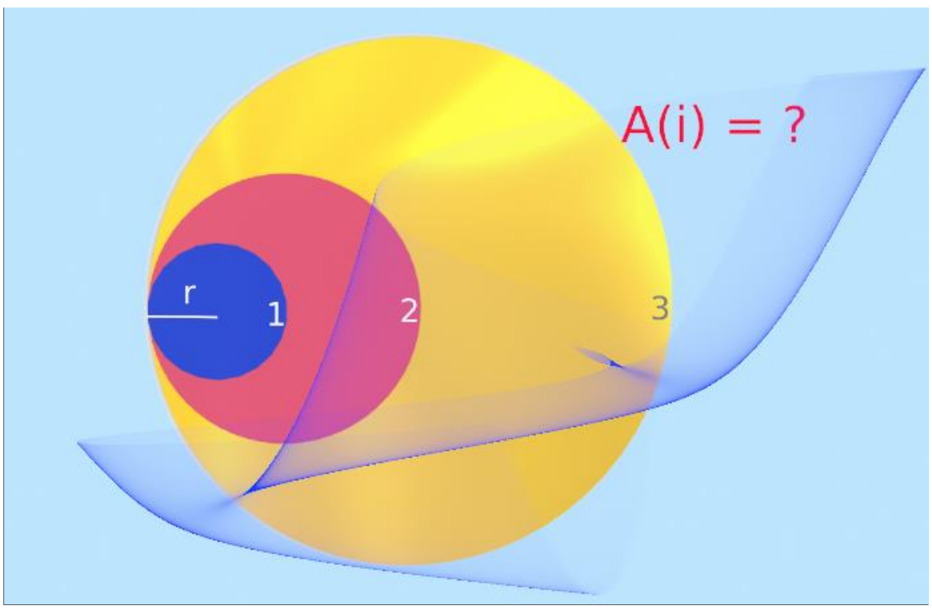
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Mini MOOC
Colección Preparación Matemáticas Bachillerato
Relaciones y álgebra



PMB-RA03: Aplicaciones de las funciones
Material complementario
Costa Rica

2017

Tabla de contenidos

Índice alfabético

Introducción

Este documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatematica.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Aplicaciones de las funciones* (http://minimoocs.reformamatematica.net/).

El propósito del Mini MOOC *Aplicaciones de las Funciones* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se aplican las funciones matemáticas básicas: lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica, exponencial y combinaciones de ellas para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

Al inicio del documento se le proporciona un índice alfabético en el que se da un listado, en orden alfabético, de los temas o contenidos con el número de página donde aparecen. Si usted hace clic sobre dicho número, será remitido a la página donde se proporciona el concepto, tema o contenido correspondiente. Se puede regresar al índice alfabético desde cualquier página haciendo clic sobre la palabra Índice que aparece en el encabezado de todas ellas.

Es importante aclarar que el presente documento no es un libro de texto y tampoco es exhaustivo. Procuramos que sea autosuficiente para los propósitos de este Mini MOOC pero no está pensado para ser utilizado como un medio para organizar la acción de aula.

Aplicaciones de las funciones

Introducción

Esta sección contiene varias aplicaciones de las funciones a situaciones de la vida cotidiana y situaciones matemáticas.

Ejemplos de aplicaciones de funciones

Ejemplo 1 ___________________

Keibel lanza una piedra en un lago, creando ondas circulares que se expanden de tal forma que el radio aumenta con una rapidez de 90 centímetros por segundo.

a. Determine el radio de las ondas circulares como función del tiempo, $r(t)$ (criterio).
b. Determine el área de las ondas circulares como función del radio, $A(r)$ (criterio)

Solución

a. Como el radio de cada onda circular aumenta 90 centímetros en cada segundo, entonces en un tiempo de t segundos el radio aumentará *90t* centímetros. Por lo tanto, el criterio que relaciona el radio con el tiempo es

$$r(t) = 90t$$

con $t \geq 0$.

b. El área de un círculo de radio r es $A(r) = \pi r^2,\ r \geq 0$, y esta es la relación entre el área y el radio de un círculo.
Ambas relaciones se consideran relaciones funcionales.

Ejemplo 2 ___________________

En las vías del ferrocarril, se puede ver que siempre existe un espacio libre en la unión de los rieles. Este espacio es necesario porque el metal con que se construyen se dilata con el calor. Por eso las vías necesitan ese espacio, para no curvarse con temperaturas altas. Estudios de ingeniería han obtenido la relación entre las distintas temperaturas y el alargamiento de los rieles, como muestra la tabla siguiente:

Temperatura en ºC	Dilatación en mm
-12	$-1{,}4$
8	1
25	3
50	6
75	9

Es posible tomar dos puntos de la tabla para aproximar una función que modele la situación, por ejemplo si se toma $(-12,\ -1{,}4)$ y $(75{,}9)$, entonces la pendiente es:

$$m = \frac{9 — 1{,}4}{75 - -12} = \frac{10{,}4}{87} = \frac{52}{435}$$

donde $y_2 = 9$, $y_1 = -1{,}4$, $x_2 = 75$ y $y_1 = -12$.
Luego, como $y = mx + b$ se tiene:

$$9 = \frac{52}{435} \cdot 75 + b$$
$$b = \frac{1}{29}$$

Por lo tanto, $y = \frac{52}{435}x + \frac{1}{29}$

La temperatura máxima promedio en Cartago es de 26º, entonces el alargamineto de los rieles se determina calculando la imagen de 26 en el criterio de la función

$$y = \frac{52}{435} \cdot 26 + \frac{1}{29} = \frac{1367}{435} \approx 3{,}14\text{mm}$$

A la temperatura indicada los rieles sufren un alargamiento de 3,14mm aproximadamente.

Ejemplo 3

La empresa de correos internacionales FedEx ofrece un portafolio de soluciones para satisfacer las necesidades de envíos internacionales de documentos o paquetes. Entre estos servicios se encuentran en los de prioridad internacional para importación y para exportación. Es un servicio expreso de puerta a puerta con despacho de aduanas incluido y entrega en tiempo definido. Las tarifas, que rigen a partir del 4 de enero de 2016, son las siguientes: (http://images.fedex.com/downloads/lac/rates_2016/cr_2016.pdf)

Tarifas en US$	PESO EN KG	ZONA A	ZONA B	ZONA C	ZONA D	ZONA E	ZONA F	ZONA G
Importación	**FedEx® 10 kg y 25 kg Box****							
FedEx® 10 kg Box	Hasta 10 kg.	180.30	192.60	301.20	218.80	464.30	461.40	555.10
	por kg adicional	18.00	19.30	30.10	21.90	46.40	46.10	55.50
FedEx® 25 kg Box	11 kg hasta 25 kg.	233.10	281.20	383.40	352.60	621.70	693.40	832.10
	por kg adicional	9.30	11.20	15.30	14.10	24.90	27.70	33.30
Exportación	**FedEx® 10 kg y 25 kg Box****							
FedEx® 10 kg Box	Hasta 10 kg.	115.30	121.20	223.90	237.40	317.30	346.00	383.10
	por kg adicional	11.50	12.10	22.40	23.70	31.70	34.60	38.30
FedEx® 25 kg Box	11 kg hasta 25 kg.	157.90	162.00	263.70	265.60	361.50	420.40	514.70
	por kg adicional	6.30	6.50	10.60	10.60	14.50	16.80	20.60

a. Edwin quiere importar de Japón, que es parte de la zona F, una un equipo electrónico de 15 kg y quiere saber si es más económico importalo en una caja FedEx 10 kg Box o en una 25 kg Box. El equipo electrónico cabe en cualquiera de las dos cajas.
   Ayude a Edwin a decidir cuál es la opción más económica.
b. Roxana también quiere importar de Japón un equipo electrónico parecido al de Edwin pero que es de 19 kg. Ayude a Roxana a decidir cuál es la opción más económica si el equipo cabe en cualquiera de las dos cajas.
c. Ileana quiere exportar a Canadá, que es parte de la zona C, 30 kg en portajoyas que ella, como pequeña empresaria, fabrica. Si todos los portajoyas caben en ambos tipos de cajas (10 kg Box y 25 kg Box), ayude a Ileana a decidir cuál es la opción más económica.

Solución

a. En la primera opción (10 kg Box), por los primeros 10 kg Edwin tiene que pagar \$ 461,40 y por cada kg adicional pagará \$ 46,10. Para generalizar, si *x* representa la cantidad adicional para la primera opción entonces el modelo para calcular el costo *C* del envío de la importación es

$$C(x) = 461{,}40 + 46{,}10x$$

El envío desde Japón para primera opción costará $C(5) = 461{,}40 + 5 \cdot 46{,}10 = 691{,}90$ dólares.
Para la segunda opción (25 kg Box), Edwin tendría que pagar \$ 693,40 pues el equipo se encuentra en el rango de 11 kg hasta 25 kg. Por lo tanto la opción más económica para Edwin es la primera.

b. Para Roxana tenemos 9 kg adicionales y el costo para la primera opción es de

$$C(9) = 461{,}40 + 9 \cdot 46{,}10 = 876{,}30 \text{ dólares}$$

Esta cantidad es mayor que los \$ 693,40 que pagaría por la segunda opción. Entonces la opción más económica para Roxana es la segunda.

c. Para la primera opción (10 kg Box), Ileana pagará una cantidad fija de \$ 223,90 por los 10 kg y \$ 22,40 por cada kg adicional. Por *x* kg adicionales el pago por el envío será de

$$C(x) = 223{,}90 + 22{,}40x$$

Como hay 20 kg adicionales entonces el costo para enviar el producto, para la primera opción será de $C(20) = 223{,}90 + 20 \cdot 22{,}40 = 671{,}90$ dólares.

Para la segunda opción (25 kg Box), Ileana pagará una cantidad fija de \$ 263,70 por los 25 kg y \$ 10,60 por cada kg adicional. Por x kg adicionales el pago por el envío será de

$$P(x) = 263{,}70 + 10{,}60x$$

Como hay 5 kg adicionales entonces el costo para enviar el producto, para la segunda opción será de $P(5) = 263{,}70 + 5 \cdot 10{,}60 = 316{,}70$ dólares.

Por lo tanto la opción más económica para Ileana es la segunda.

Ejemplo 4 ______________

Los precios de las entradas para el juego del Saprissa de Costa Rica ante San Lorenzo de Argentina fueron desde ₡ 3400,00 a ₡ 29 400,00. El precio de la entrada para sombra este preferencial costó ₡ 9400,00 y para palco ₡ 29 400,00.

Para el partido Saprissa San Lorenzo se vendieron en total 935 entradas para las dos opciones mencionadas y los ingresos correspondientes fueron ₡ 9 789 000,00.

¿Cuántas entradas de cada tipo fueron vendidas?

Solución

Sean x la cantidad de entradas vendidas para sombra preferencial, y la cantidad de entradas vendidas para palco. Como el total de las entradas vendidas para estas dos opciones fue de 935 entonces

$$x + y = 935$$

El precio de las x entradas fue de $9400x$ mientras que el de las y entradas fue de $29400y$. Por lo tanto

$$9400x + 29400y = 9789000$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 935 & (1) \\ 9400x + 29400y = 9789000 & (2) \end{cases}$$

Solución por sustitución

Despejamos la variable y en la primera ecuación:

$$y = 935 - x$$

Reemplazamos este valor de y en la segunda ecuación:

$$9400x + 29400(935 - x) = 9789000$$

Obtuvimos una ecuación en la variable x. Simplificamos

$$9400x + 27489000 - 29400x = 9789000$$

Restamos 27489000 en ambos lados de la ecuación y simplificamos

$$9400x - 29400x = -17700000$$

Simplificamos el primer miembro de la igualdad

$$-20000x = -17700000$$

Dividimos ambos miembros por -20000 y simplificamos

$$x = \frac{-17700000}{-20000} = 885$$

Reemplazamos el valor encontrado para x en $y = 935 - x$

$$y = 935 - 885 = 50$$

La respuesta es fueron vendidas 885 entradas para sombra este preferencial y 50 para palcos.

Solución por igualación

Despejamos la variable y en la primera ecuación:

$$y = 935 - x$$

y en la segunda ecuación:

$$29400y = 9789000 - 9400x$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación por 29400

$$y = \frac{9789000 - 9400x}{29400}$$

Igualando las dos expresiones algebraicas del lado derecho de cada ecuación despejada

$$935 - x = \frac{9789000 - 9400x}{29400}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 29400 y simplificando

$$27489000 - 29400x = 9789000 - 9400x$$

Restamos 9789000 en ambos miembros de la ecuación y simplificamos

$$27489000 - 29400x - 9789000 = -9400x$$

Simplificamos y sumamos 29400*x* en ambos miembros de la ecuación

$$17700000 = 29400x - 9400x = 20000x$$

Dividiendo por 20000 los dos miembros de la ecuación y simplificando

$$x = \frac{17700000}{20000} = 885$$

reemplazando este valor en $y = 935 - x$ obtenemos $y = 50$.

Solución por reducción

En el sistema

$$\begin{cases} x + y = 935 & (1) \\ 9400x + 29400y = 9789000 & (2) \end{cases}$$

podemos multiplicar la ecuación (1) por 29400 (el coeficiente de *y* en la ecuación (2)) para obtener

$$\begin{cases} 29400x + 29400y = 935 \cdot 29400 = 27489000 \\ 9400x + 29400y = 9789000 \end{cases}$$

Ahora podemos restar las dos ecuaciones para eliminar la variable *y*

$$\begin{cases} 29400x + \cancel{29400y} = 27489000 \\ 9400x + \cancel{29400y} = 9789000 \end{cases}$$

$$(29400 - 9400)x = 27489000 - 9789000$$

Simplificando

$$20000x = 17700000$$

Despejando x

$$x = \frac{17700000}{20000} = 885$$

y en la ecuación $x + y = 935$ despejamos y: $y = 935 - 885 = 50$.

Solución gráfica

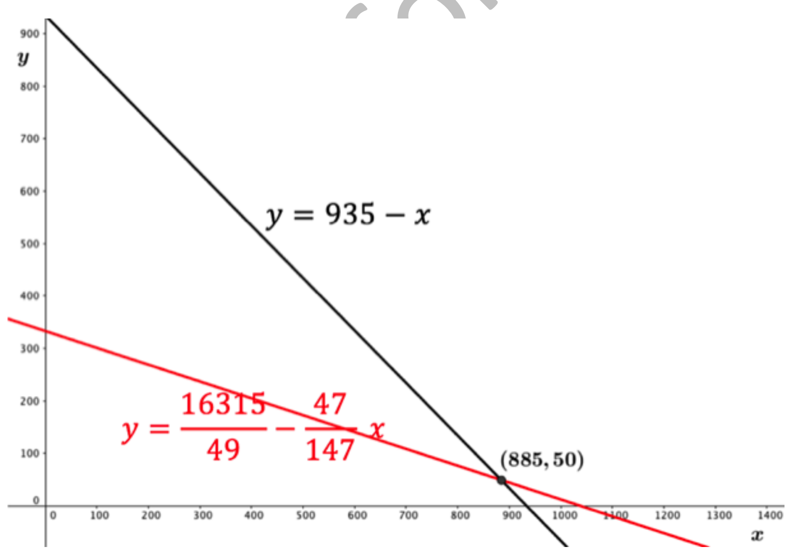
Debido a esto cada ecuación puede ser representada gráficamente por una recta. La solución del sistema, si existe, consiste en aquellos valores de x, y que satisfacen ambas ecuaciones. Graficamente representa el punto de intersección de las dos rectas.

Para graficar las funciones lineales para las ecuaciones podemos construir una tabla con dos valores pues sabemos que la representaión gráfica es una recta.

$$\begin{cases} y = 935 - x & (1) \\ y = \frac{9789000}{29400} - \frac{9400}{29400} = \frac{16315}{49} - \frac{47}{147}x & (2) \end{cases}$$

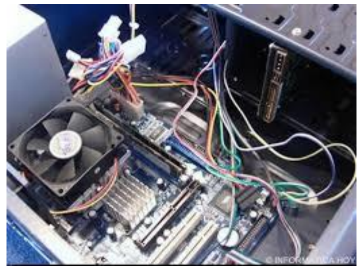
x	$y = 935 - x$
0	935
800	135

x	$y = \frac{16315}{49} - \frac{47}{147}x$
0	$\frac{16315}{49}$
500	$\frac{25454}{147}$



Ejemplo 5

El coste total de fabricación de un determinado componente para computadora puede ser modelado por la función $C(n) = 0{,}1n^2$ donde n es el número de componentes fabricados y el coste $C(n)$ está en dólares. Si cada componente se vende a un precio de \$ 11,45 el ingreso es modelado por $R(n) = 11{,}45n$.



a. Encontrar la función que representa la ganancia total obtenida por la venta de los componentes.
b. Calcule el número de componentes a fabricar y vender para que la ganancia sea máxima.
c. ¿Qué sucede si la empresa fabrica y vende más de 114 componentes?

Solución

a. La ganancia total obtenida es igual al ingreso menos el coste de fabricación de los componentes. Por lo tanto la ganancia que designaremos por $G(n)$ es modelada por

$$G(n) = R(n) - C(n) = 11{,}45n - 0{,}1n^2$$

b. La función G es cuadrática. Su representación gráfica es una parábola cóncava hacia abajo pues el coeficiente de n^2 es negativo. El punto de máximo es el vértice de la parábola.

Recordemos que el vértice de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el punto con abscisa $x = -\frac{b}{2a}$.
En este caso $a = -0{,}1$; $b = 11{,}45$; $c = 0$; por lo tanto la abscisa del vértice de $G(n)$ es

$$n = -\frac{11{,}45}{2(-0{,}1)} = 57{,}25$$

Pero, como n tiene que ser un número entero entonces tomamos la parte entera del resultado anterior, es decir, $n = 57$ componentes.
En este caso la ganancia (máxima) por la venta de los 57 componentes es

$$G(57) = 11{,}45(57) - 0{,}1(57)^2 = 327{,}75 \text{ dólares}$$

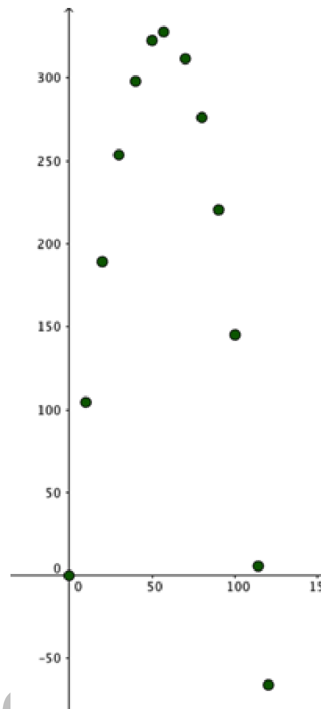
c. Cuando la empresa fabrica y vende 114 componentes su ganancia será de

$$G(114) = 11{,}45(114) - 0{,}1(114)^2 = 5{,}70 \text{ dólares}$$

Si vende 115 componentes la ganancia será negativa:

$$G(115) = 11{,}45(115) - 0{,}1(115)^2 = -5{,}70 \text{ dólares}$$

A partir de los 114 componentes la empresa pierde en lugar de ganar. Esto se debe al tipo de modelo como podemos observar en la gráfica abajo:



Ejemplo 6 ____________________

El Ping An Finance Center es un edificio de 115 plantas de altura que actualmente se encuentra en construcción en Shenzhen, provincia de Guandgong, China. El rascacielos que se encuentra en construcción y que será inaugurado muy pronto es el cuarto edificio más alto del mundo, con una altura total de 599 metros.

¿Cuánto tiempo tardaría para llegar al suelo un objeto que cae de la cima del Ping An Finance Center, si despreciamos la resistencia del aire?

Solución

Suponiendo que el objeto se encontraba inicialmente en reposo (velocidad inicial cero), la distancia y (en metros) recorrida por un objeto en caída libre es modelada por $y = \frac{1}{2}gt^2$ en donde g es la aceleración de la gravedad (en metros por segundo al cuadrado). Utilizando el valor 9,8 para g tenemos

$$y = 4{,}9t^2$$

Como la distancia recorrida por el objeto es de 599 metros entonces

$$4{,}9t^2 = 599$$

Despejando t^2,

$$t^2 = \frac{599}{4{,}9}$$

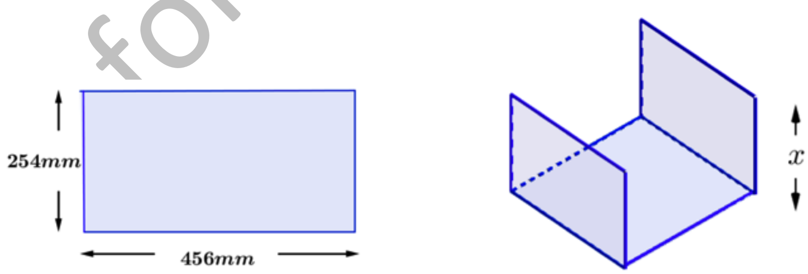
Tomando la raíz cuadrada positiva pues tiempo negativo no tiene sentido en esta situación dada

$$t = \sqrt{\frac{599}{4{,}9}} \approx 11{,}06 \text{ segundos}$$

Por lo tanto el objeto toma aproximadamente 11,06 segundos para alcanzar el suelo, si el mismo cae libremente desde la cima del rascacielo Ping An Finance Center.

Ejemplo 7 ____________________

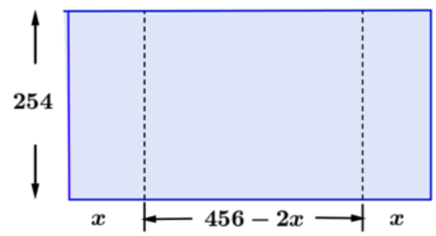
La pequeña empresa Monito Pitanga planea producir un archivo vertical con un único compartimiento, doblando una hoja de plástico de dimensiones 456 mm de largo por 254 mm de ancho, para hacer un archivo en forma de $\sqcup$.

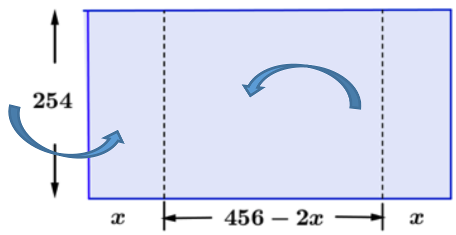


¿Qué tan alto debe ser el archivo para que su volumen sea máximo?

Solución

Existen dos posibilidades para doblar la lámina, para construir el archivo en forma de $\sqcup$. Una es por el largo de la lámina conforme se indica en la figura que sigue. Se marca x mm a la derecha y a la izquierda del lado más largo y después se dobla:





Al doblar el archivador formado tendrá volume V igual al área del rectángulo base multiplicado por la altura. Un lado del rectángulo base mide $456 - 2x$ mm mientras que el otro mide 254 mm. La altura es x, por lo tanto el volumen es igual a

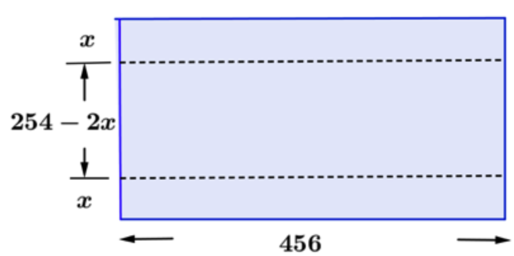
$$V(x) = 254x(456 - 2x) = 115824x - 508x^2$$

Este es el modelo que nos permite calcular el volumen de la caja en términos de x si doblamos la lámina por el largo.

El volumen máximo corresponderá al vértice de la parábola que es la representación gráfica del modelo. La abscisa del vértice es $x = -\frac{115824}{2(-508)} = 114$. Por lo tanto, al doblar la lámina por el largo, y su volumen máximo será

$$V(114) = 115824(114) - 508(114)^2 = 6\,601\,968\ mm^3$$

Otra posibilidad consiste en doblar la lámina por el ancho.



Al doblar en las líneas marcadas, el volumen del archivador será

$$V(x) = 456x(254 - 2x) = 912x(127 - x)$$

La parábola interseca el eje x en $x = 0,\ x = 127$, por lo tanto la abscisa del vértice se encuentra en el punto medio de estos dos valores:

$$x = \frac{127+0}{2} = 63{,}5 \text{ mm}$$

En este caso el volumen máximo será de $V(63{,}5) = 912(63{,}5)(127 - 63{,}5) = 3\ 677\ 412$ milímetros cúbicos, un valor mucho menor que el encontrado al doblar la lámina por su largo.

Por lo tanto la respuesta es: el alto del archivo para que su volumen sea máximo es de 114 milímetros.

Ejemplo 8

Un prototipo de cohete es lanzado con una velocidad inicial de 50 metros por segundo desde una altura de 12 metros. La función con criterio $y(t) = -4{,}9t^2 + 50t + 12$ modela la altura del cohete, en metros, t segundos después de haber sido lanzado.

a. Determinar el tiempo en el que el cohete alcanza su altura máxima.
b. Encontrar de altura máxima.

Solución

El modelo que relaciona la altura del cohete con el tiempo es una función cuadrática. Su representación gráfica es una parábola que se abre hacia abajo debido a que el coeficiente del término cuadrático es negativo. El punto de máximo es el vértice de la parábola, cuya abscisa es

$$t = -\frac{50}{2(-4{,}9)} \approx 5{,}1 \text{ segundos}$$

Esta es la respuesta de la pregunta 14. El tiempo para que el cohete alcance su altura máxima es aproximadamente 5,1 segundos.

Para encontrar la altura máxima basta reemplazar el valor de *t* en el modelo:

$$y(5{,}1) \approx -4{,}9(5{,}1)^2 + 50(5{,}1) + 12 = 139{,}55 \text{ metros}$$

La altura máxima máxima alcanzada por el cohete es de aproximadamente 139,55 metros, lo que responde la pregunta.

Ejemplo 9 ___________________

Una población de 4 millones de habitantes crece a una tasa de 3% anual. Determine el tamaño de la población al cabo de 5 años.

Solución:
Si utilizamos el modelo $P(t) = p_0(1+r)^t$, donde $p_0 = 4$, $r = 0{,}03$ y $t = 5$. Se tiene entonces que:

$$P(5) = 4(1+0{,}03)^5$$
$$P(5) = 4{,}63$$

La población al cabo de 5 años será de 4,63 millones de habitantes aproximadamente.

Ejemplo 10 ___________________

En una pequeña ciudad cuya población es de 3500 habitantes, se propaga una enfermedad creando una epidemia. El número N de personas infectadas t días después de iniciada la enfermedad se relaciona con el tiempo de acuerdo al siguiente modelo:

$$N(t) = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-0{,}6t}}$$

a. ¿Cuántas personas estaban infectadas cuando inició la enfermedad ($t = 0$)?
b. Determine el número de infectados 5 días después de iniciada la enfermedad.

Solución

a. Cuando $t = 0$, la cantidad de personas infectadas era de

$$N(0) = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-0{,}6\times 0}} = \frac{3500}{1+19{,}9} \approx 167 \text{ personas}$$

pues la exponencial de cero es igual a 1.

b. Cuando $t = 5$ días,

$$N(5) = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-0{,}6(5)}} = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-3}} \approx 1758 \text{ personas}$$

Ejemplo 11 ___________________

La población de Costa Rica era de aproximadamente 4 808 000 habitantes en 2015 y la tasa de crecimiento exponencial aproximada para el 2015 era de 1,05% por año (Fuente: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.GROW)

a. Determinar la función de crecimiento exponencial para la población costarricense, suponiendo que la tasa de crecimiento anual se mantiene constante.
b. Predecir la población de Costa Rica en el año 2020, utilizando el modelo construido.

Solución

En la primera pregunta se nos pide un modelo que relaciona la población de Costa Rica con el tiempo en años.

Sea $P(t)$ la población de Costa Rica en el instante t, en donde t es el tiempo en años. Para simplificar los cálculos consideraremos el año 2015 como el año inicial, es decir relacionamos 2015 con $t = 0$. De esta forma 2016 corresponderá a $t = 1$, 2017 a $t = 2$ y así sucesivamente.

Como la población en el 2015 era de 4 808 000 habitantes entonces $P(0) = 4\,808\,000$.

En el año 2016 la población $P(1)$ será igual a la población inicial $P(0)$ más 1,05% de $P(0)$. Por lo tanto

$$P(1) = P(0) + 1{,}05\% \text{ de } P(0) = P(0) + 0{,}0105P(0) = P(0)(1{,}0105)$$

En el año 2017 la población $P(2)$ será igual a la población del año anterior $P(1)$ más 1,05% de $P(1)$, es decir

$$P(2) = P(1) + 1{,}05\% \text{ de } P(1) = P(1) + 0{,}0105P(1) = P(1)(1{,}0105)$$

Reemplazando $P(1)$ por $P(0)(1{,}0105)$ tenemos

$$P(2) = P(1)(1{,}0105) = P(0)(1{,}0105)^2$$

En el año 2018 la población $P(3)$ será igual a la población del año anterior $P(2)$ más 1,05% de $P(2)$, es decir

$$P(3) = P(2) + 1{,}05\% \text{ de } P(2) = P(2) + 0{,}0105P(2) = P(2)(1{,}0105)$$

Reemplazando $P(2)$ por $P(0)(1{,}0105)^2$ tenemos

$$P(3) = P(2)(1{,}0105) = P(0)(1{,}0105)^3$$

Podemos visualizar el patrón que permitirá generalizar la relación entre la población de Costa Rica y el tiempo, y esta es

$$P(t) = P(0)(1{,}0105)^t$$

Este es nuestro modelo y responde la pregunta.

a. El año 2020 corresponde a $t = 5$. Podemos utilizar nuestro modelo para calcular

$$P(5) = P(0)(1{,}0105)^5 = 4\,808\,000(1{,}0105)^5 \approx 5\,065\,776 \text{ habitantes}$$

Ejemplo 12

Los químicos miden la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno.
En 1909, Peter Lauritz Sorensen propuso:

$$pH = -log[H^+]$$

donde H^+ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro(M).
Durante el último año el volcán Turrialba ha estado en una continua actividad, lo que ha generado que los niveles de acidez de los suelos de las fincas cercanas al volcán cambien drásticamente. Si el pH registrado en una finca cercana en el 2015 fue de 5,07 determine la concentración de iones de hidrógeno.

Solución:

Se sabe que pH = 5,07 y se desea determinar $[H^+]$ por lo tanto se debe resolver

$$5{,}07 = -log[H^+]$$
$$-5{,}07 = log[H^+]$$
$$10^{-5{,}07} = [H^+]$$
$$0{,}000008 \approx [H^+]$$

Por lo tanto, la concentración de iones de hidrógeno es de aproximadamente $0{,}000008$

Ejemplo 13

En una pequeña ciudad cuya población es de 3500 habitantes, se propaga una enfermedad creando una epidemia. El número *N* de personas infectadas *t* días después de iniciada la enfermedad se relaciona con el tiempo de acuerdo al siguiente modelo:

$$N(t) = \frac{3500}{1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}}$$

¿Cuántos días después de iniciada la enfermedad, la cantidad de infectados será de 3000 habitantes?

Solución:
Tenemos que resolver la ecuación

$$N(t) = \frac{3500}{1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}} = 3000$$

para determinar la cantidad de días para que existan 3000 personas infectadas por la enfermedad.

Multplicando ambos lados de la ecuación por el denominador se tiene

$$3000(1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}) = 3500$$

Dividiendo por 3000

$$1 + 19{,}9e^{-0{,}6t} = \frac{3500}{3000} = \frac{7}{6}$$

Restando 1

$$19{,}9e^{-0{,}6t} = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Dividiendo por 19,9

$$e^{-0{,}6t} = \frac{1}{6(19{,}9)} = \frac{1}{119{,}4}$$

Aplicando logarítmo natural en ambos lados y recordando que $\ln e^{x} = x$ entonces

$$-0{,}6t = \ln\frac{1}{119{,}4} = \ln 1 - \ln(119{,}4) = -\ln(119{,}4)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln(119{,}4)}{0{,}6} \approx 8 \text{ dias}$$

Entonces, 8 días después de iniciada la enfermedad, la cantidad de infectados será de 3000 habitantes.

Ejemplo 14 ___________________

La población de Costa Rica era de aproximadamente 4 808 000 habitantes en 2015 y la tasa de crecimiento exponencial aproximada para el 2015 era de 1,05% por año (Fuente: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.GROW)

la función de crecimiento exponencial para la población costarricense, suponiendo que la tasa de crecimiento anual se mantiene constante viene dada por

$$P(t) = P(0)(1{,}0105)^t$$

¿En que año la población de Costa Rica será de 10 millones de habitantes?

Solución:

Para calcular en que año la población de Costa Rica alcanzará los 10 millones de habitantes, tenemos que resolver la ecuación exponencial

$$P(t) = 4\,800\,000\,(1{,}0105)^t = 10\,000\,000$$

Simplificando

$$(1{,}0105)^t = \frac{10000000}{4800000} = \frac{25}{12}$$

Aplicando logaritmos en ambos lados, puede ser en cualquier base pero lo tomaremos en base *e*, y aplicando propiedades de logaritmos

$$t\ln(1{,}0105) = \ln\left(\frac{25}{12}\right) = \ln(25) - \ln(12)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln(25) - \ln(12)}{\ln(1{,}0105)} \approx 70 \text{ años}$$

Entonces, para el año 2085, que corresponde a $t = 70$, Costa Rica tendrá cerca de 10 millones de habitantes.

Ejemplo 15 ___________________

Cuando un objeto con temperatura T_1 es colocado en un ambiente que se encuentra a una temperatura T_a distinta de T_1 entonces el objeto se enfriará o bien se calentará para que su temperatura se aproxime a la del ambiente. El modelo que relaciona la temperatura del objeto *T* (°C) con el tiempo *t* (minutos) es dado por la ley de Newton de enfriamiento (o de calentamiento):

$$T(t) = T_a + (T_1 - T_a)e^{-kt}$$

Ileana preparó una buena taza de café para disfrutarlo, pero estaba muy caliente. Ella usó un termómetro para medir la temperatura del café y la temperatura de la sala de su casa.

La temperatura de la sala en este momento era de 25°C y la del café era de 68°C.

a. Pasados 3 minutos Ileana volvió a medir la temperatura del café y ésta era de 50°C. ¿Cuál es el valor de la constante k que aparece en el modelo?

b. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar, desde el momento en que preparó el café, para que su temperatura sea de 40 °C?

Solución

a. Reemplazando los datos en el modelo tendremos:

$$T(3) = 25 + (68 - 25)e^{-3k} = 50$$

Por lo tanto $43e^{-3k} = 50 - 25 = 25$. Simplificando,

$$e^{-3k} = \frac{25}{43}$$

Aplicando logarítmo natural en ambos lados y como $\ln(e) = 1$ entonces

$$-3k = \ln\left(\frac{25}{43}\right) = \ln(25) - \ln(43)$$

Despejamos k

$$k = \frac{\ln(25) - \ln(43)}{-3} \approx 0{,}18077476$$

b. Para que la temperatura del café sea de 40 °C utilizaremos el modelo con el valor de k obtenido

$$T(t) = 25 + 43e^{-0{,}18077476t}$$

Reemplazando $T(t)$ por 40

$$25 + 43e^{-0{,}18077476t} = 40$$

Simplificando

$$43e^{-0,18077476t} = 40 - 25 = 15$$

lo que equivale a

$$e^{-0,18077476t} = \frac{15}{43}$$

Aplicando logarítmo natural

$$-0,18077476t = \ln\left(\frac{15}{43}\right) = \ln(15) - (43)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln(15) - (43)}{-0,18077476} \approx 5,83 \text{ minutos}$$

Ileana tendrá que esperar casi 6 minutos para disfrutar del café. Esta es la respuesta de la parte b de la pregunta.

Conclusiones

Hemos finalizado el material complementario para el Mini MOOC *Aplicaciones de las funciones*, de la Colección Preparación Matemática Bachillerato. Esperamos que el material haya sido de mucho provecho y esperamos sus comentarios y sugerencias para que hagamos correcciones y cambios en futuras versiones del material. Gracias y éxitos en sus estudios y en su vida personal.

Bibliografía

Aufmann R., Barker V.,Nation R. (2011). *College Algebra and Trigonometry*. Seventh Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Harshbarger R., Yocco L. (2013). *College Algebra in Context*. 4th Edition. Pearson

Larson R. (2011). *Algebra and Trigonometry*. Eighth Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics

Rockswold G. (2012). *Essentials of College Algebra: with Modeling / Visualization*. 4th Edition. Addison-Wesley

Swokowski, E. y Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 13a. edición. Cengage Learning

Créditos

Aplicaciones de las funciones. *Material complementario*, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Aplicaciones de las funciones*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.* Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edison de Faria Campos

Revisores
Hugo Barrantes, Johanna Mena, Keibel Ramírez, Ángel Ruiz

Edición final de este documento
Johanna Mena, Hugo Barrantes

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Aplicaciones de las funciones*. *Material complementario*, San José, Costa Rica: autor.