Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

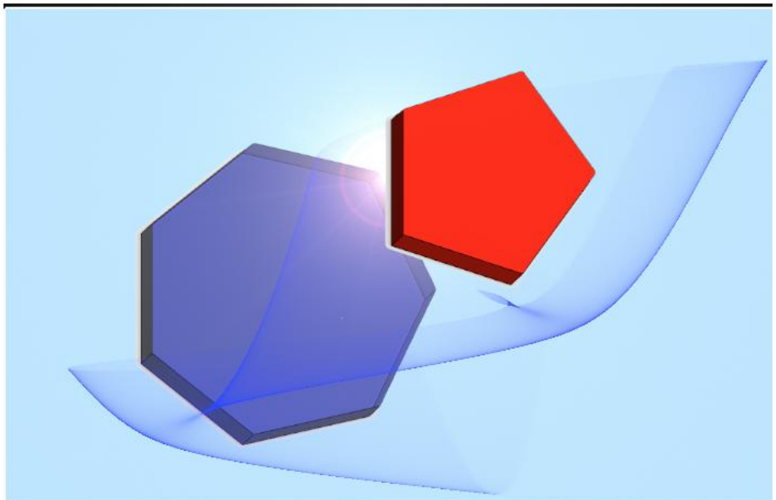
www.reformamatematica.net

Asociación Empresarial para el Desarrollo

Colección
Preparación Matemáticas Bachillerato

Polígonos

Material complementario



Costa Rica

2017

Índice

El presente documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatemática.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Polígonos*, que forma parte de la colección *Preparación Matemáticas Bachillerato*. (http://190.10.69.205/coleccionPMB)

El propósito de *Polígonos* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se exponen diferentes conocimientos vinculados con el rectas, circunferencias, sus ecuaciones y relaciones de posición entre ellas, de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

1. Polígonos

Área de algunas figuras básicas

Área del rectángulo

Si la dimensiones de un rectángulo son l y a, entonces su área es

$$A = l \cdot a.$$

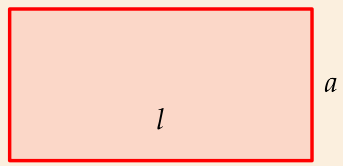


Figura 1: El área del rectángulo es $A = l \cdot a$.

Ejemplo 1

En la siguiente figura, los cuadriláteros ABCD, ECGF, HGJI, son rectángulos, E es punto medio de $\overline{CD}$, H es punto medio de $\overline{FG}$, $\overline{CG}$ mide el doble de $\overline{JG}$ y $\overline{BC}$ mide el doble de $\overline{CG}$.

Si $AB = 6$ cm y $BJ = 7$ cm. ¿Cuál es el área de la figura completa?

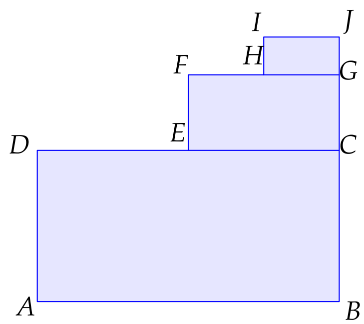


Figura 2: Las dimensiones del rectángulo mediano son el doble que las del pequeño y las del grande son el doble que las del mediano.

Solución

Sea $GJ = x$. Se tiene que $CG = 2x$ y $BC = 2 \cdot CG = 2 \cdot 2x = 4x$. Luego:

$$\begin{aligned} BJ &= BC + CG + GJ \\ BJ &= 4x + 2x + x \\ 7 &= 7x. \end{aligned}$$

Por lo que $x = 1$.

Las dimensiones de $ABCD$ son 6 cm y 4 cm por lo que su área es $6 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2$.

Las dimensiones de $ECGF$ son 3 cm y 2 cm por lo que su área es $3 \cdot 2 = 6\,\text{cm}^2$.

Las dimensiones de $ABCD$ son 1,5 cm y 1 cm por lo que su área es $1,5 \cdot 1 = 1,5\,\text{cm}^2$.

El área total de la figura es $24 + 6 + 1,5 = 31,5\,\text{cm}^2$.

Área del cuadrado

Si el lado de un cuadrado mide l entonces su área es

$$A = l \cdot l = l^2.$$

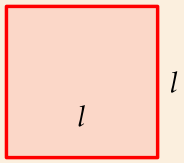


Figura 3: Como en el cuadrado $a = l$, entonces su área es $A = l \cdot l = l^2$.

Ejemplo 2

En la siguiente figura, todos los cuadriláteros que se observan son cuadrados. Los dos más pequeños tienen área igual a $1\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la figura completa?

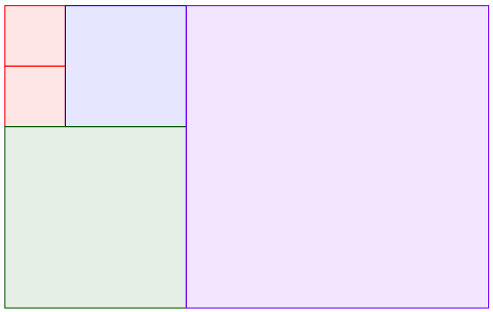


Figura 4: A partir del tercer cuadrado, el lado es igual a la suma de los lados de los dos anteriores.

Solución

Como el área de cada cuadrado rojo es $1\,\text{cm}^2$, entonces su lado mide 1 cm. Luego:

El lado del cuadrado azul mide 2 cm y su área es $2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}^2$.

El lado del cuadrado verde mide 3 cm y su área es $3 \cdot 3 = 9\,\text{cm}^2$.

El lado del cuadrado violeta mide 5 cm y su área es $5 \cdot 5 = 25\,\text{cm}^2$.

El área de la figura completa es $1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40\,\text{cm}^2$.

Área de un paralelogramo

Si b es la base de un paralelogramo y h es la altura sobre esa base entonces el área del paralelogramo es

$$A = b \cdot h.$$

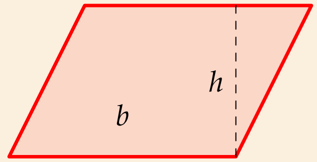


Figura 5: El área del paralelogramo es $A = b \cdot h$.

Ejemplo 3

La siguiente figura está formada por un cuadrado y dos paralelogramos congruentes. El área total de la figura es 20 y se tiene que $AF = 7$. Determinar el área de cada paralelogramo.

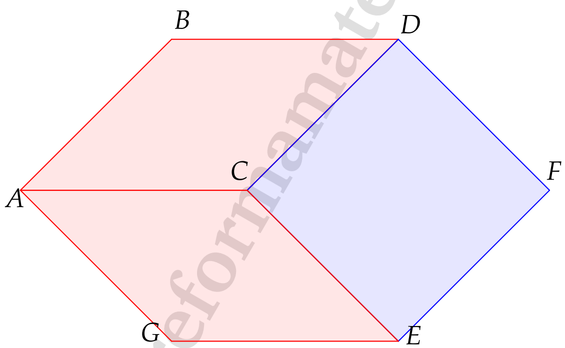


Figura 6: La figura completa está formada por un cuadrado (azul) y dos paralelogramos congruentes (rojos).

Solución

Sea h la altura y b la base de cada paralelogramo. Los triángulos AGB y FDE son congruentes por lo que la figura completa tiene la misma área que el rectángulo $GHIB$ que se da en la siguiente figura.

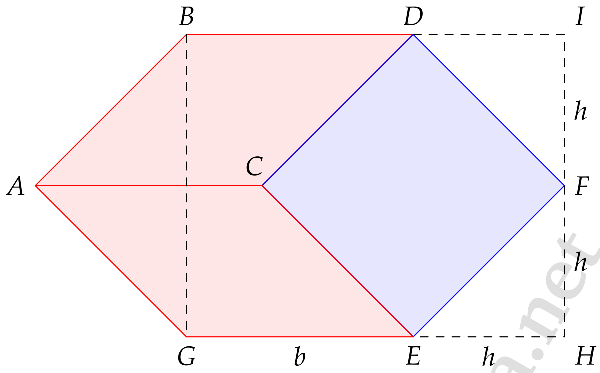
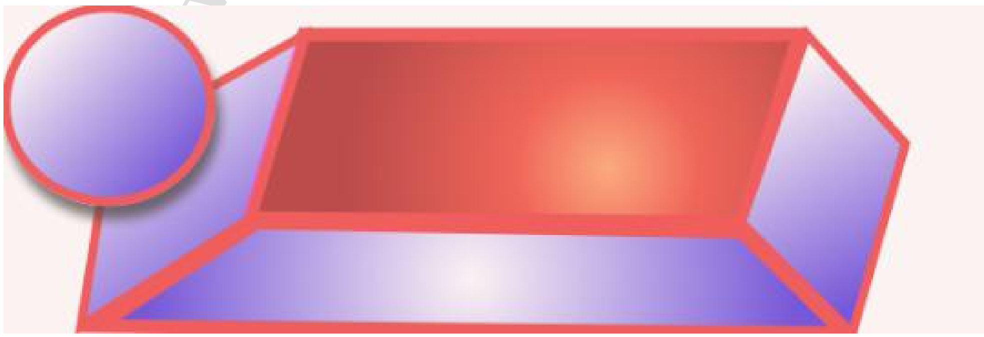


Figura 7: El área de la figura $AGEFDB$ es igual a la del rectángulo $GHIB$.

El largo del rectángulo $GHIB$ es $b + h$ y la altura es $2h$. Por lo que su área es $2h(b + h)$. Como el área total de la figura es 20, entonces $2h(b + h) = 20$ (*).

Por otra parte, $AF = 7$, es decir $b + 2h = 7$; luego, $b = 7 - 2h$. Sustituyendo en (*) se tiene que $h(7 - h) = 10$. De aquí se obtiene que $h = 2$ y por lo tanto $b = 3$. El área de cada paralelogramo es $2 \cdot 3 = 6$.



Área del triángulo

Si b es la base de un triángulo y h es la altura sobre esa base entonces el área del triángulo es

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

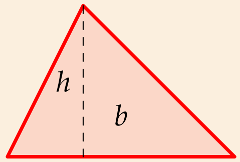


Figura 8: El área del triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Ejemplo 4

En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo, E es el punto medio de $\overline{AC}$ y F es el punto medio de $\overline{EC}$. Determinar la razón del área de $\triangle ABC$ y el área de $\triangle DCF$.

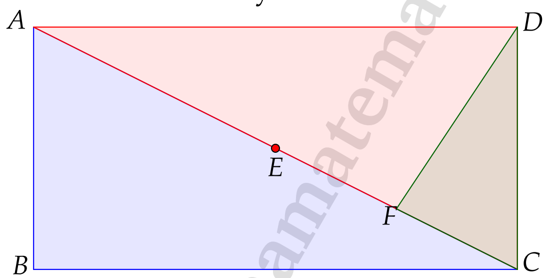


Figura 9: $ABCD$ es un rectángulo, E es punto medio de $\overline{AC}$ y F es punto medio de $\overline{EC}$.

Solución

Como $ABCD$ es un rectángulo entonces $\angle B$ es recto y se tiene que la base de $\triangle ABC$ es $BC = a$ y la altura es $AB = b$. Su área es $\frac{1}{2}ab$. Trace la altura desde F hasta el lado $\overline{CD}$ en el $\triangle DCF$.

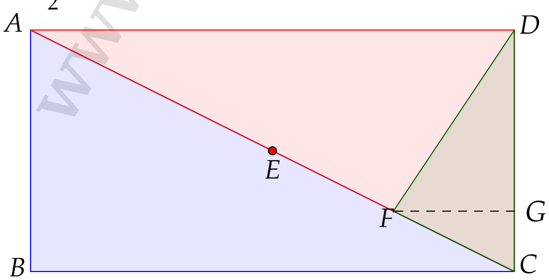


Figura 10: $\overline{FG}$ es la altura desde F sobre el lado $\overline{CD}$ en $\triangle DCF$.

Dado que F es punto medio de $\overline{EC}$ y E punto medio de $\overline{AC}$ se tiene que esa altura es igual a $\frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}a$. Por otra parte, $DC = AB = b$. Luego, el área de $\triangle DCF$ es igual a

$$\frac{b \cdot \frac{1}{4}a}{2} = \frac{1}{8}ab.$$

La razón entre ambas áreas es

$$\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{1}{8}ab} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 5

Determinar el área de un triángulo equilátero que mide 12 cm de lado.

Solución

Considere el triángulo equilátero de la figura que aparece a continuación. Se ha trazado la altura sobre uno de los lados.

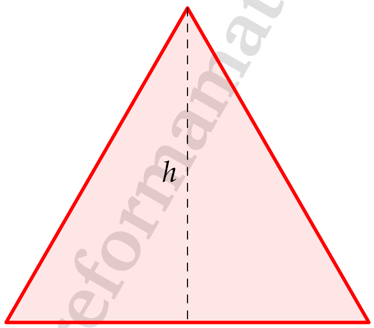


Figura 11: El triángulo es equilátero, h es la altura.

La altura divide la base a la mitad, entonces, según el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

De esta forma, el área del triángulo es

$$A = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Área del rombo

Si D y d son respectivamente las medidas de las dos diagonales del rombo entonces su área es

$$A = \frac{D \cdot d}{2}.$$

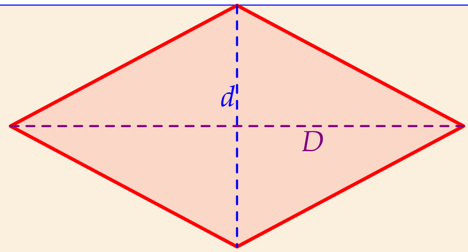


Figura 12: El área del rombo es $\frac{D \cdot d}{2}$.

Ejemplo 6

El lado de un rombo mide 5 y una de sus diagonales mide el doble de la otra. Determinar el área del rombo.

Solución

Suponga que una diagonal mide x, entonces la otra mide $2x$. Considere la siguiente figura:

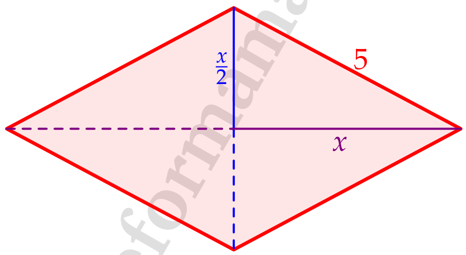


Figura 13: Se considera el triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $\frac{x}{2}$ y cuya hipotenusa mide 5.

Se tiene que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = 5^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 + x^2 &= 25 \Rightarrow \tfrac{5}{4}x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow \\ x &= \sqrt{20} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

En conclusión, una diagonal mide $2\sqrt{5}$ y la otra el doble: $4\sqrt{5}$. Así, tenemos que el área del rombo es

$$A = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20.$$

Área del trapecio

El área de un trapecio es igual a la suma de sus bases multiplicada por su altura, dividido entre dos. Si la base mayor es B, la base menor es b y la altura es h, entonces:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

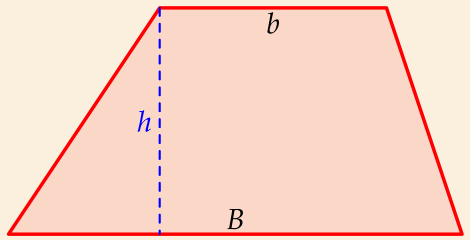


Figura 14: El área del trapecio es $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

Ejemplo 7

En la siguiente figura el área de $\triangle AGD$ es 1, el área de $\triangle HBC$ es 2, G es el punto medio de $\overline{DC}$ y H es el punto medio de $\overline{AB}$. Determinar el área del trapecio $ABCD$.

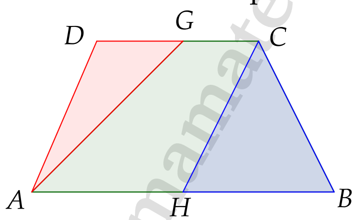


Figura 15: Área de $\triangle AGD$ es 1, área de $\triangle HBC$ es 2, G es el punto medio de $\overline{DC}$ y H es el punto medio de $\overline{AB}$ ¿cuál es el área del trapecio $ABCD$?

Solución

Sea $DG = b$ base de $\triangle AGD$ y a su altura que coincide con la altura del trapecio. Se tiene $\dfrac{ab}{2} = 1$.

Sea $HB = c$ base de $\triangle HBC$, su altura es a. Se tiene $\dfrac{ac}{2} = 2$.

La base mayor del trapecio es $2c$ (pues H es punto medio de tal base) y la base menor es $2b$ (pues G es punto medio de tal base). El área del trapecio es igual a

$$\begin{aligned}\frac{(2b+2c)a}{2} &= \frac{2ba+2bc}{2}\\ &= \frac{2ba}{2} + \frac{2ca}{2} = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 2+4 = 6.\end{aligned}$$

Conceptos básicos sobre polígonos

Polígono

Un **polígono** de n (con entero mayor que 2) lados consta de n puntos de modo que tres de ellos consecutivos no son colineales y de los segmentos que unen puntos consecutivos.
Elementos básicos de un polígono:

- **vértices**, los puntos comunes a dos de los segmentos que constituyen el polígono,
- **lados**, cada uno de los segmentos que constituyen el polígono,
- **diagonales**, los segmentos de recta que unen dos vértices no consecutivos,
- **ángulos internos**, los ángulos cuyos vértices son vértices del polígono y sus lados son lados del polígono,
- **ángulos externos**, los ángulos adyacentes y suplementarios a los ángulos internos.

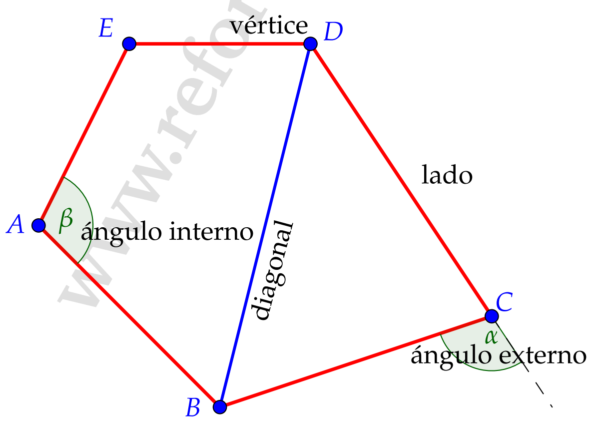


Figura 16: Elementos básicos de un polígono: A, B, C, D y E son los vértices, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son los lados, $\overline{BD}$ es una diagonal, β es un ángulo interno, α es un ángulo externo.

Clasificación de los polígonos

Los polígonos reciben nombres especiales de acuerdo con el número de sus lados (o de sus ángulos, que es lo mismo). Por ejemplo:

- **triángulo**, *tres* lados,
- **cuadrilátero**, *cuatro* lados,
- **pentágono**, *cinco* lados,
- **hexágono**, *seis* lados,
- **heptágono**, *siete* lados,
- **octágono**, *ocho* lados,
- **nonágono**, *nueve* lados,
- **decágono**, *diez* lados,
- **undecágono**, *once* lados,
- **dodecágono**, *doce* lados.

Polígono convexo

Un polígono es **convexo** si todas sus diagonales están contenidas en el interior del polígono.

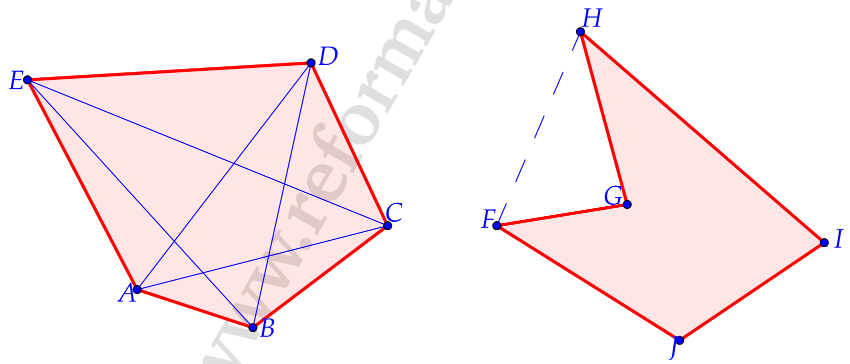


Figura 17: El polígono $ABCDE$ es convexo, todas sus diagonales están en el interior. El polígono $FGHIJ$ no es convexo, la diagonal $\overline{FH}$ no está en el interior.

Polígono regular

Un polígono es **regular** si es convexo y todos sus lados son congruentes entre sí y todos sus ángulos son congruentes entre sí.

Ejemplo 8

a) En la siguiente figura el polígono $ABCDE$ es regular: $AB = BC = CD = DE = EA$ y $\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E$. El polígono $FGHIJ$ no es regular; por ejemplo, $GH > FG$, $m(\angle F) < m(\angle J)$.

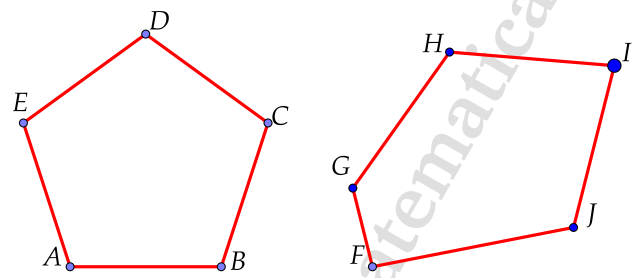


Figura 18: El polígono $ABCDE$ es regular, el polígono $FGHIJ$ no es regular.

b) Un triángulo equilátero es un polígono regular de tres lados.

c) Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados.

Cortesía de Suriya Kankliang en FreeDigitalPhotos.net

Centro, radio, ángulo central, apotema

En un polígono regular:

- Su **centro** es el punto que equidista de los vértices del polígono.
- Un **radio** es un segmento que une el centro con un vértice, también se llama **radio** a la medida de ese segmento.
- Un ángulo cuyos lados contienen radios consecutivos se llama **ángulo central**.
- Una **apotema** es un segmento que une el centro de un polígono regular con el punto medio de alguno de sus lados.

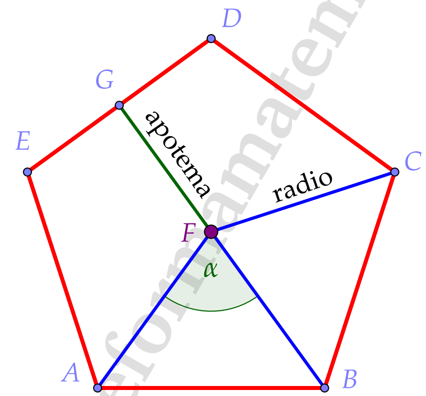


Figura 19: El polígono $ABCDE$ es regular, F es el centro, $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$ son radios, $\overline{FG}$ es una apotema, α es un ángulo central.

Medida del ángulo central

En un polígono regular de n lados, cada uno de los ángulos centrales mide $\dfrac{360^o}{n}$.

Ejemplo 9

Cada ángulo central de un polígono regular de 8 lados mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

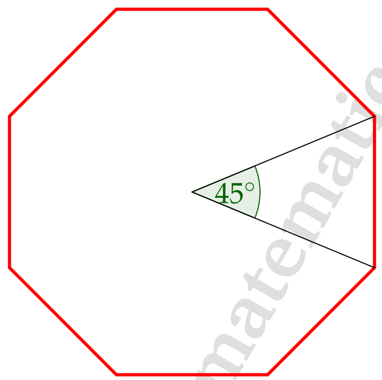


Figura 20: Cada uno de los ocho ángulos centrales del octágono regular mide 45°.

Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo

En un polígono convexo de n lados, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a

$$180^\circ \cdot (n-2).$$

Ejemplo 10

Determinar la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de 12 lados.

Solución

Se tiene que $n = 12$, entonces, las suma de los ángulos internos del polígono es igual a

$$180^\circ(n-2) = 180^\circ(12-2) = 180^\circ \cdot 10 = 1800^\circ.$$

Medida del ángulo interno de un polígono regular

En un polígono regular de n lados, cada uno de los ángulos internos mide
$$\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}.$$

Ejemplo 11

A continuación se dan las medidas de los ángulos internos de algunos polígonos regulares:

Polígono	Suma de ángulos internos	Medida del ángulo interno
Triángulo equilátero	$180^\circ \cdot (3-2) = 180^\circ$	$\frac{1}{3} \cdot 180^\circ \cdot (3-2) = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$
Cuadrado	$180^\circ \cdot (4-2) = 360^\circ$	$\frac{1}{4} \cdot 180^\circ \cdot (4-2) = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
Pentágono regular	$180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$	$\frac{1}{5} \cdot 180^\circ \cdot (5-2) = \frac{1}{5} \cdot 540^\circ = 108^\circ$
Hexágono regular	$180^\circ \cdot (6-2) = 720^\circ$	$\frac{1}{6} \cdot 180^\circ \cdot (6-2) = \frac{1}{6} \cdot 720^\circ = 120^\circ$

Ejemplo 12

La medida de cada uno de los ángulos internos de cierto polígono regular es 156°, ¿cuántos lados tiene?

Solución

Suponga que tiene n lados, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{180^\circ(n-2)}{n} &= 156^\circ \\
180^\circ(n-2) &= n \cdot 156^\circ \\
180^\circ \cdot n - 360^\circ &= 156^\circ \cdot n \\
180^\circ \cdot n - 156^\circ \cdot n &= 360^\circ \\
24^\circ \cdot n &= 360^\circ \\
n &= \frac{360}{24} \\
n &= 15.
\end{aligned}$$

Esto es, el polígono tiene 15 lados.

Ejemplo 13

En la siguiente figura considere el heptágono $DCBEHGF$

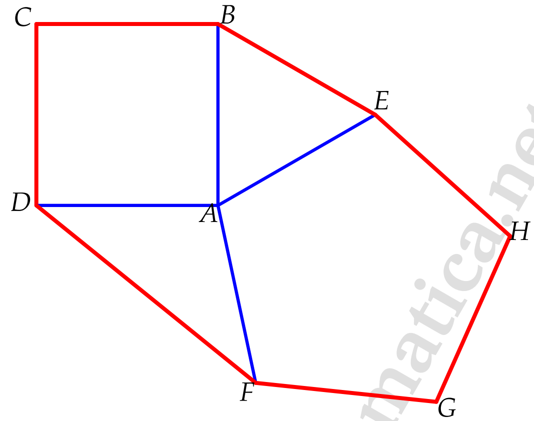


Figura 21: Heptágono $DCBEHGF$.

Dicho heptágono está compuesto por el cuadrado $ABCD$, el triángulo equilátero ABE, el pentágono regular $AFGHE$ y el triángulo no equilátero DAF. ¿Cuánto mide $\angle DFA$? *Solución*

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces $m(\angle DAB) = 90°$.

Puesto que $\triangle ABE$ es equilátero, entonces $m(\angle BAE) = 60°$.

Como $AFGHE$ es un pentágono regular, entonces $m(\angle FAE) = 108°$.

Se concluye que $m(\angle DAF) = 360° - 90° - 60° - 108° = 102°$.

Como los lados del cuadrado, el triángulo equilátero y el pentágono son todos congruentes, entonces el triángulo DAF es isósceles. Esto significa que $m(\angle DFA) = m(\angle FDA)$.

La suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo es igual a 180°, entonces

$$\begin{aligned}
2 \cdot m(\angle DFA) &= 180° - m(\angle DAF) \\
2 \cdot m(\angle DFA) &= 180° - 102° \\
2 \cdot m(\angle DFA) &= 78° \\
m(\angle DFA) &= 39°
\end{aligned}$$

Ángulos externos

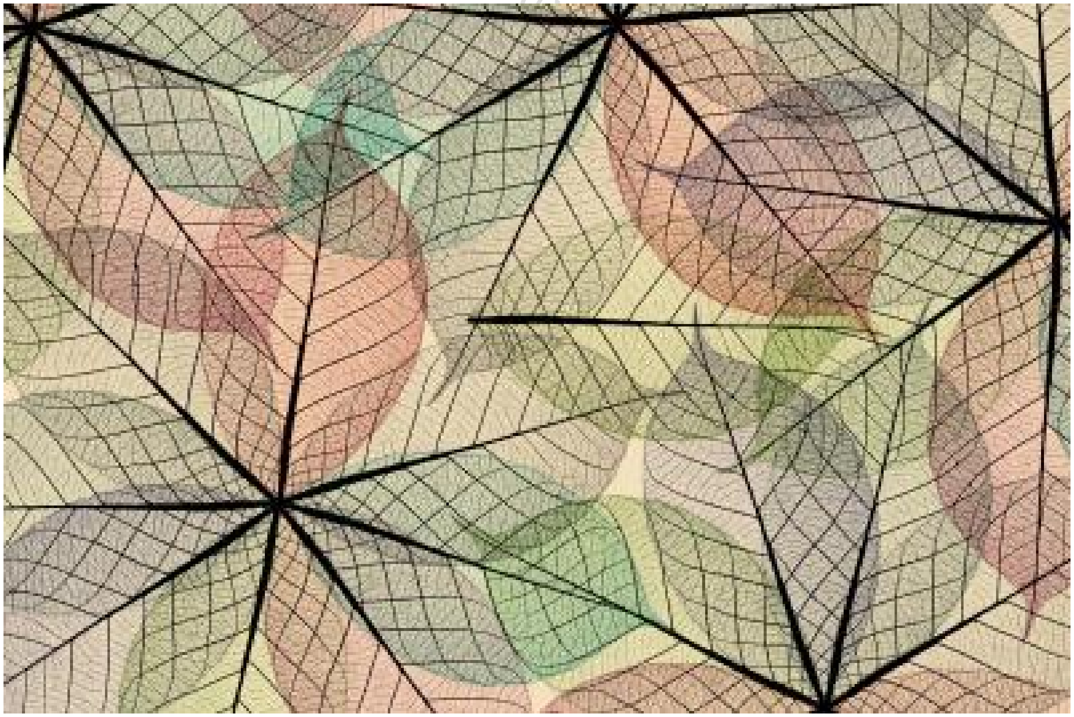
La suma de los ángulos externos de un polígono convexo siempre es igual a $360°$. Además, si el polígono es regular, entonces cada ángulo externo mide $\dfrac{360°}{n}$.

Ejemplo 14

Cada uno de los ángulos externos de un polígono convexo mide $24°$, determinar cuántos lados tiene.

Solución

En esta situación, $24° = \frac{360°}{n}$, luego, $n = \frac{360°}{24°} = 15$. El polígono tiene 15 lados.



Cortesía de siraphat en FreeDigitalPhotos.net

Considere ahora un polígono regular de n lados ($n > 3$) en el que cada lado mide l, ¿cuánto medirá su apotema?

Se puede descomponer el polígono en n triángulos isósceles, según se muestra en la siguiente figura.

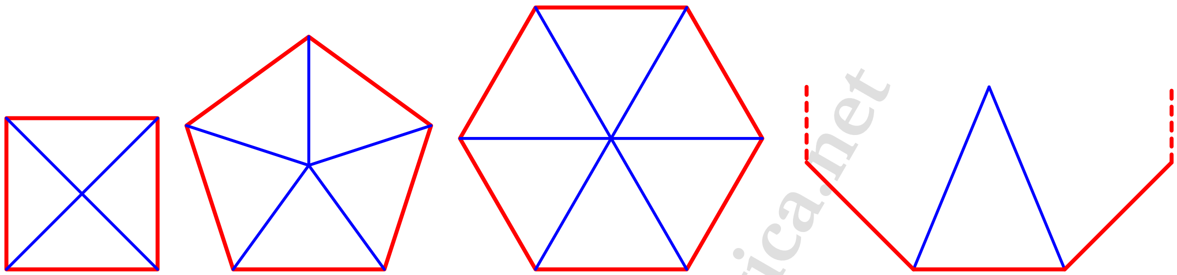


Figura 22: Cada polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles congruentes.

La apotema del polígono corresponde a la altura trazada desde el ápice de uno de esos triángulos. El ángulo en el ápice es un ángulo central del polígono, entonces mide $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

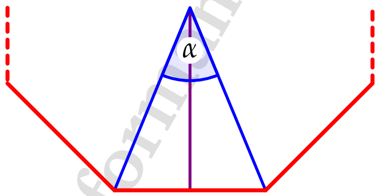


Figura 23: La altura del triángulo corresponde a la apotema del polígono. El ángulo en el ápice del triángulo es $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Se tiene lo siguiente.

Medida de la apotema de un polígono regular de n lados

En un polígono regular de n lados, la medida de la apotema es igual a:

$$a = r\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right), \tag{1}$$

donde r es la medida del radio del polígono.

Ejemplo 15

El radio de un pentágono regular mide 12 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución Un pentágono tiene 5 lados, además, la medida del radio es igual a 12 cm. Luego, según (2) la apotema del pentágono es igual a

$$a = 12 \cdot \cos\left(\frac{180}{5}\right)$$
$$a = 9,7082cm$$

Ejemplo 16

El lado de un nonágono regular mide 8 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución Se determina la medida del radio del nonágono, la medida del ángulo central es de 40°:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{\frac{8}{2}}{r}$$
$$r = \frac{4}{\operatorname{sen} 20^\circ}$$
$$r = 11,6952$$

Un nonágono tiene 9 lados, además, la medida del radio es igual a 11,6952. Luego, según (2) la apotema del nonágono es igual a:

$$a = 11,6952 \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{9}\right)$$
$$a = 11,6952 \cdot \cos 20^\circ$$
$$a = 10,9899$$

Otra estrategia de solución se proporciona enseguida.

El ángulo central del nonágono mide $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. En la siguiente figura se muestra el nonágono con una apotema, la cual es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y cuyo otro cateto es la mitad del lado, es decir, mide 4. El ángulo destacado es la mitad del ángulo central del nonágono, es decir, mide 20°.

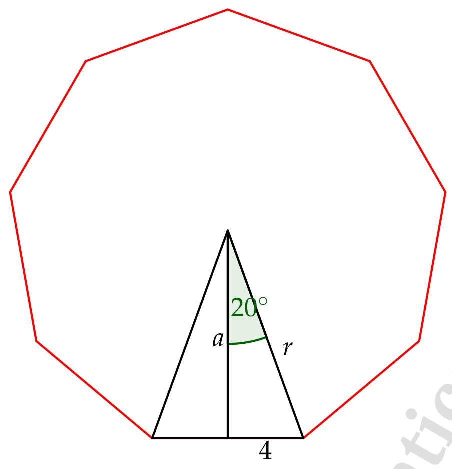


Figura 24: Nonágono con una de sus apotemas

De acuerdo con esto:

$$\tan 20^\circ = \frac{4}{a}$$
$$a = \frac{4}{\tan 20^\circ}$$
$$a = 10,9899$$

Ejemplo 17

El lado de un hexágono regular mide 10 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución

En un hexágono regular, la medida del radio es igual a la medida del lado, por lo tanto, el radio mide 10 cm. Luego, según (1) la apotema del hexágono es igual a

$$a = 10\cos\left(\frac{180^\circ}{6}\right)\text{ cm} = 10\cos 30^\circ\text{ cm} = 10\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 5\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Perímetros y áreas

Perímetro

El **perímetro** de un polígono es la suma de las medidas de sus lados. Si el polígono es regular de n lados, entonces su perímetro es

$$P = n \cdot l,$$

donde l es la medida del lado.

Ejemplo 18

En la siguiente figura se muestra un octágono $ABCDEFGH$ no regular.

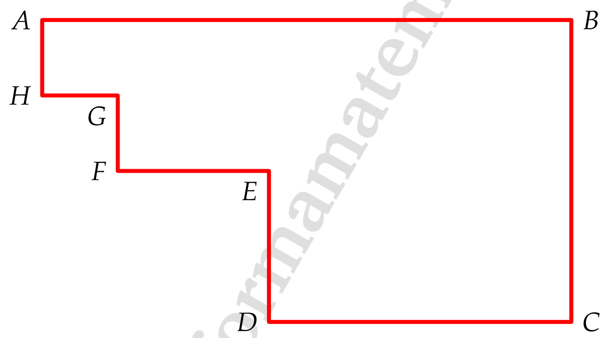


Figura 25: Octágono $ABCDEFGH$.

El polígono fue formado pegando cuatro cuadrados; el más pequeño es de lado 1, el segundo tiene el lado el doble que el primero y el tercero el lado el doble que el segundo. Determinar el perímetro del octágono.

Solución

El lado del cuadrado menor es 1, el del mediano es el doble; es decir, 2 y el del mayor es el doble del mediano es decir 4. De acuerdo con esto: $AB = 7$, $BC = 4$, $CD = 4$, $DE = 2$, $EF = 2$, $FG = 1$, $GH = 1$ y $HA = 1$.

Luego, el perímetro es igual a $7 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 22$.

Ejemplo 19

En la siguiente figura, $ABCDE$ es un pentágono regular de lado 2 cm. Determinar el perímetro del hexágono no regular $ABFCDE$.

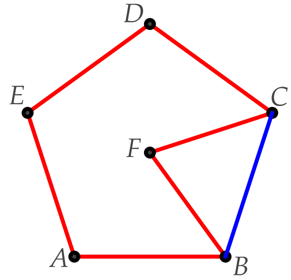


Figura 26: $ABCDE$ es un pentágono regular de lado 2 cm.

Solución

En el hexágono $ABFCDE$, 4 lados coinciden con los lados del pentágono $ABCDE$, por lo que cada uno de ellos mide 2 cm. Los otros dos lados del hexágono, a saber: $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$ corresponden a radios del pentágono.

Considere el triángulo isósceles BFC, el ángulo en el ápice corresponde a un ángulo central del pentágono por lo que mide $108°$. Trace la altura desde el ápice y sea G el pie de esa altura.

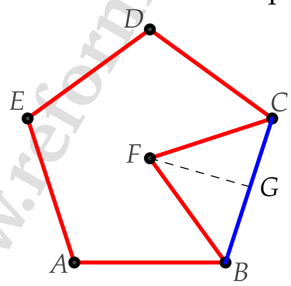


Figura 27: $GC = 1$ cm, $m(\angle GFC) = 54°$.

Como $m(\angle BFC) = 108°$, entonces $m(\angle GFC) = 54°$, por otra parte, $GC = 1$ (pues G es el punto medio de $\overline{BC}$). Luego se tiene:

$$FC = FB = \frac{1}{\operatorname{sen} 54°} \approx 1,236.$$

El perímetro del hexágono $ABFCDE$ es igual a $2 + 2 + 2 + 2 + 1,236 + 1,236 = 10,472$ cm.

Área de un polígono regular

Si un polígono es regular con n lados entonces su área es

$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2},$$

donde l es la medida de su lado y a es la medida de su apotema.

Ejemplo 20

En la figura, el octágono es regular y el cuadrado tiene diagonal 12 cm. Determinar el área de la región coloreada con rojo.

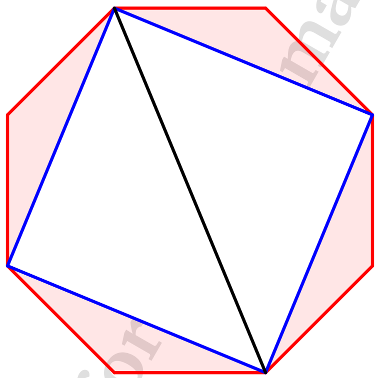


Figura 28: El octágono es regular, la diagonal del cuadrado mide 12 cm.

Solución

Se observa que la diagonal del cuadrado es igual a dos radios del octágono. El ángulo central del octágono mide $\frac{360°}{8} = 45°$.

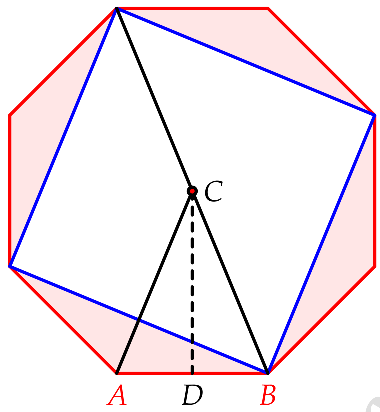


Figura 29: $\triangle ABC$ es isósceles, $m(\angle ACB) = 45°$, $\overline{CD}$ es la altura desde el ápice, $CB = 6$, $m(\angle DCB) = 22,5°$ cm.

Si l es la medida del lado del octágono, entonces, con la notación de la figura anterior, $\operatorname{sen}(22,5°) = \dfrac{l/2}{6}$. Despejando l se obtiene

$$l = 12 \cdot \operatorname{sen}(22,5°) \approx 4,5922.$$

Según el teorema de Pitágoras, se obtiene que la apotema del octágono es $CD = \sqrt{6^2 - 2,3^2} = 5,5433$.

El área del octágono es

$$A = \frac{8 \cdot 4,6 \cdot 5,54}{2} = 101,8238 \text{ cm}^2.$$

Como la diagonal del cuadrado es 12 cm, entonces, si el lado del cuadrado es L, entonces, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$2L^2 = 144 \Rightarrow L^2 = 72 \text{ cm}^2.$$

El área sombreada es igual a $101,1 \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 29,82 \text{ cm}^2$.

Área de polígonos no regulares

Si el polígono no es regular, para calcular su área se puede descomponer en figuras básicas como triángulos, trapecios, cuadrados, etc., y sumar el área de estas figuras. También se puede inscribir en una figura básica, calcular el área de esta y luego sustraer el área de otras figuras básicas.

Ejemplo 21

En la figura siguiente se tiene que las rectas $\overleftrightarrow{GE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas y la distancia entre ellas es 2 cm. Por otra parte las rectas $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{EC}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{BC}$, D es es el punto medio de $\overline{GE}$ y G es es el punto medio de $\overline{AF}$. Si $d(B,F) = 2$ cm y $d(F,C) = 6$ cm, determinar el área del pentágono $ABCED$.

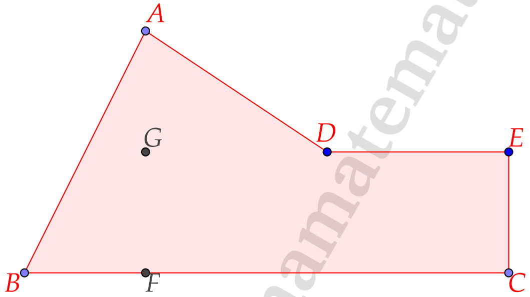


Figura 30: Pentágono $ABCED$.

Solución

Tracemos los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{GD}$.

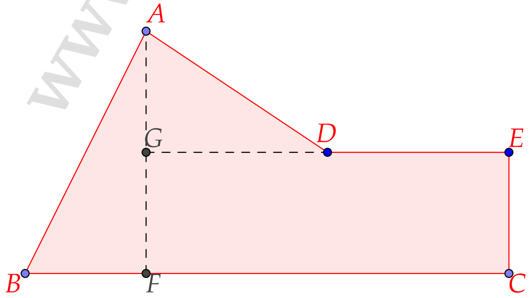


Figura 31: El pentágono $ABCED$ se puede subdividir en dos triángulos ABF, ADG y un rectángulo $CEGF$.

El polígono queda dividido en dos triángulos y un rectángulo.

Como $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$, si se toma como base de $\triangle ABF$ el lado $\overline{BF}$ entonces la altura es $\overline{FA}$. Nos dicen que $BF = 2$ cm y, por otra parte, $FA = 4$ cm pues $FG = 2$ cm y G es punto medio de $\overline{FA}$. Luego, se tiene

$$a(\triangle ABF) = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ cm}^2.$$

También $\triangle AGD$ es rectángulo con ángulo recto en G. Se tiene que $GA = 2$ y como D es punto medio de $\overline{GE}$, entonces $GD = 3$. Luego:

$$a(\triangle AGD) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

Finalmente, el cuadrilátero $FCEG$ es un rectángulo pues los lados opuestos están en rectas paralelas y los lados consecutivos son perpendiculares. La base es $FC = 6$ cm y la altura es $CE = 2$ cm, por lo que su área es 12 cm^2.

El área del polígono considerado es $4 + 3 + 12 = 19$ cm^2.

Ejemplo 22

En la siguiente figura se tiene que $DE = EF = FA = BC = 2$ cm, $m(\angle BAF) = m(\angle AFE) = m(\angle FED) = m(\angle ABC) = 120°$ y $AB = 6$ cm. Calcular el área del polígono $ABCDEF$.

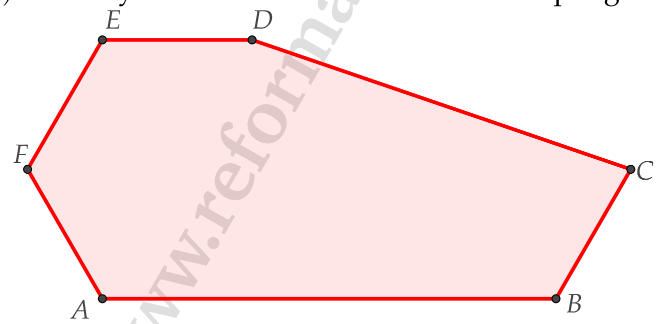


Figura 32: Polígono $ABCDEF$.

Solución

Trace dos puntos: un punto G en $\overline{AB}$ tal que $AG = 2$ cm y un punto H en el interior del polígono tal que $GH = 2$ cm y $m(\angle AGH) = 120°$. Además, $\overline{GH}$, $\overline{HD}$, $\overline{CH}$.

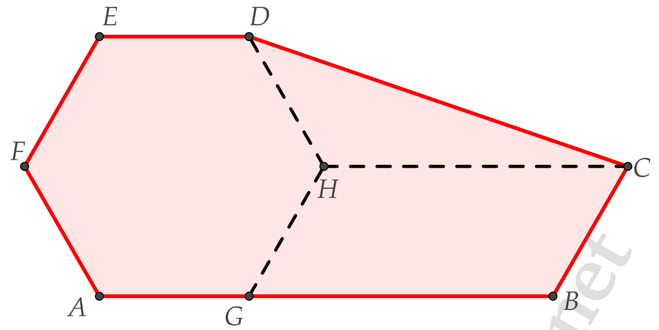


Figura 33: El polígono $ABCDEF$ queda dividido en un hexágono regular, un triángulo y un paralelogramo.

El polígono queda dividido en un hexágono regular de lado igual a 2 cm, un triángulo de base 6 cm y altura igual a la apotema del hexágono y un paralelogramo de base 6 cm y, también, altura igual a la apotema del hexágono.

Puesto que el lado y el radio de un hexágono son congruentes, por (1), la apotema del hexágono es igual a

$$a = 2\cos 30^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ cm} \approx 1{,}732\text{ cm}.$$

De tal modo:

El área del hexágono es $\dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}732}{2}$ cm^2 $= 10{,}392$ cm^2.

El área del paralelogramo es $6 \cdot 1{,}732$ cm^2 $= 10{,}392$ cm^2.

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramos, es decir, $5{,}196$ cm^2.

Así, el área del polígono $ABCDEF$ es $10{,}392 + 10{,}392 + 5{,}196 = 25{,}98$ cm^2.

Ejemplo 23

En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo, el $\triangle HAI$ es isósceles, $AH = HG = GD = BE$, $AB = 4 \cdot BI$ y $BI = FD$. Si $BC = 9$ cm, determinar el área del polígono $EFGHI$.

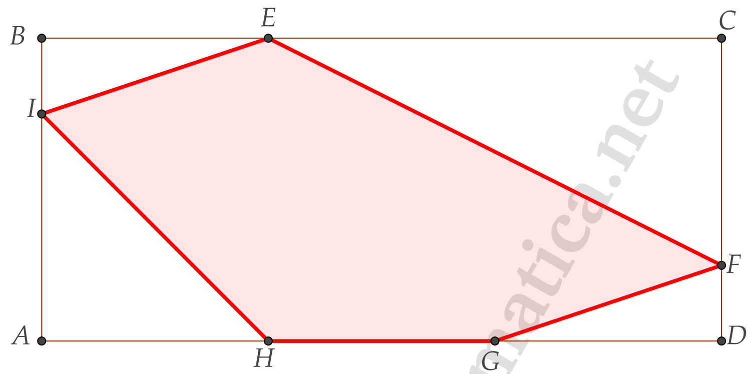


Figura 34: El polígono $EFGHI$ está inscrito en el rectángulo $ABCD$.

Solución

Como $BC = 9$ cm y $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AD = 9$ y puesto que $AH = HG = GD = BE$ entonces $AH = HG = GD = BE = 3$ cm.

Como $\triangle HAI$ es isósceles, entonces $AI = 3$ cm. Como $AB = 4 \cdot BI$ entonces:

$$\begin{aligned} AB &= 4BI \\ AI + BI &= 4BI \\ 3 + BI &= 4BI \\ 3 &= 4BI - BI \\ 3 &= 3BI \\ 1 &= BI. \end{aligned}$$

Como $BI = FD$, entonces, $FD = 1$ cm. De esto también se obtiene que $AB = 4$ cm.

El área del polígono $EFGHI$ se puede obtener restando al área del rectángulo en el que está inscrito, las áreas de los cuatro triángulos que se forman en la figura.

Tenemos:

$$
\begin{aligned}
a(ABCD) &= 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2 \\
a(\triangle HAI) &= \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5 \text{ cm}^2 \\
a(\triangle IBE) &= \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2 \\
a(\triangle ECF) &= \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2 \\
a(\triangle FDG) &= \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Se concluye que el área del polígono $EFGHI$ es $36 - (4{,}5 + 1{,}5 + 9 + 1{,}5) = 19{,}5 \text{ cm}^2$.

Cortesía de photoraidz en FreeDigitalPhotos.net

Polígonos en un sistema de coordenadas

El uso de coordenadas para representar polígonos puede simplificar el cálculo de perímetros y área. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 24

La unidad de medida utilizada en el siguiente sistema de ejes cartesianos es 1 cm (cada uno de los cuadrados que constituye la cuadrícula tiene como lado 1 cm). Determinar el área del polígono $ABCDEF$.

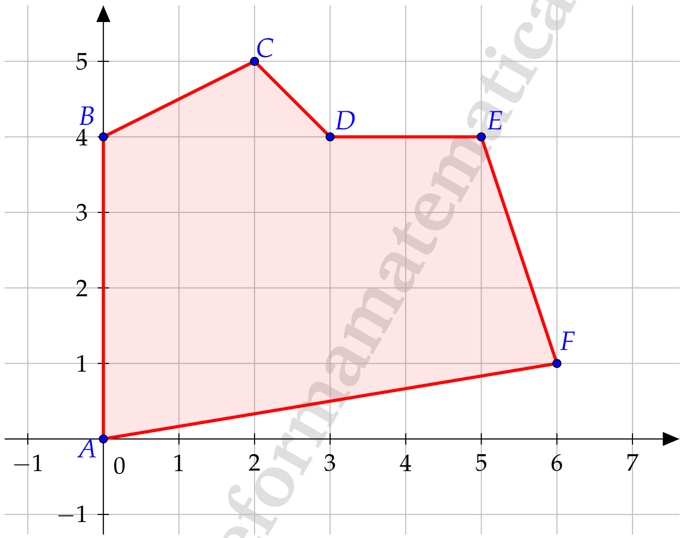


Figura 35: Polígono $ABCDEF$.

Solución

Se puede dividir el polígono en dos triángulos y un trapecio, tal como lo muestra la siguiente figura.

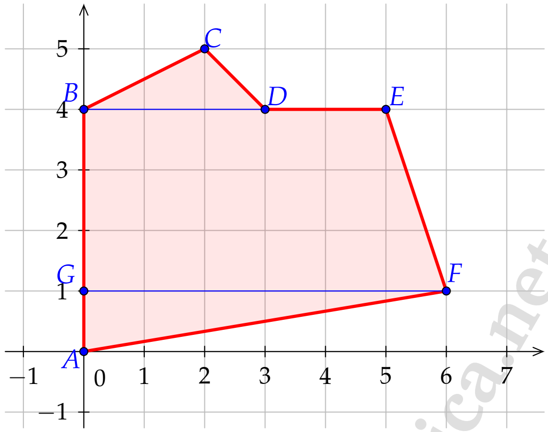


Figura 36: El polígono $ABCDEF$ se divide en el triángulo AFG, el triángulo BCD y el trapecio $BEFG$.

Se tiene que:

$$a(\triangle BCD) = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2$$
$$a(\triangle AFG) = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3 \text{ cm}^2$$
$$a(BEFG) = \frac{(6+5) \cdot 3}{2} = 16{,}5 \text{ cm}^2$$

Luego, el área del polígono $ABCDEF$ es $a(ABCDEF) = 1{,}5 + 3 + 16{,}5 = 21 \text{ cm}^2$.

Ejemplo 25

En un sistema de coordenadas cartesianas considere el polígono de vértices $A(-2,2)$, $B(1,0)$, $C(5,1)$, $D(4,3)$ y $E(0,5)$. Dibujarlo, calcular su perímetro y calcular su área.

Solución

El polígono $ABCDE$ aparece en la siguiente figura.

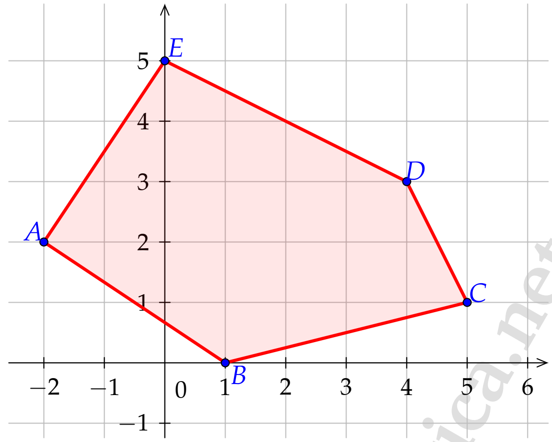


Figura 37: Polígono $ABCDE$.

Para calcular el perímetro se determina la distancia entre cada dos vértices consecutivos y se suman tales distancias:

$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(-2-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\\
d(B,C) &= \sqrt{(1-5)^2+(0-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}\\
d(C,D) &= \sqrt{(5-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\\
d(D,E) &= \sqrt{(4-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\\
d(E,A) &= \sqrt{(0--2)^2+(5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Luego, el perímetro del polígono es

$$\sqrt{13}+\sqrt{17}+\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{13} \approx 18,042.$$

Para calcular el área se puede proceder de alguna de las dos manera en que se hizo anteriormente. En este caso lo más sencillo es inscribir el polígono en un rectángulo, calcular el área de ese rectángulo y restarle el área de algunos triángulos particulares. El esquema de lo que decimos se presenta en la siguiente figura.

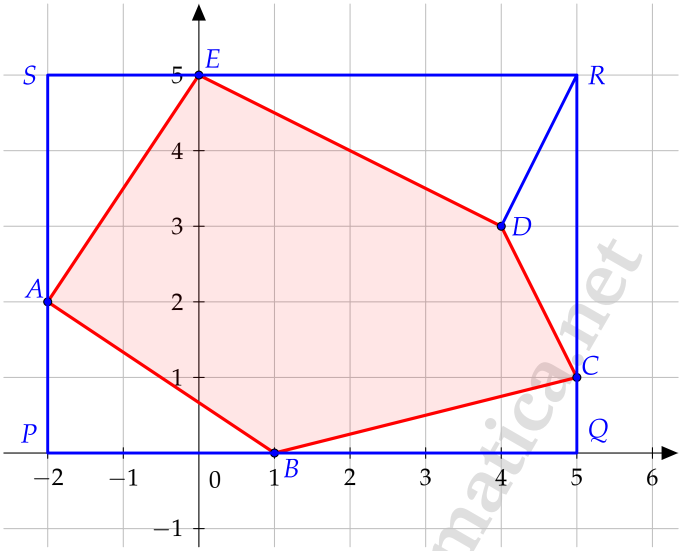


Figura 38: El área del polígono $ABCDE$ se obtiene al restar del área del rectángulo $PQRS$, las áreas de $\triangle APB$, $\triangle BQC$, $\triangle CRD$, $\triangle RDE$ y $\triangle ASE$.

En la figura quedan especificadas las dimensiones del rectángulo y de los triángulos correspondientes. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
a(PQRS) &= 7 \cdot 5 = 35 \\
a(\triangle APB) &= \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \\
a(\triangle BQC) &= \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \\
a(\triangle CRD) &= \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \\
a(\triangle RDE) &= \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \\
a(\triangle ASE) &= \frac{2 \cdot 3}{2} = 3
\end{aligned}
$$

Se concluye que $a(ABCDE) = 35 - (3 + 2 + 2 + 5 + 3) = 20$.

Ejemplo 26

La unidad de medida utilizada en el siguiente sistema de ejes cartesianos es 1 cm. Determinar el área del trapecio $ABCD$.

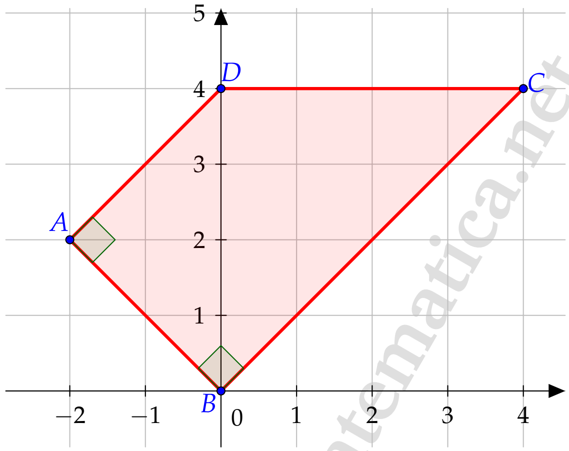


Figura 39: Trapecio $ABCD$.

Solución

Observamos que la base mayor del trapecio es $\overline{BC}$, la base menor es $\overline{AD}$ y la altura es $\overline{AB}$.

Se tiene que:

- $BC = d(B, C) = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ cm.
- $AD = d(A, D) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm.
- $AB = d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm.

El área del trapecio es

$$a(ABCD) = \frac{(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Aproximación de perímetros y áreas

El perímetro y el área de regiones no poligonales se pueden estimar mediante el cálculo de perímetros y áreas de polígonos. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 27

La curva que aparece en la siguiente figura recibe el nombre de cardioide. Si cada uno de los cuadrados que constituye la cuadrícula tiene como lado 1 cm, estime, con un error no mayor del 10 %, el área de la superficie que encierra el cardioide.

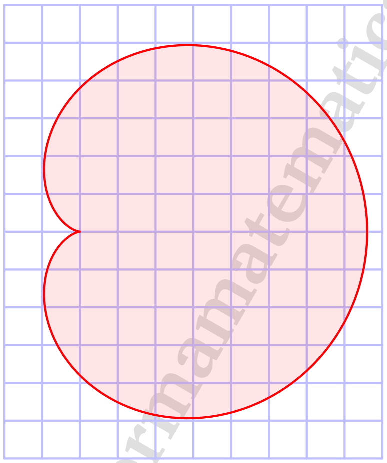


Figura 40: Un cardioide.

Solución

Se puede aproximar el área del cardioide mediante el área de un polígono según se muestra en la siguiente figura. En este caso, se observa que el área del polígono es mayor que la del cardioide; se dice que la aproximación es por exceso.

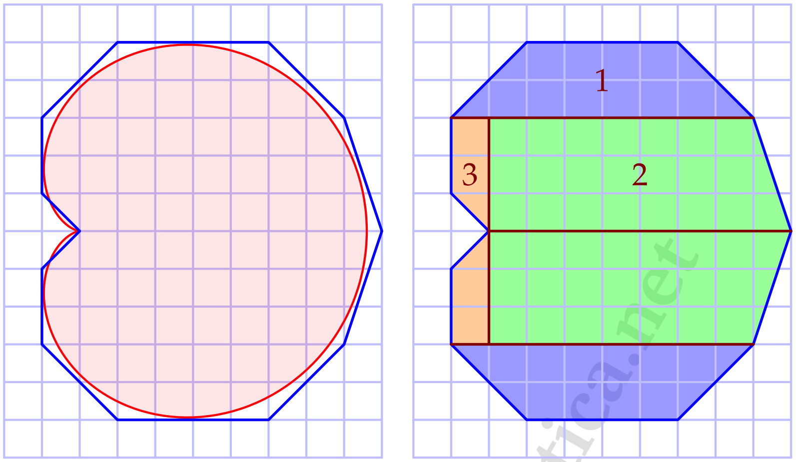


Figura 41: El polígono aproxima por exceso el área del cardioide. A la derecha se muestra solamente el polígono.

Se puede dividir el polígono en la forma que se muestra a la derecha en la figura anterior: en 6 trapecios. Dada la simetría de la figura, los dos trapecios azules tienen la misma área, lo mismo que los dos verdes y los dos anaranjados. Luego, basta calcular la suma de las áreas de los trapecios 1, 2 y 3 y luego multiplicar por 2.

El área del trapecio 1 es $\dfrac{(8+4)\cdot 2}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

El área del trapecio 2 es $\dfrac{(8+7)\cdot 3}{2} = 22{,}5 \text{ cm}^2$.

El área del trapecio 3 es $\dfrac{(3+2)\cdot 1}{2} = 2{,}5 \text{ cm}^2$.

La suma de estas áreas es $12 + 22{,}5 + 2{,}5 = 37 \text{ cm}^2$.

Luego, el área del polígono es $27 \cdot 2 = 74 \text{ cm}^2$.

También se puede aproximar el área del cardioide por defecto, mediante un polígono de área menor, según se muestra en la siguiente figura.

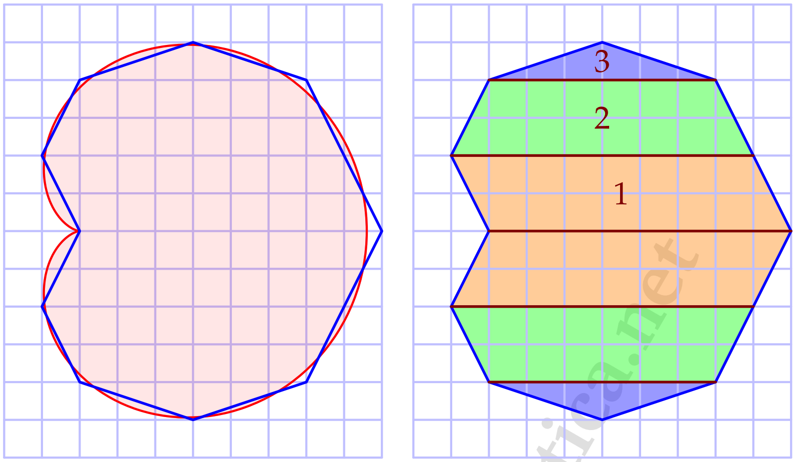


Figura 42: El polígono aproxima por defecto el área del cardioide. A la derecha se muestra solamente el polígono.

Se puede dividir el polígono en la forma que se muestra a la derecha en la figura anterior: 2 trapecios (verdes), dos triángulos (azules) y dos paralelogramos (anaranjados). Dada la simetría de la figura, basta calcular la suma de las áreas del triángulo 1, el trapecio 2 y el paralelogramo 3 y luego multiplicar por 2.

El área del triángulo 1 es $\dfrac{6 \cdot 1}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

El área del trapecio 2 es $\dfrac{(8+6) \cdot 2}{2} = 14 \text{ cm}^2$.

El área del paralelogramo 3 es $8 \cdot 2 = 16 \text{ cm}^2$.

La suma de estas áreas es $3 + 14 + 16 = 33 \text{ cm}^2$.

Luego, el área del polígono es $33 \cdot 2 = 66 \text{ cm}^2$.

Se puede tomar como aproximación del área del cardioide el promedio del área por defecto y el área por defecto; es decir, el área del cardioide es aproximadamente igual a

$$\frac{74 + 66}{2} \text{ cm}^2 = 70 \text{ cm}^2.$$

La diferencia entre la aproximación y el área por defecto nos permite conocer qué porcentaje de error se cometió en el cálculo:

$$\frac{70-66}{66}\cdot 100=\frac{4}{66}\cdot 100\approx 0,06\cdot 100=6.$$

Por lo que el error en la aproximación es menor que el 10 %.

Ejemplo 28

Utilice la escala que presenta el mapa en la siguiente figura para aproximar el área de la región delimitada con trazos de color azul.

Figura 43: Se trata de aproximar el área de la región de color blanco.

Solución

Consideremos una cuadrícula sobre el mapa, donde cada lado de los cuadros de la cuadrícula representa 25 km, según la escala del mapa. Podemos aproximar el área mediante la de un polígono, tal como muestra la figura.

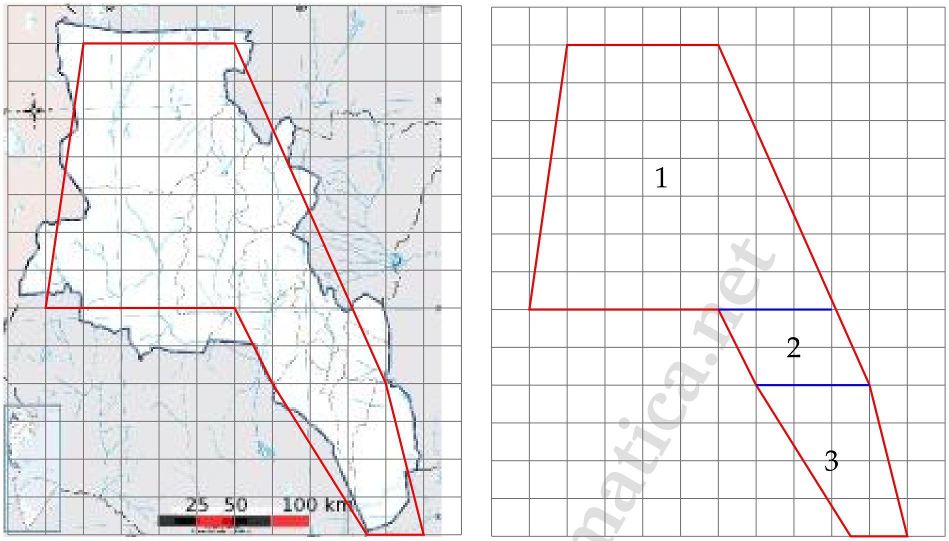


Figura 44: El polígono de contorno rojo aproxima la región considerada. A la derecha se muestra el polígono y de indica una forma de partirlo para facilitar el cálculo de su área.

Hay porciones de la región que quedan dentro del polígono y otras que quedan fuera, de modo que se compensan en alguna medida.

Recuerde que el lado de cada cuadradito de la cuadrícula corresponde a 25 km. Se tiene entonces que:

El área del polígono 1 es: $\dfrac{(8 \cdot 25 + 4 \cdot 25) \cdot 7 \cdot 25}{2} = 26\,250 \text{ km}^2$.

El área del polígono 2 es: $(3 \cdot 25) \cdot (2 \cdot 25) = 3\,750 \text{ km}^2$.

El área del polígono 3 es: $\dfrac{(3 \cdot 25 + 1{,}5 \cdot 25) \cdot 4 \cdot 25}{2} = 5\,625 \text{ km}^2$.

Una aproximación del área de la región es $26\,250 + 3\,750 + 5\,625 = 35\,625 \text{ km}^2$

Una mejor aproximación se obtiene mediante un polígono de mayor número de lados que se ajusten mejor a al contorno de la región.

Bibliografía

Coxeter, H. & Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. Washington: MAA.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Usiskin, Z., Hirschhorn, D., Cosxford, A., Highstone, V., Lewellen, H., Oppong, N., DiBianca, R. & Maeir, M. (1997). *Geometry*. Glenview: Scott ForesmanAddisson Wesley.

Varilly, J. (1988). *Elementos de geometría plana*. San José, Costa Rica: EUCR.

Vázquez, A. & De Santiago, J. (2007). *Geometría Analítica*. México: Pearson Educación.

Créditos

Polígonos. Material complementario, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Polígonos*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor

Hugo Barrantes Campos

Revisores de este documento

Johanna Mena, Ángel Ruiz

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Polígonos. Material complementario.* San José, Costa Rica: autor.