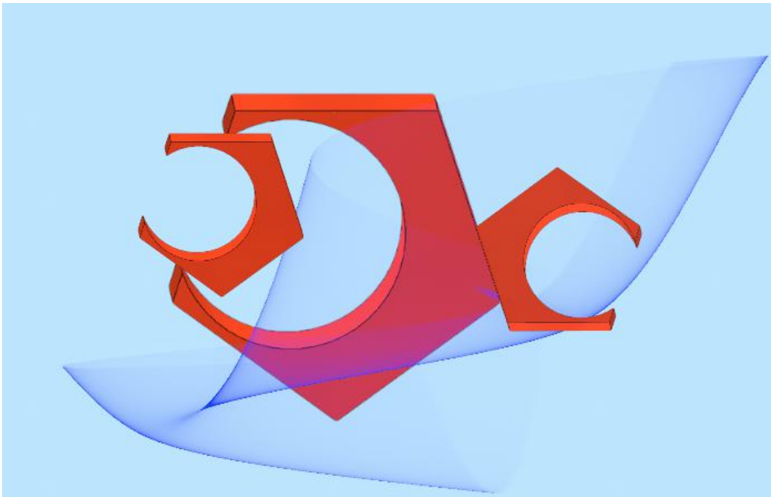
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Colección
Preparación Matemáticas Bachillerato

Rotaciones y reflexiones

Material complementario



Costa Rica

2017

Índice

Composición de transformaciones, 22

Homólogo bajo una homotecia, 20, 21
Homólogo bajo una reflexión, 12, 13
Homólogo bajo una rotación, 17
Homólogo bajo una traslación, 10
Homólogos, 3
Homotecia, 18
Homotecia, propiedad, 20

Imagen bajo una transformación, 3
Isometría, 5

Reflexión, 11
Reflexión, propiedades, 12
Rotación, 16
Rotación, propiedades, 17

Simetría axial, 15

Transformación de una figura, 5
Transformación en el plano, 3
Traslación, 8
Traslación de un polígono, 10
Traslación, propiedades, 9

Vector, 7

El presente documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatemática.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Rotaciones y reflexiones*, que forma parte de la colección *Preparación Matemáticas Bachillerato*. (http://190.10.69.205/coleccionPMB)

El propósito de *Rotaciones y reflexiones* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se exponen diferentes conocimientos vinculados con el rectas, circunferencias, sus ecuaciones y relaciones de posición entre ellas, de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

1. Transformaciones en el plano

Algunos conceptos básicos

Transformación en el plano

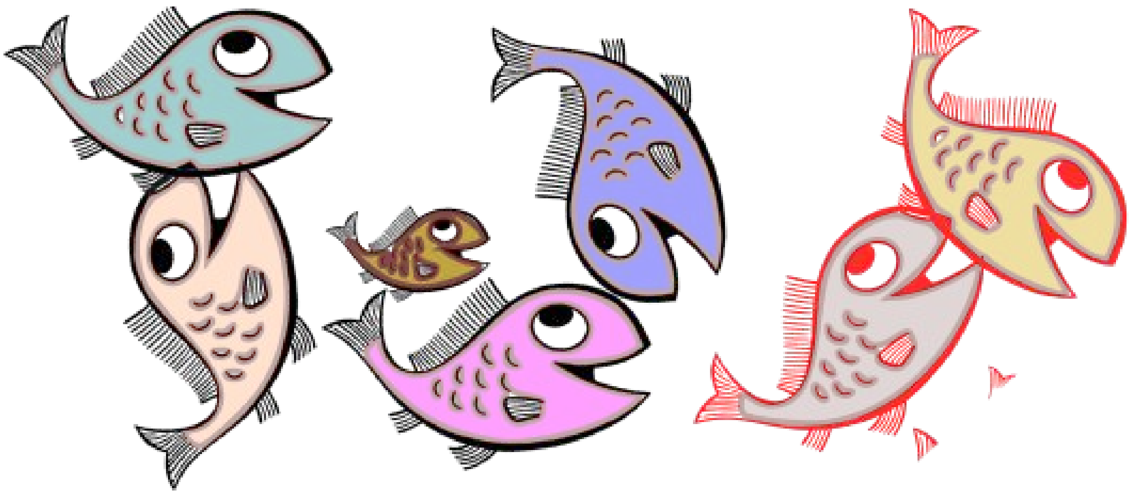
Una **transformación en el plano** es una correspondencia uno a uno del conjunto de puntos del plano en sí mismo.

Imagen bajo una transformación, homólogos

Si la transformación T mueve el punto X al punto X', entonces se dice que X' es la imagen de X bajo T y se escribe $T(X) = X'$. También diremos que X' es homólogo de X.

Ejemplo 1

Si se considera en el plano un sistema de ejes coordenados, la correspondencia tal que a cada punto (x, y) le asocia el punto $(x, y+3)$ es una transformación.



Una transformación puede verse como un movimiento que se aplica a todos los puntos del plano. En el ejemplo anterior, al considerar el sistema de coordenadas en la forma usual, la transformación lo que hace es mover todos los puntos 3 unidades "hacia arriba", puesto que lo que hace es sumar tres unidades a la ordenada de cada punto. En la siguiente gráfica se observa que al aplicarles la transformación a los puntos que pertenecen a la recta $y = 1$, se mueven todos a la recta $y = 4$.

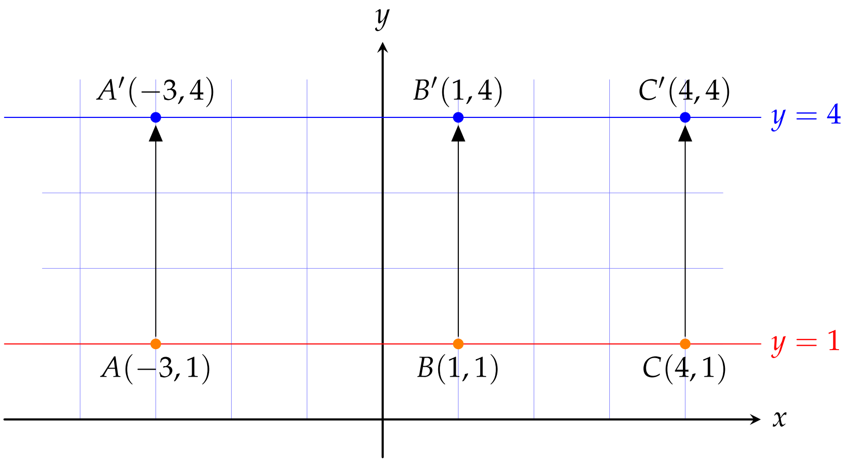


Figura 1: Al aplicar la transformación $T(x, y) = (x, y + 3)$, todos los puntos de la recta $y = 1$, se mueven a la recta $y = 4$

Ejemplo 2

Para la transformación tal que a cada punto (x, y) le asocia el punto $(x, y + 3)$ se escribe $T(x, y) = (x, y + 3)$. Para esta transformación, por ejemplo, el homólogo de $(2, 5)$ es $T(2, 5) = (2, 5 + 3) = (2, 8)$.

Transformación de una figura

La transformación mediante T de una figura X en el plano es la figura que se obtiene al aplicar la transformación T a todos los puntos de la figura. La transformación de la figura X se denota por $T(X)$ o por X'.

Ejemplo 3

En el caso de la transformación del ejemplo 2, la transformación mediante T de la recta $y = 1$ es la recta $y = 4$ (vea la figura 5).

Isometría

Una transformación T es una isometría si preserva las medidas de los segmentos y las medidas de los ángulos. Preservar la medida de los segmentos significa que si A y B son dos puntos y $T(A) = A'$ y $T(B) = B'$ entonces la medida de $\overline{AB}$ es igual a la medida de $\overline{A'B'}$. Si C es otro punto con $T(C) = C'$ y los puntos A, B y C no son colineales, entonces la medida de $\angle ABC$ es igual a la medida de $\angle A'B'C'$.

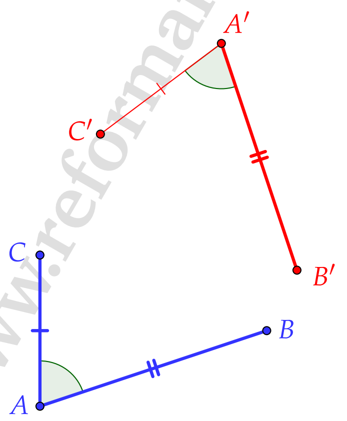


Figura 2: Si los puntos A', B' y C' se obtienen respectivamente de los puntos A, B y C mediante una isometría, entonces $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $m(\angle CAB) = m(\angle C'B'A')$

Ejemplo 4

La transformación $T(x,y) = (x-1, y+1)$ es una isometría.

Por ejemplo, considere los puntos $A(1,2)$ y $B(3,5)$, la medida de $\overline{AB}$ es

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Se tiene que:

$$T(A(1,2)) = A'(1-1, 2+1) = A'(0,3)$$
$$T(B(3,5)) = B'(3-1, 5+1) = B'(2,6)$$

La medida de $\overline{A'B'}$ es

$$A'B' = \sqrt{(0-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Con lo cual se tiene que $AB = A'B'$.

Sea $C(4,2)$, entonces, $T(C(4,2)) = C'(4-1, 2+1) = C'(3,3)$.

la recta que contiene a A y a C es la recta $y = 2$. La que contiene a A' y C' es $y = 3$, de modo que ambas recta son paralelas.

La recta que contiene a A y a B es una recta de pendiente $m = \dfrac{5-2}{3-1} = \dfrac{3}{2}$. La recta que contiene a A' y a B' es una recta de pendiente $m' = \dfrac{6-3}{2-0} = \dfrac{3}{2}$. Por lo tanto, son paralelas.

Luego, los ángulos $\angle CAB$ y $\angle C'A'B'$ son congruentes.

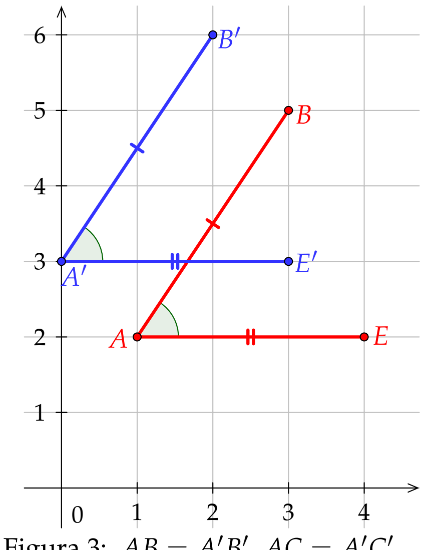


Figura 3: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$.

Traslaciones

Vector

Un vector v en el plano se puede ver como un desplazamiento con dos componente, una horizontal y una vertical, por lo tanto se puede describir mediante un par ordenado $v = (a, b)$, donde a es el desplazamiento horizontal ($a > 0$ si es "hacia la derecha", $a < 0$ si es "hacia la izquierda" o $a = 0$ si no hay desplazamiento horizontal) y b es el desplazamiento vertical ($b > 0$ si es "hacia arriba", $b < 0$ si es "hacia abajo" o $b = 0$ si no hay desplazamiento vertical).

Ejemplo 5

En la figura $v = (-3, 2)$ representa un desplazamiento de 3 unidades hacia la izquierda y de 2 unidades hacia arriba.

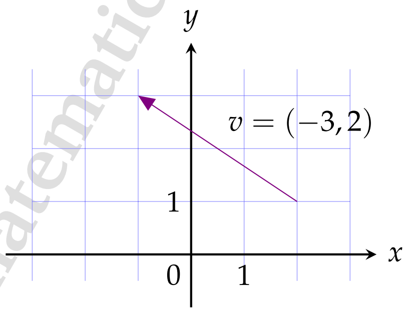


Figura 4: Representación del vector $v = (-3, 2)$.

Ejemplo 6

Un vector se puede representar en cualquier lugar del plano. En la figura, todas las flechas de color violeta representan el mismo vector.

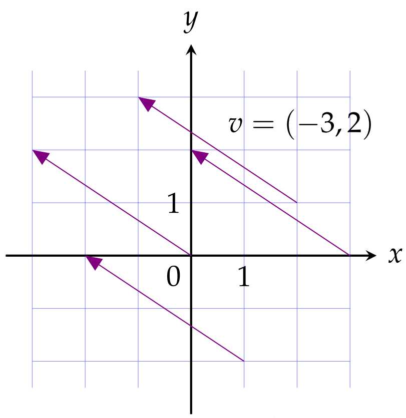


Figura 5: Un vector se puede representar en cualquier lugar del plano.

Traslación

Una traslación de vector v es una transformación que a cada punto P del plano le asocia un punto P' tal que el segmento $\overline{PP'}$ es paralelo a v y tiene la misma longitud que v. Dado que v es un segmento dirigido (uno de sus extremos es el punto inicial y otro es el punto final), $\overline{PP'}$ es un segmento con la misma dirección de v.

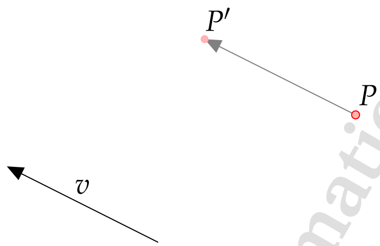


Figura 6: El punto P se traslada hasta el punto P' según el vector v

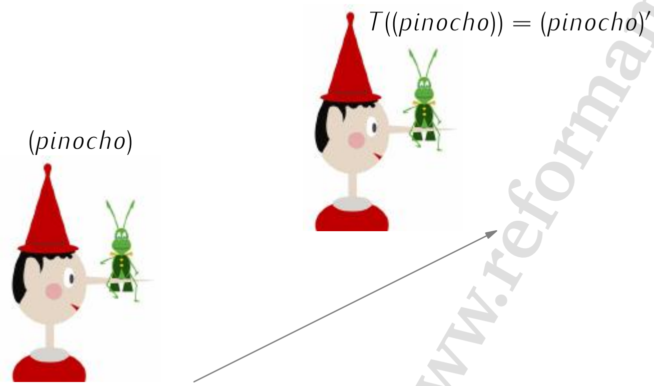


Figura 7: La imagen completa de Pinocho se traslada a otra posición, según el vector que se da en la figura. La imagen de Pinocho es cortesía de FreeDigitalPhotos.net.

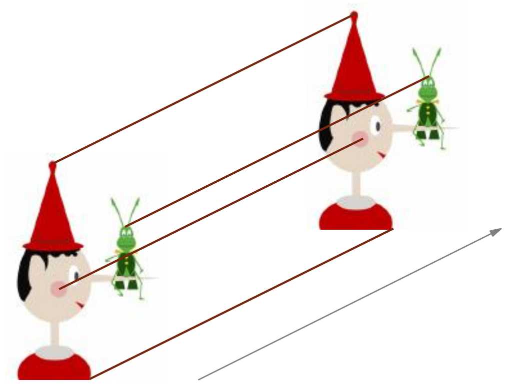


Figura 8: Todos los segmentos que unen puntos homólogos en la figura inicial y su imagen mediante la traslación son del mismo tamaño y paralelos al vector de la traslación.

Propiedades

- Toda traslación es una isometría.
- Si A, B, C son puntos distintos tales que $A - B - C$ y T es una traslación entonces $T(A) - T(B) - T(C)$.
- La traslación de un segmento de recta es un segmento de recta paralelo al original.

Lo que dice la segunda propiedad es que si tres puntos son colineales entonces sus imágenes también lo son. Y, además, el que está entre los otros dos tiene su imagen entre las imágenes de los otros.

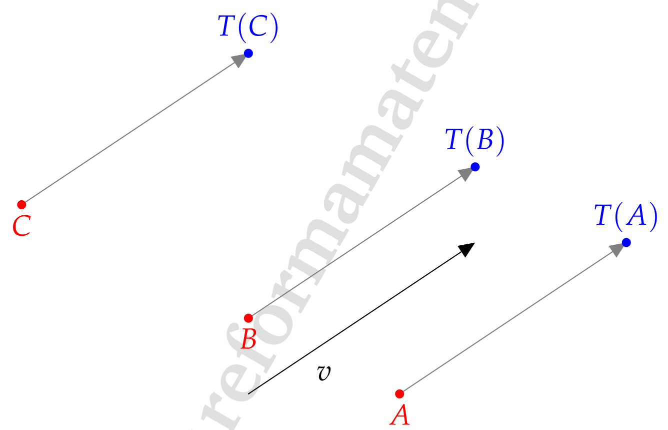


Figura 9: Si $A - B - C$ y T es una traslación, entonces $T(A) - T(B) - T(C)$.

Una situación que se puede observar cuando se traslada una figura es que la original y su imagen son congruentes y están orientadas de la misma manera. Esto proviene de las propiedades mencionadas anteriormente.

Traslación de un polígono

Las propiedades dadas arriba implican que si se va a aplicar una traslación a un polígono, basta con aplicarla a sus vértices para obtener el polígono imagen.

Ejemplo 7

Suponga que se va a trasladar el triángulo de vértices $O(0,0)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$ según el vector $v = (-3,2)$. Se trasladan sus vértices y luego se trazan los lados para obtener el triángulo resultante. El punto traslación de $O(0,0)$ se obtiene al trasladarlo tres unidades a la izquierda y dos hacia arriba; se obtiene $O'(-3,2)$, del mismo modo se obtiene $B'(-4,4)$ y $C'(-1,5)$.

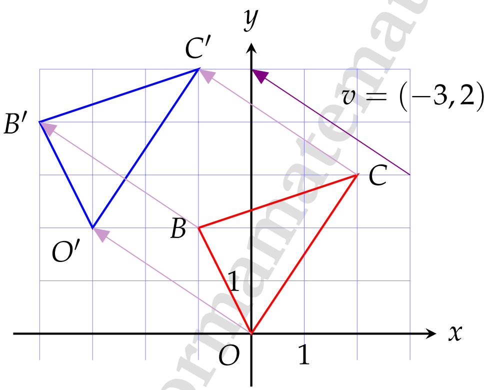


Figura 10: El triángulo $O'B'C'$ es la imagen del triángulo OBC según la traslación de vector $v = (-3,2)$. Podemos escribir $T_v(\triangle OBC) = \triangle O'B'C'$.

Homólogo bajo una traslación

Si T_v es una traslación según el vector $v = (a,b)$, entonces el homólogo de $P(x,y)$ es $P'(x+a, y+b)$; es decir $T_v(x,y) = (x+a, y+b)$.

Ejemplo 8

Si $v = (-2,4)$, entonces al aplicar al punto $P(2,5)$ la traslación de vector v se obtiene el punto $P'(2+-2, 5+4) = P'(0,9)$.

Reflexiones

Reflexión

Una reflexión en el plano, con respecto a una recta l, es una transformación que aplica a cada punto P del plano un punto P' tal que la recta l es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. El punto P' se llama homólogo de P bajo la reflexión. La recta l se llama eje de la reflexión.

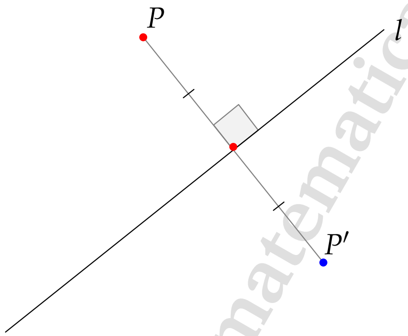


Figura 11: El punto P' es homólogo de P bajo la reflexión con respecto a la recta l. Esto significa que l es mediatriz de $\overline{PP'}$; es decir $l \perp \overline{PP'}$ y $MP = MP'$ (M es el punto medio de $\overline{PP'}$).

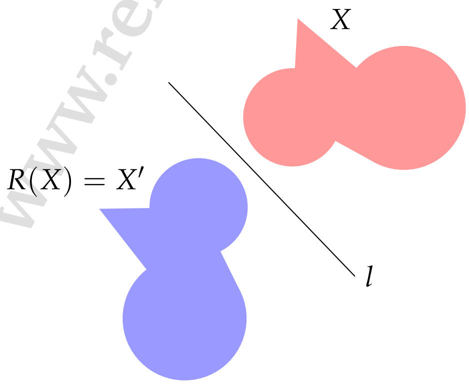


Figura 12: La figura azul X' es la imagen bajo la reflexión con respecto a la recta l de la figura roja X.

Propiedades

- Toda reflexión con respecto a una recta es una isometría.
- Los puntos del eje de la reflexión son invariantes; esto es, si Q es un punto en el eje y Q' es su homólogo, entonces $Q' = Q$.

Homólogo bajo una reflexión

Es fácil ver que el homólogo de $P(x, y)$ mediante una reflexión con respecto al eje x es $P'(x, -y)$.

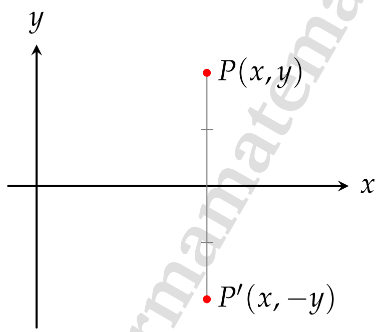


Figura 13: El homólogo de (x, y) bajo la reflexión con respecto al eje x es $(x, -y)$

Ejemplo 9

Considere el triángulo de vértices $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(0, -2)$; entonces su homólogo bajo la reflexión con respecto al eje x es el triángulo de vértices $A'(1, -4)$, $B'(3, -2)$, $C'(0, 2)$. Esto se observa en la siguiente figura.

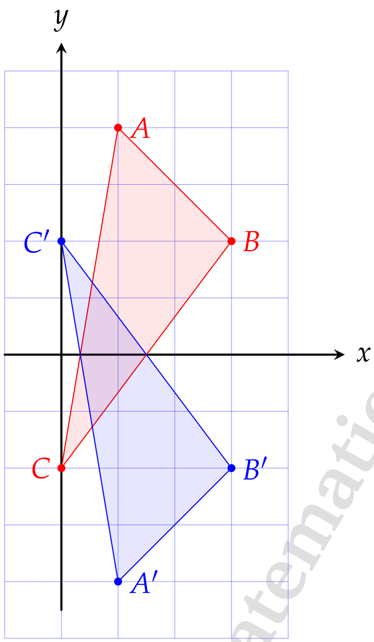


Figura 14: El triángulo rojo ABC tiene como imagen el triángulo azul $A'B'C'$ bajo la reflexión con respecto al eje x.

Homólogos bajo reflexiones

- El homólogo de $P(a,b)$ bajo la reflexión con respecto a una recta horizontal $y=k$ es $P'(a,2k-b)$.
- El homólogo de $P(a,b)$ mediante una reflexión con respecto a una recta vertical $x=t$ es $P'(2t-a,b)$.
- El homólogo de $P(a,b)$ bajo una reflexión con respecto a la recta $y=x$ es $P'(b,a)$ (se intercambian las coordenadas)

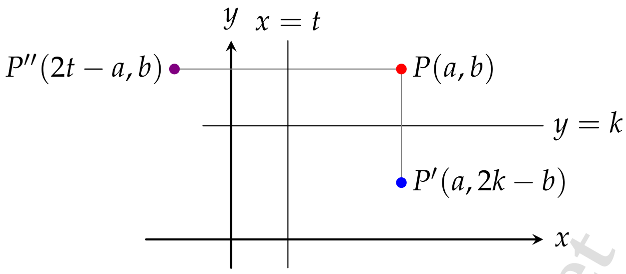


Figura 15: Si $P(a, b)$ entonces su homólogo bajo una reflexión con respecto a la recta $y = k$ es $P'(a, 2k - b)$ y su homólogo con respecto a la recta $x = t$ es $P''(2t - a, b)$

Ejemplo 10

El cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-2, 2)$ se transforma en el cuadrado de vértices $A'(0, 0)$, $B'(2, 2)$, $C'(4, 0)$, $D'(2, -2)$ cuando se le aplica la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

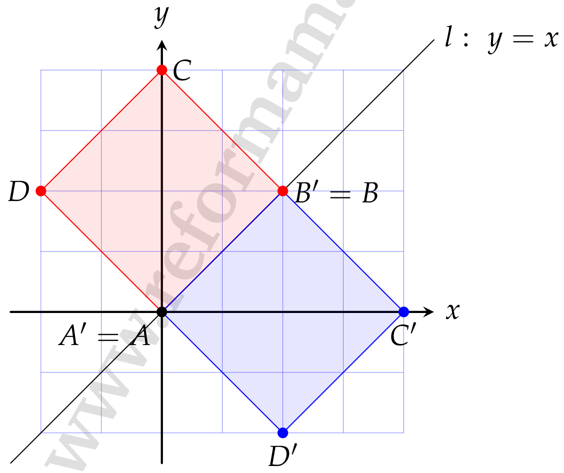


Figura 16: El cuadrado azul $A'B'C'D'$ es el homólogo del cuadrado rojo $ABCD$ bajo la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

Simetría axial

Simetría axial

En algunas ocasiones al reflejar una figura sobre una recta se obtiene la misma figura original; es decir, si X es una figura y R una reflexión con respecto a una recta l, puede suceder que $R(X) = X$. En este caso, se dice que la figura X es simétrica y que la recta l es un eje de simetría de la figura.

La figura que se da a continuación es simétrica con eje de simetría l. Al reflejarla sobre l se tiene que el homólogo de A es B, el de B es A y el de C es C mismo.

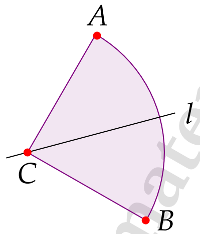


Figura 17: La figura es simétrica con respecto a la recta l

.

Una figura puede tener más de un eje de simetría.

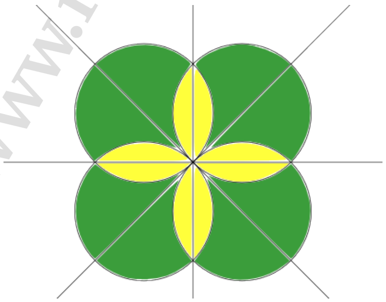


Figura 18: Esta figura tiene cuatro ejes de simetría.

Rotaciones

Rotación

Una **rotación** en el plano, con centro en el punto A y amplitud θ, es una transformación que aplica a cada punto P del plano un punto P' tal que el arco PP', de la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AP}$, mide θ. El punto P' se llama homólogo de P bajo la rotación.

La rotación de una figura X en el plano es la figura que se obtiene al aplicar la rotación a todos los puntos de la figura. Si la rotación se denota por R, entonces la rotación de la figura es $R(X)$ o X'.

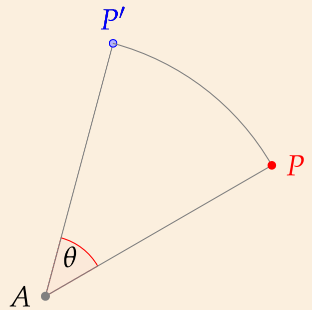


Figura 19: El punto P' es el homólogo de P bajo la rotación de centro en A y amplitud θ.

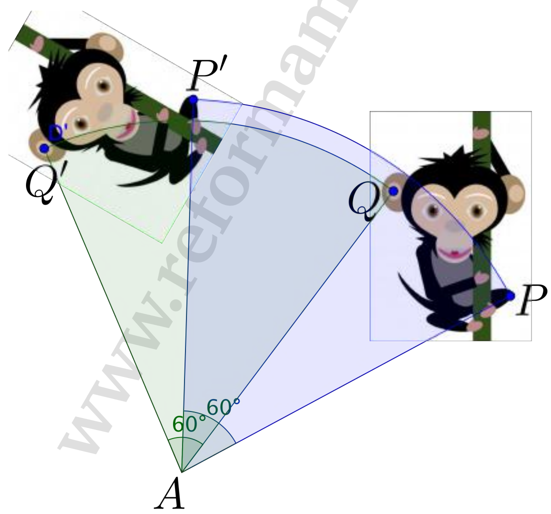


Figura 20: El monito fue rotado 60° con centro en A. Cada uno de sus puntos junto con sus homólogos son extremos de arcos de 60° con centro en A. Imagen del monito cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Propiedades

- Las rotaciones son *isometrías*.
- El centro A de una rotación es invariante (permanece fijo); esto es $A' = A$.

Homólogo bajo una rotación

Si R es una rotación con centro en el origen de coordenadas $O(0,0)$ y amplitud θ, entonces el homólogo de $P(x,y)$ es

$$R(P(x,y)) = P'\big((\cos\theta)x - (\operatorname{sen}\theta)y, (\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y\big).$$

Ejemplo 11

Una rotación de centro $O(0,0)$ y amplitud $45°$ aplica el punto $P(x,y)$ en el punto $P'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)$. Así, si al triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(3,3)$ se le aplica dicha rotación se obtiene el triángulo de vértices:

$$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2-0), \frac{\sqrt{2}}{2}(2+0)\right) = A'\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \quad B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(4-0), \frac{\sqrt{2}}{2}(4+0)\right) = B'(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$C'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3-3), \frac{\sqrt{2}}{2}(3+3)\right) = C'(0, 3\sqrt{2}).$$

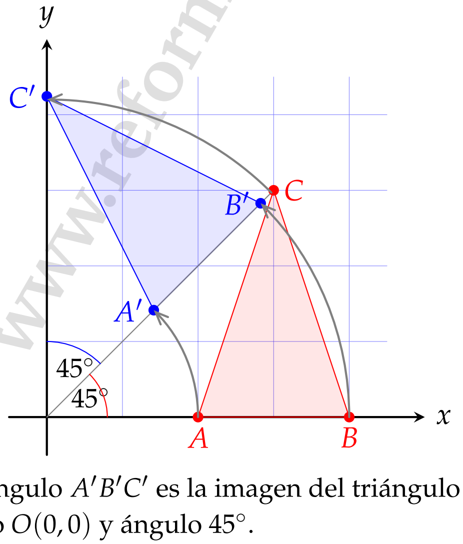


Figura 21: El triángulo $A'B'C'$ es la imagen del triángulo ABC bajo la rotación de centro $O(0,0)$ y ángulo $45°$.

Homotecias

Homotecia

Una **homotecia** con centro en el punto A de razón k (con $k \neq 0$) es una transformación que a cada punto P del plano le asocia un punto P' tal que:

- Si k es positivo: $A - P - P'$ (P está entre A y P') si $k > 1$ o $A - P' - P$ si $k < 1$, y la distancia de A a P' es k veces la distancia de A a P.
- Si k es negativo: $P' - A - P$ (A está entre P' y P) y la distancia de A a P' es $-k$ veces la distancia de A a P.

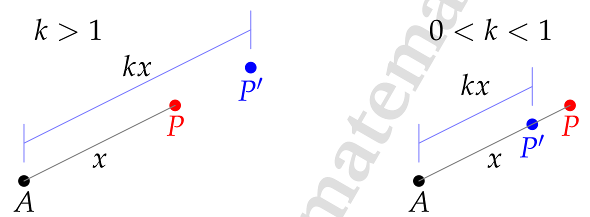


Figura 22: En cada caso, P' es el homólogo de P bajo la homotecia de centro A y razón k, según sea $k > 1$ o $0 < k < 1$.

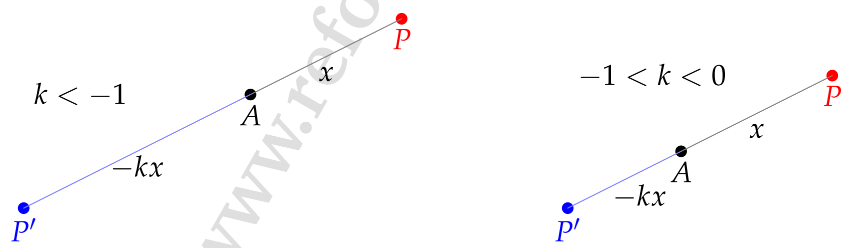


Figura 23: En cada caso, P' es el homólogo de P bajo la homotecia de centro A y razón k, según sea $k < -1$ o $-1 < k < 0$.

Si la imagen de X mediante una homotecia H es X' se escribe $H(X) = X'$. En la ilustración siguiente, la figura violeta es una homotecia de la figura roja de razón $k' = 3{,}5$ y la figura azul es una homotecia de la roja de razón $k'' = -0{,}75$.

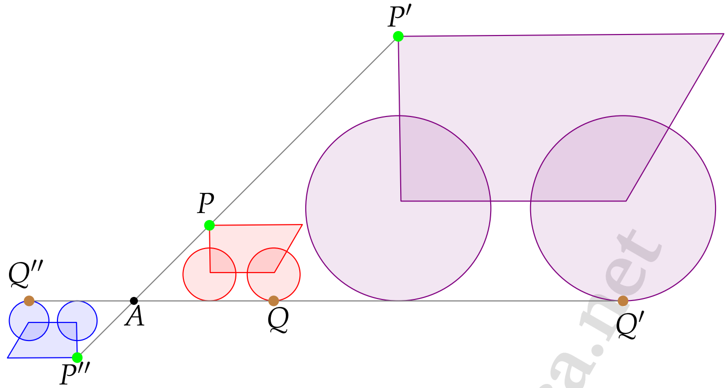


Figura 24: La figura violeta se obtiene de la figura roja mediante una homotecia de razón $k' = 3,5$ y centro en A. La figura azul se obtiene de la figura roja mediante una homotecia de razón $k'' = -0,75$ y centro en A. .

Observe que cuando se aplica una homotecia de razón negativa a una figura entonces la imagen cambia su orientación con respecto a la figura original.

Por otra parte, las homotecias conservan las medidas de los ángulos pero no conservan las medidas de los segmentos. De hecho, si $|k| < 1$, el segmento que se obtiene a partir de un segmento dado, es de menor longitud, mientras que si $|k| > 1$ entonces el segmento que se obtiene es de mayor longitud.

Dicho de otra manera, Una homotecia de razón $|k| > 1$ dilata o expande las figuras (las hace más grandes), mientras que una de razón $|k| < 1$ las contrae (las hace más pequeñas).

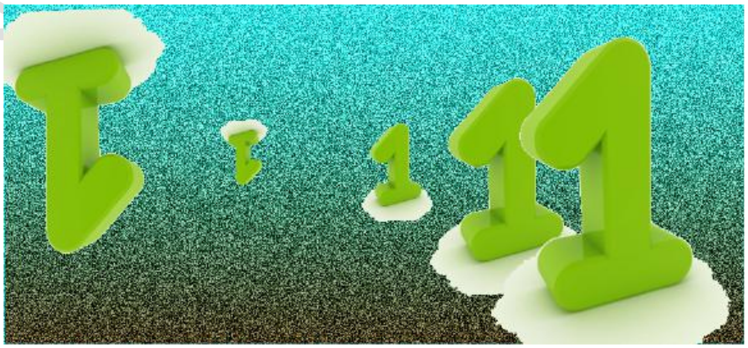


Imagen del 1, cortesía de sscreations en FreeDigitalPhotos.net

Propiedad

Si una figura X' se obtiene de la figura X mediante una homotecia entonces X y X' son semejantes. Esto implica que las medidas de los ángulos se preservan.

Teorema

Si H es una homotecia de centro $O(0,0)$ y razón k entonces el homólogo de $P(a,b)$ es $P'(ka,kb)$; es decir $H(a,b) = (ka,kb)$.

Ejemplo 12

Dada la homotecia H de centro $O(0,0)$ y razón $-1,5$, el homólogo del triángulo de vértices $O(0,0)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$ es el triángulo de vértices:
$O' = O$,
$B'(-1,5 \cdot (-1), -1,5 \cdot 2) = B'(1,5,-3)$,
$C'(-1,5 \cdot 2, -1,5 \cdot 3) = C'(-3,-4,5)$.

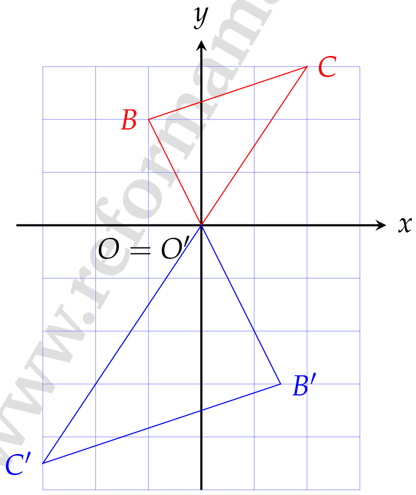


Figura 25: El triángulo $O'B'C'$ es la imagen del triángulo OBC bajo la homotecia de centro en O y razón $-1,5$.

Observe que, como la razón es negativa y de valor absoluto mayor que 1 entonces la imagen es de mayor tamaño que la original y tiene una orientación diferente de la de ella.

Teorema

Sea $A(a,b)$ un punto y H una homotecia de centro A y razón k, el homólogo de $P(x,y)$ es $P'(k(x-a)+a, k(y-b)+b)$. Esto significa que

$$H(x,y) = (k(x-a)+a, k(y-b)+b).$$

Ejemplo 13

Al aplicar la homotecia de centro $A(2,1)$ y razón $\frac{1}{2}$ al triángulo de vértices $P(-7,13)$, $Q(-1,13)$, $R(-4,1)$ se obtiene el triángulo de vértices:
$P'(\frac{1}{2}(-7-2)+2, \frac{1}{2}(13-1)+1) = P'(-\frac{5}{2},7)$,
$Q'(\frac{1}{2}(-1-2)+2, \frac{1}{2}(13-1)+1)) = Q'(\frac{1}{2},7)$,
$R'(\frac{1}{2}(-4-2)+2, \frac{1}{2}(1-1)+1)) = R'(-1,1)$.

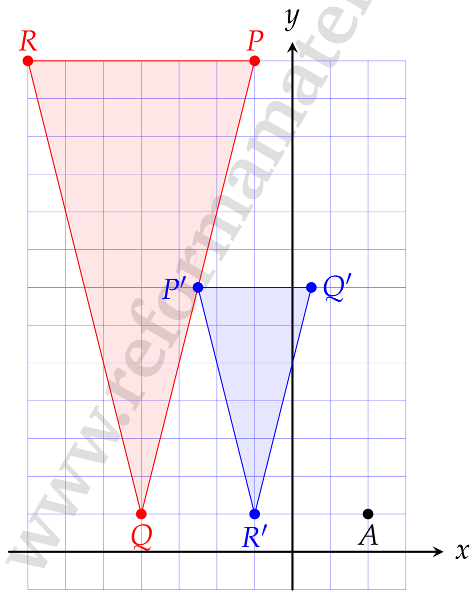


Figura 26: El triángulo $P'Q'R'$ es la imagen del triángulo PQR bajo la homotecia de centro en A y razón $\frac{1}{2}$.

Observe que, como la razón es positiva y de valor absoluto menor que 1 entonces la imagen es de menor tamaño que la original y tiene la misma orientación de ella.

Composición de transformaciones

Se puede aplicar a un punto o una figura una transformación y a la que resulta de ello otra transformación y así sucesivamente cuantas veces se requiera. Sin embargo hay que tener cuidado porque el orden en que se apliquen las transformaciones es importante (esto significa que la composición de transformaciones no es conmutativa).

Considere, por ejemplo, la siguiente imagen:

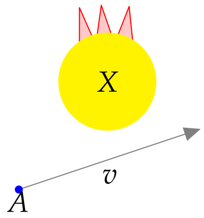


Figura 27: Una imagen para trabajar.

Si se aplica una traslación a la figura X, según el vector v se obtiene lo siguiente:

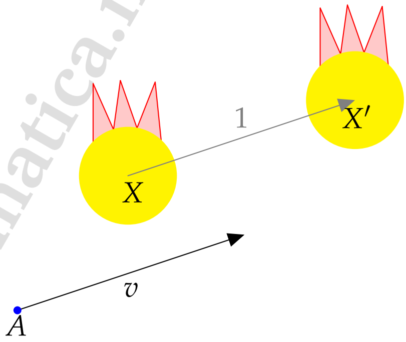


Figura 28: X' se obtiene al aplicar a X una traslación de vector v.

Al aplicar a X' una traslación con centro en el punto A y amplitud 50° se obtiene:

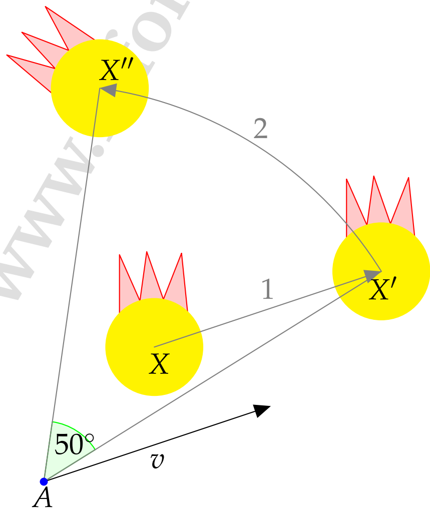


Figura 29: X'' se obtiene al aplicar a X' una rotación de centro A y amplitud 50°.

Procedamos ahora a la inversa. Primero la rotación de 50° con centro en A:

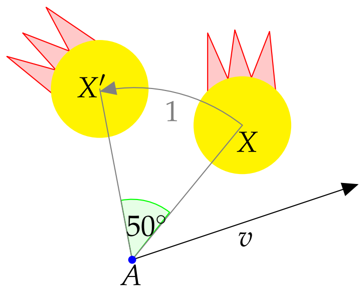


Figura 30: X' se obtiene al aplicar a X una rotación de centro A y amplitud 50°.

Ahora apliquemos a X' la traslación según el vector v:

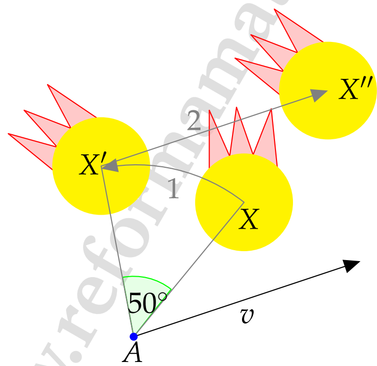


Figura 31: X'' se obtiene al aplicar a X' una traslación de vector v.

Es evidente que la figura X'' que se obtiene en el segundo procedimiento no ocupa el mismo lugar que la X'' que se obtiene con el primer procedimiento.

Ejemplos adicionales

Ejemplo 14

En la siguiente figura, se dan dos triángulos P y Q. Determine al menos dos formas de obtener Q a partir de P mediante transformaciones en el plano.

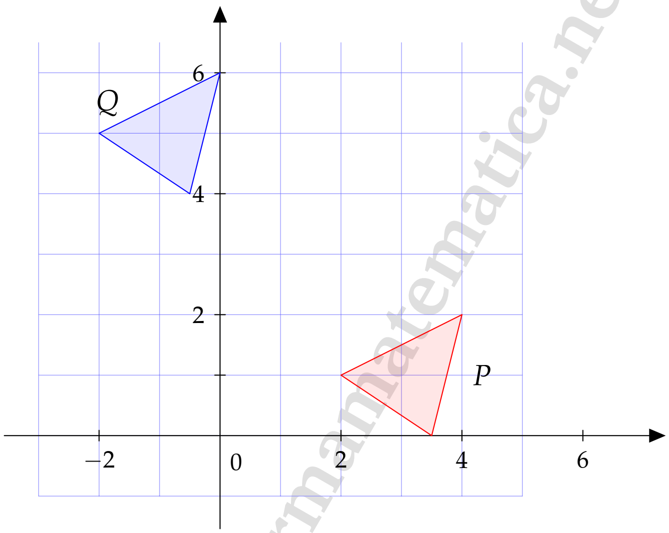


Figura 32: Q se obtiene de P mediante transformaciones

Solución

En primer lugar vemos que Q y P están orientados de la misma manera y son congruentes; esto significa que uno se puede obtener del otro mediante una traslación. De la figura se observa que tal traslación es de vector $v = (-4, 4)$ pues se corre la figura 4 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia arriba.

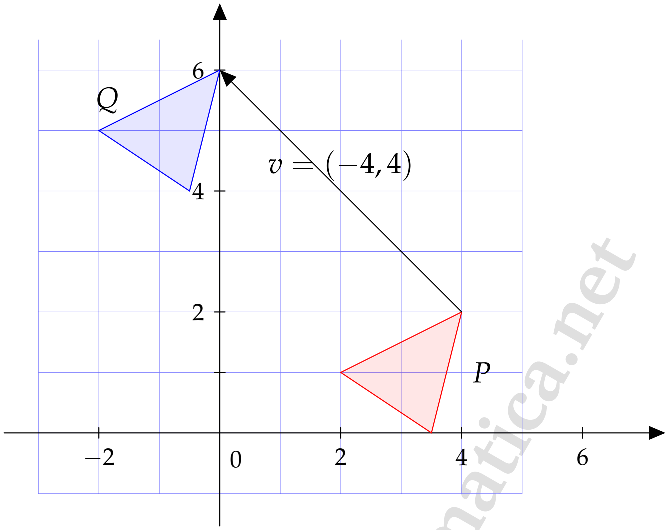


Figura 33: Q se obtiene de P mediante una traslación de vector $v = (-4, 4)$.

Otra manera, menos evidente, es reflejando primero P con respecto a la recta $y = x$ para obtener P' y luego reflejar P' con respecto a la recta $y = x + 4$ para obtener Q.

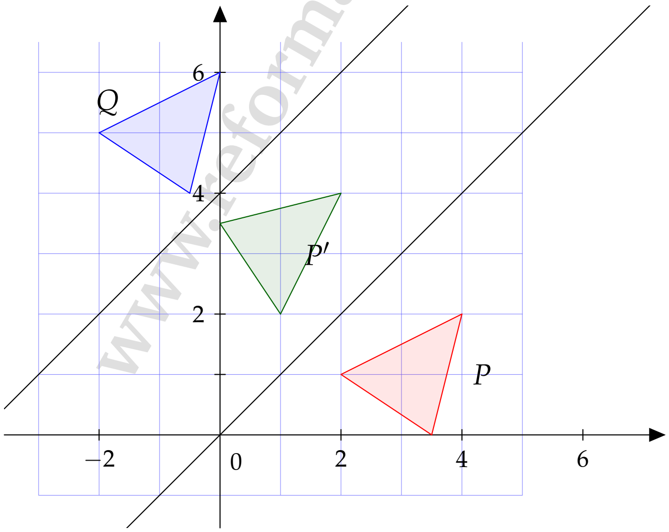


Figura 34: Q se obtiene de P mediante una traslación de vector $v = (-4, 4)$.

Nota

De hecho, toda traslación es equivalente a la composición de dos reflexiones de manera análoga a como se hizo en el ejemplo anterior.

Ejemplo 15

[Seleccionar la respuesta correcta] En la siguiente figura, el cuadrilátero P se obtiene del cuadrilátero Q mediante la aplicación de una homotecia con centro en A y razón k.

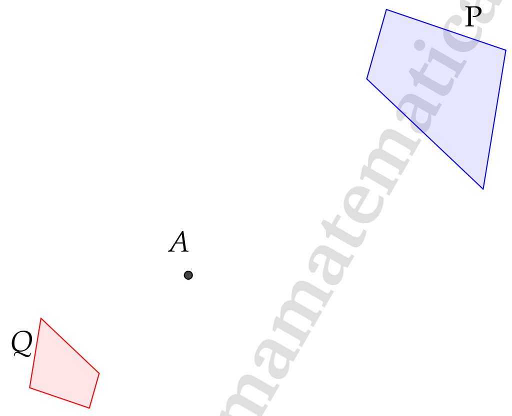


Figura 35: P se obtiene de Q mediante una homotecia.

Podemos asegurar que

A) $k < -1$

B) $-1 < k < 0$

C) $0 < k < 1$

D) $1 < k$

Solución

Se observa que la imagen es de mayor tamaño que la original por lo que $|k| > 1$. Por otra parte, el centro de la homotecia está entre ambas figuras por lo que k es negativo. Se concluye que $k < -1$.

Ejemplo 16

Al punto $A(-1,3)$ se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = x$ y luego al punto que se obtiene se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = 2$. ¿Qué punto se obtiene?

Solución

Al aplicar la reflexión con respecto a la recta $y = x$ lo que sucede es que se intercambian ambas coordenadas de manera que se obtiene el punto $A'(3,-1)$. Al aplicar la reflexión con respecto a una recta $y = k$ cambia la segunda coordenada del punto pues se convierte en $2k - b$ donde b es la segunda coordenada del punto al que se le aplica. En este caso se aplica a $A'(3,-1)$ por lo que $b = -1$ y como se refleja según la recta $y = 2$ entonces $k = 2$ de modo que se obtiene $A''(3, 2\cdot 2 - (-1)) = A''(3,5)$.

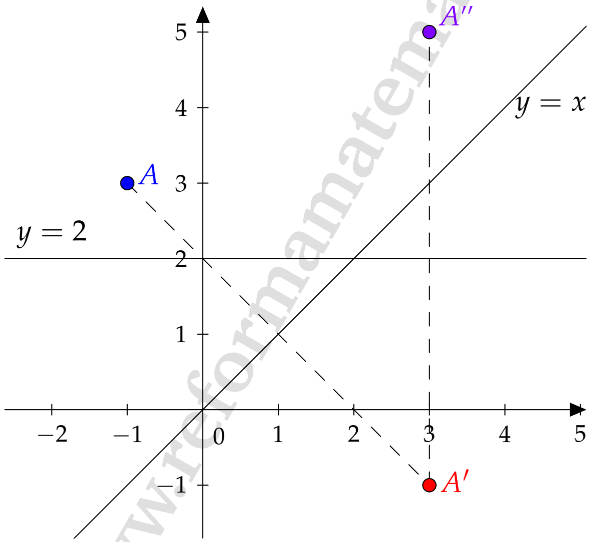


Figura 36: A' es la reflexión de A con respecto a la recta $y = x$ y A'' es la reflexión de A' con respecto a la recta $y = 2$.

Ejemplo 17

Al punto $A(-1,3)$ se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = 2$ y luego al punto que se obtiene se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = x$. ¿Qué punto se obtiene?

Solución

Al aplicar la reflexión con respecto a la recta $y = 2$ se obtiene el punto $A'(-1, 2 \cdot 2 - 3) = A'(-1,1)$. Al aplicar a $A'(-1,1)$ la reflexión con respecto a la recta $y = x$ es obtiene $A''(1,-1)$. Observe que se aplicó al mismo punto del ejemplo previo las mismas dos reflexiones pero en otro orden; se obtuvo puntos diferentes.

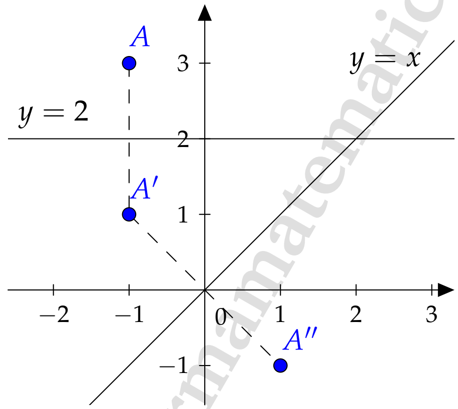
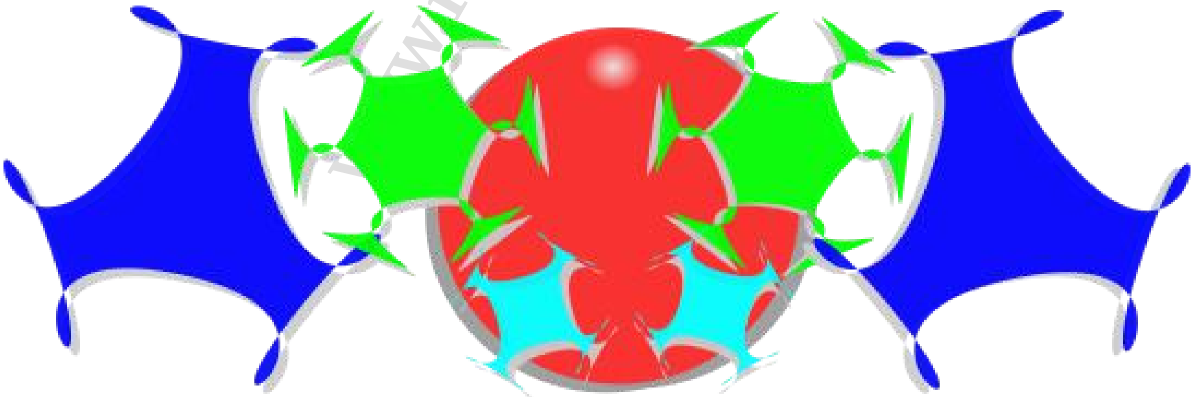


Figura 37: A' es la reflexión de A con respecto a la recta $y = 2$ y A'' es la reflexión de A' con respecto a la recta $y = x$.



Ejemplo 18

En la siguiente figura aparece un cuadrilátero P, ¿cuál o cuáles de los cuadriláteros Q, R, S, T, que se dan a continuación, corresponden a la aplicación a P de una sola rotación?

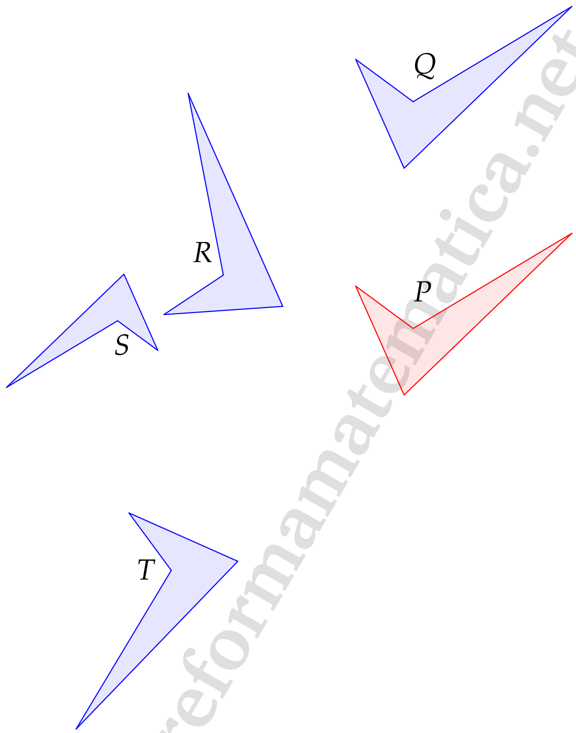


Figura 38: Al aplicar diversas transformaciones al cuadrilátero P se obtienen otros cuadriláteros.

Solución

Analicemos cada uno de los cuadriláteros:

Q: Es congruente a P y está orientado de la misma manera por lo que corresponde a una traslación. En general una rotación produce un cambio de orientación a no ser que sea una rotación de 360°, en cuyo caso se obtiene la misma figura original; este no es el caso. Si la figura a la que se aplica la rotación presenta simetría axial puede suceder que su imagen quede orientada de la misma manera que la original. Por ejemplo, en la siguiente figura, el triángulo rojo tiene simetría axial.

El triángulo azul se puede obtener del rojo de tres formas directas: mediante una reflexión con respecto a la recta l, como una rotación de centro A y amplitud 120° y mediante una traslación.

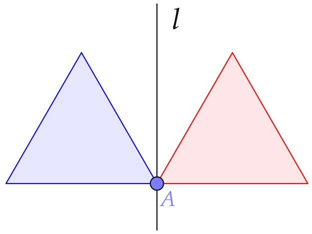


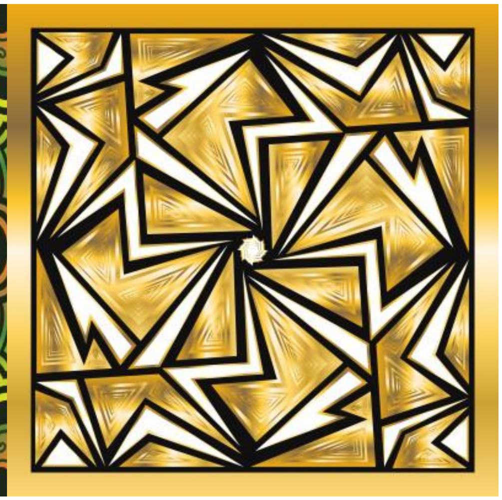
Figura 39: Un triángulo se puede obtener del otro mediante una reflexión, una rotación o una traslación.

R: Se puede obtener de P mediante una rotación.

S: Es de menor tamaño que P por lo que no se puede obtener mediante una rotación.

T: Es una reflexión de P. Dado que P no es simétrico, no hay manera de obtener T a partir de P mediante una rotación.

Solo R es una rotación de P.



Cortesía de holohololand en FreeDigitalPhotos.net

Bibliografía

Coxeter, H. & Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. Washington: MAA.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Usiskin, Z., Hirschhorn, D., Cosxford, A., Highstone, V., Lewellen, H., Oppong, N., DiBianca, R. & Maeir, M. (1997). *Geometry*. Glenview: Scott ForesmanAddisson Wesley.

Varilly, J. (1988). *Elementos de geometría plana*. San José, Costa Rica: EUCR.

Vázquez, A. & De Santiago, J. (2007). *Geometría Analítica*. México: Pearson Educación.

Créditos

Rotaciones y reflexiones. Material complementario, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Rotaciones y reflexiones*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor

Hugo Barrantes Campos

Revisores de este documento

Johanna Mena, Ángel Ruiz

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Rotaciones y reflexiones. Material complementario.* San José, Costa Rica: autor.