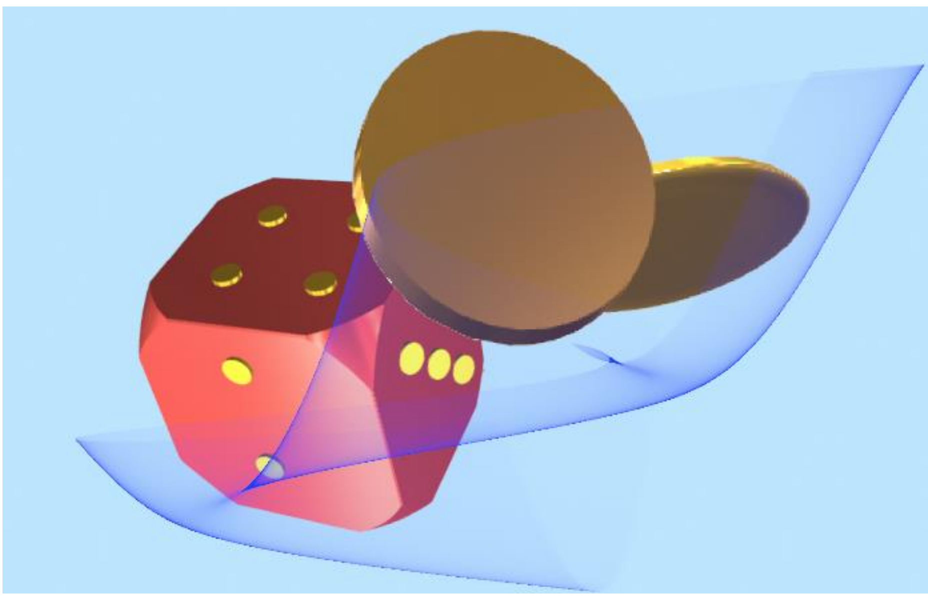
REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

mep Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Colección
Preparación Matemáticas Bachillerato



ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: Probabilidad básica

Material complementario

Costa Rica

2017

Contenido

Índice de conceptos

I. Introducción

El presente documento ha sido elaborado por el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Su propósito básico consiste en apoyar a estudiantes para la preparación de las Pruebas Nacionales de Matemáticas en el análisis de las medidas estadísticas.

Este documento complementa el Mini MOOC denominado *Probabilidad básica* de la colección *Preparación Matemáticas Bachillerato* (http://minimoocs.reformamatematica.net) diseñado por este mismo proyecto.

Se analizan diferentes conocimientos vinculados con el uso de las medidas estadísticas de posición y variabilidad para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidadas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada. Se incluyen además

Esperamos que el material sea de provecho para todos aquellos lectores que lo utilicen.

1. Conceptos previos

Situación aleatoria

Una situación o experimento se dice que es aleatorio si los resultados que puede generar no pueden ser predichos sino que dependen del azar. Por ejemplo:

a) El resultado de un sorteo de la Lotería Nacional.

b) El resultado obtenido al lanzar al aire una moneda o un dado.

c) Predecir si va a llover o no en un día en particular.

d) Adquirir una enfermedad si se expone al contagio de algún virus.

Situación determinista

Una situación o experimento se dice que es determinista si los resultados que se puede generar pueden ser predichos sin necesidad de realizar la experiencia. Por ejemplo:

a) Precio a pagar al comprar cinco litros de leche si el precio por litro de es 750 colones.

b) Determinación de día que le sigue al domingo.

c) Determinar el número de meses del año que tiene exactamente 30 días.

Volver al Índice de Conceptos

Espacio muestral

Es el conjunto de los posibles resultados simples de un experimento aleatorio.

a) Al lanzar al aire un dado numerado de uno a seis, el espacio muestral está dado por el conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Si se lanza una moneda nacional y un dado numerado de uno a seis, el espacio muestral correspondiente es el conjunto: $S = \{E1, E2, E3, E4, E5, E6, C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$. La letra representa el resultado de la moneda y el número el resultado del dado.

c) De un grupo de décimo año de cierto colegio se selecciona aleatoriamente un estudiante para que represente al grupo en una actividad general de la institución. El espacio muestral está constituido por todos los estudiantes de ese grupo.

Volver al Índice de Conceptos

Punto muestral

Los puntos muestrales son los resultados simples de un experimento. En términos más simples, los puntos muestrales son los eventos de un espacio muestral. Por ejemplo, al lanzar un dado numerado de uno a seis, cada uno de los posibles resultados se considera un punto muestral de este experimento.

Eventos aleatorios

Los eventos aleatorios se consideran subconjuntos de un espacio muestral, un evento se considera un resultado posible de un experimento.

a) Al lanzar al aire un dado numerado de uno a seis, los siguientes son eventos aleatorios
A: obtener un número par, se tiene que $A = \{2,4,6\}$.
B: obtener un número primo, entonces $B = \{2,3,5\}$.

b) De un grupo de décimo año de cierto colegio se selecciona aleatoriamente un estudiante para que represente al grupo en una actividad general de la institución. Considere los eventos:
A: seleccionar una mujer. Eeste evento estaría constituido por todas las mujeres del grupo
B: seleccionar un estudiante que haya nacido en el mes de febrero. Este evento está constituido por todos los estudiantes que cumplen años en febrero.

Evento imposible

Representa al evento que no tienen puntos muestrales, es decir dicho evento no puede ocurrir. Normalmente se representa con ϕ. Por ejemplo:

a) En el experimento en que se debe seleccionar un estudiante de décimo año de cierto colegio, se considera el evento de que el estudiante haya nacido en el mes febrero. Sin embargo, si no hay estudiantes en esta condición, entones el evento se dice que es imposible debido a que no tiene puntos muestrales.

b) Si se lanzan dos dados numerados de uno a seis cada uno de ellos, y se suman los puntos obtenidos, el evento de obtener el número uno es imposible.

Evento seguro

Representa el evento que se tiene la seguridad absoluta de que va a ocurrir.

a) Se lanzan dos monedas nacionales y se considera el evento de obtener menos de tres escudos. Este evento es seguro o cierto debido a que al lanzar dos monedas nacionales se pueden obtener dos escudos, un escudo o ningún escudo, por ello se sabe con certeza que el número de escudos es menor que tres.

b) Se lanzan dos dados numerados de uno a seis y se suman los puntos obtenidos. El evento de obtener un número no mayor de 12 es una evento seguro, debido a que el número máximo que se puede obtener en este experimento es un 12 que se obtiene si los dos dados dieron por resultado un seis.

Volver al Índice de Conceptos

2. Operaciones con eventos

Cuando se vinculan dos o más eventos por medio de operaciones de conjuntos se generan nuevos eventos.

Unión de eventos

Si A y B son eventos de un espacio muestral S, la ocurrencia del evento A o del evento B (o de ambos), corresponde a los que se denomina *unión* de los eventos A y B, se denota con $A \cup B$, e incluye la reunión de los puntos muestrales de A y los de B.

a) Si se lanzan dos dados numerados de uno a seis cada uno y se suman los puntos. Se consideran los eventos:

   A: obtener un número par. Se tiene que $A = \{2,4,6\}$
   B: obtener un número primo. Entonces $B = \{2,3,5\}$

   Entonces la unión de los eventos A y B viene dada por $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$

b) De un grupo de décimo año de cierto colegio se selecciona aleatoriamente un estudiante para que represente al grupo en una actividad general de la institución. Considere los eventos:
   A: seleccionar una mujer.
   B: seleccionar un estudiante que haya nacido en el mes de febrero.

   La unión de estos eventos $A \cup B$ incluye a todas las estudiantes mujeres y también a los varones que cumplen años en febrero.

Volver al Índice de Conceptos

Intersección de eventos

Si A y B son eventos de un espacio muestral S, la ocurrencia de los eventos A y B al mismo tiempo se interpreta como la *intersección* de los eventos A y B, y se denotada con $A \cap B$. Esta intersección incluye los puntos muestrales que están en A y B a la vez.

a) Si se lanzan dos dados numerados de uno a seis cada uno y se suman los puntos. Se consideran los eventos:

   A: obtener un número par. Se tiene que $A = \{2,4,6\}$.
   B: obtener un número primo. Entonces $B = \{2,3,5\}$.

   Entonces la intersección de los eventos A y B viene dada por $A \cap B = \{2\}$.

b) De un grupo de décimo año de cierto colegio se selecciona aleatoriamente un estudiante para que represente al grupo en una actividad general de la institución. Considere los eventos:
A: seleccionar una mujer.
B: seleccionar un estudiante que haya nacido en el mes de febrero.

La intersección de estos eventos $A \cap B$ incluye solamente las estudiantes mujeres que cumplen años en febrero.

Volver al Índice de Conceptos

Complemento de un evento

Si A es un evento de un espacio muestral S, la no ocurrencia del evento A se interpreta como la ocurrencia del *complemento* de A, y se representa con A^c. Este incluye los puntos muestrales que no están en A.

a) Se lanzan dos dados numerados de uno a seis cada uno y se suman los puntos. Se consideran los eventos:

A: obtener un número par, se tiene que $A = \{2,4,6\}$.
B: obtener un número primo, entonces $B = \{2,3,5\}$.

Entonces el complemento del evento A viene dado por $A^c = \{1,3,5\}$, que significa obtener un número impar. El complemento del evento B viene dada por $B^C = \{1,4,6\}$, que significa no obtener un número primo.

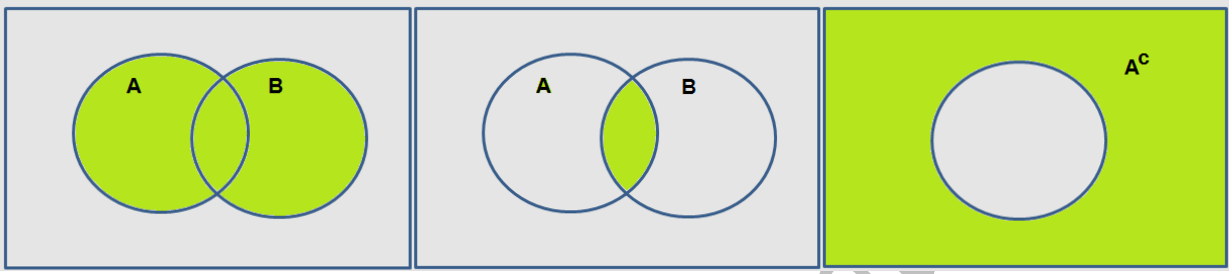
b) De un grupo de décimo año de cierto colegio se selecciona aleatoriamente un estudiante para que represente al grupo en una actividad general de la institución. Considere los eventos:
A: seleccionar una mujer.
B: seleccionar un estudiante que haya nacido en el mes de febrero.

Entonces el complemento del evento A viene dado por A^c corresponde al evento de seleccionar un varón. El complemento del evento B viene dada por B^C corresponde al evento de seleccionar un estudiante que no cumple años en febrero.

Volver al Índice de Conceptos

Nota: Las operaciones anteriores también se pueden representar por los llamados *diagramas de Venn*, en los cuales el espacio muestral se representa con una figura cerrada (normalmente un polígono) y en su interior se incluyen los eventos por medio también como figuras cerradas (normalmente se utilizan círculos), las partes en verde representa el resultado de las operaciones:

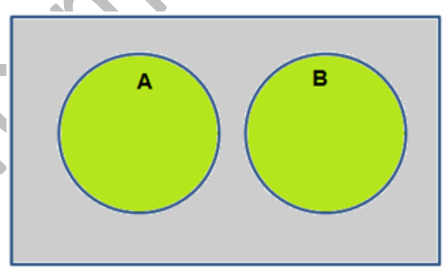
$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ A^c



3. Eventos mutuamente excluyentes

Eventos mutuamente excluyentes

Si A y B son eventos de un espacio muestral S, se dice que los eventos A y B son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común, es decir $A \cap B = \phi$.



Se lanza un dado numerado de uno a seis y se consideran los eventos:

A: obtener un número par. $A = \{2,4,6\}$.
B: obtener un número impar. $B = \{1,3,5\}$.

Los eventos A y B son mutuamente excluyentes debido a que no tienen puntos muestrales en común.

Volver al Índice de Conceptos

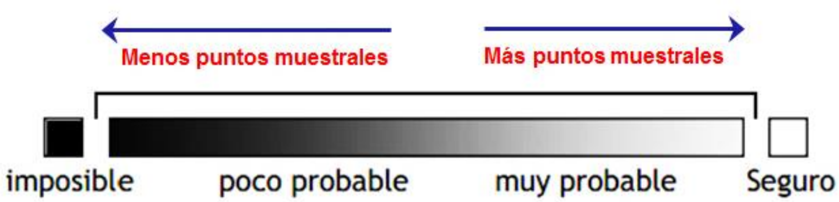
4. Eventos más probables, menos probables o igualmente probables

El término de probabilidad es utilizado cotidianamente, aunque no siempre con la precisión matemática que se requiere. En el lenguaje común se asocia el concepto de *probable* con el de *posible*, es decir se dice que un hecho es probable que ocurra si existe la posibilidad de que realmente ocurra. Sin embargo, esto puede resultar ambiguo y se requiere una connotación matemática más precisa.

Si se tiene un espacio muestral que tiene n puntos muestrales, para los cuales no hay preferencia de ocurrencia, se dice entonces que los puntos muestrales son igualmente posibles o igualmente probables (o equiprobables). Por ejemplo, cuando se lanza un dado numerado de uno a seis se supone que los seis posibles resultados son igualmente probables o equiprobables.

Eventos más y menos probables

Si los puntos muestrales de un espacio muestral S son equiprobables, además A y B son eventos de S, entonces se dice que A es más probable que B si posee más puntos muestrales que B. En caso contrario si A tiene menos puntos muestrales se dice que A es menos probable que B.



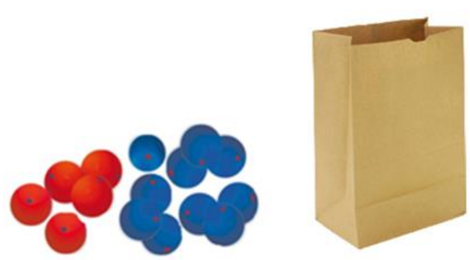
Eventos igualmente probables

Si los puntos muestrales de un espacio muestral S son equiprobables, además A y B son eventos de S entonces se dice que A es igualmente probable que B si posee la misma cantidad de puntos muestrales que B.

Volver al Índice de Conceptos

Problema 1. Selección de bolas rojas y azules

Suponga que en una bolsa de papel se incluyen cinco bolas rojas y diez bolas azules todas del mismo peso, textura y tamaño.



1. Si se extrae una bola en forma aleatoria (sin ver qué color se está escogiendo) ¿qué color es más probable que salga: azul o rojo?

2. ¿De qué manera se deberían variar las cantidades de bolas rojas y azules para que exista justicia o equidad en las posibilidades de selección?

Solución:

1. El espacio muestral correspondiente a este problema incluye las 15 bolas. Para responder la primer pregunta se debe suponer que todas las bolas tienen igual probabilidad de ser seleccionadas, entonces al existir más bolas azules en la bolsa y extraer una de ellas en forma aleatoria, sería de esperar que existan más probabilidades de que la bola seleccionada sea azul. Por ello se dice que la probabilidad de extraer una bola azul es mayor que la probabilidad de extraer una bola roja.

2. En la segunda pregunta, si se considera el mismo criterio o argumento empleado para responder la primera, entonces para que exista equidad se requiere que haya una misma cantidad de bolas azules y rojas en la bolsa, entonces también debería modificarse el total de bolas por un número par, donde la mitad sean rojas y la otra mitad azules. En este caso se diría que los eventos *extraer una bola azul* y *extraer una bola roja* son *igualmente probables*.

Nota: Para la solución del problema anterior, el requisito de que todas bolas incluidas en la bolsa tengan igual peso, textura y tamaño, resulta fundamental para justificar que todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser escogidas, a este concepto se le llama equiprobabilidad o igual probabilidad.

Volver al Índice de Conceptos

Problema 2. Giro de una ruleta

Suponga que se hace girar la siguiente ruleta

1. ¿Qué evento tiene mayor probabilidad: obtener un resultado negro u obtener un número múltiplo de tres?

2. ¿Qué evento tiene mayor probabilidad: obtener un siete u obtener un cinco?

3. ¿Qué supuestos deben plantearse para que las respuestas anteriores sean correctas?

Respuestas:

1. En este caso se considera un espacio muestral que incluye ocho regiones igualmente probables. Entonces, al igual que en el problema anterior, para responder qué evento es más probable basta con determinar en cuál de los eventos existen más casos o resultados posibles a favor. Al revisar la ruleta se encuentran que existen cuatro regiones negras, mientras que los múltiplos de tres que aparecen son 3 y 6, por lo que solamente hay dos regiones a favor de este último evento. Por esta razón es más probable obtener un resultado negro.

2. Solamente existe una región que incluye al número siete y también solamente existe una región que incluye el número cinco, por ello se consideran los eventos obtener un siete y obtener un cinco como igualmente probables.

3. Tal como se indicó en el problema anterior, se requiere establecer condiciones al juego para que las respuestas dadas anteriormente sean válidas. Entre las condiciones básicas que deben estar presentes, la más importante es que las ocho regiones que incluye la ruleta deben ser igualmente probables. Obviamente esta condición requiere de otras tales como que la ruleta esté bien centrada para que gire uniformemente, la ruleta debe hacerse girar con suficiente fuerza para que el resultado no se pueda predecir, que la aguja se mantenga estática, entre otras condiciones.

5. Enfoque clásico de probabilidad

Concepto clásico de probabilidad

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables (es decir el espacio muestral tiene n elementos) y un evento A cualquiera tiene a su favor k resultados ($k \leq n$) entonces se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra (se representa con $P(A)$) viene dada por la razón:

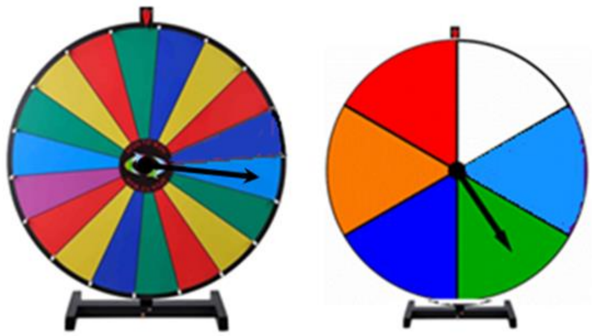
$$P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ a\ favor\ de\ A}{Total\ de\ resultados\ del\ experimento} = \frac{k}{n}$$

Nota: La definición anterior se le llama *definición clásica de probabilidad*, por medio de ella se puede encontrar la probabilidad de cualquier evento siempre que se conozca el número total de resultados del experimento y el número de resultado a favor del evento.

Volver al Índice de Conceptos

Problema 3. Comparación entre ruletas

Suponga que se hacen girar las siguientes ruletas, las cuales están bien equilibradas y en cada una de ellas las regiones son equiprobables.



¿En cuál ruleta existe mayor probabilidad de que salga favorecido el color:

1. celeste?
2. rojo?
3. azul?

Solución:

Se debe tener cuidado para analizar este tipo de problemas, porque se incluyen dos ruletas con un número de regiones diferente, por lo que la cantidad absoluta de regiones a favor de cada color no es comparable entre las ruletas. Entonces se debe recurrir a comparaciones relativas por medio de la definición clásica de probabilidad.

Seguidamente se presenta el análisis para cada caso.

1. Para determinar en cuál de las ruletas el color celeste es más probable, se debe observar que en la primer ruleta hay dos regiones de color celeste de un total de 18 regiones que incluye la ruleta. Por ello la probabilidad del color celeste en esta ruleta es:

$$P(Celeste) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Mientras que en la segunda ruleta solamente una región es de color celeste de un total de 6 regiones. Entonces la probabilidad es:

$$P(Celeste) = \frac{1}{6}$$

Como se tiene que $\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$, entonces es más probable obtener un color celeste en la ruleta 2.

2. En cuanto al color rojo, haciendo el mismo análisis de ítem anterior, se tiene que en la ruleta 1 hay cuatro regiones rojas de un total de 18. Por esta razón en esta ruleta la probabilidad es:

$$P(Rojo) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

En la ruleta 2 hay una región roja de un total de seis, se tiene que:

$$P(Rojo) = \frac{1}{6}$$

Debido a que se cumple que $\frac{2}{9} > \frac{1}{6}$, entonces la probabilidad de seleccionar el color rojo es mayor en la ruleta 1.

3. Del mismo modo, para el color azul en la ruleta 1 se tienen tres regiones azules:

$$P(Azul) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

La ruleta 2 incluye una región azul:

$$P(Azul) = \frac{1}{6}$$

Entonces la obtención de una región color azul es igualmente probable en ambas ruletas. Esto significa que los eventos son equiprobables.

Nota: En el problema anterior, ante la imposibilidad de realizar una comparación con los valores absolutos, se necesitó buscar una medida relativa que permitiera realizar la comparación. El problema de las comparaciones relativas ha sido objeto de mucha discusión en el presente documento dentro de los análisis estadísticos.

Este problema se pudo resolver también haciendo una comparación porcentual tal como se resume en el siguiente cuadro:

	Ruleta 1		**Ruleta 2**	
Color	**Número de regiones**	**Porcentaje**	**Número de regiones**	**Porcentaje**
Verde	4	22,2	1	16,7
Amarillo	4	22,2	0	0,0
Rojo	4	22,2	1	16,7
Azul	3	16,7	1	16,7
Celeste	2	11,1	1	16,7
Rosado	1	5,6	0	0,0
Naranja	0	0,0	1	16,7
Blanco	0	0,0	1	16,7
Total	**18**	**100**	**6**	**100***

* En la última columna la suma es mayor a 100 por criterios de redondeo

Observe que con este cuadro se pudo responder las preguntas planteadas en el problema. Este cuadro representa una forma de modelar el juego desde el punto de vista de las posibilidades que tiene cada color según la ruleta.

Problema 4. Lanzamiento de monedas y dado

Se lanzan dos monedas y un dado numerado de uno a seis, y se consideran los eventos

A: obtener solamente una corona y un número par.
B: obtener un múltiplo de tres.

Determine la probabilidad de que:

a) Ocurra el evento *A* o el evento *B*.
b) Ocurran los eventos *A* y *B* a la vez.
c) No ocurra el evento *A*.

Solución:

Si los resultados simples o puntos muestrales se representan como triadas o ternas de elementos tales como (E, C, 2), significa que la primera moneda cayó escudo, la segunda corona y el dado cayó en dos, tal como muestra la figura. En total el espacio muestral tiene 24 puntos muestrales que se resumen en el siguiente cuadro:

Resultado del dado	**Resultados de las monedas**			
	C,C	**C, E**	**E, C**	**E, E**
1	(C, C, 1)	(C, E, 1)	(E, C, 1)	(E, E, 1)
2	(C, C, 2)	(C, E, 2)	(E, C, 2)	(E, E, 2)
3	(C, C, 3)	(C, E, 3)	(E, C, 3)	(E, E, 3)
4	(C, C, 4)	(C, E, 4)	(E, C, 4)	(E, E, 4)
5	(C, C, 5)	(C, E, 5)	(E, C, 5)	(E, E, 5)
6	(C, C, 6)	(C, E, 6)	(E, C, 6)	(E, E, 6)

Para los eventos *A* y *B*,

A: obtener solamente una corona y un número par.
B: obtener un múltiplo de tres.

se tendría que:

$A = \{(C,E,2),(C,E,4),(C,E,6),(E,C,2),(E,C,4),(E,C,6)\}$

$De\ este\ modo\ P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$

$B = \{(\mathrm{C,C,3}),(\mathrm{C,E,3}),(\mathrm{E,C,3}),(\mathrm{E,E,3}),(\mathrm{C,C,6}),(\mathrm{C,E,6}),(\mathrm{E,C,6}),(\mathrm{E,E,6})\}$

$Con\ lo\ cual\ P(B) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$

Las operaciones con eventos generan nuevos eventos.

a) La unión de los eventos A y B viene dado por:

$A \cup B = \{(C,E,2),(C,E,4),(C,E,6),(E,C,2),(E,C,4),(E,C,6),(C,C,3),(C,E,3),$
$(\mathrm{E,C,3}),(\mathrm{E,E,3}),(\mathrm{C,C,6}),(\mathrm{E,E,6})\}$

Entonces la respuesta de a) es $P(A \cup B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

b) La intersección de los eventos A y B es:

$A \cap B = \{(E,C,6),(C,E,6)\}$

Con lo cual $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

c) La no ocurrencia del evento A, o el complemento de A viene dado por:

$\mathrm{A^c} = \{(\mathrm{C,C,1}),(\mathrm{C,E,1}),(\mathrm{E,C,1}),(\mathrm{E,E,1}),(\mathrm{C,C,2}),(\mathrm{E,E,2}),(\mathrm{C,C,3}).(\mathrm{C,E,3}),$
$(\mathrm{E,C,3}),(\mathrm{E,E,3}),(\mathrm{C,C,4}),\ (\mathrm{E,E,4}),(\mathrm{C,C,5}),(\mathrm{C,E,5}),(\mathrm{E,C,5}),(\mathrm{E,E,5}),$
$(\mathrm{C,C,6}),(\mathrm{E,E,6})\}$

Por ello $\mathrm{P}(A^c) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

6. Propiedades básicas de las probabilidades

Según lo establecido en la definición clásica de probabilidad, se pueden deducir algunas propiedades básicas. Seguidamente se citan las más importantes:

Probabilidad del espacio muestral

Si S representa al espacio muestral de un experimento que tiene n puntos muestrales, se tiene que:

$$\mathrm{P(S)} = \frac{\text{Número total de elementos de S}}{\text{Número total de puntos muestrales}} = \frac{n}{n} = 1$$

Volver al Índice de Conceptos

Probabilidad del evento imposible

Normalmente se representa con ϕ al evento imposible, el cual no tiene puntos muestrales, entonces se tiene que:

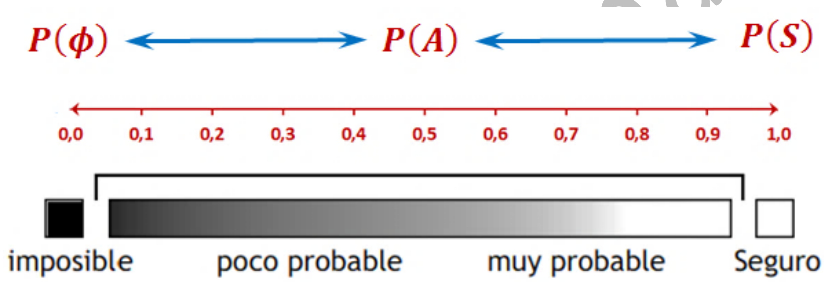
$$\mathrm{P}(\phi) = \frac{0}{\text{Número total de puntos muestrales}} = 0$$

Probabilidad de un evento cualquiera

Se ha mencionado anteriormente que la probabilidad del evento imposible es cero y la probabilidad del evento seguro (que representa a todo el espacio muestral) es uno, entonces para cualquier otro evento A se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

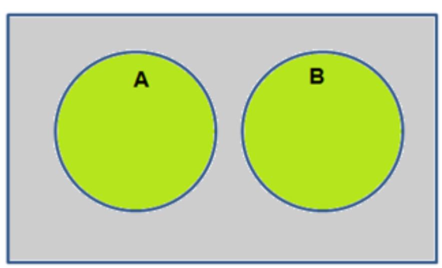
Lo anterior lo podemos observar en el siguiente esquema:



Probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes

Si tenemos dos eventos A y B en un espacio muestral S que son mutuamente excluyentes, es decir no hay puntos muestrales en común, se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Al no existir puntos muestrales en común entonces solamente se suman las probabilidades particulares.

Volver al Índice de Conceptos

Por ejemplo, si consideramos de nuevo del lanzamiento de un dado numerado de uno a seis y se consideran los eventos:

A: obtener un número par, se tiene que $A = \{2,4,6\}$.
B: obtener un número impar, entonces $B = \{1,3,5\}$.

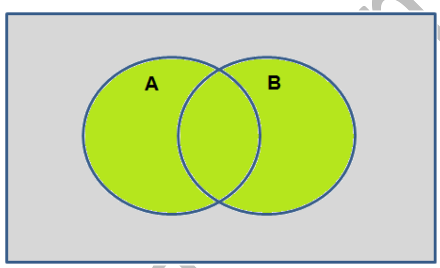
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ y } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ entonces } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Observe que $A \cup B$ es el espacio muestral o sea el evento seguro.

Probabilidad de la unión de eventos cualesquiera

Si tenemos dos eventos *A* y *B* en un espacio muestral *S*, para los cuales existen puntos muestrales en común, entonces se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Al existir puntos muestrales en común, cuando se suman las probabilidades de los eventos A y B, se suman dos veces los puntos muestrales en común, por esta razón a la suma de las probabilidades debe restarse la probabilidad de la intersección.

Consideremos nuevamente el lanzamiento de un dado numerado de uno a seis, y los eventos:

A: obtener un número par, se tiene que $A = \{2,4,6\}$.
B: obtener un número primo, entonces $B = \{2,3,5\}$.

Debido a que $A \cap B = \{2\}$, además:

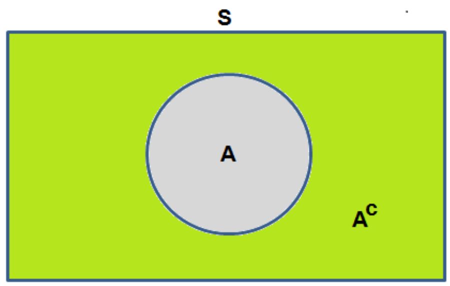
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \; P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ entonces } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Volver al Índice de Conceptos

Probabilidad del complemento de un evento

Para un evento A cualquiera de un espacio muestral S, se cumple que:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



El complemento de un evento A incluye los puntos muestrales de S que no están en A, por esta razón, como $\mathrm{P}(S) = 1$, entonces la probabilidad del complemento de A es $1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Si volvemos al problema del lanzamiento de un dado numerado de uno a seis, considere el evento A que corresponde a obtener un múltiplo de tres, $\mathrm{A} = \{3, 6\}$, entonces como $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ entonces:

$$P(A^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Volver al Índice de Conceptos

Problema 5. Inventario de zapatos

En una zapatería se tiene un inventario de 1500 pares de zapatos, de los cuales 40% son negros y 30% son tenis (zapatilla deportiva), un 5% son tenis negras. Si se seleccionara aleatoriamente un par de zapatos, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sean negros o sean tenis?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que no sean ni negros ni tenis?

Solución:

1. Para visualizar la información del problema y hacer más sencillo el análisis de las preguntas, los datos se pueden resumir en un cuadro o en un diagrama de Venn tal como se muestra. Los datos se pueden incluir en porcentajes o en probabilidades (en este caso los porcentajes se pueden convertir en probabilidades solamente dividiendo por 100). Lo importante es completar los valores faltantes por medio del complemento.

Tipo de Zapato	Color del zapato	Total

	Negro	Otro color	
Tenis	0,05	0,25	0,30
Otro tipo	0,35	0,35	0,70
Total	0,40	0,60	1,00

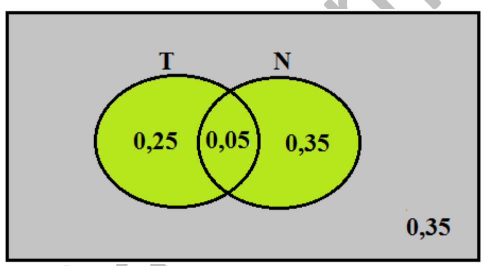
Observe que solamente los valores sombreados fueron dados en el problema, los restantes fueron obtenidos por diferencia. Si se representa con

T: al evento de que el par de zapatos seleccionado sean tenis, y
N: al evento de que el par de zapatos sean negros,

el evento de que los zapatos seleccionados sean tenis o sean negros viene dado por $T \cup N$, donde se sabe que $P(T) = 0{,}30$, $P(N) = 0{,}40$ y $P(T \cap N) = 0{,}05$. Por lo anterior, la probabilidad de $T \cup N$ se calcula por:

$$P(T \cup N) = P(T) + P(N) - P(T \cap N) = 0{,}30 + 0{,}40 - 0{,}05 = 0{,}65$$

El análisis anterior se puede representar mediante diagramas de venn



Observe que la probabilidad de $T \cup N$ corresponde a la suma de los valores del área sombreada con el color verde.

2. Si utiliza el análisis realizado en el ítem anterior, para determinar la probabilidad de que el par de zapatos seleccionado no sea negro ni tenis, se puede visualizar a partir del evento, que el par de zapatos sean tenis o sean de color negro. En el ítem anterior se demostró que:

$$P(T \cup N) = 0{,}65$$

Entonces en la probabilidad de que el par de zapatos no sean ni tenis ni de color negro, se considera el complemento del evento $T \cup N$, con lo cual:

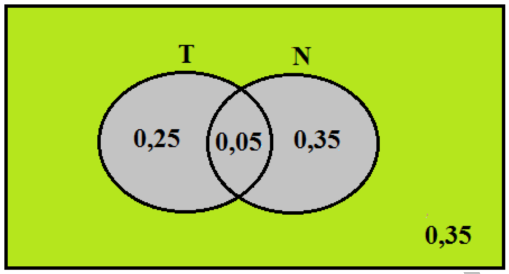
$$P(T \cup N)^C = 1 - P(T \cup N) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$

Esto se visualiza fácilmente en el cuadro, la probabilidad corresponde al valor de la celda sombreada. Observe que dicha celda corresponde a otro tipo de zapato que no es tenis y otro color que no es negro.

Tipo de Zapato	**Color del zapato**	**Total**

	Negro	Otro color	
Tenis	0,05	0,25	0,30
Otro tipo	0,35	0,35	0,70
Total	0,40	0,60	1,00

Por medio de diagramas de Venn se puede visualizar también el análisis previo:



En este diagrama, el evento de que el par de zapatos seleccionado no sean tenis ni de color negro, se representa en la región verde.

Problema 6. Preferencia por carrera universitaria

A 260 estudiantes de undécimo año de cierto colegio se les consultó por su preferencia por las siguientes áreas para realizar estudios universitarios: Ingenierías, Ciencias Administrativas o Ciencias de la Salud; las respuestas se resumen en el siguiente cuadro:

Sexo	**Ingenierías**	**Ciencias Administrativas**	**Ciencias de la Salud**	**Total**
Masculino	30	35	35	100
Femenino	40	64	56	160
Total	**70**	**99**	**91**	**260**

Si se selecciona aleatoriamente a uno de estos estudiantes de undécimo año, responda las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea del sexo masculino?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea del sexo femenino y tenga preferencia por las Ingenierías?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea del sexo masculino o tenga preferencias por las Ciencias de la Salud?

4. ¿Son igualmente probables los eventos tener preferencia por Ciencias Administrativas y por Ciencias de la Salud?.

5. Si el estudiante seleccionado es del sexo femenino ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el área de Ingenierías?

6. ¿Es igualmente probable la preferencia por Ciencias de la Salud entre hombres y mujeres?

Solución:

1. Para responder esta pregunta se aplica la definición clásica de probabilidad. En total, de los 260 estudiantes de undécimo año, se tienen 160 estudiantes del sexo femenino, por lo que la probabilidad que el estudiante seleccionado sea de este sexo es:

$$\frac{160}{260} \approx 0{,}615$$

Nota: el símbolo ≈ significa aproximado, en el caso anterior el cociente $\frac{160}{260}$ tiene por resultado aproximado el 0,615, esto es diferente cuando se utiliza = porque en estos casos el valor es exacto.

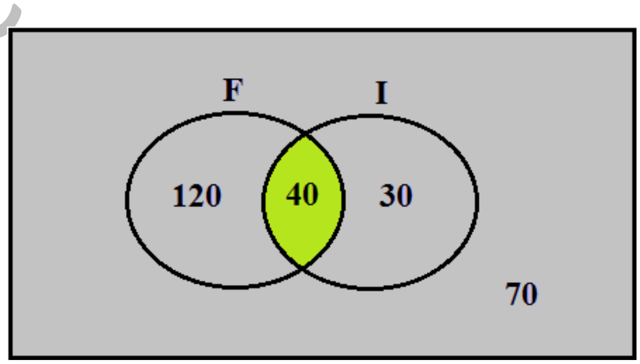
2. Si consideramos los eventos

F: el estudiante seleccionado es del sexo femenino,
I: el estudiante seleccionado tiene preferencia por Ingenierías,

entonces la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea del sexo femenino y tenga preferencia por las Ingenierías, debe verse como $P(F \cap I)$. En total hay 40 estudiantes del sexo femenino que tienen preferencia por las ingenierías, entonces:

$$P(F \cap I) = \frac{40}{260} \approx 0{,}154$$

Este análisis se puede visualizar también mediante el uso de los diagramas de Venn. Puede notarse que en la intersección de F con I se encuentran 40 estudiantes de un total de 260 estudiantes de undécimo año.



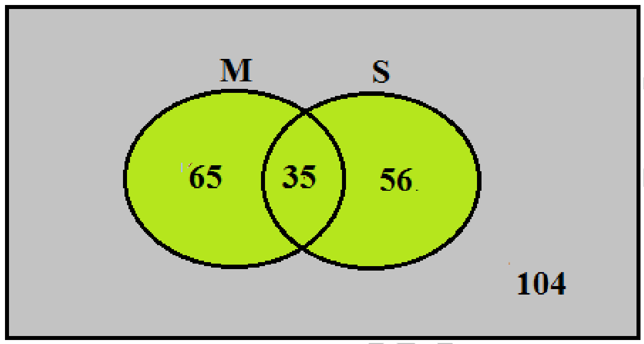
3. Para responder la tercera pregunta, consideremos los eventos

M: el estudiante seleccionado es del sexo masculino
S: el estudiante seleccionado tiene preferencia por Ciencias de la Salud

Entonces la probabilidad que el estudiante seleccionado sea del sexo masculino o tenga preferencias por las Ciencias de la Salud sería $P(M \cup S)$ y viene dada por:

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S) = \frac{100}{260} + \frac{91}{260} - \frac{35}{260} = \frac{156}{260} = 0{,}6$$

Mediante diagramas de Venn, puede notarse que en la unión de los conjuntos hay $55 + 35 + 56$ que suman 156 estudiantes, de un total de 260 estudiantes de undécimo año



4. Para determinar si ¿son igualmente probables los eventos tener preferencia por Ciencias Administrativas y por Ciencias de la Salud?, se requiere determinar las probabilidades individuales de cada evento y compararlas. Consideremos los eventos:

   A: el estudiante seleccionado tiene preferencia por Ciencias Administrativas
   S: el estudiante seleccionado tiene preferencia por Ciencias de la Salud

$$P(A) = \frac{99}{260} \approx 0{,}381$$

$$P(S) = \frac{91}{260} = 0{,}35$$

   Entonces las probabilidades no son iguales: es más probable que un estudiante prefiera Ciencias Administrativas a que prefiera Ciencias de la Salud.

5. Si sabemos de antemano que el estudiante seleccionado es del sexo femenino, entonces el espacio muestral se debe cambiar para considerar únicamente las mujeres. Entre el total de mujeres se selecciona una de ellas y se requiere responder ¿cuál es la probabilidad de que ella prefiera el área de Ingenierías? Como en total hay 160 mujeres, de las cuales 40 tienen preferencia por ingenierías, la probabilidad solicitada es:

$$\frac{40}{160} = 0{,}25$$

6. Para determinar si ¿es igualmente probable la preferencia por Ciencias de la Salud entre hombres y mujeres?, al igual que en el ítem anterior, se debe realizar un análisis relativo tomando en cuenta solamente hombre o mujeres por separado. Observe la información:

Preferencia	**Hombres**	**Mujeres**
Ciencias de la Salud	35	56
Otra área	65	104
Total	100	160

Entre los hombres, la probabilidad de que un estudiante prefiera Ciencias de la Salud es:

$$\frac{35}{100} = 0{,}35$$

Entre las mujeres, la probabilidad que una estudiante prefiera Ciencias de la Salud es:

$$\frac{56}{160} = 0{,}35$$

Por lo tanto se tiene que efectivamente son igualmente probables los eventos.

Nota: Observe que las probabilidades anteriores no se calcularon sobre el total de 260 estudiantes, esto se pidió determinar la probabilidad de que el área preferida sean Ciencias de la Salud entre hombres y entre mujeres por separado, por ello se utilizó como denominador en el primer caso el número de hombres y en el segundo el número de mujeres.

7. Enfoque frecuencista o empírico de probabilidad

En los problema anteriores, para determinar la probabilidad de un evento hemos supuesto que conocemos el espacio muestral. Sin embargo, en la vida real muchas veces no es posible conocer este conjunto. En estos caso se puede obtener una aproximación de la probabilidad por medio de una muestra aleatoria de unidades estadísticas involucradas en el problema de interés. Hay que recalcar que si la probabilidad se calcula sobre una muestra y no sobre todo el espacio muestral, lo que se obtiene es una estimación o aproximación que puede variar si se utiliza otra muestra diferente. A este tipo de probabilidad se le llama probabilidad *empírica o frecuencista* y se define de la siguiente manera:

Concepto empírico o frecuencista de probabilidad

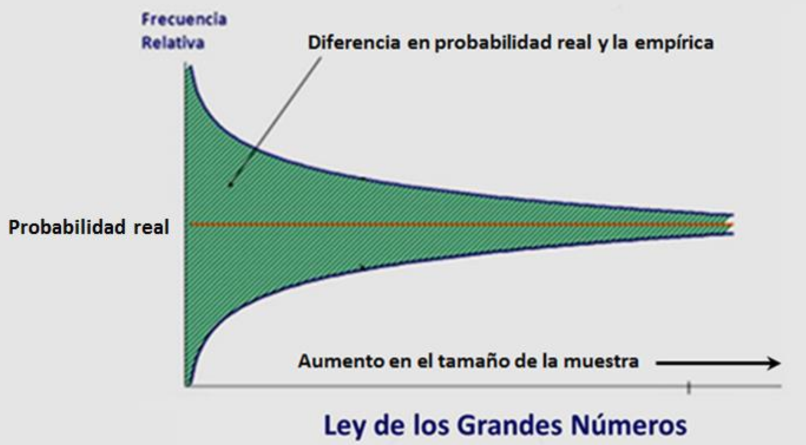
En una muestra aleatoria que incluye n elementos igualmente probables, de los cuales existe una frecuencia de k elementos a favor de evento A, se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra (se representa con $P(A)$) y viene dada por la razón:

$$P(A) = \frac{frecuencia\ de\ resultados\ a\ favor\ de\ A}{tamaño\ de\ la\ muestra} = \frac{k}{n}$$

Nota: Observe que la definición anterior es similar a la definición clásica, con la salvedad anotada anteriormente de que el resultado empírico es una estimación de la probabilidad real y que puede variar de una muestra a otra.

A medida que el tamaño de la muestra se hace cada vez más grande la estimación de la probabilidad real se hace cada vez más precisa, esta propiedad se conoce como la ley de los grandes números.

Por medio de ella se puede encontrar la probabilidad de cualquier evento siempre que se conozca el número total de resultados del experimento y el número de resultado a favor del evento.



Puede notarse en el gráfico que conforme el tamaño de la muestra aumenta la probabilidad empírica se aproxima cada vez más a la probabilidad real del evento.

Volver al Índice de Conceptos

Problema 7. Condición de lateralidad según partes del cuerpo

En los últimos años en el fútbol nacional se ha observado una escasez de jugadores que pueda patear de igual manera con ambas piernas (*ambidiestros*). Algunas personas creen que esto ocurre porque la probabilidad de encontrar una persona ambidiestra ha venido disminuyendo. Según estudios publicados por la página web http://www.zurdos.cl/estadisticas.html para 1981 se tenía en el mundo que:

Tabla de probabilidades según la parte del cuerpo y su lateralidad

Parte del cuerpo	Muy Zurdo	Muy Diestro	Ambos por igual
Mano	0,05	0,73	0,22
Pie	0,04	0,46	0,50
Ojo	0,05	0,54	0,41
Oído	0,15	0,35	0,50

Porac C. & Coren S. Lateral preferences and human behavior. New York: Springer-Verlag, 1981
(Este cuadro fue modificado en cuanto a la notación con fines didácticos)

Para determinar si la creencia de que la probabilidad de encontrar personas ambidiestras ha disminuido respecto a los resultados que presentó esa investigación, se seleccionó una muestra aleatoria de 500 estudiantes de secundaria de Costa Rica y se realizó un estudio para determinar su condición de lateralidad según las partes del cuerpo:

Resultados de lateralidad de una muestra aleatoria de 500 estudiantes de secundaria en Costa Rica, 2016

Parte del cuerpo	Muy Zurdo	Muy Diestro	Ambos por Igual	Total
Mano	28	390	82	500
Pie	22	254	224	500
Ojo	22	280	198	500
Oído	71	170	259	500

Datos simulados con fines didácticos

Utilice esta información para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Hay diferencias notorias en las probabilidades de que una persona sea ambidiestra en relación con las que se observaron en el estudio mundial de 1981?

2. ¿Qué se puede indicar respecto a la creencia de que ha disminuido la probabilidad de encontrar una persona ambidiestra de los pies?

3. ¿Qué supuestos o consideraciones deben tenerse para que las respuestas anteriores sean válidas?

Solución:

Utilizando los datos de la muestra se procede a responder las preguntas

1. En el siguiente cuadro se procede a determinar las probabilidades de que un estudiante de la muestra sea ambidiestro para las cuatro partes del cuerpo consideradas en el estudio:

Resultados de la probabilidad de que un estudiantes sea ambidiestro según la parte del cuerpo en una muestra aleatoria de 500 estudiantes de secundaria en Costa Rica, 2016

Parte del cuerpo	Número de estudiantes ambidiestros	Probabilidad de ambidiestro
Mano	82	$\frac{82}{500} = 0{,}164$
Pie	224	$\frac{224}{500} = 0{,}448$
Ojo	198	$\frac{198}{500} = 0{,}396$
Oído	259	$\frac{259}{500} = 0{,}518$

Al comparar estos resultados con los del estudio de 1981, se puede ver que:

Parte del cuerpo	Ambos por igual
Manos	0,22
Pie	0,50
Ojo	0,41
Oído	0,50

Se observan diferencias notorias en las probabilidades de ser ambidiestro en la mano y el pie, mientras que en el ojo o en el oído las diferencias no son muy grandes.

2. Tomando como base el resultado obtenido en el ítem 1, se tiene que para 1981 la probabilidad de que una persona fuera ambidiestra en los pies era del 0,50; mientras que la muestra aleatoria se obtuvo que la probabilidad que uno de los 500 estudiantes sea ambidiestro es 0,448; por lo que se podría considerar que ha existido un descenso.

3. El análisis realizado en este ejercicio parte de muchos supuestos, entre ellos:

   i. La información publicada en el estudio de 1981 era también válida para Costa Rica en ese mismo año.

   ii. Los resultados de la muestra aleatoria de estudiantes es representativa de lo que ocurre en la población joven de Costa Rica.

   Aunque se pueden señalar muchos otros supuestos, los anteriores son claves para fundamentar el análisis realizado.

Nota: Las propiedades básicas de probabilidad también son válidas en el caso de que estemos trabajando con probabilidades empíricas.

Problema 8. Tratamiento contra la influenza

Las personas enfermas de influenza constituyen la principal fuente de infección de la enfermedad, el virus responsable se trasmite principalmente por vía aérea. Los niños pequeños (entre seis meses y cinco años), adultos mayores (mayores de 65 años), enfermos crónicos, embarazadas e inmunosuprimidos pertenecen a los grupos de riesgo. Esto significa que al estar expuestos al virus, tienen mayor probabilidad de contagiarse de influenza que el resto de la población.

https://pixabay.com/es

http://www.apmadrid.es/

Suponga que una nueva cepa de virus afecta una pequeña comunidad (denominada comunidad A) que se encuentra aislada de otras poblaciones, este virus muestra un comportamiento diferente, por lo que se tomó una muestra aleatoria de 400 personas del grupo en riesgo que estuvieron expuestas al virus, de las cuales a 200 se les aplicó una vacuna y a los otros 200 se les aplicó un placebo (medicamento neutro sin acción farmacológica). Los resultados fueron los siguientes:

Condición de enfermedad para una muestra aleatoria de 400 personas en riesgo[1] de la comunidad A que fueron expuestas al virus de la influenza según tipo de tratamiento

Condición	Se aplicó vacuna	Se aplicó placebo	Total
Contrajeron influenza	112	171	283
No contrajeron influenza	88	29	117
Total	200	200	400

[1] Se considera en riesgo una persona que pertenece a los siguientes grupos: niños pequeños (entre seis meses y cinco años), adultos mayores (mayores de 65 años), enfermos crónicos, embarazadas e inmunosuprimidos.

Fuente: Esta información es ficticia, fue elaborada con fines didácticos.

Tomando como referencia la información anterior, se desea responder las siguientes interrogantes:

1. Si escoge una persona de esta muestra en forma aleatoria determine la probabilidad de que:

    a) no haya contraído la influenza.
    b) se le haya aplicado la vacuna.
    c) haya sido vacunada y contrajera la influenza.
    d) no contrajera la influenza o se la haya aplicado el placebo.

2. Para una persona de la comunidad A que pertenece al menos a uno de los grupos de riesgo:

a) estime la probabilidad de que pueda enfermarse, sabiendo que se ha vacunado .
b) estime la probabilidad de que no se haya vacunado, sabiendo que se ha enfermado

3. Según el estudio realizado, ¿hay evidencia de que la vacuna sea eficiente para disminuir la probabilidad de que una persona de la comunidad A se enferme de influenza?

Solución:

1. Para responder este punto se debe observar que las probabilidades solicitadas se calculan para una persona aleatoria que pertenece a la muestra. Por ello se aplica la definición clásica, no se realizan estimaciones sino que es un cálculo directo. El espacio muestral está constituido por las 400 personas. Sean:

   A: la persona fue vacunada   B: la persona no es vacunada
   C: la persona contrajo influenza   D: la persona no contrajo influenza

   a) En el inciso a) se pide la probabilidad el evento D, o sea $P(D)$. Debido a que de las 400 personas, 117 no contrajeron la enfermedad, $P(D)=\frac{117}{400}\approx 0{,}2925$. Entonces la probabilidad que la persona seleccionada no haya contraído influenza (redondeado a dos decimales) es 0,29.

   b) Acá se pide la probabilidad del evento A. Como la vacuna se aplicó a 200 personas, entones $P(A)=\frac{200}{400}\approx 0{,}5$. Entonces la probabilidad que la persona seleccionada no se le haya aplicado la vacuna es 0,5.

   c) En este inciso se solicita la probabilidad del evento $A\cap C$, en donde 112 personas fueron vacunadas y contrajeron la enfermedad. Entonces $P(A\cap C)=\frac{112}{400}=0{,}28$. Con lo cual la probabilidad de que la persona seleccionada fuera vacunada y contrajera la enfermedad de 0,28.

   d) Por último, se solicita la probabilidad de $D\cup B$. Entonces, según las propiedades de probabilidades $P(D\cup B)=P(D)+P(B)-P(D\cap B)=\frac{117}{400}+\frac{200}{400}-\frac{29}{400}=\frac{288}{400}=0{,}72$. Con lo cual, la probabilidad de que la persona seleccionada no contrajera la influenza o se la haya aplicado el placebo es 0,72.

2. A diferencia del punto 1., en el punto 2. se pide estimar probabilidades para una persona que pertenece a alguno de los grupos de riesgo en toda comunidad (ya no se refiere a la muestra). Por ello se aplica el enfoque empírico pues se utiliza la información de la muestra para estimar las probabilidades en toda la comunidad.

   a) Para responder el inciso a) hay que tener presente que la persona ya ha sido vacunada (son 200 en la muestra los que fueron vacunados) y se debe estimar la probabilidad de que la persona pueda enfermarse (de las 200 que fueron vacunadas se enfermaron 112), entonces la probabilidad estimada viene dada por $\frac{112}{200}=0{,}56$.

   b) Aplicando el mismo principio del inciso a), si se supone que la persona se ha enfermado (283 personas de la muestra se enfermaron) y se pide estimar la probabilidad de que no se haya vacunado (de las 283 que se enfermaron 171 no recibieron vacuna), entonces la estimación de la probabilidad es $\frac{171}{283} = 0{,}60424 \ldots$ La probabilidad estimada (redondeada a dos decimales) es 0,60.

3. Para saber si la vacuna disminuye la probabilidad de que una persona en riesgo se enferme, hay que estimar la probabilidad de que la persona se enferme entre los que se vacunaron y entre los que no se vacunaron.

   Entre las personas que se vacunaron la probabilidad de enfermarse fue de $\frac{112}{200} = 0{,}56$. Entre las personas que no se vacunaron la probabilidad de enfermarse fue de $\frac{171}{200} = 0{,}855$. Puede notarse que efectivamente la probabilidad de enfermarse es mucho menor entre las personas que se vacunaron que entre aquellos que no lo hicieron. Esto puede hacer suponer que la vacuna es efectiva.

II. Bibliografía

Ministerio de Educación Pública (2015). Curso bimodal para el II Ciclo: Estadística mucho más que procedimientos y técnicas. Unidad didáctica Estadística. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

III. Créditos

Material complementario Estadística y Probabilidad: Probabilidad básica, es parte del MiniMOOC Medidas estadísticas, una actividad del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor del presente documento
Edwin Chaves Esquivel

Revisores de este documento
Ángel Ruiz, Edison De Faria, Johanna Mena, Keibel Ramírez, Luis Hernández, Xinia Zúñiga.

Director general del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Material complementario Estadística y Probabilidad: Probabilidad básica*, San José, Costa Rica: autor.

Volver al Índice de Conceptos