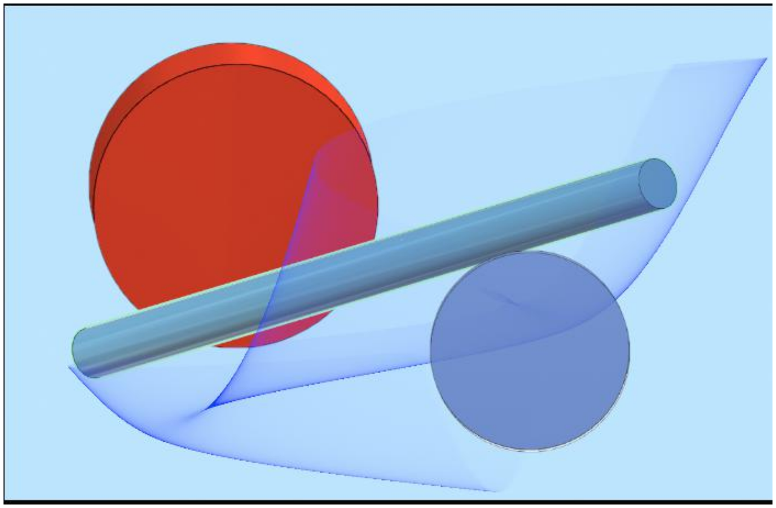
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Colección
Preparación Matemáticas Bachillerato

Relaciones entre circunferencias y rectas

Material complementario



Costa Rica
2017

Índice

Circunferencia, concepto, 11
Circunferencia, ecuación, 11

Pendiente de una recta, 3
Pendiente de una recta que pasa por dos puntos dados, 7
Pendientes de rectas paralelas, 7
Pendientes de rectas perpendiculares, 9
Punto en una circunferencia, 14
Punto exterior a una circunferencia, 15
Punto interior a una circunferencia, 15

Recta exterior a una circunferencia, 16
Recta secante a una circunferencia, 16
Recta tangente a una circunferencia, 16
Recta, ecuación en el plano, 3
Recta, representación gráfica, 4
Rectas paralelas a los ejes de coordenadas, 6
Relación entre rectas, circunferencias y discriminante de una ecuación de segundo grado, 18
Relación radio y recta tangente a una circunferencia, 21

El presente documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatemática.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Relaciones entre circunferencias y rectas*, que forma parte de la colección *Preparación Matemáticas Bachillerato*. (http://190.10.69.205/colecci

El propósito de *Relaciones entre circunferencias y rectas* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se exponen diferentes conocimientos vinculados con el rectas, circunferencias, sus ecuaciones y relaciones de posición entre ellas, de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

1. Circunferencias y rectas

Rectas

La recta en el plano

En el plano, una recta es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son números reales constantes tales que A y B no son iguales a 0 simultáneamente.
En el caso de que $B \neq 0$, se puede despejar y en la ecuación anterior y se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

de tal manera, la ecuación de la recta tiene la forma $y = mx + b$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.
El número m se llama **pendiente** de la recta.

Cortesía de mapichai en FreeDigitalPhotos.net

Ejemplo 1

Trazar la recta de ecuación $y = 2x - 1$.

Solución

Naturalmente existe un número infinito de puntos que pertenecen a la recta. Sin embargo, dado que es imposible trazar todos los puntos tomamos unos cuantos que nos permitan imaginar la apariencia de la gráfica. Tomamos en forma arbitraria valores para "x" y luego calculamos el valor de "y" que corresponde, para ello se construye la siguiente tabla:

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-3	-7	$(-3, -7)$
-2	-5	$(-2, -5)$
-1	-3	$(-1, -3)$
0	-1	$(0, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	3	$(2, 3)$
3	5	$(3, 5)$

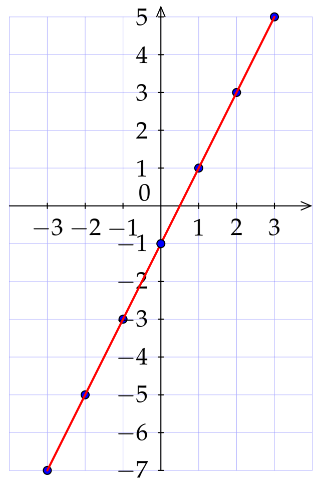


Figura 1: Recta de ecuación $y = 2x - 1$.

Nótese que cada par ordenado (x, y) satisface la ecuación $y = 2x - 1$. Además, observe que dado que una recta está determinada por dos puntos, si queremos dibujar la gráfica que corresponde a la ecuación de dicha recta, es suficiente dibujar dos puntos cualesquiera y trazar la recta correspondiente.

Ejemplo 2

Trazar la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.

Solución

Se puede obtener puntos particulares de una recta mediante la estrategia de dar un valor a la x y, a partir de ahí, obtener el valor correspondiente de y.

Digamos que $x = 1$, entonces, al sustituir en la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 2(1) - 3y + 4 &= 0 \\ 2 - 3y + 4 &= 0 \\ -3y + 6 &= 0 \\ -3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-3} = 2. \end{aligned}$$

Esto significa que el punto $(1, 2)$ pertenece a la recta.

El punto $(-2, 0)$ también pertenece a la recta puesto que

$$2(-2) - 3(0) + 4 = -4 - 0 + 4 = 0.$$

Por lo tanto, la gráfica de la recta de $2x - 3y + 4 = 0$ se obtiene al colocar los puntos $(1, 2)$ y $(-2, 0)$ y trazar la recta que pasa por ellos, tal como se hace en la siguiente figura.

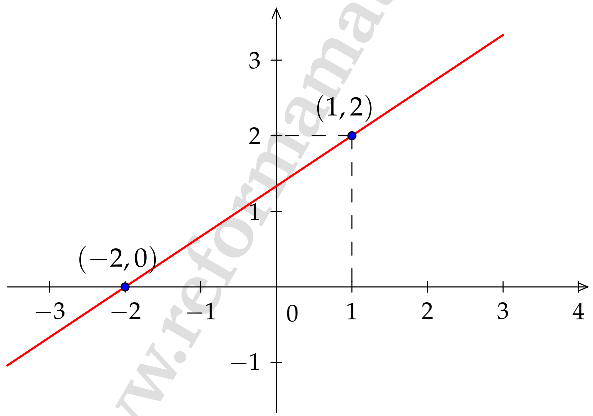


Figura 2: Recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.

Ejemplo 3

Determinar si el punto $(1, 4)$ pertenece o no a la recta de ecuación $2x + y - 5 = 0$.

Solución

Tenemos $2(1) + 4 - 5 = 1 \neq 0$, entonces el punto dado no pertenece a la recta indicada.

Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

Para que la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

corresponda a una recta, A y B no pueden ser 0 al mismo tiempo; sin embargo, uno de ellos puede ser 0:

- Si $A = 0$, se tiene una ecuación de la forma $y = a$ que corresponde a una recta paralela al eje x.
- Si $B = 0$, se tiene una ecuación de la forma $x = b$ que corresponde a una recta paralela al eje y.

Ejemplo 4

En la siguiente figura se representan las rectas de ecuaciones $-x + 2y + 4 = 0$, $y = 3$, $x = -2$.

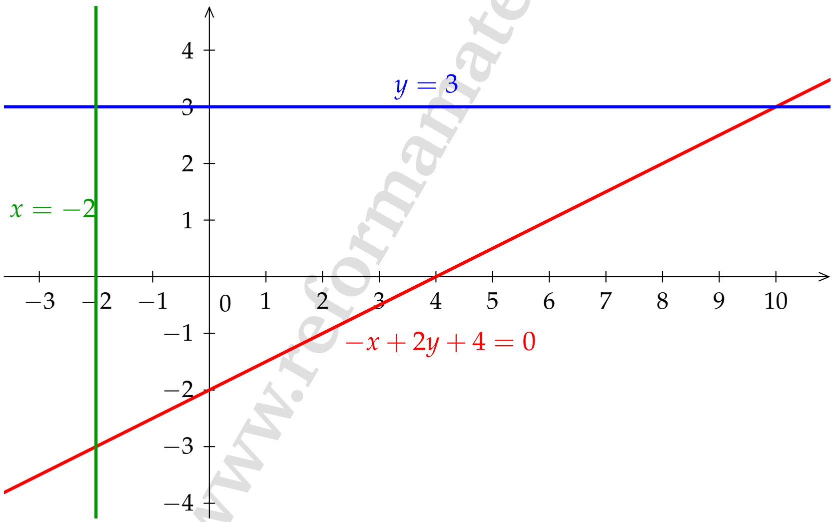


Figura 3: Gráficas de las rectas: $-x + 2y + 4 = 0$, $y = 3$, $x = -2$.

Pendiente de una recta

Si una recta pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, entonces su pendiente es igual a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

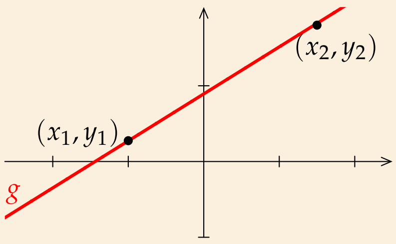


Figura 4: La pendiente de g es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Ejemplo 5

La recta que pasa por $A(-1, 4)$ y por $B(3, 2)$ tiene como pendiente $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Aquí se tomó $x_1 = -1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 2$.

Rectas paralelas

Dos rectas de ecuaciones $y = mx + b$ y $y = nx + d$ son paralelas si y solo si $m = n$; es decir, tienen la misma pendiente.

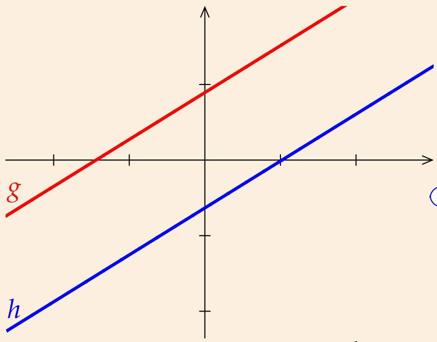


Figura 5: Las rectas g y h son paralelas; tienen la misma pendiente.

Ejemplo 6

Determinar si las rectas $3y - 5x - 3 = 0$; $3y - 5x + 21 = 0$ son paralelas.

Solución

La pendiente de la recta $3y - 5x - 3 = 0$ es $\frac{5}{3}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta $3y - 5x + 21 = 0$ es $\frac{5}{3}$.

Por lo tanto, dado que las pendientes de ambas rectas tienen el mismo valor, son paralelas.

Ejemplo 7

Probar que el cuadrilátero de vértices $A(5,4)$, $B(3,0)$, $C(-2,-2)$ y $D(0,2)$ es un paralelogramo.

Solución

Basta probar que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas entre sí y que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ también son paralelas entre sí.

La recta $\overleftrightarrow{AB}$ tiene pendiente $m_1 = \dfrac{0-4}{3-5} = \dfrac{-4}{-2} = 2.$

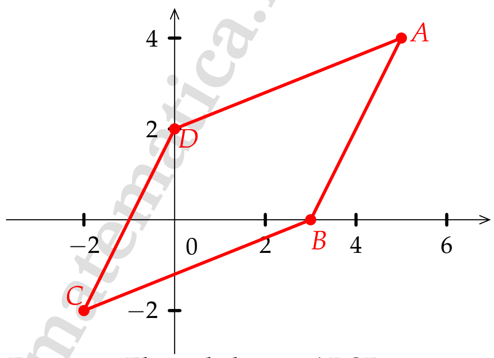


Figura 6: El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

La recta $\overleftrightarrow{CD}$ tiene pendiente $m_2 = \dfrac{-2-2}{-2-0} = \dfrac{-4}{-2} = 2.$

Luego, estas rectas son paralelas y por lo tanto lo son los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

La recta $\overleftrightarrow{AD}$ tiene pendiente $m_3 = \dfrac{2-4}{0-5} = \dfrac{-2}{-5} = \dfrac{2}{5}.$

La recta $\overleftrightarrow{CB}$ tiene pendiente $m_4 = \dfrac{0-(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{2}{5}.$

Luego, estas rectas son paralelas y por lo tanto lo son los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Como los lados son paralelos dos a dos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Rectas perpendiculares

Dos rectas de ecuaciones $y = mx + b$ y $y = nx + d$ son perpendiculares si y solo si $m \cdot n = -1$; es decir, $n = -\dfrac{1}{m}$.
Todas las rectas de ecuación $y = a$ (con a constante) son perpendiculares a todas las rectas de ecuación $x = b$ (con b constante).

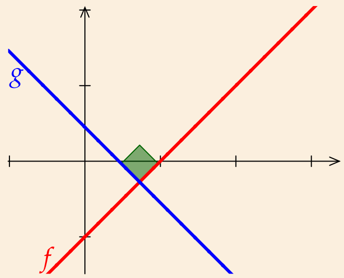


Figura 7: Las rectas g y h son perpendiculares; el producto de sus pendiente es -1.

Ejemplo 8

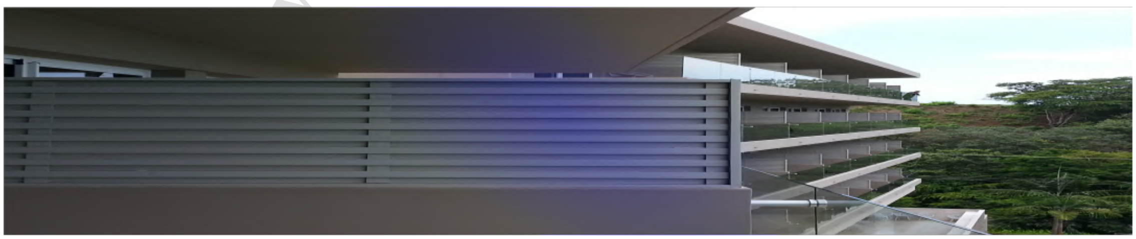
Determine si las rectas $5y - 2x - 15 = 0$; $2y + 5x - 2 = 0$ son perpendiculares.

Solución

La pendiente de la recta $5y - 2x - 15 = 0$ es $\frac{2}{5}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta $2y + 5x - 2 = 0$ es $-\frac{5}{2}$.

Por lo tanto, dado que $\frac{2}{5} \cdot -\frac{5}{2} = -1$, las rectas son perpendiculares.



Ejemplo 9

Determinar si el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,0)$, $B(4,-3)$ y $C(6,0)$ es o no rectángulo.

Solución

Se tiene que:

- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es $m_1 = \dfrac{-3-0}{4-0} = \dfrac{-3}{4}$.
- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ es $m_2 = 0$.
- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ es $m_3 = \dfrac{0-(-3)}{6-4} = \dfrac{3}{2}$.

Se observa que $m_1 \cdot m_2 = 0$, $m_3 \cdot m_2 = 0$ y $m_1 \cdot m_3 = -\dfrac{9}{8}$. Como todos estos productos son diferentes a -1 se tiene que no hay dos de estas rectas que sean perpendiculares, por lo tanto el triángulo no es rectángulo.

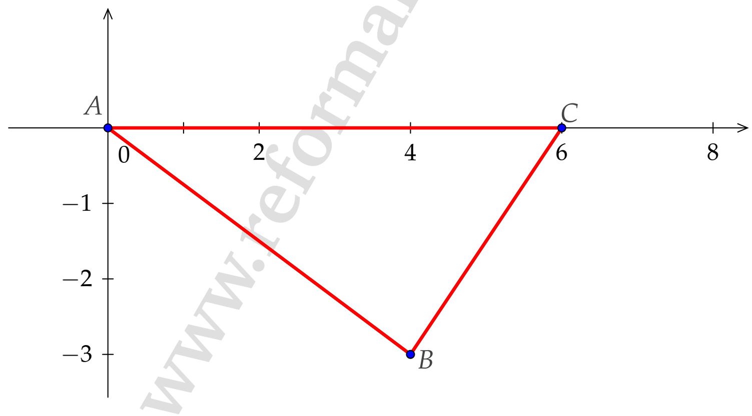


Figura 8: $\triangle ABC$ no es rectángulo.

Circunferencias

Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado centro.

Suponga que el centro es $C(h,k)$ y $P(x,y)$ cualquier punto de la circunferencia. La distancia de todos esos puntos al centro es la misma, digamos r (se llama radio). Se debe cumplir entonces que $d(P,C) = r$, o sea

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Si se eleva al cuadrado ambos miembros en la ecuación anterior, se obtiene la forma normal de la ecuación de la circunferencia.

Ecuación de la circunferencia

Si el centro de una circunferencia en el plano es $C(h,k)$ y su radio es r, entonces la ecuación canónica de la circunferencia es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

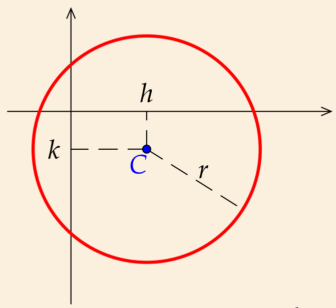


Figura 9: La ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

Ejemplo 10

La ecuación $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ corresponde a una circunferencia de radio 4 y centro $(2,1)$.

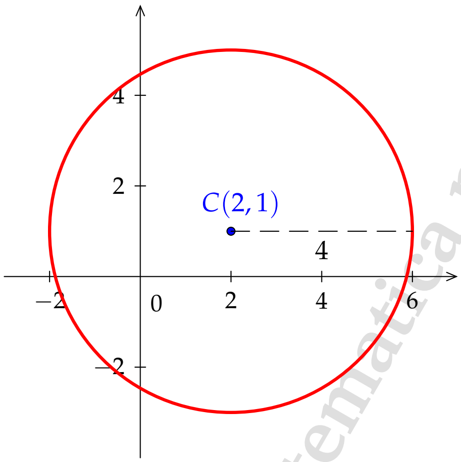


Figura 10: Circunferencia de radio 4 y centro $(2,1)$.

Ejemplo 11

Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 5. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia: $A(2,4)$, $B(4,3)$, $C(\sqrt{5},2\sqrt{5})$.

Solución

De acuerdo con la fórmula dada, la ecuación sería $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$, o sea $x^2+y^2=25$.

Veamos si A pertenece a la circunferencia.

Como $2^2+4^2=4+16=20\neq 25$; entonces A no pertenece a la circunferencia.

Ahora para B: $4^2+3^2=16+9=25 \Rightarrow B$ sí pertenece a la circunferencia.

Por otra parte, $\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=5+20=25 \Rightarrow C$ también pertenece a la circunferencia.

Otra estrategia para determinar si los puntos dados están o no en la circunferencia consiste en representar gráficamente la circunferencia y los puntos. Dependiendo de los valores dados para las coordenadas del centro y de los puntos o el valor del radio, esta estrategia puede ser muy sencilla o puede complicarse un poco y no ser tan eficiente como la algebraica. Si los valores son racionales es fácil representarlos, particularmente en el caso de que sean enteros.

En este ejemplo es sencillo representar la circunferencia y los puntos A y B. Para representar C, se debe representar $\sqrt{5}$ en el eje x y $2\sqrt{5}$ en el eje y. Para representar $\sqrt{5}$ se puede trazar el punto $(1,2)$ y luego se traza la circunferencia con centro $(0,0)$ y que pase por $(1,2)$. Dado que la distancia entre estos puntos es $\sqrt{5}$, el radio de la circunferencia tiene ese valor y entonces el punto en que se cortan tal circunferencia y el eje x corresponde al número $\sqrt{5}$. Para representar $2\sqrt{5}$ se escoge un punto, por ejemplo $(4,2)$ tal que la distancia de ese punto a $(0,0)$ sea $2\sqrt{5}$ y se procede como antes; esto garantiza que la circunferencia de centro $(0,0)$ y que pasa por $(4,2)$ corta al eje y en $2\sqrt{5}$. Observe la construcción auxiliar en la siguiente figura.

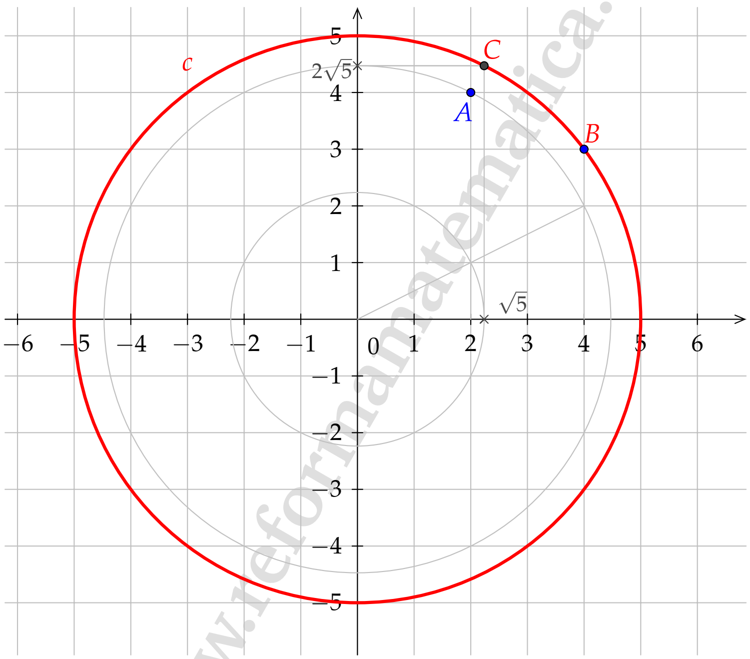


Figura 11: Los puntos B y C pertenecen a la circunferencia c. El punto A no pertenece a dicha circunferencia.

Ejemplo 12

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que aparece en la siguiente figura?

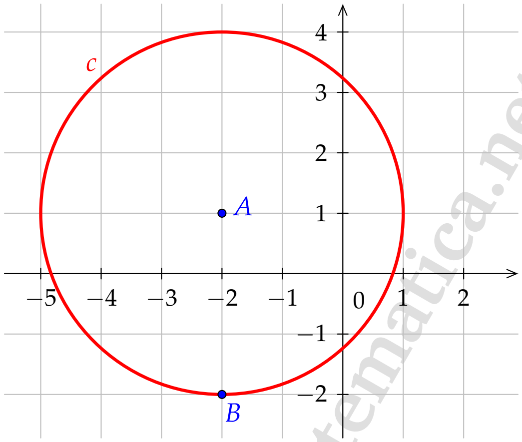


Figura 12: A es el centro de la circunferencia c y B pertenece a la circunferencia.

Solución

Se observa que el centro es el punto $A(-2, 1)$. El punto $B(-2, -2)$ pertenece a la circunferencia y $d(A, B) = 3$; esto significa que el radio de la circunferencia es igual a 3. Por lo tanto, la ecuación de c es $(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 3^2$. Es decir, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Lo que define si un punto pertenece a una circunferencia es que su distancia al centro sea igual al radio de la circunferencia. Si la distancia de un punto P al centro de la circunferencia es menor que el radio, entonces el punto P está en el interior de la circunferencia. Si la distancia de P al centro es mayor que el radio entonces P está en el exterior de la circunferencia.

Puntos interiores y exteriores a una circunferencia

Si el centro de una circunferencia en el plano es $C(h,k)$ y su radio es r y se tiene un punto $P(a,b)$ entonces:

- P es interior a la circunferencia si
$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2.$$
- P es exterior a la circunferencia si
$$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2.$$

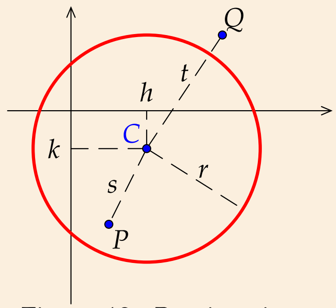


Figura 13: P es interior a la circunferencia ($s<r$). Q es exterior a la circunferencia ($t>r$).

Ejemplo 13

El punto $A(-2,3)$ es exterior a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=20$, pues $(-2-2)^2+3^2=16+9=25>20$.

El punto $B(0,3)$ es interior a esa circunferencia pues $(0-2)^2+3^2=4+9=13<20$.

Cortesía de sumetho en FreeDigitalPhotos.net

Relaciones de posición entre rectas y circunferencias

Dadas una recta y una circunferencia en el plano, se puede presentar alguna de las situaciones que se dan en la siguiente figura.

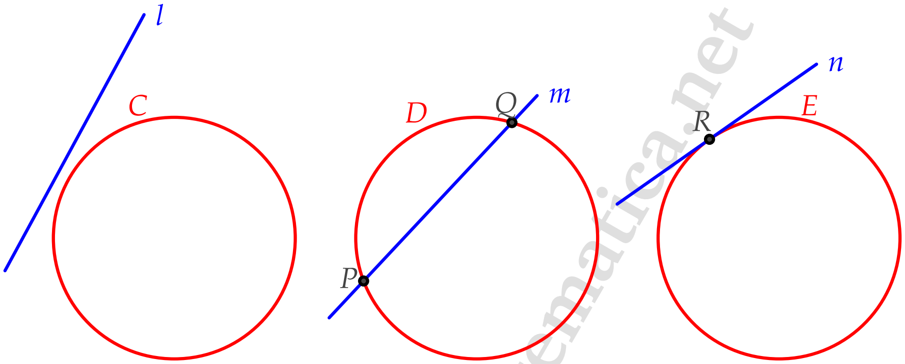


Figura 14: Posiciones relativas entre una circunferencia y una recta en el plano.

Posición relativa de una recta con respecto a una circunferencia

En la figura anterior:

- la recta l y la circunferencia C no se cortan (no se intersecan), se dice que la recta es **exterior** a la circunferencia.
- La recta m y la circunferencia D se cortan (o intersecan) en dos puntos P y Q, en este caso se dice que la recta es **secante** a la circunferencia.
- La recta n y la circunferencia E se cortan (o intersecan) en un único punto R, en este caso se dice que la recta es **tangente** a la circunferencia.

Ejemplo 14

En la siguiente figura se tiene que la recta f es tangente a las circunferencias c y d, la recta g es tangente a la circunferencia c y secante a la circunferencia d, la recta h es secante a la circunferencia c y exterior a la circunferencia d.

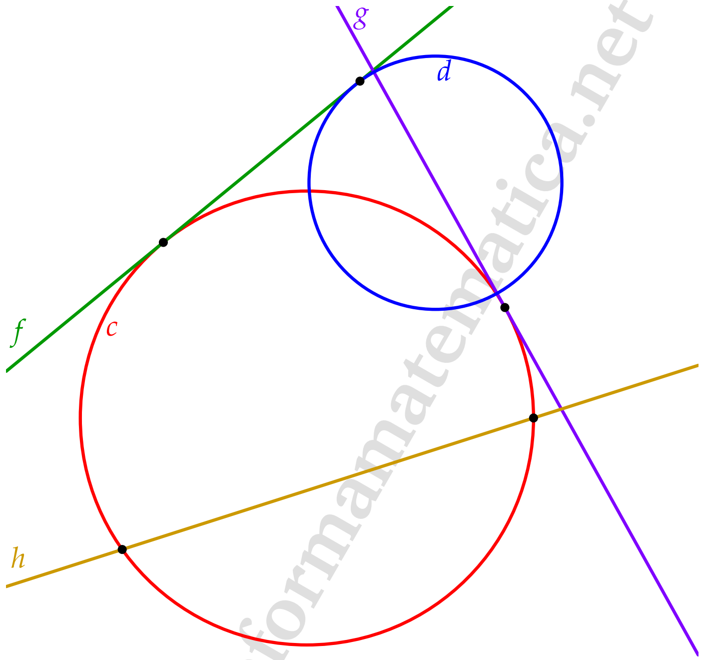


Figura 15: Las rectas f y g son tangentes a c, h es secante a c, g es secante a d, f tangente a d y h exterior a d.

Si se tiene la ecuación de una recta y la ecuación de una circunferencia y se quiere determinar la posición relativa entre ellas, lo que se debe averiguar es si no tienen puntos en común, o tienen solo un punto en común o tienen dos puntos en común.

Algebraicamente esto significa que debe determinarse si no hay pares de números reales, o hay solamente uno o hay dos de ellos que satisfacen simultáneamente la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia. Esto conlleva a resolver una ecuación de segundo grado, que, como sabemos, puede no tener soluciones reales o tener solo una o tener dos, lo cual depende del valor del discriminante de la ecuación.

Relación rectas – circunferencias – discriminante

Si $y = mx + b$ es la ecuación de una recta y $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia, para determinar, algebraicamente, si la recta es tangente, secante o exterior a la circunferencia, se puede sustituir la y de la ecuación de la circunferencia por $mx + b$ y resolver la ecuación resultante:

$$(x-h)^2 + (mx+b-k)^2 = r^2.$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es Δ. Se tiene que:

- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto la recta es exterior a la circunferencia.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene solo una solución real y por lo tanto la recta es tangente a la circunferencia.
- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y por lo tanto la recta es secante a la circunferencia.

Ejemplo 15

Determine la posición relativa de la recta f de ecuación $y = 2x - 1$ con respecto a la circunferencia c de ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

La solución algebraica consiste en resolver la ecuación $(x-2)^2 + (2x - 1 - 1)^2 = 4$. Esta ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (2x-2)^2 &= 4\\ x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 8x + 4 &= 4\\ 5x^2 - 12x + 4 &= 0\end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 144 - 100 = 44$. Como es positivo, entonces la recta es secante a la circunferencia.

La solución gráfica consiste en trazar la circunferencia c y la recta f en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Para trazar la recta se obtienen dos puntos que pertenezcan a ella y se traza la recta que pasa por esos dos puntos; por ejemplo $B(0,-1)$ y $C(1,1)$ pertenecen a la recta.

Para trazar c observamos que su centro es el punto $A(2,1)$ y su radio es $r = \sqrt{4} = 2$.

Se obtiene la gráfica que aparece en la siguiente figura.

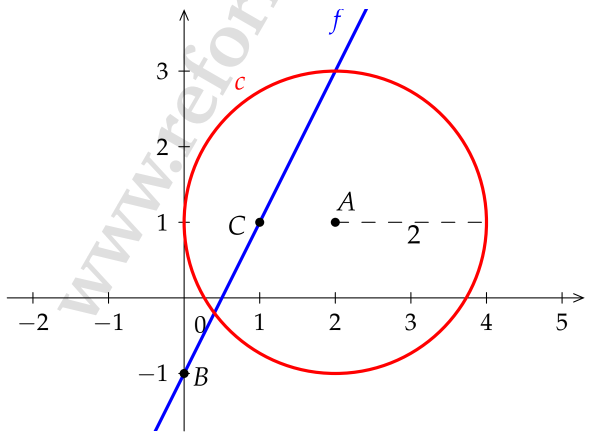


Figura 16: La recta f es secante a la circunferencia c.

Ejemplo 16

Una recta f pasa por los puntos $A(4,0)$ y $B(2,6)$, ¿será secante, tangente o exterior a la circunferencia c de ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 10$?

Solución

Algebraicamente: La pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $m = \dfrac{6-0}{2-4} = \dfrac{6}{-2} = -3$. Luego, como pasa por el punto $A(4,0)$, su ecuación es $\dfrac{y-0}{x-4} = -3$ que es equivalente a $y = -3x + 12$.

Al sustituir en la ecuación de c se obtiene $x^2 + (-3x + 12 - 2)^2 = 10$. Al desarrollar y simplificar se obtiene $x^2 - 6x + 9 = 0$. El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. La ecuación solo tiene una solución, por lo tanto solo hay un punto en común entre la recta y la circunferencia. La recta es tangente a la circunferencia.

Gráficamente: Se traza la recta que pasa por los dos puntos dados y la circunferencia de centro en $C(0,2)$ y radio $r = \sqrt{10}$.

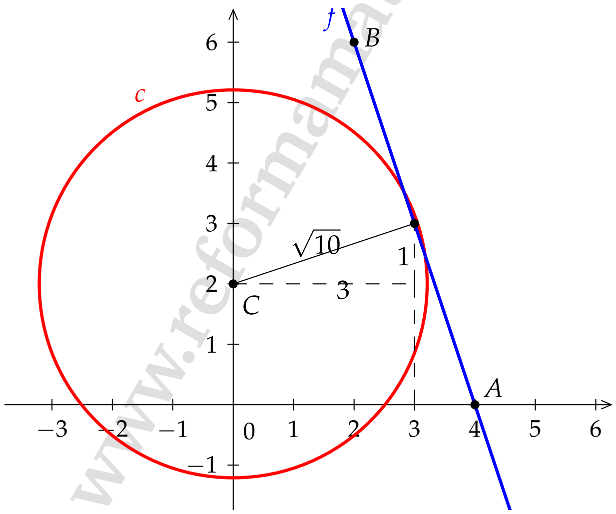


Figura 17: La recta f es tangente a la circunferencia c.

Relación radio – recta tangente a una circunferencia

Si c es una circunferencia de centro C y l una recta tangente a c en el punto A, entonces, el radio $\overline{CA}$ de la circunferencia el perpendicular a la recta l.

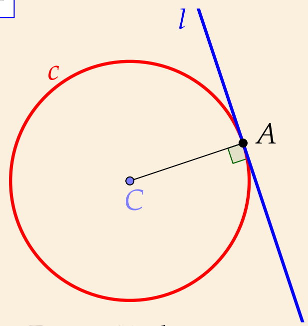


Figura 18: l es tangente a c en A, $\overline{CA} \perp l$.

Ejemplo 17

Una recta l es tangente a la circunferencia de ecuación $(x-3)^2 + y^2 = 9$ en el punto $A(2, 2\sqrt{2})$. Determinar la ecuación de l.

Solución

El centro de la circunferencia es $C(3,0)$, luego, la pendiente de $\overleftrightarrow{CA}$ es $m = \dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-3} = -2\sqrt{2}$.

Como $\overleftrightarrow{CA}$ es perpendicular a l, entonces la pendiente de l es $n = -\dfrac{1}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

La ecuación de l es $\dfrac{y-2\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Simplificando se obtiene: $\sqrt{2}x - 4y + 6\sqrt{2} = 0$.

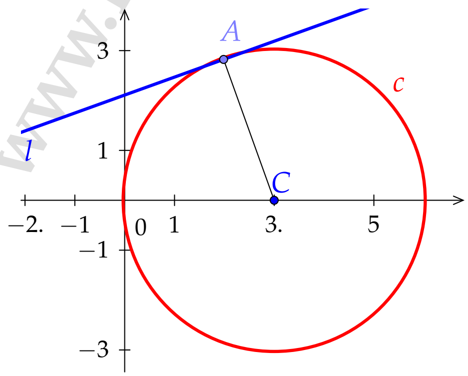


Figura 19: La ecuación de la recta l es $\sqrt{2}x - 4y + 6\sqrt{2} = 0$.

Bibliografía

Coxeter, H. & Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. Washington: MAA.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Usiskin, Z., Hirschhorn, D., Cosxford, A., Highstone, V., Lewellen, H., Oppong, N., DiBianca, R. & Maeir, M. (1997). *Geometry*. Glenview: Scott ForesmanAddisson Wesley.

Varilly, J. (1988). *Elementos de geometría plana*. San José, Costa Rica: EUCR.

Vázquez, A. & De Santiago, J. (2007). *Geometría Analítica*. México: Pearson Educación.

Créditos

Relaciones entre circunferencias y rectas. Material complementario, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Relaciones entre circunferencias y rectas*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor

Hugo Barrantes Campos

Revisores de este documento

Johanna Mena, Ángel Ruiz

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Relaciones entre circunferencias y rectas. Material complementario.* San José, Costa Rica: autor.