiere decir que existen preimágenes con más de una imagen.



b) La gráfica si representa a una función, se puede verificar haciendo la prueba de la recta vertical.



c) La prueba de la vertical, indica que la gráfica no representa a una función. Existen preimágenes con más de una imagen.



Dominio máximo

Es usual dar únicamente la regla de correspondencia de una función, es decir, el criterio de la función: $y = f(x)$ sin especificar su dominio.
En este caso se considera como dominio de la función el conjunto de todos los valores reales que pueden ser asignados a la variable independiente "x" de tal forma que la variable dependiente "y" resulte un número real único.
Tal dominio se conoce como ***dominio máximo* o *dominio natural*.** Nosotros siempre utilizaremos el dominio máximo como dominio de un función, excepto cuando se especifique explícitamente el dominio.

Existen una serie de criterios para definir según sea el caso cual será el dominio máximo:

- El dominio máximo de cualquier **polinomio** es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.
- El dominio máximo de una **función racional** (cociente entre dos polinomios) es el conjunto de los números reales excluyendo los valores que indefinen la función. Dominio máximo: $\mathbb{R} - \{\text{valores que anulan el denominador}\}$
- Si en el criterio aparece un radical de índice par, se debe garantizar que el subradical sea positivo o cero y, que no se anule el denominador. Para ello se resuelve una inecuación donde el subradical debe ser mayor o igual a cero.
- Si en el criterio aparece un radical de índice impar y no se anula el denominador entonces el dominio máximo es $\mathbb{R}$, caso contrario tendremos que excluir los valores que anulan el denominador.

Ejemplo 13 ____________________

Determine el dominio máximo de la función con criterio $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

Solución:

Dado que $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$ es una función racional por lo que tenemos que garantizar que el denominador no se indefina. Para ello hay que determinar el valor de x para el cual $2x + 3$ se hace cero,

$$2x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-3}{2}$$

Por lo tanto, el dominio máximo de f es $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Ejemplo 14

Determine el dominio máximo para cada función con criterio dado.

a. $f_1(x) = 2 - 3\sqrt{5 - 2x}$
b. $f_2(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{5x-8}} + x^2 + 4x - 1$
c. $f_3(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{2-x}}$

Solución

a. En el criterio de la función f_1 aparece un radical de índice par (raíz cuadrada). Siempre que ocurra esto el subradical no puede ser negativo, es decir $5 - 2x$ tiene que ser mayor o igual a cero (si el índice fuera impar entonces no tendríamos problemas y el dominio sería $\mathbb{R}$). Por lo tanto, $5 - 2x \geq 0$, lo que equivale a $5 \geq 2x$, cuyas soluciones satisfacen $\frac{5}{2} \geq x$. El conjunto de los números que satisfacen esta desigualdad: $x \leq \frac{5}{2}$ es el *dominio* (máximo o natural) de la función y puede ser representado de tres formas distintas:

Notación de intervalos: $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$

Notación de conjunto por comprensión: $\left\{x:\ x \in \mathbb{R},\ \ x \leq \frac{5}{2}\right\}$

En la recta numérica el dominio se representa en color rojo:

Observe que el punto que representa 5/2 en la recta numérica está relleno, indicando que dicho punto está incluido en la representación gráfica del dominio de la función.

b. En el criterio de la función $f_2(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{5x-8}} + x^2 + 4x - 1$ aparecen tres expresiones: una función lineal en el numerador de la primera expresión, una raíz cuadrada en el denominador y una función cuadrática.

El dominio (máximo) de cualquier polinomio es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. Por lo tanto no tenemos restricciones para el argumento de la función lineal, $2x + 3$ ni para la función cuadrática.
La única restricción es para la raíz cuadrada. Como aparece en el denominador el radicando no puede ser nulo ni negativo. Por lo tanto $5x - 8$ tiene que ser estrictamente positivo.

$$5x - 8 > 0$$

De esta forma obtenemos $x > \frac{8}{5}$. El dominio (máximo) de la función es:

Notación de intervalos: $\left]\frac{8}{5},\ \infty\right[$

Notación de conjunto por comprensión: $\left\{x:\ x \in \mathbb{R},\ \ x > \frac{8}{5}\right\}$

Representación gráfica (en la recta numérica), en color rojo:

En este caso el punto que corresponde a 8/5 no aparece relleno, indicando que dicho punto no es parte del dominio de la función.

c. En el criterio de la función $f_3(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{2-x}}$ aparece un radical de índice par (raíz cuadrada) en el numerador y un radical de índice impar (raíz cúbica) en el denominador.
El radicando del numerador no puede ser negativo y el del denominador no puede ser nulo. Por lo tanto

$$x - 1 \geq 0$$

Cuya solución es $x \geq 1$, mientras que $2 - x$ no puede ser igual a cero, es decir, x no puede ser igual a 2. Los valores de x del dominio de la función tienen que cumplir las dos condiciones:

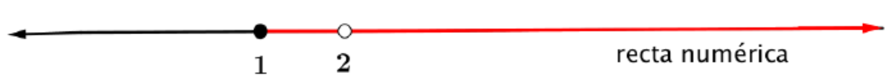
$$x \geq 1$$
$$x \neq 2$$

El dominio (máximo) de la función es:

Notación de intervalos: $[1,2[\ \cup\ ]2,\infty[$ lo que es equivalente a $[1,\infty[\ -\ \{2\}$

Notación de conjunto por comprensión: $\{x:\ x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 1, x \neq 2\}$

En la recta numérica:



Se incluye $x = 1$ (punto relleno) y se excluye $x = 2$ (punto no relleno) en el dominio.

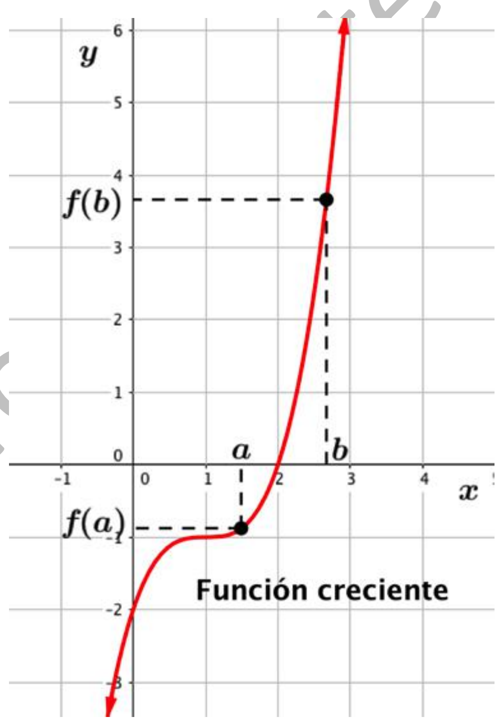
Crecimiento y decrecimiento de una función

Función creciente
Decimos que una función con criterio $y = f(x)$ es *creciente* en un intervalo abierto A si para cualquier par de puntos a y b de A tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$.

Función decreciente
De la misma forma, decimos que una función con criterio $y = f(x)$ es *decreciente* en un intervalo abierto A si para cualquier par de puntos a y b de A tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \geq f(b)$.

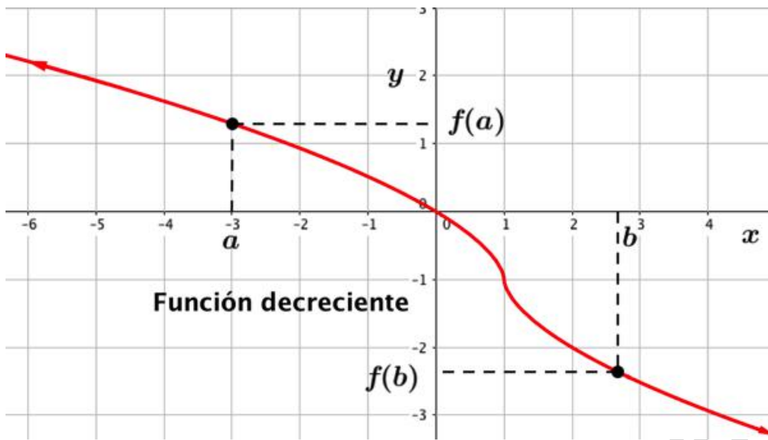
Ejemplo 15 ___________________

Observe que, en el intervalo dado, cuando nos "movemos" de izquierda a derecha (en el eje de las abscisas *x*) la gráfica de la función creciente se "eleva (sube)" o se mantiene horizontal.



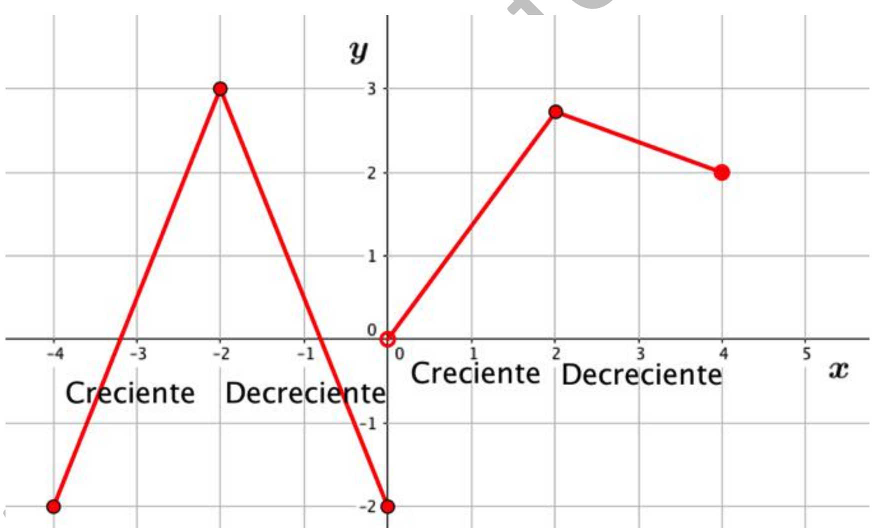
Ejemplo 16 ___________________

En el intervalo dado, cuando nos "movemos" de izquierda a derecha (en el eje de las abscisas *x*) la gráfica de la función decreciente "desciende (baja)" o se mantiene horizontal.



Ejemplo 17 ___________________

En la representación gráfica que sigue podemos ver intervalos donde la función es creciente o decreciente.



Máximo y mínimo

La función f tiene un *valor máximo relativo o local* en el número c, si existe un intervalo abierto que contiene c, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo.

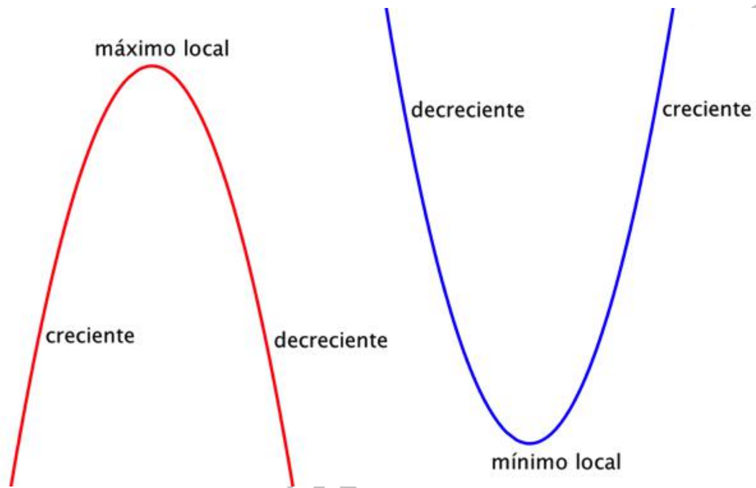
La función f tiene un *valor mínimo relativo o local* en el número d, si existe un intervalo abierto que contiene d, en el que f está definida, tal que $f(d) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo.

En las definiciones anteriores tenemos que $f(c)$ es un ***valor máximo*** si el punto $(c, f(c))$ es el punto más elevado en la gráfica de f, en algún intervalo abierto que contiene c.

Igualmente, $f(d)$ es un ***valor mínimo*** si el punto $(d, f(d))$ es el punto más bajo en la gráfica de *f*, en algún intervalo abierto que contiene *d*.

Ejemplo 18 ___________________

Observe que en un punto de máximo la función cambia, de izquierda a derecha, de creciente a decreciente. En el caso de mínimo la función cambia de decreciente a creciente. Estamos suponiendo que la función es continua (su gráfica puede ser trazada sin quitar el lápiz del papel en el punto de máximo o de mínimo). Todos los polinomios cumplen esta condición.



El mayor de los valores de una función en todo su dominio se conoce como ***valor máximo absoluto***, y el menor de los valores de la función en todo su dominio se denomina ***valor mínimo absoluto***.

Composición de funciones

Bajo ciertas condiciones, podemos usar los valores de salida de una función como valores de entrada para otra función, creando así una nueva función.

La *composición de una función f con una función g*, simbolizada por $f \circ g$, se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los elementos *x* del dominio de *g* cuyas imágenes $g(x)$ pertenezcan al dominio de *f*.

Si representamos por D_f , D_g , $D_{f \circ g}$ el dominio de f , g y de $f \circ g$ respectivamente, entonces podemos escribir:

$$D_{f \circ g} = \{x:\ x \in D_g \text{ tal que } g(x) \in D_f\}$$

La composición $f \circ g$ hace actuar primero la función g sobre un elemento del dominio de g con imagen en el dominio de f y posteriormente hace actuar la función f

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f\big(g(x)\big)$$

Análogamente la composición $g \circ f$ se define como $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, en dónde $x \in D_f$ con $f(x) \in D_g$.

Ejemplo 19 ____________________

Considere las siguientes funciones con criterios

$$f(x) = 2x - 3, \qquad g(x) = x^2 - 10$$

El dominio y codominio para ambas funciones es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

a. Calcule $(f \circ g)(-1)$ y $(g \circ f)(-1)$
b. Determine el criterio para $(f \circ g)(x)$
c. Determine el criterio para $(g \circ f)(x)$
d. ¿Para qué valores de x se cumple $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?
e. Determine el criterio para $(f \circ f)(x)$
f. Determine el criterio para $(g \circ g)(x)$

Solución

a. $(f \circ g)(-1) = f\big(g(-1)\big)$. Como $g(-1) = (-1)^2 - 10 = -9$ mientras que $f(-9) = 2(-9) - 3 = -21$ entonces $(f \circ g)(-1) = f\big(g(-1)\big) = f(-9) = -21$.

   $(g \circ f)(-1) = g\big(f(-1)\big)$. Como $f(-1) = 2(-1) - 3 = -5$ mientras que $g(-5) = (-5)^2 - 10 = 15$ entonces $(g \circ f)(-1) = g\big(f(-1)\big) = g(-5) = 15$.

   Observe que, en este caso, $(f \circ g)(-1)$ no es igual que $(g \circ f)(-1)$.

b. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 10) = 2(x^2 - 10) - 3 = 2x^2 - 20 - 3 = 2x^2 - 23$.

c. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 - 10 = 4x^2 - 12x + 9 - 10 = 4x^2 - 12x - 1$.

d. La igualdad se cumple si $2x^2 - 23 = 4x^2 - 12x - 1$. Simplificando queda: $2x^2 - 12x + 22 = 0$. Pero esta ecuación no tiene solución real pues su discriminante es negativo, $\Delta = (-12)^2 - 4(2)(22) = -32$. Por lo tanto, para todos los valores reales de x se cumple que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

e. $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$.

f. $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2 - 10) = (x^2 - 10)^2 - 10 = x^4 - 20x^2 + 100 - 10 = x^4 -$

$20x^2 + 90.$

Ejemplo 20 ___________________

Para las funciones *f* y *g* con criterios: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$, analizar el dominio de:

a. $(f \circ g)(x)$
b. $(g \circ f)(x)$

Solución

a. Para que g esté definida, es necesario que $x \neq -2$. Esta es la primera restricción. Si utilizamos $g(x)$ como entrada para *f* tenemos: $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$, por lo tanto la segunda restricción es $g(x) \geq 0$, es decir, $\frac{x+1}{x+2} \geq 0$. Esto ocurre cuando numerador $x+1$, y denominador $x+2$ tengan el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) o bien cuando $x = -1$, es decir cuando $g(x) = 0$.

Caso 1: $x + 1 > 0$, $x + 2 > 0$, o sea, cuando numerador y denominador son positivos. Entonces $x > -1$ y $x > -2$. Los valores de x que satisfacen ambas desigualdades es $x > -1$ (la intersección de los dos conjunto solución).
Caso 2: : $x + 1 < 0$, $x + 2 < 0$, numerador y denominador negativos. En este caso tenemos $x < -1$ y $x < -2$. Los valores de x que satisfacen ambas desigualdades (intersección de los dos conjuntos solución) es $x < -2$ (la intersección de los dos conjunto solución).

Por lo tanto para el dominio de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ tenemos que considerar todos los posibles valores para *x*:

$$\text{Dominio de } (f \circ g)(x)\text{: } \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que} - \infty < x < -2, -1 \leq x < \infty \ \}$$

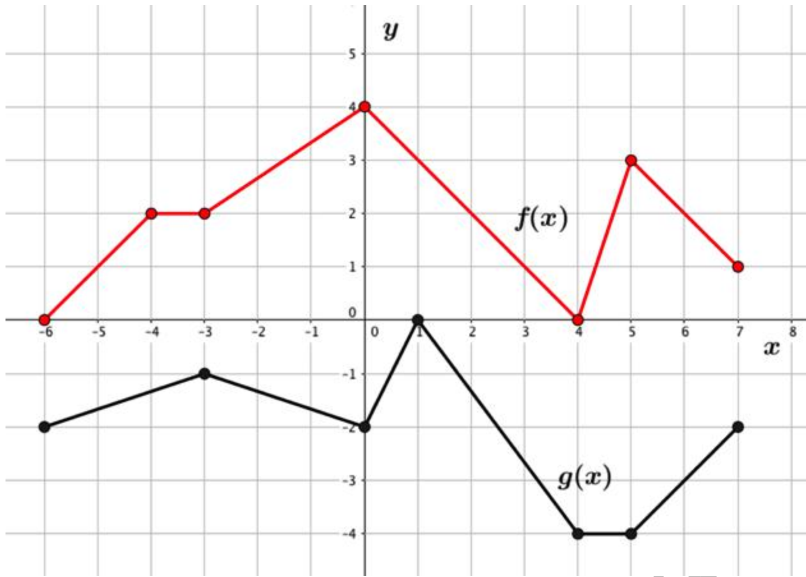
Lo anterior puede escribirse como $\mathbb{R} - [-2, -1[$. ¿Cómo se representa la solución en la recta numérica?

b. Para que f esté definida necesitamos que $x \geq 0$. La primera restricción es que x no puede ser negativo. Al utilizar $f(x)$ como entrada para g tenemos: $g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2}$. Esto exige que $f(x) \neq -2$, pero esto se cumple pues la raíz cuadrada de *x* siempre es mayor o igual a cero cuando $x \geq 0$, es decir $f(x) \geq 0$ y por lo tanto el denominador $f(x) + 2 \geq 2$ para todo valor de *x* en el dominio de *f*.

$$\text{Dominio de } (g \circ f)(x)\text{: } \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x \ \geq 0\}$$

Ejemplo 21 ___________________

Observe las gráficas de las funciones f y g dadas abajo.



Calcule:

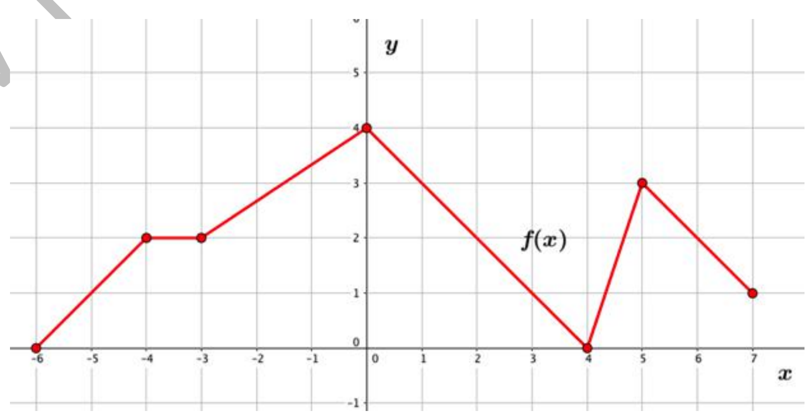
a. $(f \circ g)(4)$
b. $(g \circ f)(4)$
c. $(f \circ g)(1)$
d. $(f \circ f)(0)$

Solución

a. $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-4) = 2$
b. $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = -2$
c. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 4$
d. $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(4) = 0$

Ejemplo 22

Considere el criterio de la función g: $g(x) = 3x + 1$, y la gráfica de la función f con dominio $[-6, 7]$



a. ¿Existe la composición $f \circ g$? Justifique su respuesta.
b. ¿Existe la composición $g \circ f$? Justifique su respuesta.

Solución

a. Como el dominio y el rango de la función g no son dados, se supone que el dominio es el máximo posible. Como g es un polinomio (de primer grado) entonces tanto su dominio como su rango es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Para la composición $f \circ g$ el rango o recorrido de g tiene que ser un subconjunto del dominio de f, pero esto no ocurre aquí pues el dominio de f es $[-6, 7]$. Es claro que algunas imágenes de g pertenecen al dominio de f pero esto no es suficiente para definir $f \circ g$. Por ejemplo $g(10) = 3(10) + 1 = 31$ no pertenece al dominio de f.

b. Como el rango o recorrido de f es subconjunto del dominio de g entonces podemos definir la $g \circ f$. Calculemos algunos valores de esta composición:

$$(g \circ f)(6) = g\big(f(6)\big) = g(0) = 1, \qquad (g \circ f)(-4) = g\big(f(-4)\big) = g(2) = 7,$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = 1.$$

Observe que $y = 1$ tiene dos preimágenes diferentes: $x = 4, x = 6$, pues $(g \circ f)(4) = (g \circ f)(6) = 1$.

Ejemplo 23

Complete la siguiente tabla (calcule los valores de a, b, c, d):

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
0	1	-1	-1	***c***
1	3	0	***a***	***d***
2	5	3	***b***	24
3	7	8	17	48

Solución

Cálculo de a: $a = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$
Cálculo de b: $b = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 7$
Cálculo de c: $c = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$
Cálculo de d: $d = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 8$

Función inyectiva

Una función ***inyectiva*** es aquella para la cual *cada imagen* tiene una *única preimagen*. En otras palabras, es la función en que a elementos distintos del dominio les corresponden elementos distintos del rango o recorrido y reciprocamente.

Simbólicamente escribimos: si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$. Imágenes iguales tienen preimágenes iguales.

También podríamos escribir de la siguiente forma: si a, b pertenecen al dominio de f con $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

Graficamente significa que toda ***recta horizontal*** en el rango o recorrido de la función intersecará la gráfica de la función en un único punto (prueba de la horizontal). Además, es claro, que toda recta vertical en el dominio de la función intersecará la gráfica de la función en un único punto (prueba de la vertical para garantizar que la gráfica representa una función).

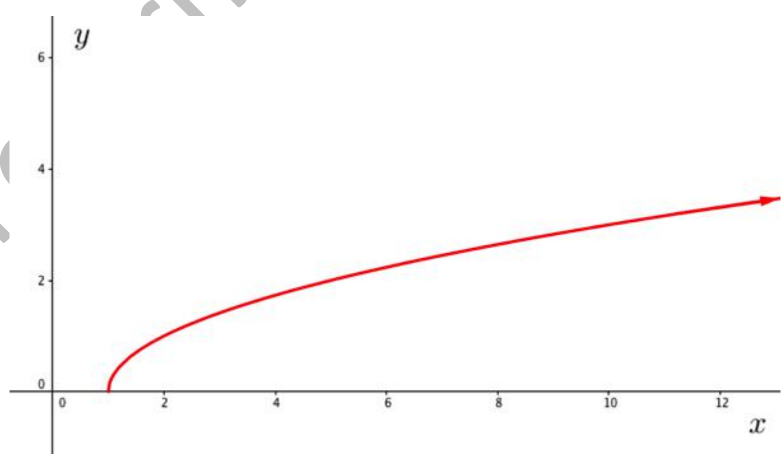
Ejemplo 24 ____________________

La función $\{(1,3), (2,5), (3,5)\}$ con dominio $A = \{1,2,3\}$ y rango $B = \{3,5\}$ no es inyectiva pues la imagen $y = 5$ tiene dos preimágenes diferentes: $x = 2, x = 3$.

Ejemplo 25 ____________________

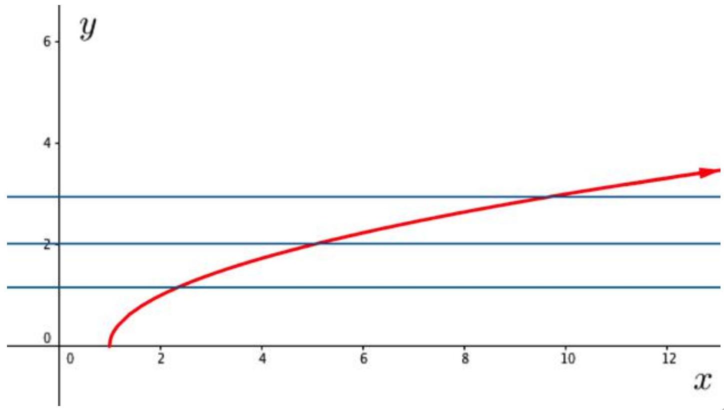
¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a una función inyectiva?

a) $f: [1, \infty[\ \rightarrow \ [0, \infty[$ con gráfica:

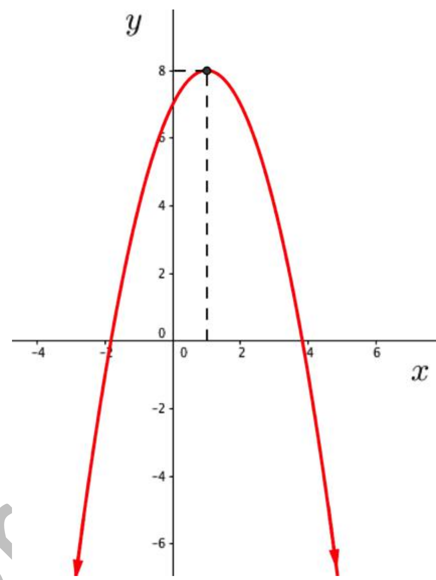


Solución.

Por la prueba de las rectas horizontales se observa que la función es inyectiva.

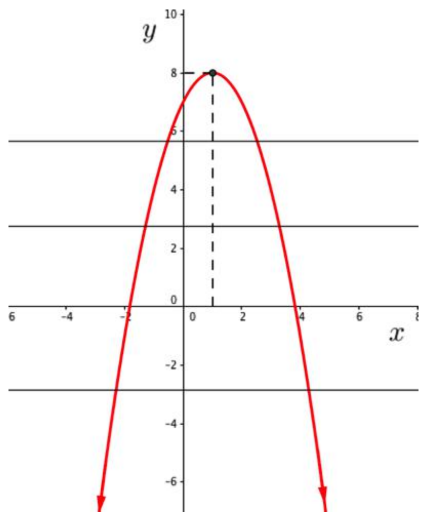


b) $f: \mathbb{R} \to \ ]-\infty,\ 8]$ con gráfica:

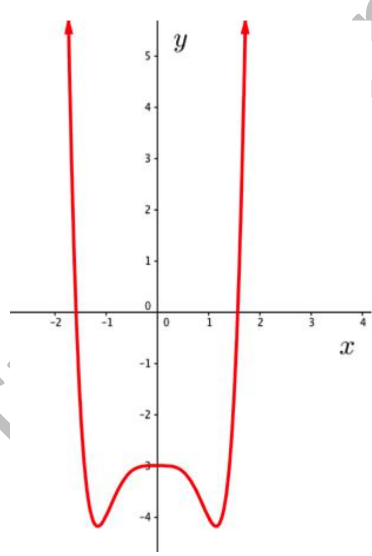


Solución:

La prueba de las rectas horizontales muestra que la función no es inyectiva.

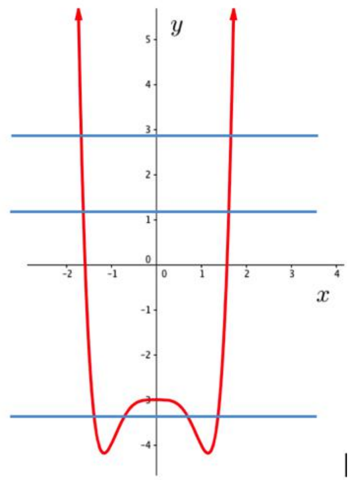


c) $f:\mathbb{R} \rightarrow \;]-4,\ \infty]$ con gráfica:



Solución

Esta gráfica representa a una función que no es inyectiva en su dominio pues la prueba de la horizontal revela que existen imágenes que tienen más de una preimagen. Algunas imágenes tienen hasta cuatro preimágenes.



Ejemplo 26 ___________________

Indique si la función con criterio dado es inyectiva.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 18$
b. $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{3}{x-1}$
c. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 5$

Solución:

a. Para la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 18$; tenemos

$$f(a) = f(b)$$

$$a - 18 = b - 18$$

$$a = b$$

Entonces f es inyectiva.

b. Para la función $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{3}{x-1}$; tenemos

$$g(a) = g(b), a, b \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\frac{3}{a-1} = \frac{3}{b-1}$$

$$a - 1 = b - 1$$

$$a = b$$

Entonces g es inyectiva.

c. Para la función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 5$; tenemos

$$h(a) = h(b)$$

$$a^2 - 5 = b^2 - 5$$

$$a^2 = b^2$$

De la última igualdad no se puede deducir que $a = b$; más bien, se tiene que $a = \pm b$. Por ejemplo, tanto 2 como -2 pertenecen al dominio de h y $h(2) = h(-2)$ por lo que no se da la inyectividad. Para garantizar la inyectividad se debe *restringir* el dominio de tal forma que la restricción de la función al nuevo dominio sea inyectiva.

Por ejemplo, si consideramos como dominio el intervalo $[0, \infty[$ entonces la nueva función p: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$, $p(x) = x^2 - 5$, que es la restricción de la función h al dominio $[0, \infty[$ es inyectiva.

Además, si restringimos el codominio al intervalo $[-5, \infty[$ entonces la nueva restricción de h q: $[0, \infty[\to [-5, \infty[$, $q(x) = x^2 - 5$ es invertible (inyectiva y sobreyectiva).

Resumen

Elementos para el análisis de una función

Al analizar una función se toman en cuenta elementos como los siguientes:

- Dominio.
- Codominio
- Ámbito, recorrido o rango
- Imágenes y preimágenes.
- Ceros.
- Intersecciones con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos
- Inyectividad.

Función inversa

Si $f: A \to B$ es una *función* real de una variable real con dominio A y recorrido o rango B, y además f es ***inyectiva,*** entonces tiene *inversa*, que simbolizaremos por f^{-1}, y que satisface la siguiente condición:

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ **es un punto en la gráfica de** $\boldsymbol{f}$ **si y sólo si** $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ **es un punto en la gráfica de** $\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}$

De la definición se tiene que $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$.

En la notación f^{-1} para la función inversa, el -1 ***no es un exponente***, es decir $f^{-1}(x)$ ***no es*** igual a $\frac{1}{f(x)}$. Además, la definición indica que el dominio de la función f es el rango, recorrido o ámbito de la función f^{-1} mientras que el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Método para hallar el criterio de la inversa de una función f.

En la práctica, el criterio para la inversa de una función con criterio $y = f(x)$ se puede obtener al intercambiar las variables "*x*" y "*y*". Luego se despeja "*y*" en términos de "*x*", para obtener el criterio $y = f^{-1}(x)$ para la inversa de *f*.

La dificultad puede consistir en despejar "*y*" en términos de "*x*".

Ejemplo 27 ___________________

Determine la inversa para cada función con criterio dado.

a. $f(x) = 3x - 2$, Dominio = $\mathbb{R}$.
b. $g(x) = \sqrt{-1 - x}$, Dominio = $]-\infty, -1]$.
c. $m(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, Dominio = $[0, +\infty[$
d. $p(x) = x^3 + 8$, Dominio = $\mathbb{R}$

Solución

a. Procedemos de la siguiente manera:
Intercambiamos las variables *x*, *y* en $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x} - 2$. Por lo tanto

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{y} - 2$$

El segundo paso consiste en despejar la variable *y* en la última relación.

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} + 2}{3}$$

Como la correspondencia anterior no presenta restricciones entonces su dominio (que es rango de la función original f) es $\mathbb{R}$. Por lo tanto el rango de f es $\mathbb{R}$ para que la función tenga inversa, y su inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

Observe que el dominio de la inversa de f es el rango de la función f.

b. Primero observe que el recorrido o rango de g es $[0, \infty[$ pues $\sqrt{-1-x} \geq 0$ para toda x en el dominio de g. Para encontrar la inversa de g intercambiamos las variables "x" y "y" en $\boldsymbol{y} = \sqrt{-1-\boldsymbol{x}}$, es decir, $\boldsymbol{x} = \sqrt{-1-\boldsymbol{y}}$. Elevando al cuadrado tendremos $\boldsymbol{x}^2 = -1-\boldsymbol{y}$, y por lo tanto

$$\boldsymbol{y} = -1-\boldsymbol{x}^2$$

Concluimos que $g^{-1}(x) = -1-x^2$, es la inversa de g, para $0 \leq x < \infty$.
Note que , el rango de g es el dominio de g^{-1}.

c. La expresión $\frac{x^2}{2}+2$ no presenta ninguna restricción para x, pero el dominio dado para la función m no es todo $\mathbb{R}$ sino un subconjunto de los números reales, $[0, +\infty[$. Esto es para garantizar que la función sea inyectiva. Para encontrar la inversa de m, tenemos que intercambiar "x" y "y" en $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}^2}{2}+2$, para obtener: $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{y}^2}{2}+2$. Empezamos a despejar la variable y,

$$\frac{\boldsymbol{y}^2}{2} = \boldsymbol{x}-2$$

y así

$$\boldsymbol{y}^2 = 2(\boldsymbol{x}-2)$$

Al despejar "y" obtenemos dos valores:

$$y_1 = -\sqrt{2(x-2)} \ , \qquad y_2 = \sqrt{2(x-2)}$$

Pero como el dominio de m (rango de la inversa de m) fue dado como $[0, +\infty[$ entonces tenemos que descartar la solución y_1 por ser no positiva. Entonces la inversa de m es

$$m^{-1}(x) = \sqrt{2(x-2)} \text{ , donde } x \in [2, +\infty[$$

d. Como el dominio y rango de todo polinomio de grado impar es $\mathbb{R}$ y además para cada valor de y existe un único valor de x tal que $y = x^3+8$, entonces la función dada es inyectiva, y su rango es $\mathbb{R}$. Intercambiando "x" y "y" en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3+8$, obtenemos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^3+8$, y así

$$\boldsymbol{y}^3 = \boldsymbol{x}-8$$

Despejando "y"

$$\boldsymbol{y} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}-8}$$

La inversa de la función dada es

$$p^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

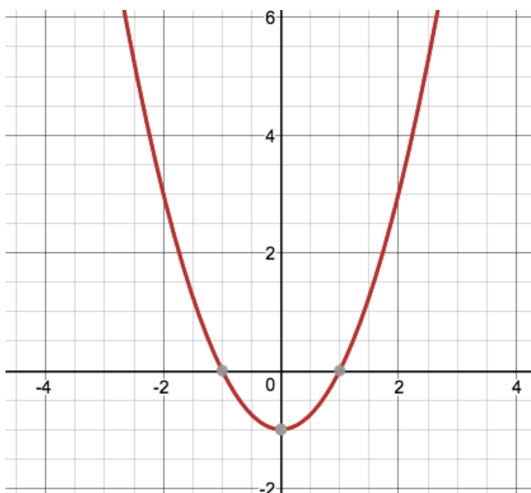
El dominio de la inversa es el rango de la función p.

Ejemplo 28 ___________________

Determine un dominio máximo para la función con criterio $f(x) = x^2 - 1$, y con rango $[-1, +\infty[$ de tal manera que se pueda garantizar que la *restricción* de f a este dominio tenga inversa.

Solución:

Se debe indicar en que puntos del dominio la función es inyectiva. Observe en la gráfica de f que si se toma el intervalo $[0, +\infty[$ como dominio, es posible garantizar inyectividad de la restricción de f. Podríamos tomar como dominio el intervalo $]-\infty, 0]$ en lugar de $[0, +\infty[$.



Entonces en el dominio $\mathbb{R}$ la función con criterio $f(x) = x^2 - 1$ no tiene inversa, pero su restricción $g(x) = x^2 - 1, x \in [0, \infty[$ tiene inversa $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}\,, x \in [-1, +\infty[$.

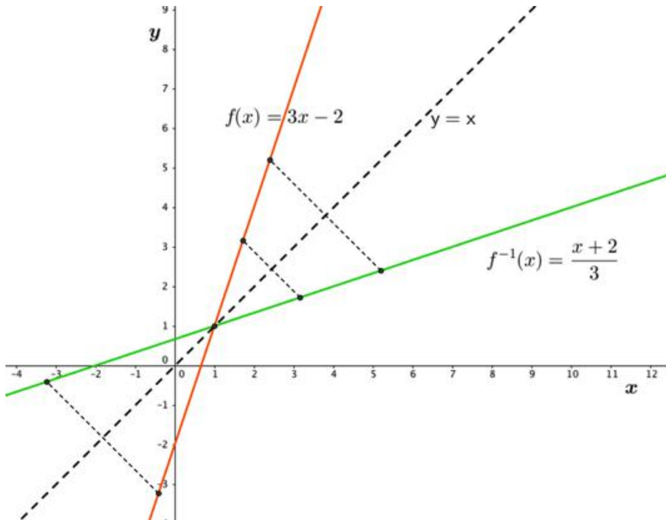
Gráfica de una función inversa

Existe una simetría respecto a la recta $y = x$ de la gráfica de la función respecto a su inversa.
Esto se debe a que los puntos (x, y) y (y, x) son simétricos respecto a la recta $y = x$ en el plano cartesiano, y en la definición de inversa tenemos que si (x, y) pertenece a la gráfica de una función invertible entonces (y, x) pertenece a la gráfica de su función inversa.

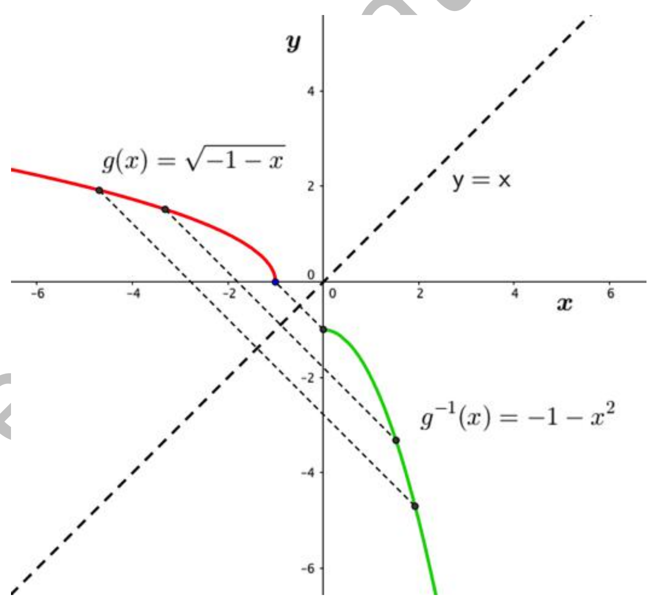
Ejemplo 29 ___________________

Las gráficas de las funciones invertibles dadas aparecen en color rojo mientras que las de las funciones inversas aparecen en color verde. También agregamos la gráfica de función identidad $y = x$, en líneas discontinuas.

a. $f(x) = 3x - 2$, Dominio $= \mathbb{R}$.

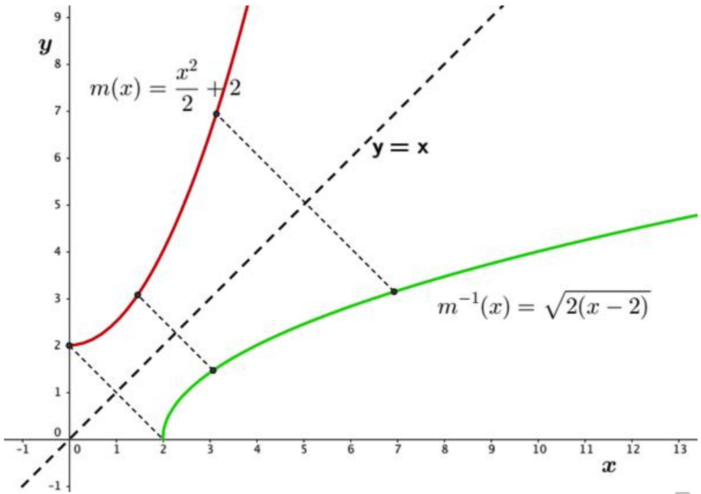


b. $g(x) = \sqrt{-1-x}$, Dominio $=]-\infty, -1]$.

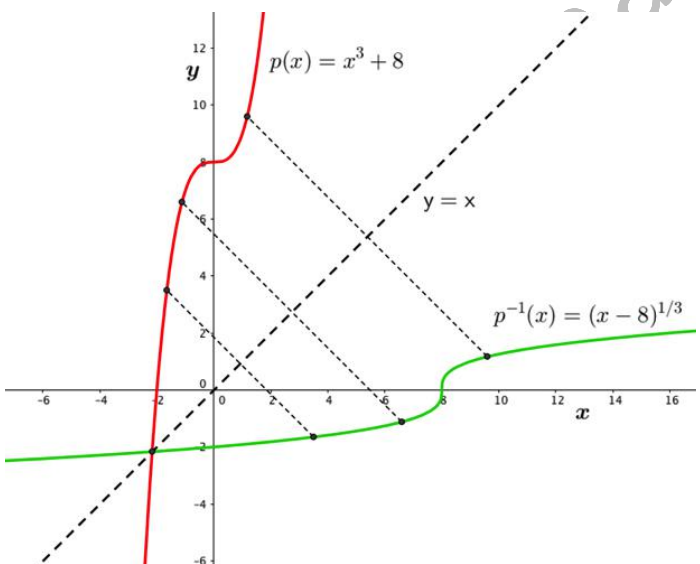


Observe que el dominio de g^{-1} es $[0, +\infty[$.

c.



d. $p(x) = x^3 + 8$, Dominio = ℝ



Conclusiones

Hemos finalizado el material complementario para el Mini MOOC *Generalidades de funciones*, de la Colección Preparación Matemática Bachillerato. Esperamos que el material haya sido de mucho provecho y esperamos sus comentarios y sugerencias para que hagamos correcciones y cambios en futuras versiones del material. Gracias y éxitos en sus estudios y en su vida personal.

Bibliografía

Aufmann R., Barker V.,Nation R. (2011). *College Algebra and Trigonometry*. Seventh Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Harshbarger R., Yocco L. (2013). *College Algebra in Context*. 4th Edition. Pearson

Larson R. (2011). *Algebra and Trigonometry*. Eighth Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics

Rockswold G. (2012). *Essentials of College Algebra: with Modeling / Visualization*. 4th Edition. Addison-Wesley

Swokowski, E. y Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 13a. edición. Cengage Learning

Índice

Créditos

Generalidades de funciones. *Material complementario*, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Generalidades de funciones*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edison de Faria Campos

Revisores
Hugo Barrantes, Johanna Mena, Keibel Ramírez, Ángel Ruiz

Edición final de este documento
Johanna Mena, Hugo Barrantes

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Generalidades de funciones*. *Material complementario*, San José, Costa Rica: autor.