Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

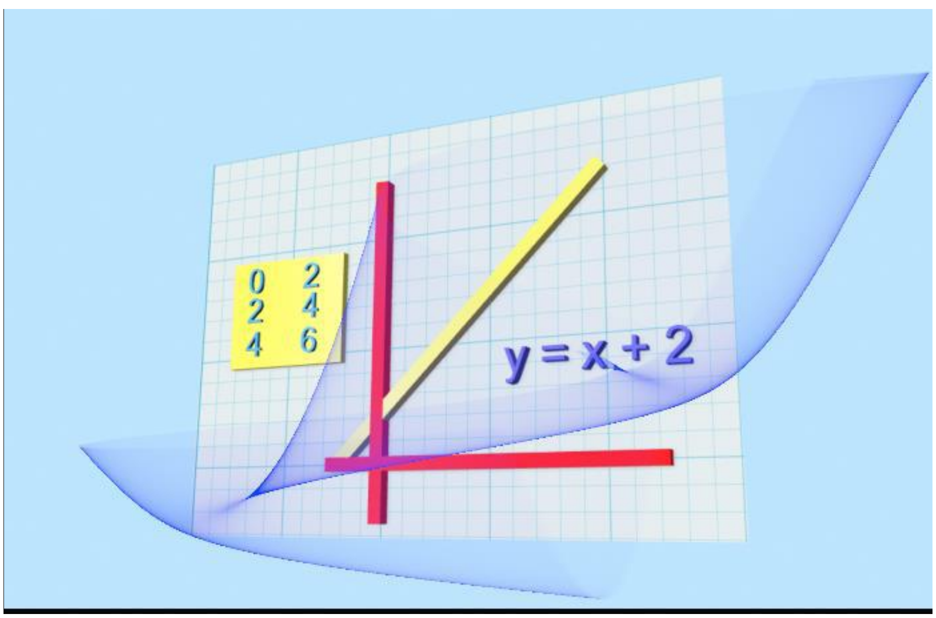
Asociación Empresarial para el Desarrollo

United Way

CRUSA
Fundación para la cooperación

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Mini MOOC
Colección Preparación Matemáticas Bachillerato
Relaciones y álgebra



PMB-RA02: Representaciones de funciones
Material complementario
Costa Rica

2017

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos **2**

Índice alfabético **3**

Introducción **4**

Representaciones de funciones **5**

Definición de función 5
Criterio de una función. Representación simbólica o algebraica de una función 6
Representación tabular o numérica de una función 9
Gráfica de una función. Representación gráfica o visual de una función 10
Representación verbal de una función 16

Las principales funciones que utilizaremos......17

Función lineal 17
Función cuadrática..18
Función exponencial 24
Función logarítmica 25
Función raíz cuadrada...................................26

Representaciones de funciones y sus transformaciones..27

Transformación de la representación verbal a la algebraica 27
Transformación entre representaciones tabulares 28
Transformación de representación tabular a gráfica 29
Transformación de representación gráfica a tabular..30
Transformación de representación gráfica a gráfica 31
Transformación de representación algebraica y gráfica a gráfica y algebraica 32
Traslaciones y reflexiones de gráficas de funciones 34
Transformación de representación algebraica y gráfica a algebraica y gráfica 34
Transformación de representación gráfica y algebraica a gráfica 36

Conclusiones..39

Bibliografía 40

Créditos...41

Índice alfabético

Bibliografía, 40

Conclusiones, 39
Créditos, 41
Criterio de una función. Representación simbólica o algebraica de una función, 6

Definición de función, 5
Diferencia entre función y relación, 8

Ecuación normal o forma estándar de la parábola, 20

Función cuadrática, 18
  Forma estándar de la parábola, 20
Función exponencial, 24
Función lineal, 17
Función logarítmica, 25
Función raíz cuadrada, 26
Función, definición
  Dominio, 5
  Imagen, 5
  Preimagen, 5
Función, definición
  Codominio, 5

Gráfica de una función
  Ceros, 10
  Intersección eje abscisas, 10
Gráfica de una función. Representación gráfica o visual de una función, 10

Logaritmos, propiedades, 25

Método de completar cuadrado, 20

Potencias, propiedades con exponentes reales, 24

Representación tabular o numérica de una función, 9
Representación verbal de una función, 16
Representaciones de funciones, 5
Representaciones de funciones y sus transformaciones, 27
Transformación de la representación verbal a algebraica, 28
Transformación entre representaciones tabulares, 29
Transformación de la representación tabular a gráfica, 29
Transformación de la representación gráfica a gráfica, 30
Transformación de la representación algebraica y gráfica a gráfica y algebraica, 33
Transformación de la representación algebraica y gráfica a algebraica y gráfica, 35
Transformación de la representación gráfica y algebraica a gráfica, 37
Traslaciones y reflexiones de gráficas de funciones, 35

Introducción

Este documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatematica.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Representaciones de funciones* (http://minimoocs.reformamatematica.net/).

El propósito del Mini MOOC *Representaciones de Funciones* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se describen diferentes conocimientos vinculados con las distintas representaciones de las funciones matemáticas: algebraica, tabular, gráfica, simbólica, verbal, icónica, para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

Al inicio del documento se le proporciona un índice alfabético en el que se da un listado, en orden alfabético, de los temas o contenidos con el número de página donde aparecen. Si usted hace clic sobre dicho número, será remitido a la página donde se proporciona el concepto, tema o contenido correspondiente. Se puede regresar al índice alfabético desde cualquier página haciendo clic sobre la palabra Índice que aparece en el encabezado de todas ellas.

Es importante aclarar que el presente documento no es un libro de texto y tampoco es exhaustivo. Procuramos que sea autosuficiente para los propósitos de este Mini MOOC pero no está pensado para ser utilizado como un medio para organizar la acción de aula.

Representaciones de funciones

Existen muchos tipos de relaciones matemáticas. Entre las más importantes están las *funciones*.

Definición de función

Una **función** real de variable real es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida A **un único número** real "y" de un conjunto de llegada B. Considere A y B subconjuntos no vacío de los números reales $\mathbb{R}$.

El conjunto de partida A es conocido como ***dominio*** de la función.
El conjunto de llegada B se llama ***codominio*** de la función.

Para simbolizar la correspondencia entre los dos conjuntos no vacíos A y B que representa una función, que denotaremos por f, se utiliza la siguiente notación: $f: A \rightarrow B$.

En este caso el único número real "y" de B (se dice que "*y* pertenece a *B*", y se escribe $y \in B$) que corresponde al número real "*x*" de *A*, $x \in A$, se denomina ***imagen** de x*, y se denota como $f(x)$. También se dice que *x* es una ***preimagen*** de *y*.

Por definición de función cada preimagen sólo puede tener una imagen, pero una imagen puede tener varias preimágenes, puesto que la restricción se impone sobre las imágenes (un *único* número real "*y*").

El conjunto de los elementos "*f(x)*" de *B* para elementos *x* de *A* se conoce como ***imagen***, ***rango, ámbito o recorrido*** de la función.

Una función también puede ser representada por un conjunto de pares ordenados. La abscisa del par pertenece al dominio y la ordenada al codominio de la función.

Ejemplo 1

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{0,3,6,9,10\}$ entonces el conjunto de pares ordenados $\{(1,0), (2,6), (3,10)\}$ representa una función con dominio *A*. Observe que cada elemento del dominio *A* está relacionado con un único elemento de *B*. La imagen (recorrido, rango, ámbito) de la función es el conjunto $\{0,6,10\}$.

Por otro lado el conjunto de pares ordenados $\{(1,0), (2,3), (2,6), (3,10)\}$ no representa una función con dominio *A* pues el elemento 2 de *A* está asociado a dos elementos distintos de *B*, los números reales 3 y 6. El conjunto dado representa una relación pero no una función.

Criterio de una función. Representación simbólica o algebraica de una función

La asociación que involucra la imagen *"y"* la preimagen "*x*", y la correspondencia *"f"* se escribe como $y = f(x)$, y es conocido como ***criterio, representación algebraica o representación simbólica de la función***. Decimos que "*x"* es la ***variable independiente*** mientras que "*y"* es la ***variable dependiente***.

La notación $f(x)$ se lee "*f de x*". Representa la aplicación de la regla de correspondencia al elemento *x* del dominio de la función. Observe que la notación $f(x)$ **no significa** *f* multiplicado por *x*.

La representación $y = f(x)$ que denominamos anteriormente como *criterio de la función*, también se conoce como *forma estándar, normal o explícita* de la función.

Ejemplo 2 ____________________

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio y $B = \{1, 4, \ 9, 16, 25, \ 36, 49\}$ el codominio de la función cuyo criterio es $f(x) = x^2$.

a. ¿Cuál es el rango (recorrido, ámbito o imagen) de la función
b. ¿Cuál es la imagen de 3?
c. ¿Cuál es la preimagen de 25?
d. ¿Cuál es la preimagen de 49?

Solución

Como $f(x) = x^2$ entonces la regla de correspondencia en forma verbal es "eleve al cuadrado cada preimagen". El conjunto de preimágenes es el dominio *A* mientras que las imágenes son:

$$f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 4, f(3) = 3^2 = 9, f(4) = 4^2 = 16, f(5) = 5^2 = 25$$

Todas ellas pertenecen al conjunto *B* dado previamente como codominio de la función.

a. El rango, ámbito, recorrido o imagen de la función es el conjunto de las imágenes de la función, que en este caso es el conjunto (que denotaremos con la letra R)

$$\text{R} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

En este caso el ámbito o rango R es un subconjunto del codominio *B*.
b. La imagen de 3 es $f(3) = 9$.
c. Para encontrar la preimagen de 25, tenemos que 25 es la imagen de algún elemento x del dominio, por lo tanto basta dar el valor 25 a "*y*" en el criterio $y = x^2$.
La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = -5, \ x = 5$.
Pero $x = -5$ no es elemento del dominio dado mientras que $x = 5$ sí lo es.
Por lo tanto la preimagen de 25 es 5.
d. Para encontrar la preimagen de 49 hay que resolver la ecuación $x^2 = 49$. Ambas soluciones $x = -7, \ x = 7$ no pertenecen al dominio de la función. Por lo tanto 49 no tiene preimagen.

Ejemplo 3 ___________________

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio de una función cuyo criterio es $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$.

a. ¿Cuál es el rango (recorrido o ámbito) de la función?
b. ¿Cuál es la imagen de 5?
c. ¿Cuál es la preimagen de $-\frac{13}{6}$?
d. ¿Cuál es la preimagen de $-2{,}25$?

Solución

En este ejemplo no se da el codominio de la función.
Como $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$ entonces:

a. El rango de la función dada es el conjunto de las imágenes de la función.

$f(1) = \frac{1+1}{1+2} - 3 = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$; $f(2) = \frac{2+1}{2+2} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$
$f(3) = \frac{3+1}{3+2} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$; $f(4) = \frac{4+1}{4+2} - 3 = \frac{5}{6} - 3 = -\frac{13}{6}$
$f(5) = \frac{5+1}{5+2} - 3 = \frac{6}{7} - 3 = -\frac{15}{7}$

Entonces el rango de la función es el conjunto $\left\{-\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{13}{6}, -\frac{15}{7}\right\}$.

b. La imagen de 5 es $f(5) = -\frac{15}{7}$.

c. La preimagen de $-\frac{13}{6}$ es 4 conforme se observa en la parte a. Pero otra forma de determinarlo consiste en resolver la ecuación $f(x) = -\frac{13}{6}$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -\frac{13}{6}$$

Esto equivale a $\frac{x+1}{x+2} = -\frac{13}{6} + 3 = \frac{5}{6}$ que puede ser escrito como

$6(x+1) = 5(x+2)$. Multiplicando obtenemos $6x + 6 = 5x + 10$, y así

$6x - 5x = 10 - 6$. Simplificando tendremos $x = 4$, la preimagen de $-\frac{13}{6}$.

d. Para la preimagen de -2,25 tenemos que resolver la ecuación $f(x) = -2{,}25$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -2{,}25$$

Operando como antes, $\frac{x+1}{x+2} = -2{,}25 + 3 = 0{,}75$ es decir, $x + 1 = 0{,}75x + 1{,}5$ lo que, al

simplificar queda $x - 0{,}75x = 1{,}5 - 1$ que es equivalente a $0{,}25x = 0{,}5$. Por lo tanto $x = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2$ que pertenece al dominio de la función.
La respuesta podría ser obtenida sin resolver ecuación si sabemos que $-2{,}25 = -\frac{9}{4}$.

Diferencia entre función y relación

La principal diferencia entre una función y una relación es que en una función el elemento del conjunto de llegada es *único*. En una relación esta condición no es necesaria: puede haber más de un número real del conjunto de llegada que corresponda a un elemento del conjunto de salida.
Por lo tanto, toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo 4 ___________________

1. La relación $x^2 + y^2 = 4$ tiene forma de una ecuación que relaciona dos variables. Si "*x*" es la variable de entrada y "*y*" la de salida entonces $y^2 = 4 - x^2$, y por lo tanto

   $$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

   Para cada valor de entrada "*x*" entre -2 y 2, es decir $-2 < x < 2$, existen dos valores distintos para la salida "*y*". Por ejemplo, si la entrada $x = 1$ entonces $y = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$ son dos valores distintos para la variable de salida "*y*", por lo tanto la relación

   $$x^2 + y^2 = 4$$

   no representa una función.

2. En la relación $y^3 + 2x^2 = x - 1$, si consideramos a "*x*" como variable de entrada y "*y*" como variable de salida entonces podemos despejar $y^3 = x - 1 - 2x^2$, y por lo tanto $y = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. Aquí no aparecen los dos signos $\pm$ debido a que el índice de la raíz es 3, un número impar. Para cada valor de la entrada "*x*" se obtiene un único valor para la salida "*y*". Por lo tanto la "ecuación" $y^3 + 2x^2 = x - 1$ representa una función que se escribe en forma estándar (normal o explícita) como $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. En este caso el dominio de la función f es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$, pues no existe restricción para la variable independiente o de entrada "*x*".

Ejemplo 5 ___________________

El peso de una persona no es función de su altura. Dada la altura de una persona no se puede determinar su peso en forma exacta, es decir, dos personas con una misma altura pueden tener pesos distintos. Dicha relación no representa una función.

Representación tabular o numérica de una función

La **representación tabular o numérica de una función real de una variable real** *f* es una *tabla* con dos columnas (o filas). La primera columna (fila) contiene valores de la variable independiente "*x*" del dominio de la función mientras que la segunda columna (fila) contiene valores de la variable dependiente "*y*" que satisface $y = f(x)$, es decir, "*y*" es la imagen de "*x*" al aplicar la regla de correspondencia *f*.

Por lo tanto la representación tabular o numérica de una función *f* contiene algunos puntos de la forma $(x,\ f(x))$ para *x* en el dominio de la función. Cada preimágen *x* tiene una única imagen $y = f(x)$.

Ejemplo 6 ___________________

La tabla

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-1	6
0	1
1	0
2	3
5	36

representa una función. A cada valor de la variable independiente *x* corresponde un único valor de la variable dependiente *y*.

Ejemplo 7 ___________________

La tabla

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-1	6
0	1
1	0
2	3
-1	36

no representa una función. A cada valor de la variable independiente *x* corresponde un único valor de la variable dependiente *y*. Al valor de la variable independiente $x = -1$ corresponden dos valores distintos de la variable dependiente *y*, $y = 6,\ y = 36$. Por lo tanto la tabla representa una relación pero no una función.

Gráfica de una función. Representación gráfica o visual de una función

La **gráfica, representación gráfica o visual de una función real de una variable real** f es el conjunto de los puntos (x, y) del plano cartesiano donde la variable independiente "x" pertenece al dominio de la función y la variable dependiente "y" satisface $y = f(x)$, es decir, "y" es la imagen de "x" al aplicar la regla de correspondencia f. Para cada abscisa x habrá una única ordenada y.

Para construir la representación gráfica de una función es conveniente construir primeramente una representación tabular para la función, que contenga algunos puntos de la forma $(x,\ f(x))$ para x en el dominio de la función, y unirlos con una línea continua cuando los puntos intermedios (entre dos puntos de la tabla) sean parte del dominio de la función. Esto nos proporciona una parte de la gráfica de la función.

Algunos de los puntos que son importantes para la construcción de la gráfica son:

- Los ***ceros de la función*** (si pertenecen al dominio), que son los puntos donde la gráfica de la función ***interseca al eje de las abscisas.*** Tales puntos son las raíces o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
- También el punto donde la gráfica de la función ***interseca el eje de las ordenadas***. La ordenada de dicho punto se conoce ***ordenada en el origen***, el valor $y = f(0)$ suponiendo que $x = 0$ pertenece al dominio de la función.

En resumen, la representación gráfica de una función $f: A \to B$ con representación algebraica o simbólica $y = f(x)$ es el conjunto de los pares ordenados $(x, f(x))$ con $x \in A$ que podemos representar como:

$$\text{Gráfica de } f = \{(x, y): x \in A, y = f(x) \in B\}$$

Ejemplo 8 ___________________

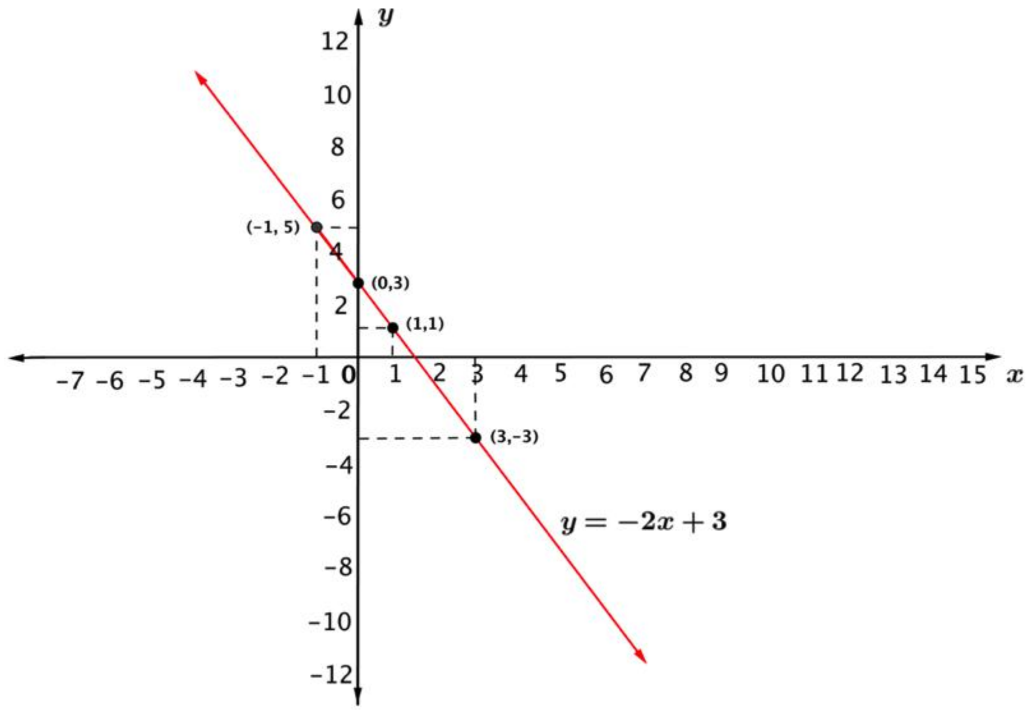
Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = -2x + 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Primeramente construiremos una tabla con dos columnas (podrían ser dos filas). En la primera columna daremos algunos valores para la variable independiente o de entrada "x" y en la otra columna escribiremos los valores de $f(x)$.

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = -2(-1) + 3 = 5$
0	$f(0) = -2(0) + 3 = 3$
1	$f(1) = -2(1) + 3 = 1$
3	$f(3) = -2(3) + 3 = -3$

Representando los puntos (-1, 5), (0,3), (1, 1), (3, -3) en el plano cartesiano y uniéndolos con una línea continua (lo podemos hacer pues el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales) obtendremos la siguiente representación gráfica:



Entre más puntos contenga la tabla, mejor es la representación gráfica para la función. En este ejemplo bastarían dos puntos pues la gráfica es una recta

Otro dato importante para dibujar la gráfica consiste en determinar la intersección con el eje de las abscisas. Tales puntos son las raíces, ceros o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, que en este caso es $-2x + 3 = 0$ de donde $x = \frac{3}{2}$. Obtenemos el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Luego, se halla la intersección en el eje de las ordenadas, para ello se debe buscar el punto que satisface $y = f(0) - 2 \cdot 0 + 3 = 3$. La ordenada en el origen es $y = 3$, y el punto correspondiente es $(0{,}3)$.

Ejemplo 9

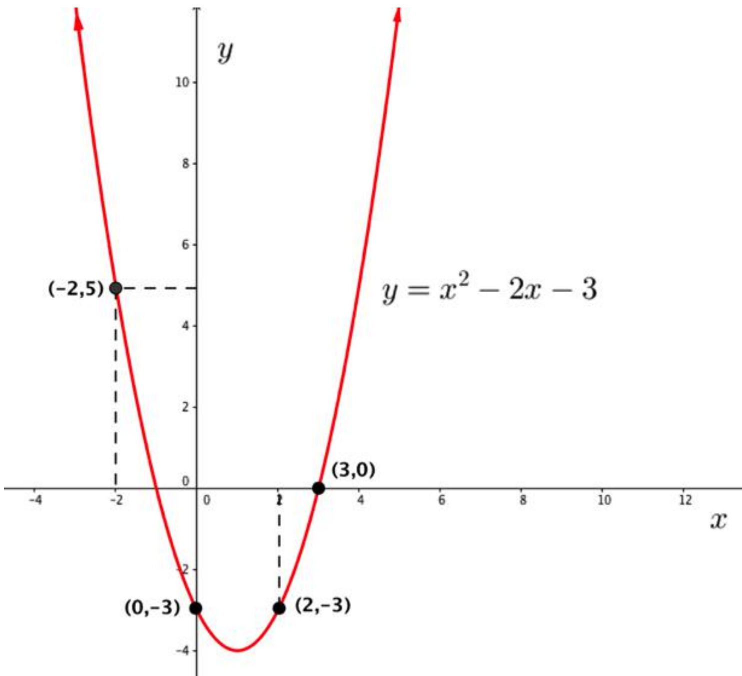
Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Construimos una tabla con algunos pares ordenados (puntos) de la gráfica de la función

x	$f(x)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$
0	$f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$
2	$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$
3	$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$

La gráfica de la función es una parábola que se abre hacia arriba, conforme se muestra abajo.



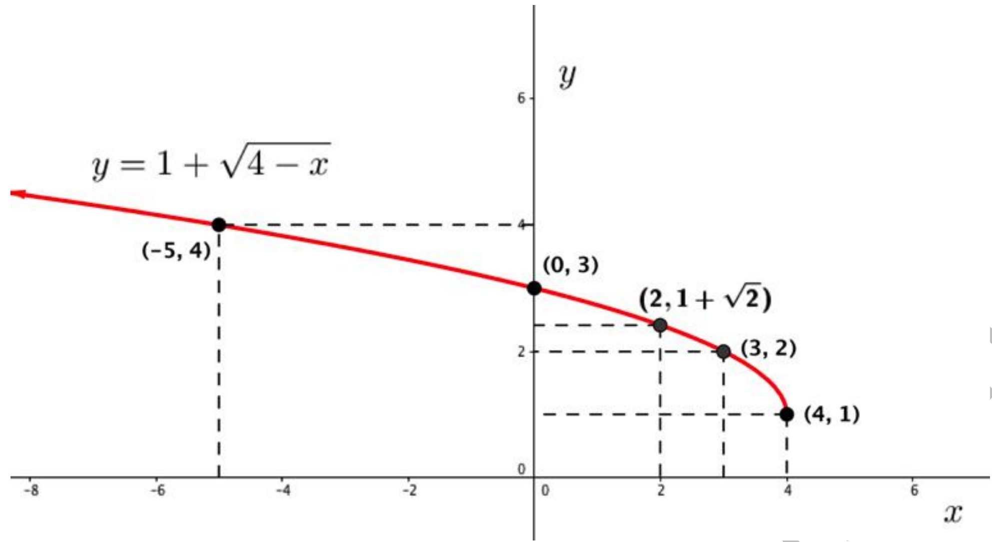
Ejemplo 10

Considere la función $f\colon]-\infty,\ 4] \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x}$. Represente gráficamente la función dada.

La tabla con algunos puntos de la gráfica es:

x	*f(x)*
-5	$f(-5) = 1 + \sqrt{4 — 5} = 4$
0	$f(0) = 1 + \sqrt{4 - 0} = 3$
2	$f(2) = 1 + \sqrt{4 - 2} = 1 + \sqrt{2}$
3	$f(3) = 1 + \sqrt{4 - 3} = 2$
4	$f(4) = 1 + \sqrt{4 - 4} = 1$

Abajo vemos la gráfica de la función.

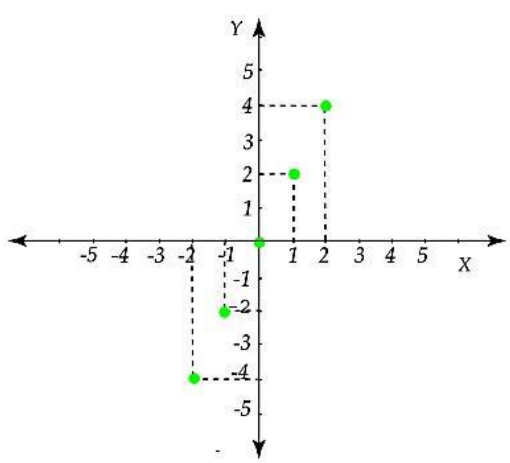


Ejemplo 11

Considere los conjuntos A = {−2, −1, 0, 1, 2} y B = {−6, −5, −4, −2, 0, 1, 2, 4, 6} y $f: A \to B$ con criterio $f(x) = 2x$. Represente la función *f* graficamente.

Solución:

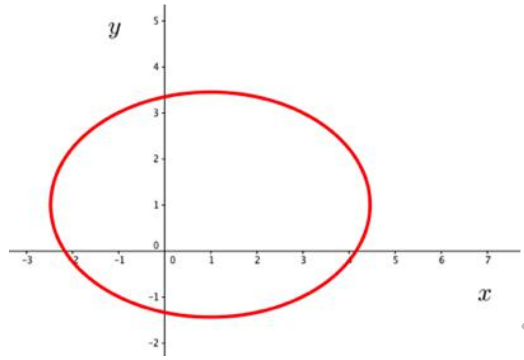
Note que el dominio de dicha función es discreto por lo que a la hora de dibujar la gráfica en el sistema de coordenadas no podemos unir los puntos mediante una línea continua. La gráfica de la función consta de cinco puntos "aislados".



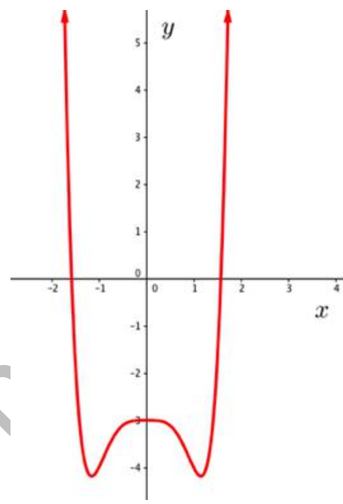
Ejemplo 12 ___________________

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?

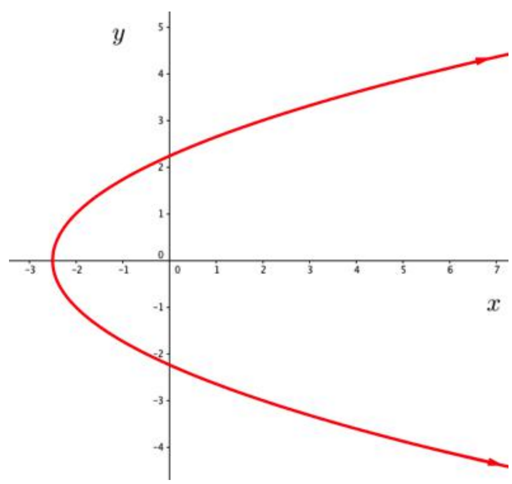
a)



b)

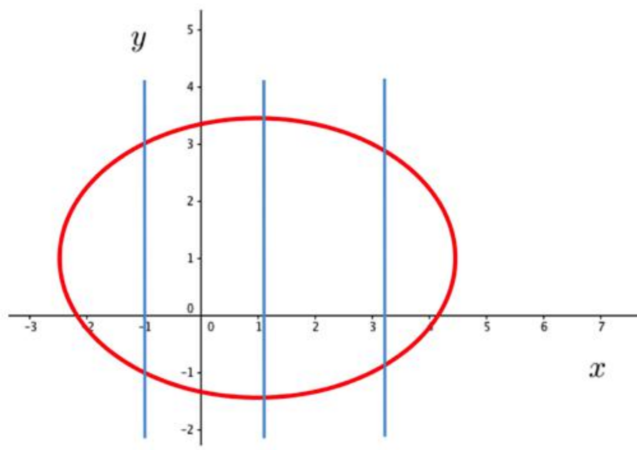


c)

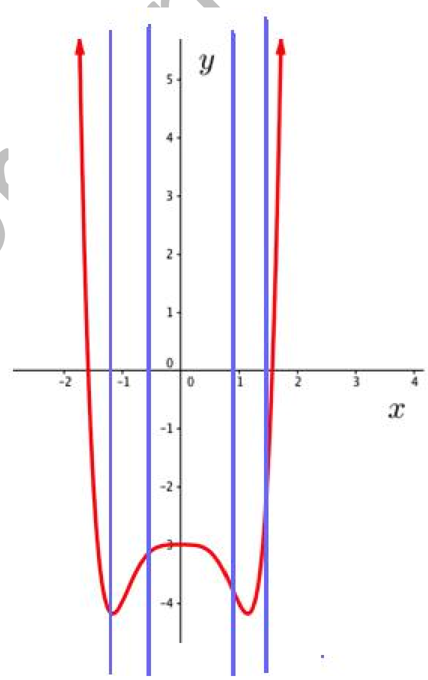


Solución:

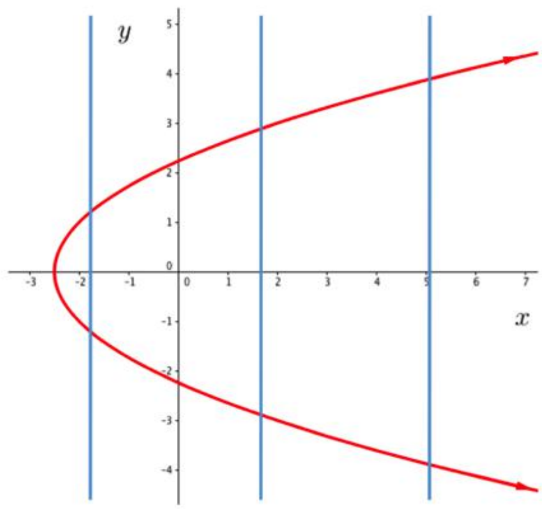
a) La gráfica corresponde a una *relación* pero no a una función pues existen rectas verticales que intersecan a la gráfica en más de un punto. Esto quiere decir que existen preimágenes con más de una imagen.



b) La gráfica si representa a una función, se puede verificar haciendo la prueba de la recta vertical.



c) La prueba de la vertical, indica que la gráfica no representa a una función. Existen preimágenes con más de una imagen.



Representación verbal de una función

La **representación verbal de una función real de una variable real** f es una descripción de la función en palabras. Es una frase que describe como la variable de entrada se relaciona con la variable de salida.

Se nos presenta un texto donde se expresan ciertas características de la función en forma literal.

Este tipo de representación se vincula con la capacidad lingüística de las personas.

Ejemplo 13 ____________________

Nicolás deposita cien mil colones en una cuenta de ahorros a una tasa de interés anual de ocho por ciento durante diez años. Si el interés se compone anualmente (se acumula anualmente), ¿cuánto dinero tendrá al finalizar los diez años si Nicolás no retira dinero ni hace nuevos depósitos?

Esta descripción verbal presenta algunas características y datos de una función que relaciona la cantidad de colones en la cuenta de ahorros (valor futuro) con el depósito inicial (principal), la tasa de interés anual y el tiempo (en años), un caso particular de la representación algebraica o modelo

$$A(t) = P \times (1 + i)^t$$

P es la cantidad depositada inicialmente, i es la tasa de interés pagada anualmente por el banco por la cuenta de ahorro (en forma decimal), t el tiempo en años y $A(t)$ la cantidad de dinero en la cuenta de ahorros en el tiempo t.

Ejemplo 14 ___________________

La cantidad de bacterias en una colonia duplica cada cinco horas. Si la población inicial es de 250 bacterias, ¿cuántas bacterias tendrá la colonia después de un día?

El problema describe verbalmente la función cuya representación algebraica o modelo es

$$C(t) = 250 \times 2^{t/5}$$

en donde *t* representa el tiempo (en horas) y *C(t)* la cantidad de bacterias en el tiempo *t*.

Existen otras representaciones para una función que, de alguna forma, son equivalentes a las presentadas aquí.

Por ejemplo, como un conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$, x pertenece al dominio de la función. Pero esta forma es equivalente a la representación tabular.

Las principales funciones que utilizaremos

Las funciones más importantes que utilizaremos en este Mini MOOC son:

Función lineal

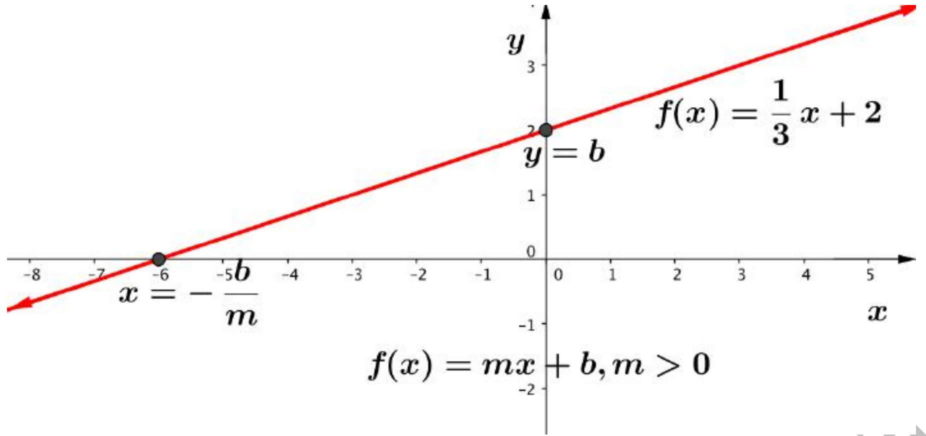
Sea f una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con representación algebraica $f(x) = mx + b$, con m y b constantes reales.

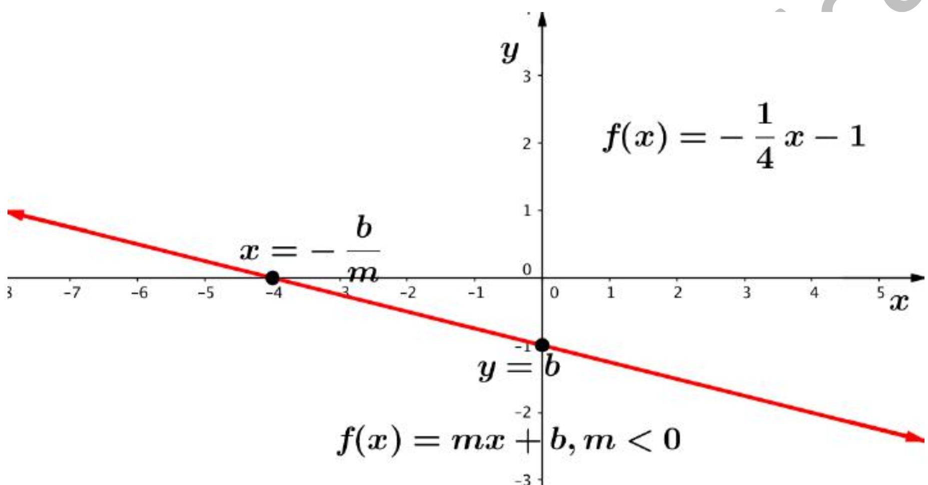
La función f se denomina *función lineal*.

La representación gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m y ordenada en el origen b.

Si la pendiente $m \neq 0$ la gráfica de de la función lineal con dominio $\mathbb{R}$ inteseca el eje x de las abscisas en $x = -\frac{b}{m}$.

Cuando $m = 0$ la recta es horizontal y su representación algebraica es $y = b$.





Función cuadrática

Sea f una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c constantes reales, $a \neq 0$.

La función f se denomina *función cuadrática*.

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y que se abre hacia abajo si $a < 0$.

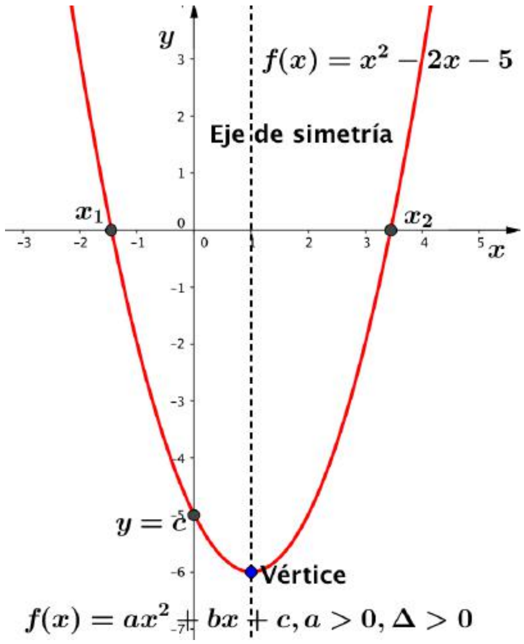
- Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es positivo la parábola interseca el eje x de las abscisas en los ceros de la función f que corresponden a las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

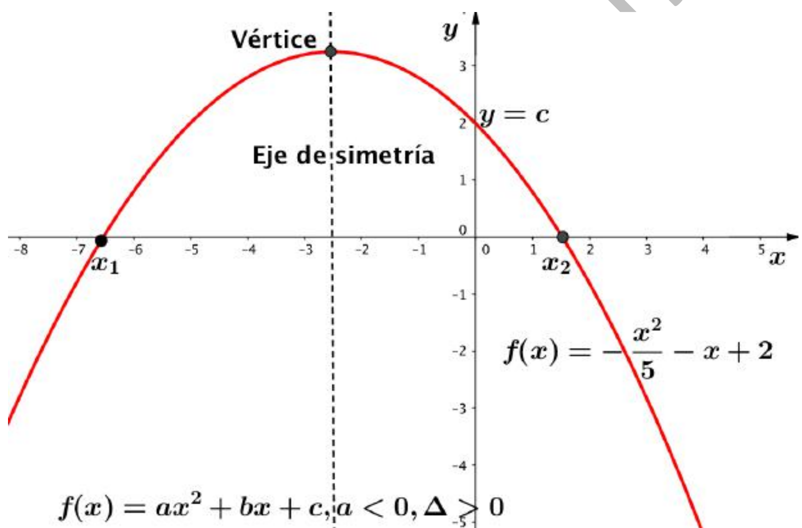
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

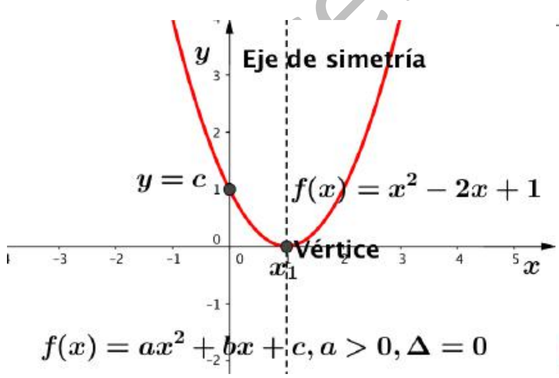
- Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ la parábola interseca el eje x de las abscisas en el único cero de la función f que corresponde a la raíz de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

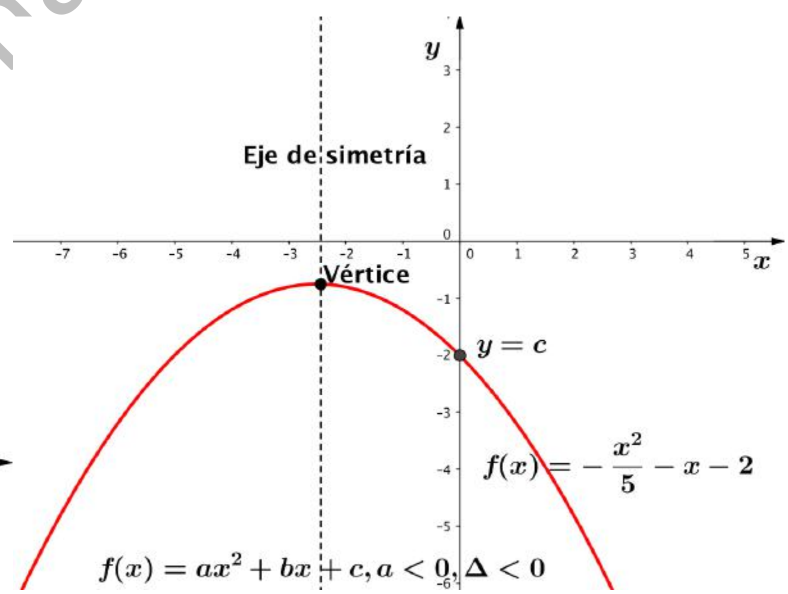
$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negatvo la parábola no interseca el eje x.
- El punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola.
- La recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ es el eje de simetría de la parábola.









Ecuación normal o forma estándar de la parábola

La representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ de una función cuadrática puede ser escrita en la forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

en dónde h, k dependen de a, b, c.

Esta nueva representación es muy conveniente para ubicar el vértice de la parábola, que es el punto (h, k). Para obtenerla se utiliza el método de completar cuadrados:

Método de completar cuadrado

El método de **completar cuadrado** consiste en partir del binomio $x^2 + 2ax$, sumar y restar el término a^2 para no cambiar el valor de la expresión algebraica, y así tener $(x^2 + 2ax + a^2) - a^2$. La expresión que se encuentra entre paréntesis es el trinomio cuadrado perfecto $(x+a)^2$. Por lo tanto

$$x^2 + 2ax = (x^2 + 2ax + a^2) - a^2 = (x+a)^2 - a^2$$

Pasos para completar cuadrado en la expresión algebraica $\boldsymbol{ax^2 + bx}$

1. Se factoriza el coeficiente a: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$
2. Se determina la mitad del coeficiente lineal dentro del paréntesis, es decir la mitad de $\frac{b}{a}$ que es $\frac{b}{2a}$ y se eleva al cuadrado: $\frac{b^2}{4a^2}$
3. Sumar y restar la cantidad anterior dentro del paréntesis. Luego se obtiene un trinomio cuadrado perfecto:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Por lo tanto

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

De lo anterior,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

que es de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ con $h = -\frac{b}{2a}$, $k = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ las coordenadas del vértice de la parábola.

Ejemplo 15 ___________________

Determine el vértice, eje de simetría, ordenada en el origen e intersecciones con el eje de las abscisas para la parábola con representación algebraica $f(x) = 3x^2 + 2x$, utilizando el método de completar cuadrados.

Solución

Como el coeficiente de x^2 es diferente de uno, entonces hay que factorizar el coeficiente 3 del monomio $3x^2$ antes de completar cuadrado.

$$3x^2 + 2x = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right)$$

En el binomio $x^2 + \frac{2}{3}x$ ocupamos la mitad del coeficiente lineal. Esta mitad es $\frac{1}{3}$ y su cuadrado es $\frac{1}{9}$. Por lo tanto, hay que sumar y restar $\frac{1}{9}$ al binomio

$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right)$

$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) =$ Se suma y resta $\frac{1}{9}$

$= 3\left(\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\right)$ Se agrupa el trinomio. Note que $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

Por lo tanto, $f(x) = 3x^2 + 2x = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$.

El vértice de la parábola es el punto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Además la recta vertical $x = -\frac{1}{3}$ es el eje de simetría de la parábola.

La ordenada en el origen es $f(0) = 3(0)^2 + 2(0) = 0$. Las intersecciones con el eje de las abscisas son los ceros o raíces de la función, es decir las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$f(x) = 3x^2 + 2x = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0$$

La primera estrategia consiste en utilizar factorización

$$3x^2 + 2x = x(3x + 2) = 0$$

Cada factor del producto se anula: $x = 0$, $3x + 2 = 0$. La parábola interseca el eje x en $x = 0$, y en $x = -\frac{2}{3}$.

Ejemplo 16 ___________________

Dada la parábola con representación algebraica $g(x) = 5x^2 - 6x + 1$, determine su vértice, eje de simetría, ordenada en el origen e intersecciones con el eje de las abscisas,

a. Utilizando el método de completar cuadrados.
b. Utilizando las fórmulas dadas en cuadro "Función cuadrática".

Solución

a. Lo primero que tenemos que hacer es factorizar el 5 del monomio $5x^2$ en el binomio que queremos completar cuadrado.

$$5x^2 - 6x + 1 = 5\left(x^2 - \frac{6}{5}x\right) + 1$$

En el binomio que se encuentra dentro del paréntesis el coeficiente lineal es $-\frac{6}{5}$ y su mitad corresponde a $-\frac{3}{5}$. Luego su cuadrado es $\frac{9}{25}$, este es el valor que se suma y resta dentro del paréntesis de la siguiente manera:

$5\left(x^2 - \frac{6}{5}x\right) + 1 + \frac{9}{25} - \frac{9}{25}$ Sumando y restando $\frac{9}{25}$

$= 5\left(\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}\right) - \frac{9}{25}\right) + 1$ Agrupando el trinomio donde existe el trinomio cuadrado perfecto.

Como $x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \left(x - \frac{3}{5}\right)^2$ entonces

$$\begin{aligned} &5\left(\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}\right) - \frac{9}{25}\right) + 1 \\ &= 5\left(\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25}\right) + 1 \\ &= 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{5} + 1 \\ &= 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(x) = 5x^2 - 6x + 1 = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$.

El vértice de la parábola es el punto $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. El eje de simetría es la recta vertical $x = \frac{3}{5}$. La parábola interseca el eje de las ordenadas en $g(0) = 5(0)^2 - 6(0) + 1 = 1$. La ordenada en el origen es $y = 1$.

Para determinar los ceros de la función g sin utilizar la fórmula general, es conveniente utilizar la expresión con cuadrado completado:

$$g(x) = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} = 0$$

Despejando: $5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$

$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ Dividiendo por 5

$x - \frac{3}{5} = \pm\frac{2}{5}$ Sacando raíz cuadrada

$x = \pm\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ Sumando $\frac{3}{5}$ a ambos lados

Para el signo $+$ en $\pm\frac{2}{5}$ tenemos $x = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Para el signo $-$ en $\pm\frac{2}{5}$ tenemos $x = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

Por lo tanto la parábola interseca el eje x en $x = \frac{1}{5}$ y en $x = 1$.

b. Utilizando las fórmulas mencionadas con $a = 5, b = -6, c = 1$

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{-6}{10}, -\frac{36-20}{20}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. El eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{5}$. La ordenada en el origen es $g(0) = 1$, y los ceros de g son

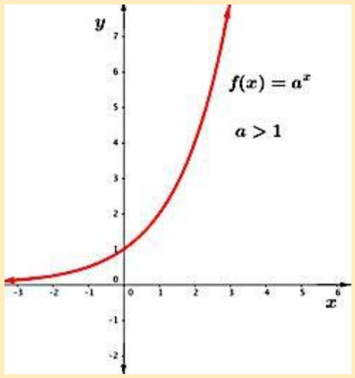
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 - 4}{10} = \frac{1}{5}$$

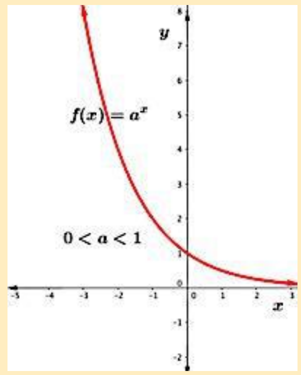
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 + 4}{10} = 1$$

Función exponencial

Una **función *exponencial*** con *base a* es una función con representación algebraica $f(x) = a^x$ donde x es un número real y a es un número real positivo distinto de 1.

El dominio de f es $\mathbb{R}$ y su rango o recorrido es el conjunto de todos los números reales positivos $f: \mathbb{R} \to \,]0, \infty[$.





1. La gráfica de $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ contiene el punto (0,1) pues $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.
2. Como $a^1 = a$ entonces la gráfica de f contiene el punto (1, a)

Nota: Cuando la base es el número irracional e, conocido como número de Euler, encontramos muchas aplicaciones interesantes para la función exponencial $f(x) = e^x$.

Propiedades de las potencias con exponentes reales

Sean a y b son números reales positivos distintos de 1, x, y son reales. Entonces

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ Multiplicación de potencias con igual base: se conserva la base y se suman lo exponentes
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ División de potencias con igual base: se conserva la base y se restan los exponentes
3. $\left((a^x)\right)^y = a^{xy}$ Potencia de potencia: se multiplican los exponentes
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ Potencia de un producto es el producto de las potencias
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ Potencia de un cociente es el cociente de las potencias

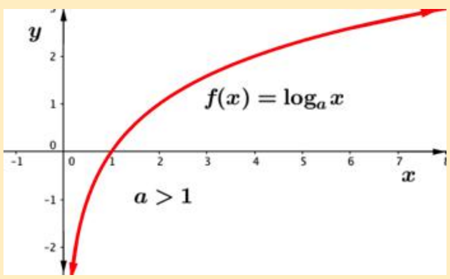
Por convención se define $a^0 = 1$.
Un caso particular de la segunda propiedad, cuando $x = 0$, es $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$

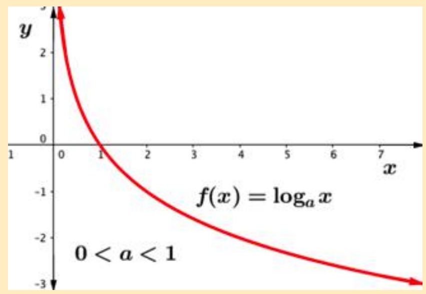
Función logarítmica

La función *logarítmica* en base a se define como sigue:

$y = f(x) = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$ para x real positivo y a real positivo distinto de 1.

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales positivos y su rango o recorrido es $\mathbb{R}$.





La gráfica de $f(x) = \log_a x$, x real positivo, a real positivo, $a \neq 1$ contiene los puntos (1,0) y (a,1), es decir, $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$ pues $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.

Por lo tanto el $\log_a x$ es la potencia de a que es igual a x.

Ejemplo 17 ____________________

a. $\log_3 81 = 4$ pues $3^4 = 81$
b. $\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = -6$ pues $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Notas:
Cuando la base es 10, es costumbre eliminar la base y escribir $\log x$ en lugar de $\log_{10} x$.
Cuando la base es el número irracional e el $\log_e x$ se escribe como $\ln x$, y se conoce como *logaritmo natural*.

Propiedades de los logaritmos

Las propiedades importantes de la función logarítmica en base a son:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3. $\log_a(x^n) = n \log_a x$

4. $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$

5. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ para b real positivo distinto de 1 (Cambio de base)

Función raíz cuadrada

La función con representación algebraica $f(x) = \sqrt{ax+b}$, a, b reales, x real tal que $ax + b \geq 0$ se denomina función raíz cuadrada.

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales x que satisfacen $ax + b \geq 0$ y su rango o recorrido es el conjunto de los números reales no negativos, $[0, \infty[$.

Ejemplo 18 ___________________

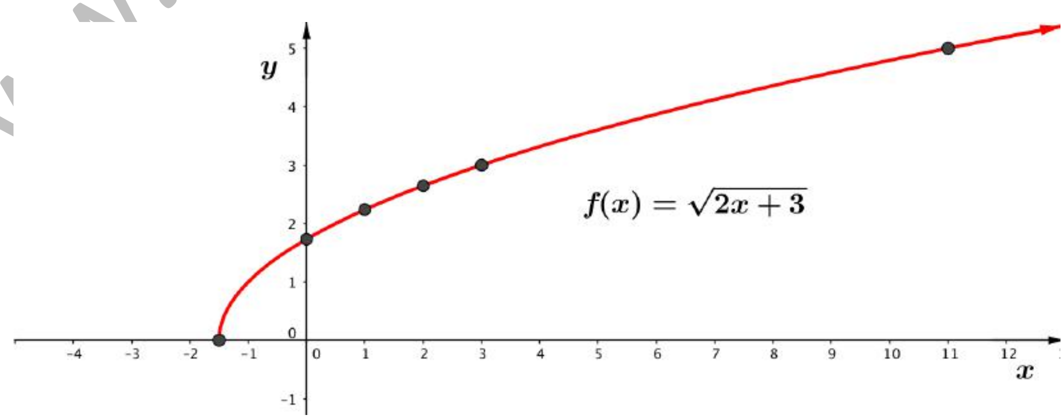
Graficar la función con representación algebraica $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Solución

El dominio de la función dada es el conjunto de los números reales x que satisfacen $2x + 3 \geq 0$, es decir $x \geq -\frac{3}{2}$. Su recorrido es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.

Sigue una tabla con algunos puntos de la gráfica de la función

x	$-3/2$	0	1	2	3	11
$f(x) = \sqrt{2x+3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	3	5



Ejemplo 19

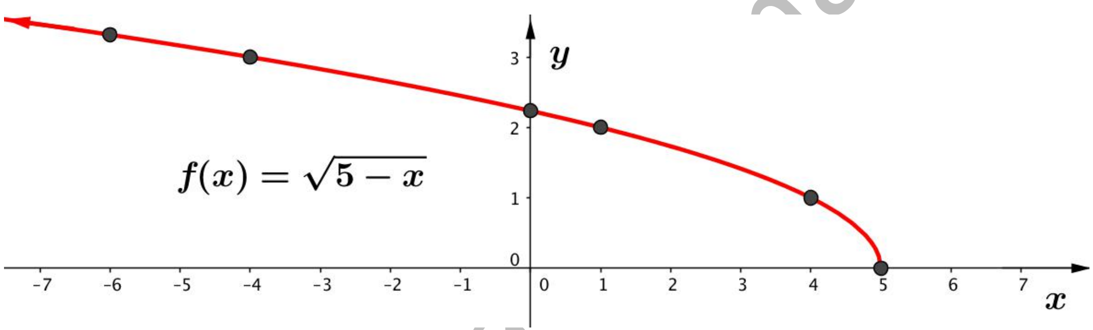
Graficar la función con representación algebraica $f(x) = \sqrt{5-x}$.

Solución

El dominio de la función dada es el conjunto de los números reales x que satisfacen $5 - x \geq 0$, es decir $-x \geq -5$ con solución $x \leq 5$. Su recorrido es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.

Sigue una tabla con algunos puntos de la gráfica de la función

x	-6	-4	0	1	4	5
$f(x) = \sqrt{5-x}$	$\sqrt{11}$	3	$\sqrt{5}$	2	1	0



Representaciones de funciones y sus transformaciones

La traducción dentro de una misma representación o entre diferentes representaciones es esencial en la enseñanza y en el aprendizaje de las funciones pues permite que el estudiante capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo su comprensión.

Ejemplo 20

Transformación de la representación verbal a la algebraica

Representar algebraicamente la siguiente representación verbal:

La fuerza de atracción entre dos objetos con masas m_1 y m_2 es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Solución

Si etiquetamos con la letra r la distancia entre las masas m_1 y m_2, que supondremos masas puntuales y F para fuerza de atracción entonces tenemos:

$F \propto m_1 m_2$ la fuerza es directamente proporcional al producto de las masas
$F \propto \frac{1}{r^2}$ la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

Por lo tanto, si k es la constante de proporcionalidad, podemos escribir:

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Ejemplo 21 ____________________

Transformación entre representaciones tabulares

Dada la tabla

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	8	3

Complete la tabla que sigue

x	0	1	2	3
$2f(x)+3$				

Solución

Si $g(x) = 2f(x) + 3$ entonces $g(0) = 2f(0) + 3 = 2(1) + 3 = 5$, $g(1) = 2f(1) + 3 = 2(5) + 3 = 13$, $g(2) = 2f(2) + 3 = 2(8) + 3 = 19$, $g(3) = 2f(3) + 3 = 2(3) + 3 = 9$.

x	0	1	2	3
$2f(x)+3$	5	13	19	9

En esta solución utilizamos una tabla de valores para obtener otra tabla . Esto es lo que se conoce como un tratamiento dentro de un misma representación que en este caso es tabular-tabular. Pero también utilizamos la representación algebraica para hacer los cálculos de los valores de la función g. Esto se conoce como una transformación o conversión entre representaciones. Claro que podríamos hacer los cálculos directamente dentro de la representación tabular.

Ejemplo 22 ___________________

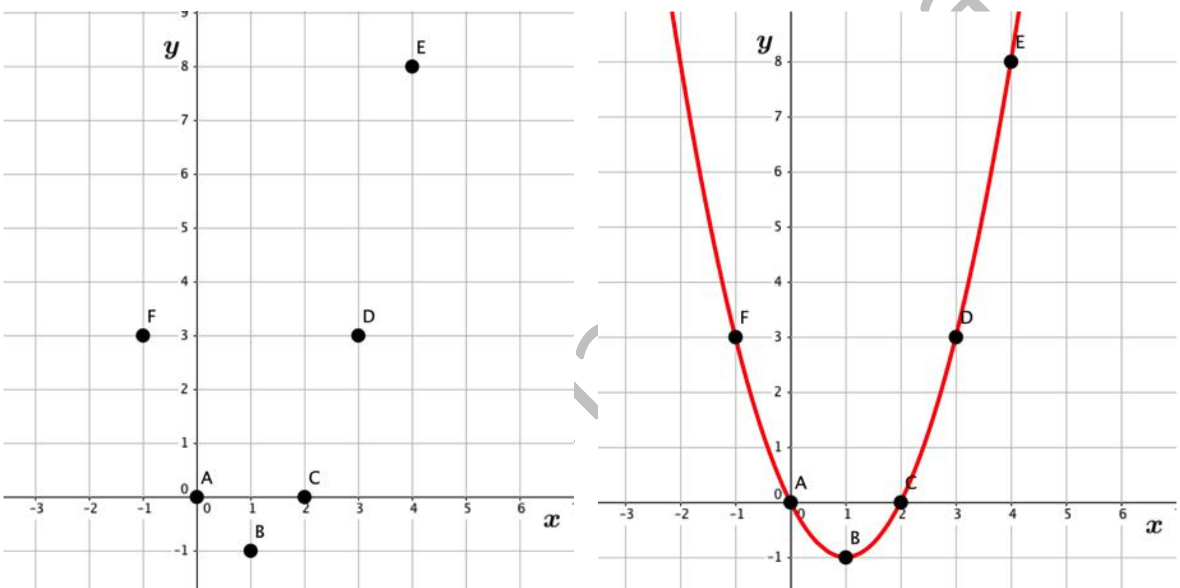
Transformación de representación tabular a gráfica

Construya una gráfica con representación tabular

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8	15

Solución

Graficamos primeramente los puntos dados y posteriormente los unimos con una curva suave. Esto nos da una posible representación gráfica para la función.

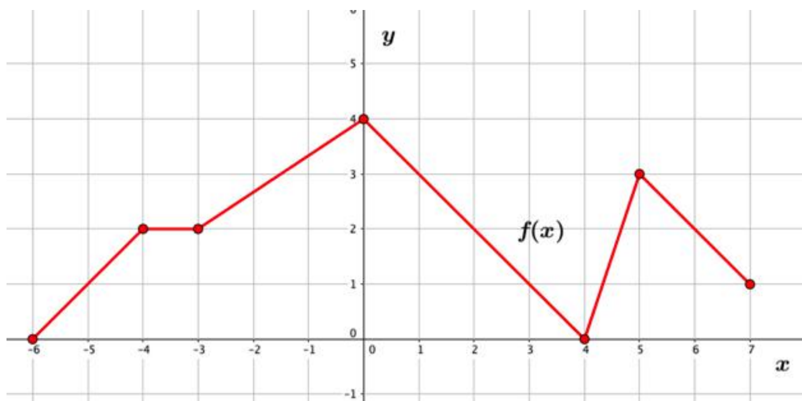


En este ejemplo hemos partido de una representación tabular y obtenido una representación gráfica. Es una transformación entre dos representaciones: tabular-gráfica.

Ejemplo 23 ____________________

Transformación de representación gráfica a tabular

Dada la representación gráfica de una función f



complete la siguiente tabla

x	-6	-5	$-3{,}5$	0	2	4	$4{,}5$	$6{,}3$
$f(x)$								

Solución

Algunos datos de la tabla pueden ser observados directamente en la representación gráfica. El cuadriculado en la representación facilita la ubicación de los valores de ciertas imágenes. Por ejemplo:

$f(-6) = 0,\ f(-5) = 1,\ f(-3{,}5) = 2,\ f(0) = 4, f(2) = 2,\ f(4) = 0$. Pero para $x = 4{,}5$ y para $x = 6{,}3$ sus imágenes no son ubicables de forma tan directa.

En el intervalo $[4, 5]$ tenemos un segmento de recta que contiene los puntos $(4, 0)$ y $(5, 3)$. Su pendiente es

$$m = \frac{3-0}{5-4} = 3$$

Su ecuación es $y = mx + b = 3x + b$. Para encontrar el valor de b podemos utilizar cualquiera de los dos puntos. Si utilizamos el punto $(4, 0)$ tendremos

$$0 = 3 \times 4 + b$$

Por lo tanto $b = -12$, y el segmento se representa algebraicamente como $y = 3x - 12$. Cuando $x = 4{,}5$ su imagen es $y = 3 \times 4{,}5 - 12 = 1{,}5$. De esta forma logramos calcular $f(4{,}5) = 1{,}5$.

En el intervalo $[5, 7]$ tenemos un segmento de recta que contiene los puntos $(5, 3)$ y $(7, 1)$. Su pendiente es

$$m = \frac{1-3}{7-5} = -1$$

Su ecuación es $y = mx + b = -x + b$. Para encontrar el valor de b podemos utilizar cualquiera de los dos puntos. Si utilizamos el punto $(7, 1)$ tendremos

$$1 = -7 + b$$

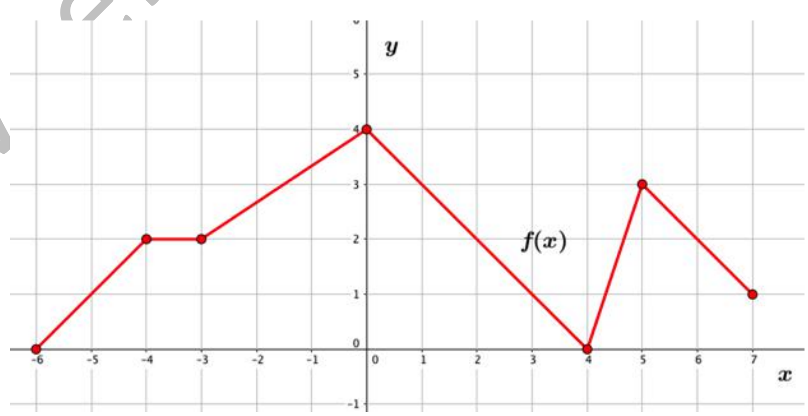
Por lo tanto $b = 8$, y el segmento se representa algebraicamente como $y = -x + 8$. Cuando $x = 6{,}3$ su imagen es $y = -6{,}3 + 8 = 1{,}7$. De esta forma logramos calcular $f(6{,}3) = 1{,}7$. La respuesta es

x	-6	-5	$-3{,}5$	0	2	4	$4{,}5$	$6{,}3$
$f(x)$	0	1	2	4	2	0	$1{,}5$	$1{,}7$

Ejemplo 24

Transformación de representación gráfica a gráfica

Dada la representación gráfica de una función f,



¿Cuál es la representación gráfica de la función $g(x) = 2f(x) - 1$?

Solución

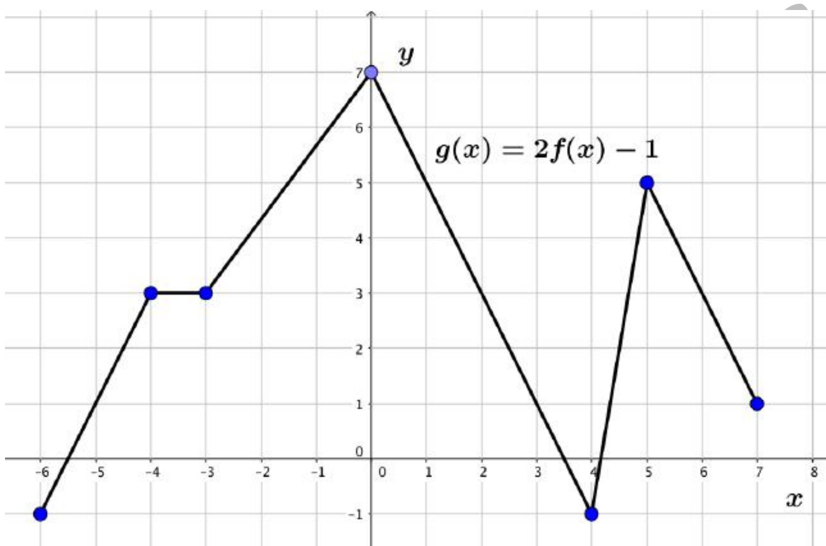
Como la representación gráfica de f está formada por segmentos de rectas entonces es más sencillo poder trasladar y dilatar dichos segmentos. Para esto basta transformar los extremos de los segmentos. Como

$g(-6) = 2f(-6) - 1 = -1,\quad g(-4) = 2f(-4) - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3, g(-3) = 2f(-3) - 1 = 3$

$g(0) = 2f(0) - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7,$

$g(4) = 2f(4) - 1 = -1, g(5) = 2f(5) - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

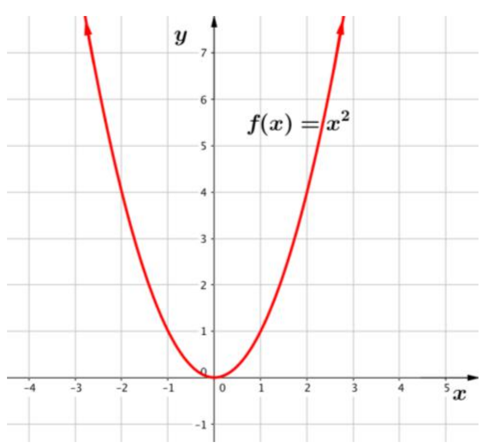
$g(7) = 2f(7) - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ entonces la representación gráfica de g es



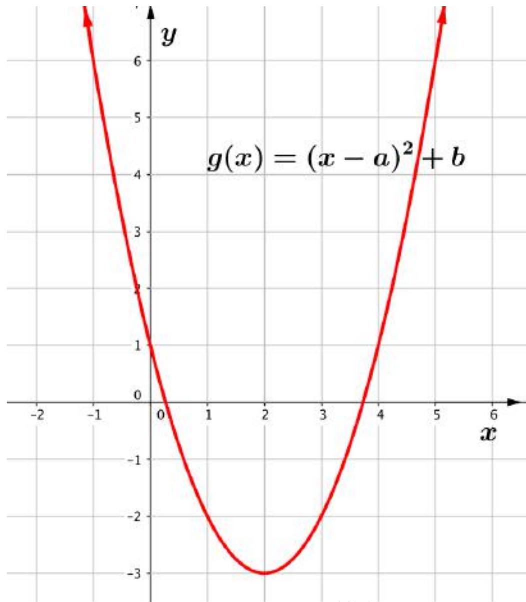
Ejemplo 25 ___________________

Transformación de representación algebraica y gráfica a gráfica y algebraica

Abajo vemos la representación gráfica de función con representación algebraica $f(x) = x^2$



es utilizada para producir una nueva representación gráfica de una función con representación algebraica $g(x) = (x - a)^2 + b$



Determine los valores de a y b.

Solución

La gráfica de g consta de una traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha. Observe que el vértice de la parábola representada por f se encuentra en el origen mientras que el de la representada por g se encuentra en $x = 2$. Esto significa que hay que reemplazar x^2 por $(x - 2)^2$. Además existe una traslación vertical de 3 unidades hacia abajo. Esto implica que tenemos que restar 3 en la última expresión, es decir,

$$g(x) = (x - 2)^2 - 3$$

Por lo tanto $a = 2$, $b = -3$.

En general

Traslaciones y reflexiones de gráficas de funciones

Sea f una función, a una constante real positiva.

Sean $f_1(x) = f(x) + a,\ f_2(x) = f(x) - a,\ f_3(x) = f(x + a),\ f_4(x) = f(x - a),$

$g(x) = -f(x),\ h(x) = f(-x)$. Entonces *la gráfica* de

1. $f_1(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ a unidades hacia arriba.

2. $f_2(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ a unidades hacia abajo.

3. $f_3(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ a unidades hacia la izquierda.

4. $f_4(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ a unidades hacia la derecha.

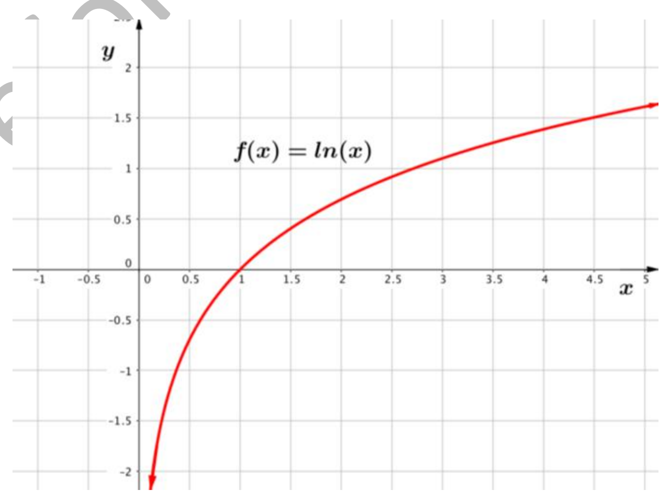
5. $g(x)$ se obtiene haciendo una reflexión de la gráfica de $f(x)$ sobre el eje horizontal.

6. $h(x)$ se obtiene haciendo una reflexión de la gráfica de $f(x)$ sobre el eje vertical.

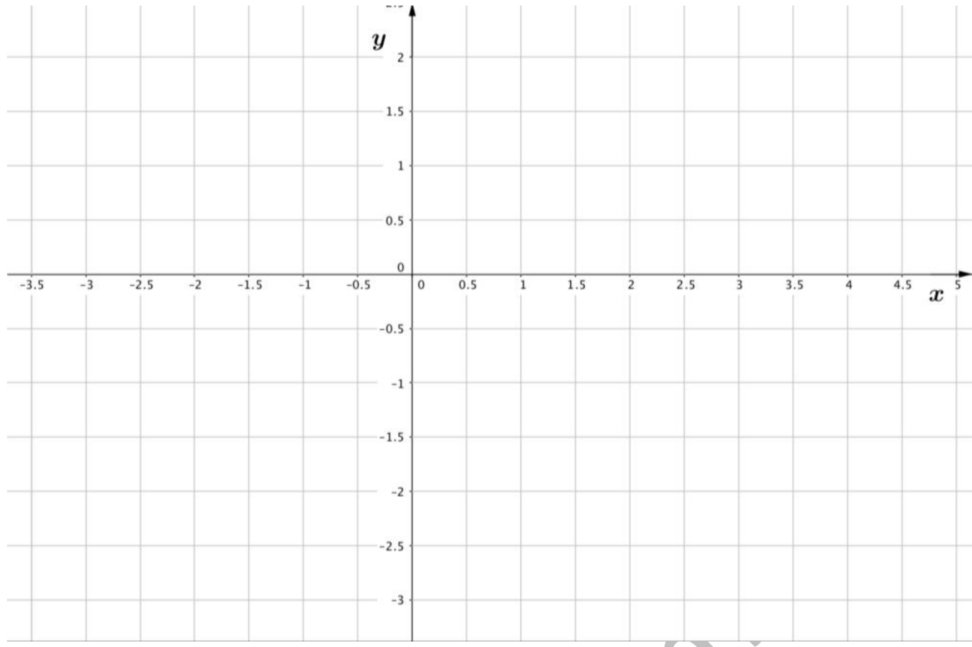
Ejemplo 26 ____________________

Transformación de representación algebraica y gráfica a algebraica y gráfica

Abajo vemos la representación gráfica de función con representación algebraica $f(x) = \ln(x)$



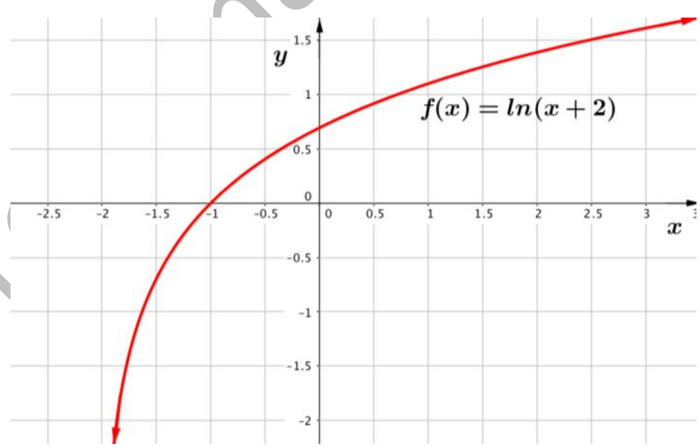
Utilizarla para esbozar la gráfica de la función con representación algebraica $g(x) = -f(x + 2)$.



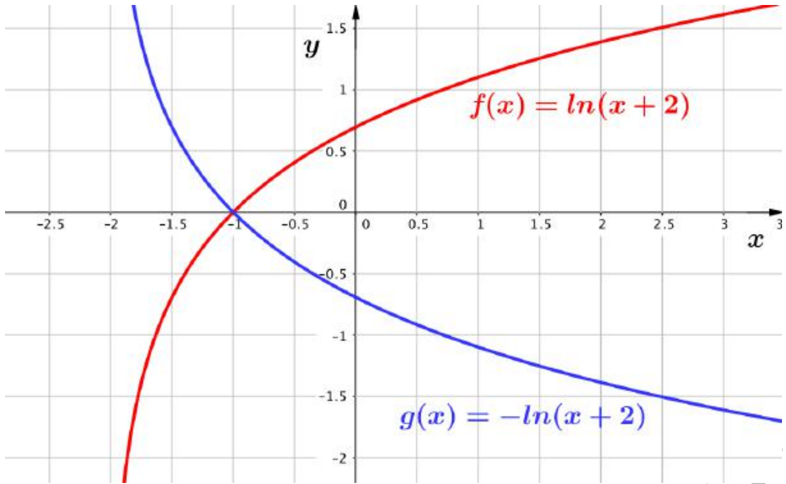
Solución

La gráfica de g se obtiene mediante una traslación de la gráfica de f dos unidades hacia la izquierda y posteriormente haciendo una reflexión sobre el eje de las abscisas, eje x.

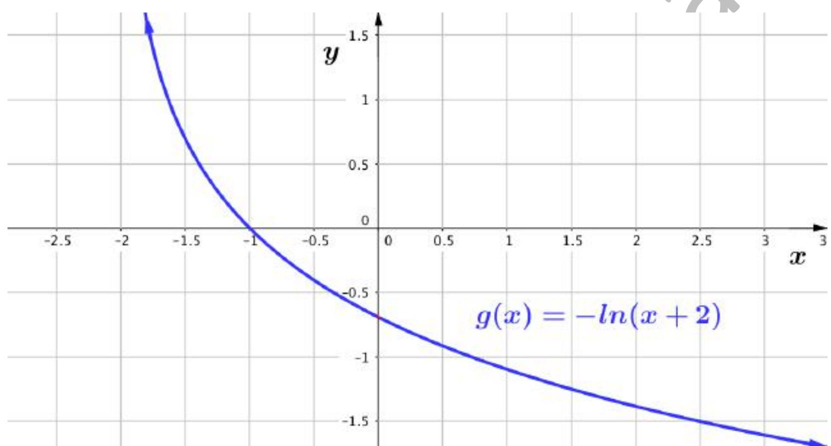
La gráfica que sigue corresponde a la traslación de la gráfica de la función original 2 unidades hacia la izquierda



Ahora hacemos una reflexión sobre el eje x. El eje de las abscisas funciona como un espejo plano en dónde la gráfica es reflejada. Graficaremos ambas en un mismo sistema cartesiano para que usted pueda observar la reflexión.



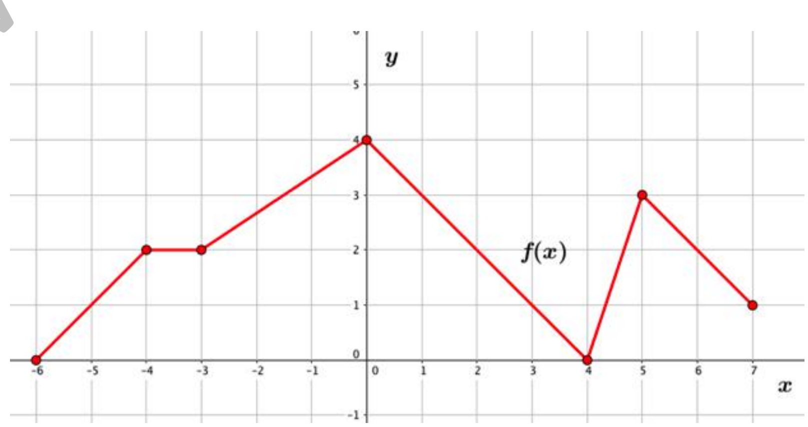
De esta forma obtenemos la representación gráfica de la función $g(x) = -f(x+2)$.



Ejemplo 27 ____________________

Transformación de representación gráfica y algebraica a gráfica

Considere la siguiente representación gráfica de una función f con dominio $[-6, 7]$ y recorrido o rango $[0, 4]$.

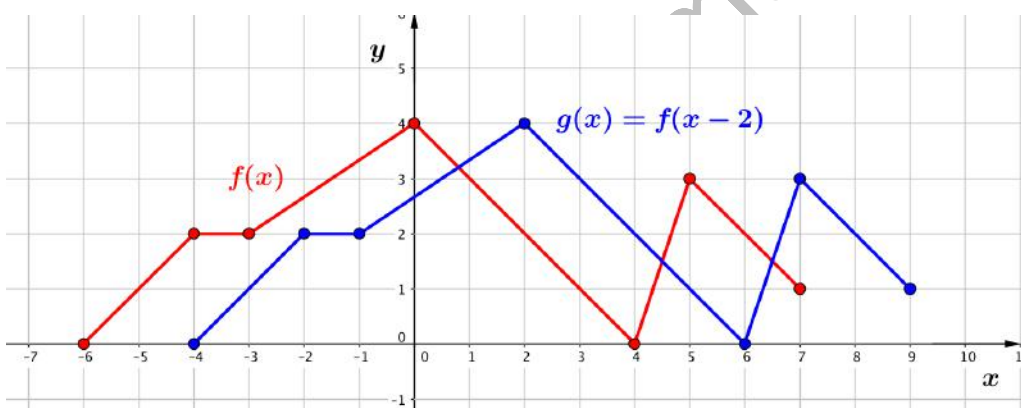


a. Construya la gráfica de la función g cuya representación algebraica es $g(x) = f(x-2)$. ¿Cuál es el dominio de g? ¿Cuál es el recorrido de g?
b. Construya la gráfica de la función h cuya representación algebraica es $h(x) = f(x-2) - 3$. ¿Cuál es el dominio de h? ¿Cuál es el recorrido de h?
c. Construya la gráfica de la función w cuya representación algebraica es $w(x) = f(-x)$. ¿Cuál es el dominio de w? ¿Cuál es el recorrido de w?

Solución

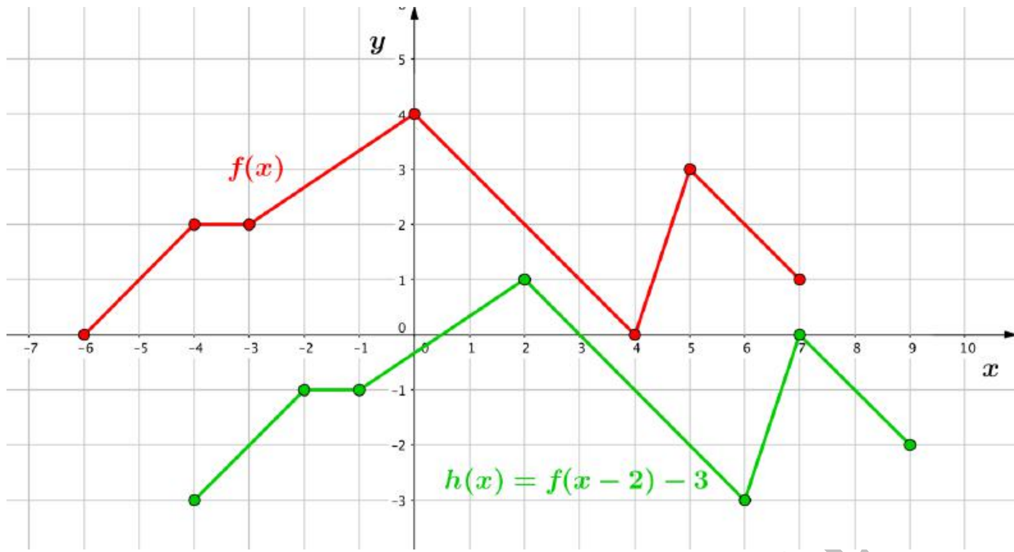
a. La gráfica de g se obtiene mediante una traslación de la gráfica de f dos unidades hacia la derecha. Por lo tanto, al sumar 2 unidades a los valores del dominio de f, obtendremos el dominio de la función g: $[-6+2, 7+2] = [-4, 9]$.

   Como la traslación es horizontal entonces el recorrido de la función g es el mismo de la función f. Por lo tanto el recorrido de la función g es: $[0, 4]$.



b. La gráfica de h se obtiene mediante una traslación de la gráfica de f dos unidades hacia la derecha y tres unidades hacia abajo. Debido a la traslación de dos unidades hacia la derecha hay que sumar 2 unidades a los valores del dominio de f para obtener el dominio de h: $[-4, 9]$.

   El recorrido de h se obtiene al restar 3 unidades a los valores del recorrido de f, debido a la traslación de tres unidades hacia abajo. Por lo tanto el recorrido de h es el intervalo $[0-3, 4-3] = [-3, 1]$.



c. La gráfica de w se obtiene mediante una reflexión de la gráfica de f sobre el eje y. En este caso el eje y funciona como un espejo plano, y como el argumento $-x$ de la función f se encuentra entre -6 y 7 entonces x, argumento de w se encuentra entre -7 y 6. En otras palabras como en $f(-x)$

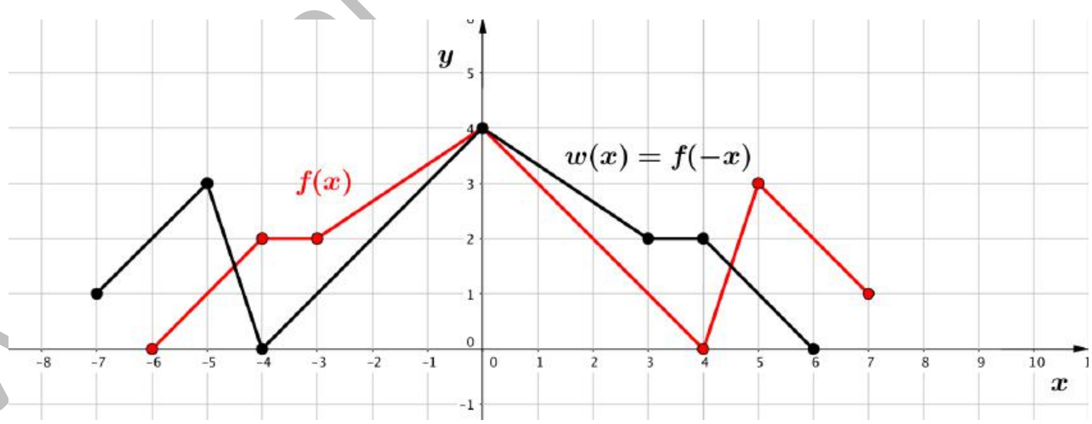
$$-6 \leq -x \leq 7$$

entonces,

$$-7 \leq -x \leq 6$$

El dominio de la función w es el intervalo $[-7, 6]$.

El recorrido de w es el mismo de f : $[0, 4]$.



Cada punto en la gráfica en negro se obtiene al hacer una simetría axial respecto al eje y del punto correspondiente en la gráfica en rojo.

Índice

Conclusiones

Hemos finalizado el material complementario para el Mini MOOC *Representaciones de funciones*, de la Colección Preparación Matemática Bachillerato. Esperamos que el material haya sido de mucho provecho y esperamos sus comentarios y sugerencias para que hagamos correcciones y cambios en futuras versiones del material. Gracias y éxitos en sus estudios y en su vida personal.

Bibliografía

Aufmann R., Barker V.,Nation R. (2011). *College Algebra and Trigonometry*. Seventh Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Harshbarger R., Yocco L. (2013). *College Algebra in Context*. 4th Edition. Pearson

Larson R. (2011). *Algebra and Trigonometry*. Eighth Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics

Rockswold G. (2012). *Essentials of College Algebra: with Modeling / Visualization*. 4th Edition. Addison-Wesley

Swokowski, E. y Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 13a. edición. Cengage Learning

Créditos

Representaciones de funciones. *Material complementario*, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Representaciones de funciones*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.* Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edison de Faria Campos

Revisores
Hugo Barrantes, Johanna Mena, Keibel Ramírez, Ángel Ruiz

Edición final de este documento
Johanna Mena, Hugo Barrantes

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Representaciones de funciones. Material complementario*, San José, Costa Rica: autor.