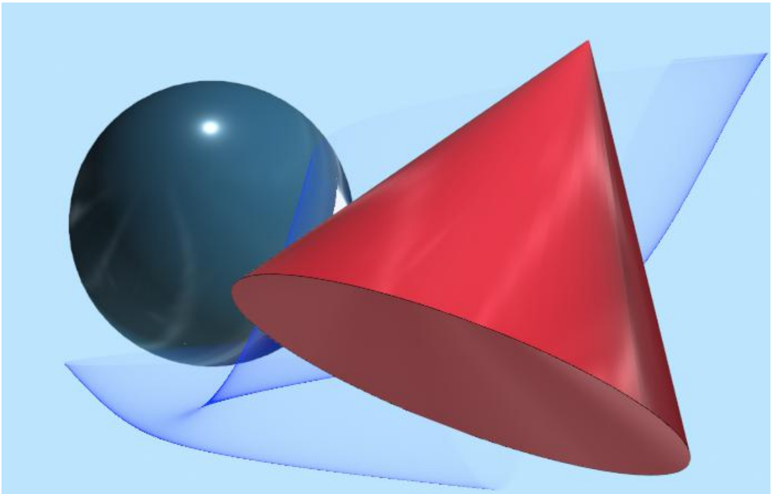
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Colección
Preparación Matemáticas Bachillerato

Conos, cilindros y esferas

Material complementario



Costa Rica
2017

Índice

El presente documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatemática.net).

Es un material complementario para apoyar las actividades del Mini MOOC *Conos, cilindros y esferas*, que forma parte de la colección *Preparación Matemáticas Bachillerato*. (http://190.10.69.205/coleccionPMB)

El propósito de *Conos, cilindros y esferas* es apoyar la preparación para las Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas de Costa Rica.

Se exponen diferentes conocimientos vinculados con el rectas, circunferencias, sus ecuaciones y relaciones de posición entre ellas, de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudios de Matemáticas para la Educación Diversificada.

1. Visualización espacial

Rectas y planos

Paralelismo

En el espacio, si un plano y una recta no contenida en él no se cortan, diremos que **el plano y la recta son paralelos**. También se dice que cualquier recta contenida en un plano es paralela a dicho plano. Si el plano P es paralelo a la recta ℓ, lo denotamos por $P\|\ell$ o por $\ell\|P$.

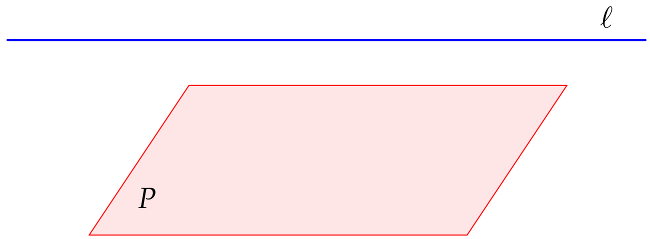


Figura 1: El plano P y la recta ℓ son paralelos.

Perpendicularidad

En el espacio, si una recta ℓ interseca a un plano P en un punto A, se dice que la recta es **perpendicular** al plano si ℓ es perpendicular a toda recta en P que contiene a A. Esto se denota por $\ell \perp P$.

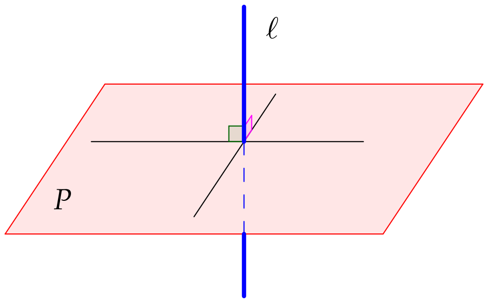


Figura 2: El plano P y la recta ℓ son perpendiculares.

Planos paralelos

Dos planos distintos son **paralelos** si ellos no tienen puntos en común. Si los planos P y Q son paralelos escribimos $P \| Q$.

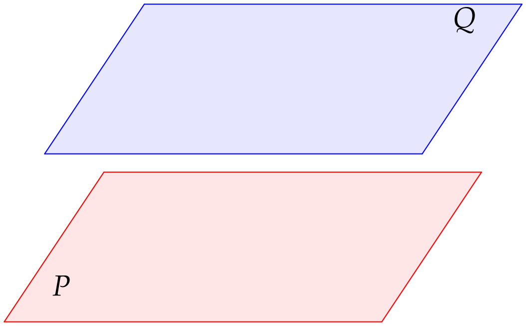


Figura 3: Los planos P y Q son paralelos.

Distancia entre planos

Dados dos planos paralelos, si trazamos un segmento de recta perpendicular a ambos planos y con un extremo en cada plano, entonces la **distancia entre ambos planos** es igual a la longitud de ese segmento de recta.

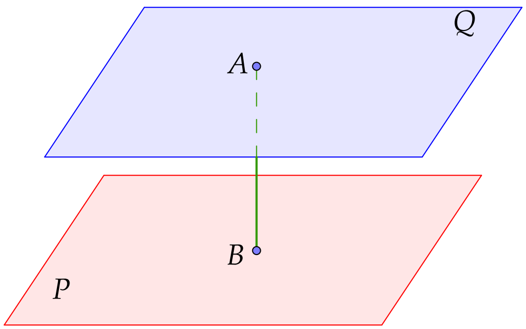


Figura 4: La distancia entre los planos P y Q es igual a la medida de $\overline{AB}$.

Distancia de una recta a un plano

Dados un plano y una recta paralela a él, no contenida en el plano, si trazamos un segmentos de recta perpendicular al plano y a la recta, con un extremo en el plano y otro en la recta, entonces la **distancia entre la recta y el plano** es la longitud de ese segmento de recta.

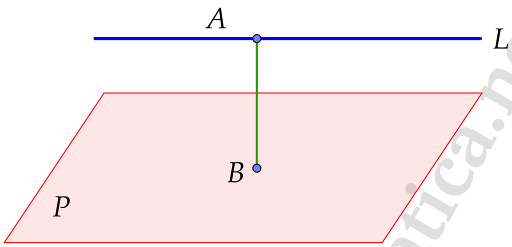


Figura 5: La distancia entre el plano P y la recta Q es igual a la medida de $\overline{AB}$.

Ángulo formado por dos planos

Dos planos P y Q se intersecan en una recta ℓ. Al cortarse forman cuatro ángulos. Puede suceder que todos estos ángulos son rectos, en cuyo caso se dice que los planos son perpendiculares.
Lo otro que puede suceder es que dos de estos ángulos son agudos de la misma medida y los otros dos son obtusos de la misma medida.

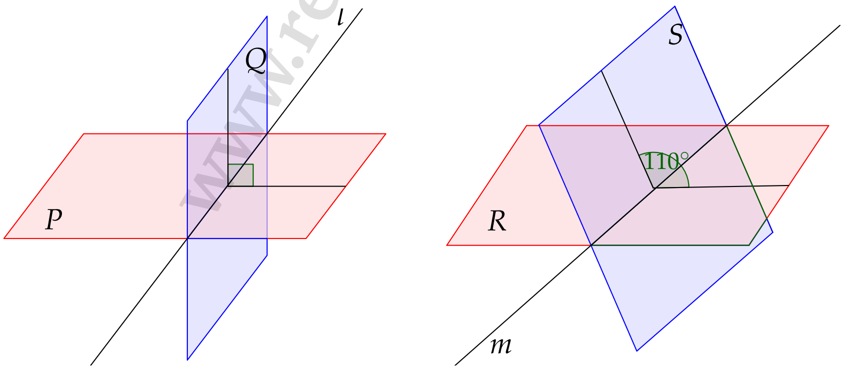


Figura 6: P y Q son perpendiculares. R y S no son perpendiculares, forman un ángulo menor de 70° y un ángulo mayor de 110°.

Poliedro

Un **poliedro** es una unión de polígonos y sus interiores, no todos coplanares, que delimitan una porción finita del espacio. La porción del espacio delimitada se llama **interior** del poliedro. La unión del poliedro y su interior se llama **poliedro sólido**. Las regiones poligonales que conforman el poliedro se llaman **caras del poliedro**; los lados de los polígonos se llaman **aristas del poliedro**; los vértices de esos polígonos se llaman **vértices del poliedro**

Ejemplo 1

El poliedro que se presenta en la siguiente figura tiene seis caras que son los polígonos: $ABCD$, $EFGH$, $ABEF$, $CDGH$, $CBEH$ y $ADGF$; sus aristas son: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{AF}$, $\overline{DG}$, $\overline{BE}$, $\overline{CH}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$; sus vértices son: A, B, C, D, E, F, G, H.

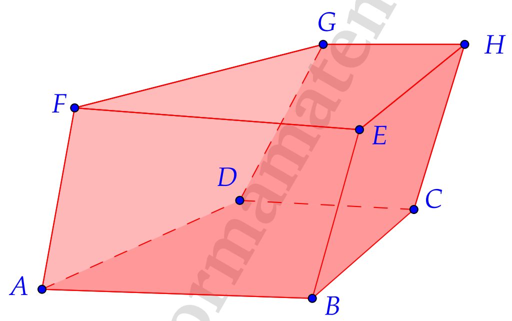


Figura 7: Poliedro de seis caras

Prisma

Si un poliedro tiene dos caras poligonales congruentes contenidas en planos paralelos entonces se dice que es un **prisma**.
Las caras congruentes se llaman **bases** del prisma y las otras se llaman **caras laterales**. Estas caras laterales son paralelogramos.
Si la base es un triángulo, el prisma se llama **prisma triangular**; si la base es un pentágono, se llama **prisma pentagonal** y así sucesivamente.

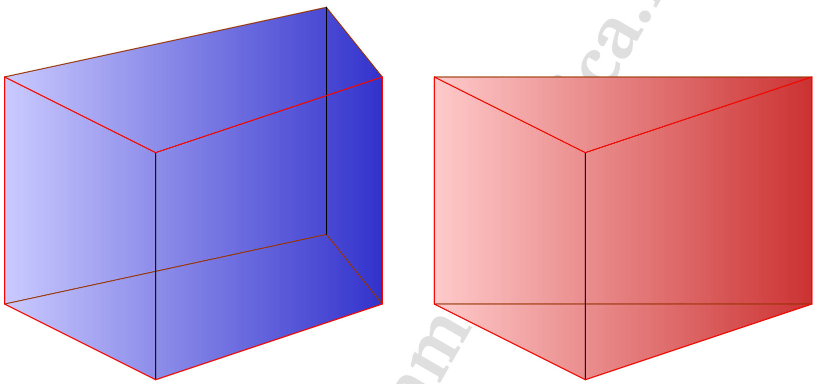
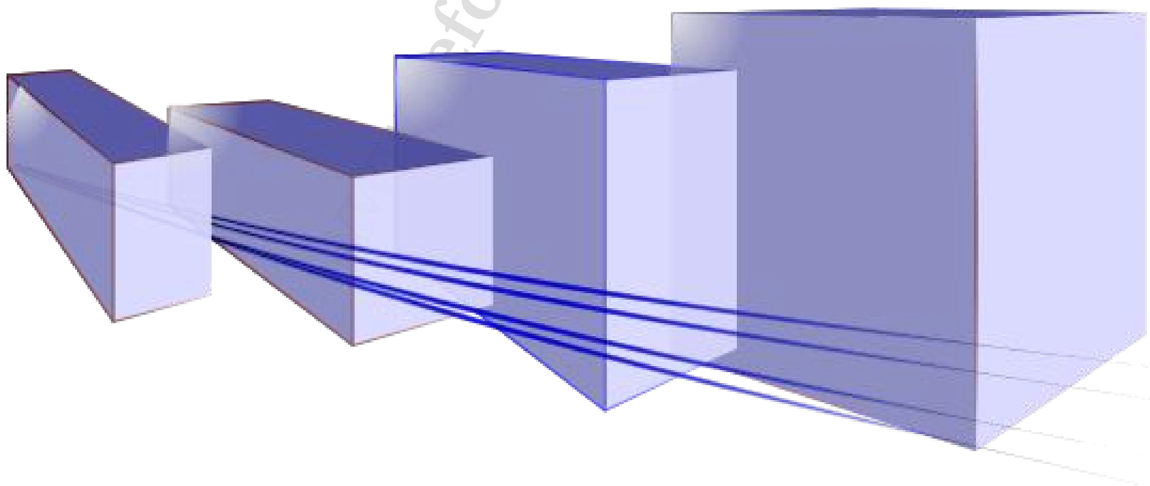


Figura 8: Primas cuadrangular y prisma triangular.



Secciones cónicas

Las secciones cónicas son un tipo especial de sección plana.

Sección plana

Una sección plana es la curva intersección de un plano con un sólido

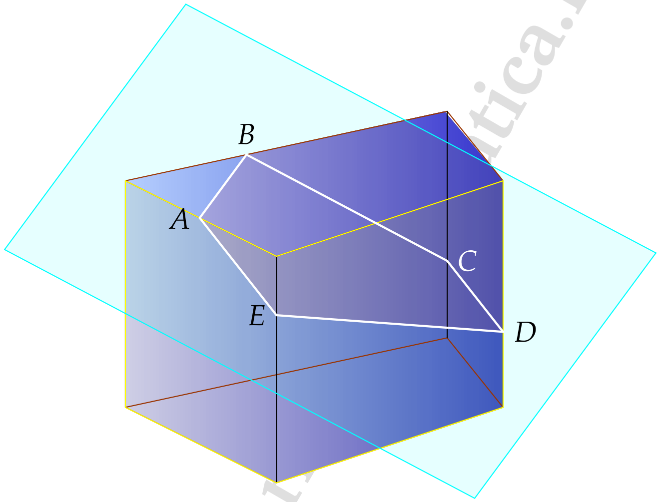


Figura 9: La sección que se obtiene al cortar el prisma con el plano es el pentágono $ABCDE$.

Las secciones cónicas se definen como cierto tipo de curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano.

Para definirlas, se considerará un tipo especial de cono, que para nuestros efectos llamaremos cono doble. Consideremos una circunferencia C en el espacio y un punto V fuera de ella de modo que si O es el centro de la circunferencia, entonces la recta OV es perpendicular al plano que contiene la circunferencia.

Cono

Un **cono doble** (no delimitado) es la superficie que se genera al trazar todas las recta que pasan por la circunferencia C y por el punto V.

El punto V se llama vértice del cono, $\overleftrightarrow{OV}$ se llama eje del cono, cualquiera de las rectas que constituyen el cono se llama una generatriz, la circunferencia C se llama directriz.

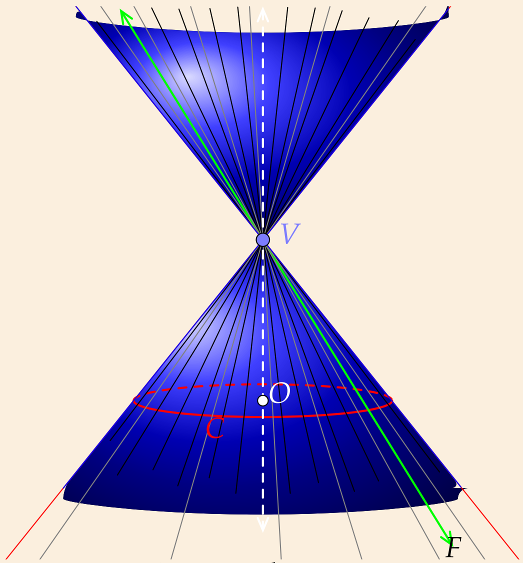


Figura 10: V es el vértice, C de centro O es directriz, $\overleftrightarrow{OV}$ es el eje, $\overleftrightarrow{VF}$ es una generatriz.

Elipse

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice, que no es paralelo eje del cono ni paralelo a alguna generatriz. Si A y B son los puntos en una elipse más alejados entre sí, entonces se llaman **vértices** de la elipse, también $\overline{AB}$ se llama **eje mayor**; ese mismo nombre recibe la medida de dicho segmento. La mediatriz del eje mayor interseca la elipse en dos puntos C y D; tanto $\overline{CD}$ como su medida reciben el nombre de **eje menor**. El punto O intersección de esos ejes se llama **centro** de la elipse.

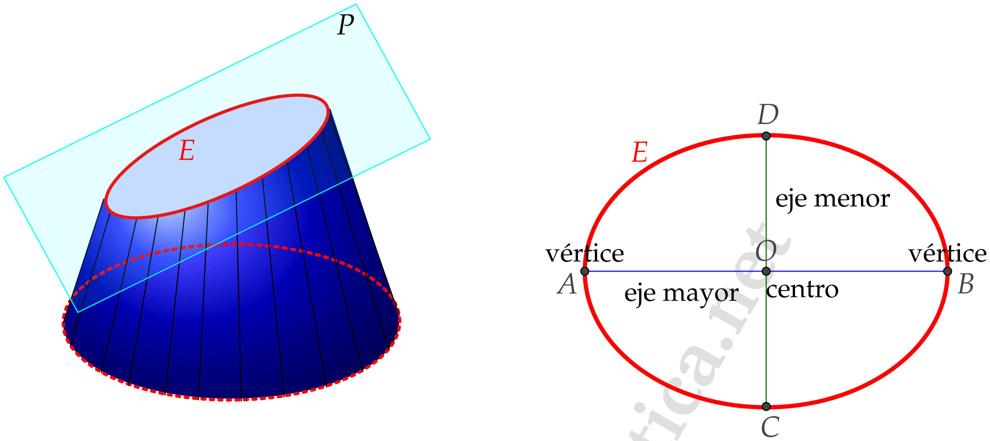


Figura 11: Al cortar el cono con el plano P se obtiene una curva E denominada elipse. A la derecha se muestra una elipse E, $\overline{AB}$ es su eje mayor, $\overline{AB}$ es su eje menor, O es su centro, A y B son sus vértices.

Cuando una elipse tiene los dos ejes de la misma medida entonces es una circunferencia. En este caso se obtiene cuando el cono doble es cortado por un plano que no contiene al vértice y es perpendicular al eje.

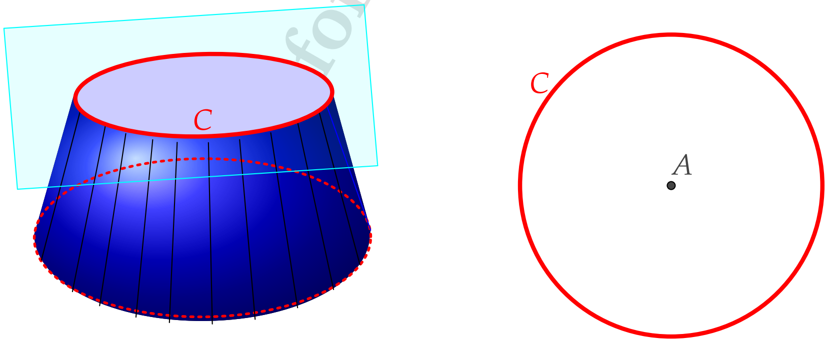


Figura 12: Al cortar el cono con un plano paralelo a la base, que no contenga el vértice, se obtiene una circunferencia. A la derecha, circunferencia C de centro A.

Parábola

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice y es paralelo a alguna generatriz del cono.

La parábola es una curva simétrica con respecto a un eje. El punto donde se cortan la parábola y el eje de simetría se llama vértice.

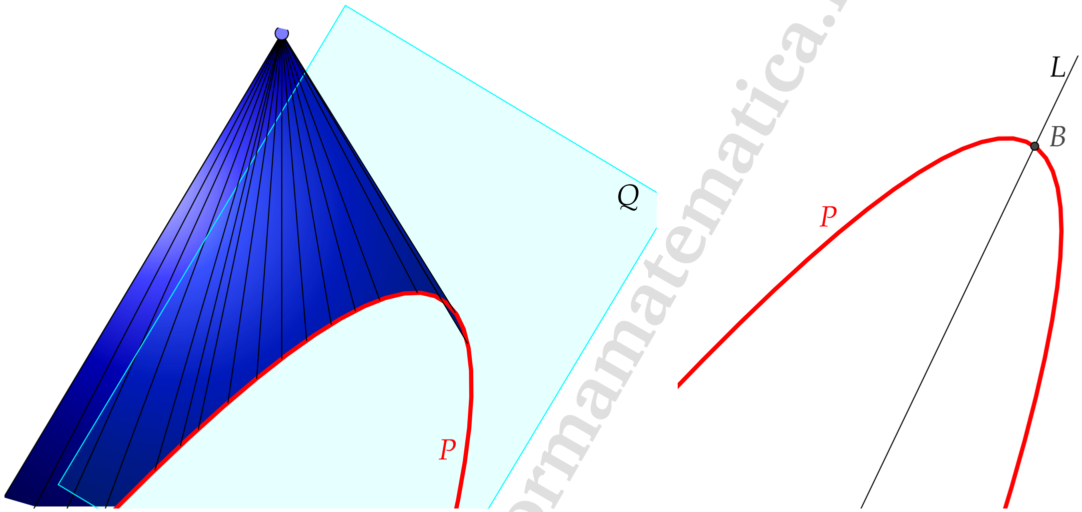


Figura 13: Al cortar el cono con el plano Q se obtiene una curva P denominada parábola. A la derecha, B es el vértice de la parábola P, L es su eje de simetría.

Hipérbola

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice y es paralelo al eje del cono.

La hipérbola está compuesta por dos ramas separadas y es una curva simétrica con respecto a un eje. Los puntos donde se cortan la hipérbola y el eje de simetría se llaman vértices.

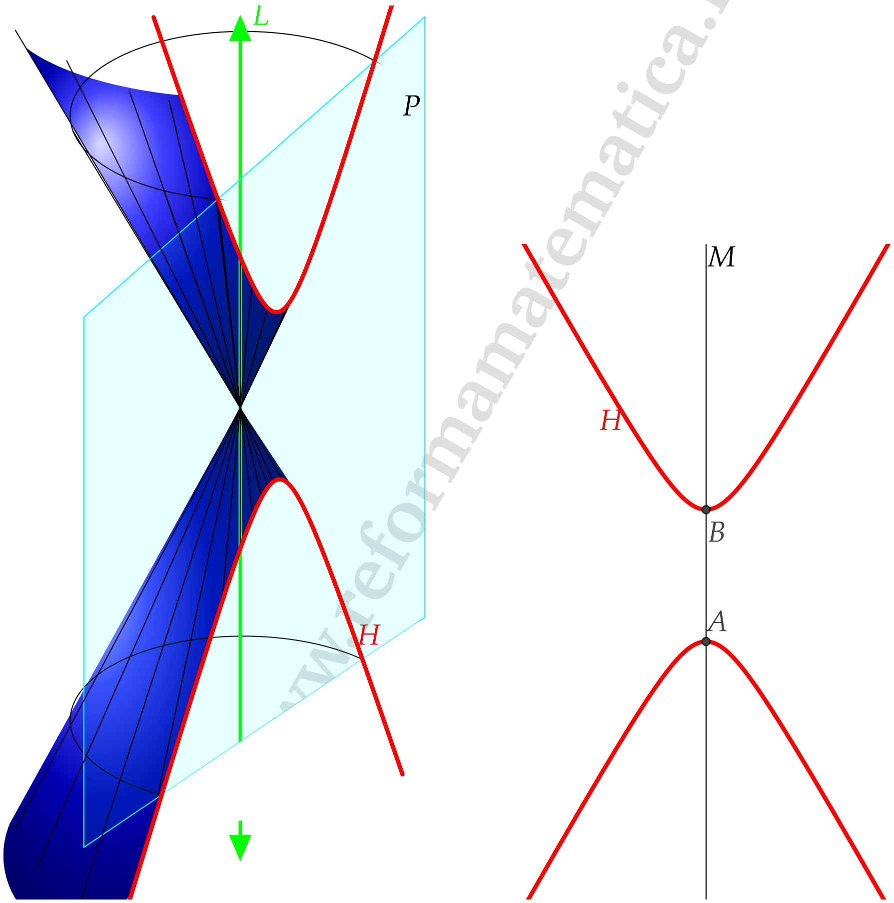


Figura 14: Al cortar el cono con un plano P paralelo al eje L se obtiene una curva llamada Hipérbola (H). A la derecha aparece una hipérbola H con eje M y vértices A y B.

Cilindros

Cilindro circular

Un **cilindro circular** es la unión de dos circunferencias congruentes (junto con su interior) que están en planos paralelos y de todos los segmentos (llamados **generatriz**) que tienen un extremo en cada circunferencia y que son paralelos a la recta que une los centros de las circunferencias.

Las dos circunferencias se llaman **bases** del cilindro. Se llama altura del cilindro a la distancia entre los dos planos que contienen las bases. El segmento que une los centros de ambas bases se llama **eje del cilindro**. Si el eje es perpendicular a los planos que contienen las bases, se dice que el cilindro es **recto**.

En adelante el término cilindro se referirá a un cilindro circular recto.

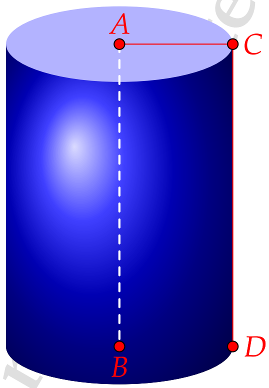


Figura 15: $\overline{AB}$ es el eje del cilindro, AB es la altura, $\overline{AC}$ es el radio de la base, $\overline{CD}$ es generatriz.

Área del cilindro

Si la altura del cilindro es h y el radio del círculo base es r entonces el área lateral del cilindro es

$$A_L = 2\pi rh.$$

Como las bases son círculos de radio r, entonces cada uno de ellos tiene área πr^2. Así, el área sumada de sus bases es $A = 2\pi r^2$. De todo esto, el área total del cilindro será:

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Ejemplo 2

Determinar el área lateral y el área total de un cilindro en el que el radio de la base es 4 y cuya altura es 10.

Solución

De acuerdo con lo anterior

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 80\pi. \\ A_T &= 80\pi + 2\pi(4)^2 = 80\pi + 32\pi = 112\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Secciones planas de un cilindro

- Si un cilindro se corta mediante planos paralelos a las bases se obtienen como secciones circunferencias congruentes a la base.
- Las secciones por planos no paralelos a las bases y que no intersecan las bases son elipse.

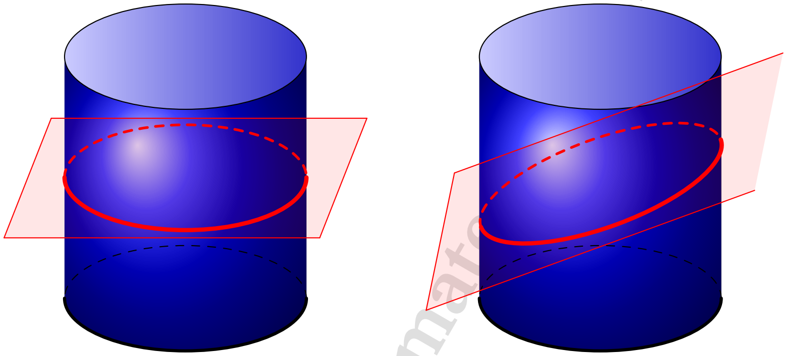


Figura 16: A la izquierda, el cilindro es cortado con un plano paralelo a la base; la sección que se obtiene es una circunferencia. A la derecha, el cilindro es cortado con un plano no paralelo a la base, sin intersecarla; la sección es una elipse.

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos del cilindro y elementos de las curvas que se forman cuando el cilindro se corta con un plano.

Ejemplo 3

En la figura siguiente se representa un cilindro circular recto donde el radio de la base es 3 cm y una sección obtenida mediante un plano que forma un ángulo de 45° con el plano que contiene la base. ¿Cuánto mide el eje mayor $\overline{AB}$, de la elipse?

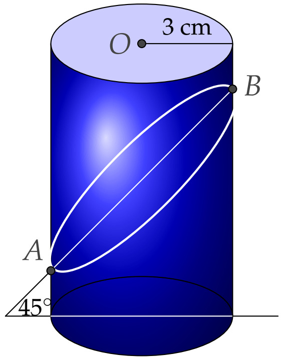


Figura 17: Un cilindro y una sección mediante un plano que forma 45° con el plano de la base.

Solución

En la siguiente figura se han trazado algunos elementos que permite visualizar la solución.

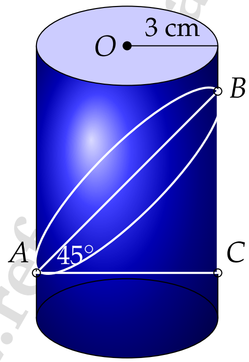


Figura 18: Se agregaron elementos para tener un esquema que permite resolver el ejercicio.

Si se traza un segmento $\overline{BC}$ paralelo al plano de la base, que interseca al eje del cilindro y donde C pertenece al cilindro (vea la figura anterior), entonces BC es igual al diámetro de la base, es decir $BC = 6$ y formamos un triángulo rectángulo BCA. Tenemos entonces $\cos 45^\circ = \frac{6}{AB}$ y por lo tanto

$$AB = \frac{6}{\cos 45^\circ} \approx \frac{6}{0,70711} = 8,4852.$$

Conos

En adelante trataremos con otro tipo de cono el cual es una porción particular delimitada del cono doble.

Cono circular recto

Un **cono** circular recto (al que llamaremos simplemente cono) es la figura formada por la unión de una circunferencia, junto con su interior, llamada base, un punto V (llamado vértice), que no está en el mismo plano y todos los segmentos de recta (llamados generatriz) que unen un punto de la circunferencia base con el punto V.
Si el segmento de recta que se traza desde el punto V hasta el centro del círculo, llamado **eje** del cono, es perpendicular al plano que contiene al círculo se dice que el cono es **recto**.
La **altura** del cono es el segmento de recta que va del vértice al centro de la circunferencia base del cono. También se llama altura a la medida de tal segmento. Se llama **eje** del cono a la recta que contiene a la altura.

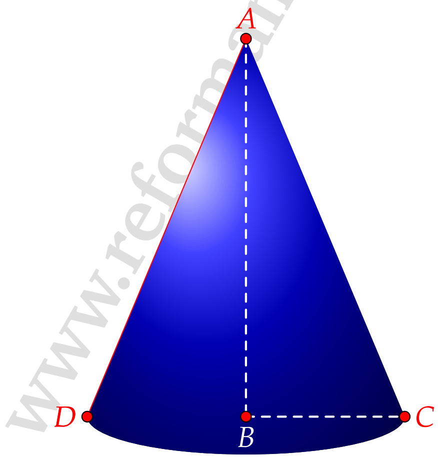


Figura 19: A es el vértice del cono, $\overline{AB}$ es la altura del cono, $\overline{BC}$ es el radio de la base, $\overline{AD}$ es generatriz.

Área del cono

El área lateral de un cono recto es

$$A_L = \frac{C \cdot g}{2},$$

donde C es la longitud de la circunferencia base y g es la longitud de la generatriz. Si el radio de la circunferencia es r, entonces $C = 2\pi r$ y, por lo tanto, podemos escribir el área lateral como

$$A_L = \pi r g.$$

El área total del cono es la suma del área lateral más el área de la base:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2.$$

Ejemplo 4

Determinar el área lateral y el área total de un cono cuya generatriz mide 7 y el radio de su base es 4.

Solución

De acuerdo con las fórmulas anteriores:

$$\begin{aligned} A_L &= \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 7 = 28\pi, \\ A_T &= \pi r g + \pi r^2 = 28\pi + \pi(4)^2 = 28\pi + 16\pi = 44\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Determine el área lateral de un cono de altura 6 y radio de la base 3.

Solución

Para calcular el área lateral debemos calcular primero la longitud de su generatriz s. Observe la figura siguiente.

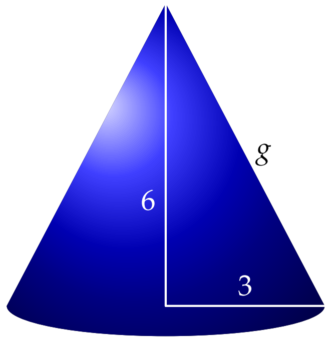


Figura 20: Se forma un triángulo rectángulo con hipotenusa g y catetos de medidas 6 y 3.

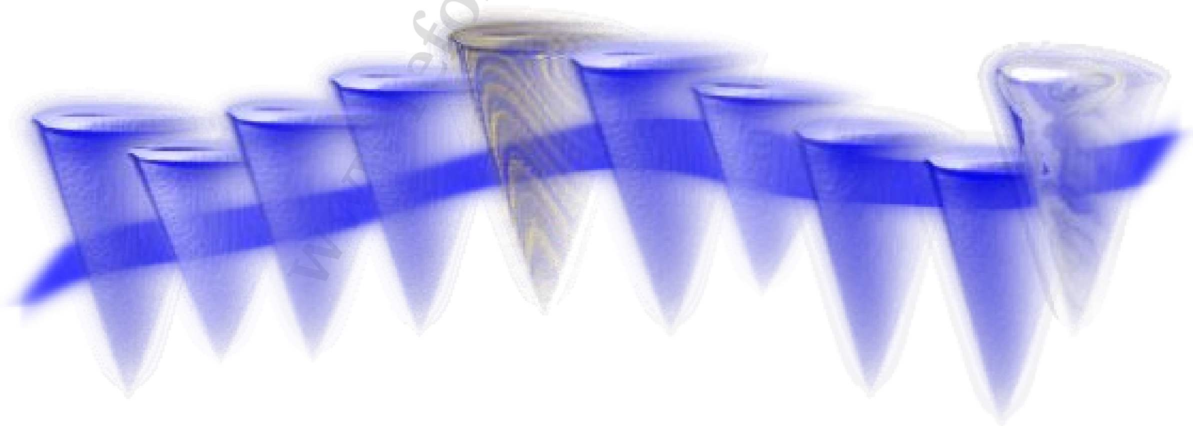
La generatriz es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la altura del cono.

De acuerdo con lo anterior:

$$g = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}.$$

Por lo tanto, el área lateral del cono es

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{45} = 3\sqrt{45}\,\pi.$$



Secciones planas de un cono

Las secciones planas de un cono circular recto se describen a continuación:

- Una sección mediante un plano paralelo a la base es una **circunferencia**.
- Una sección mediante un plano no paralelo a la base, que no corte la base, y no paralelo a una generatriz es una elipse.
- Una sección mediante un plano paralelo a una generatriz del cono es un arco de **parábola** (diremos simplemente que es una parábola).
- Una sección mediante un plano perpendicular a la base y que no contenga al vértice del cono es un arco de **hipérbola** (diremos simplemente que es una hipérbola).

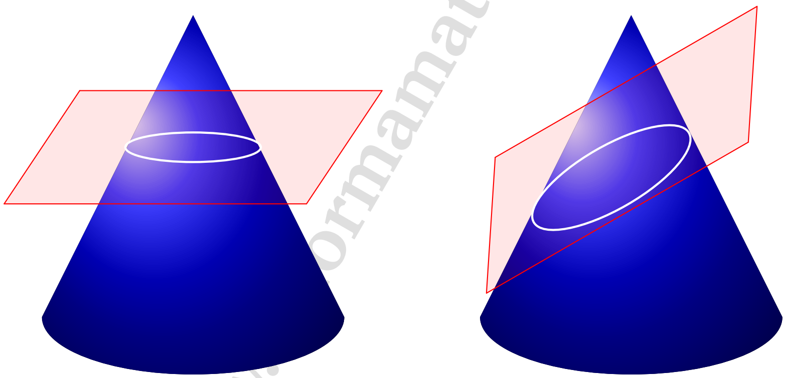


Figura 21: A la izquierda: la intersección de un cono con un plano paralelo a la base es una circunferencia. A la derecha, al cortar un cono con un plano que no corta la base, no es paralelo al eje y no es paralelo a ninguna generatriz es una elipse.

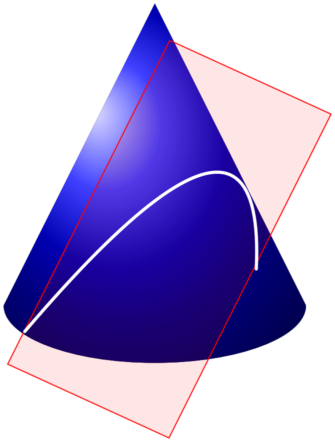


Figura 22: A la izquierda: la intersección de un cono con un plano paralelo a una generatriz es una parábola. A la derecha, al cortar un cono con un plano paralelo al eje es una hipérbola.

Cortesía de seksuat en FreeDigitalPhotos.net

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos del cono y elementos de las curvas que se forman cuando el cilindro se corta con un plano.

Ejemplo 6

Un cono de radio de la base igual a 5 cm y altura 10 cm se corta mediante un plano paralelo a la base. Si la distancia entre el plano de la sección y el plano de la base es 4 cm, determine el radio de la sección.

Solución

La figura siguiente representa la situación.

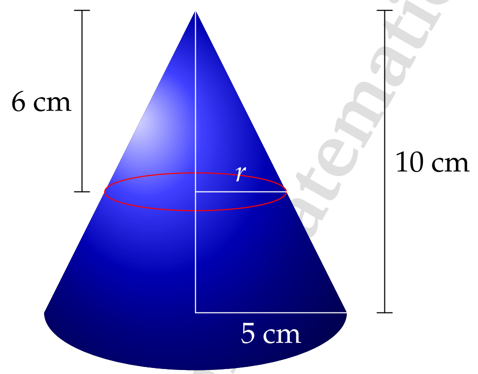


Figura 23: La circunferencia es la sección que se obtiene al cortar el cono mediante un plano paralelo a la base y que está a 4 cm de ella.

Del centro de la circunferencia al vértice del cono la distancia es $10 - 4 = 6$ cm.

Si r representa el radio de la sección tenemos, por semejanza de triángulos que $\frac{10}{5} = \frac{6}{r}$ y, de aquí, $r = 3$.

Esferas

Esfera

Una **esfera** es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto dado, llamado **centro** de la esfera.

La distancia desde cada punto de la esfera hasta su centro se llama **radio** de la esfera; también se llama radio a cualquier segmento de recta trazado desde algún punto de la esfera hasta su centro. El **diámetro** de la esfera es cualquier segmento de recta trazado desde un punto a otro de la esfera pasando por el centro; también se llama diámetro a la medida de tal segmento.

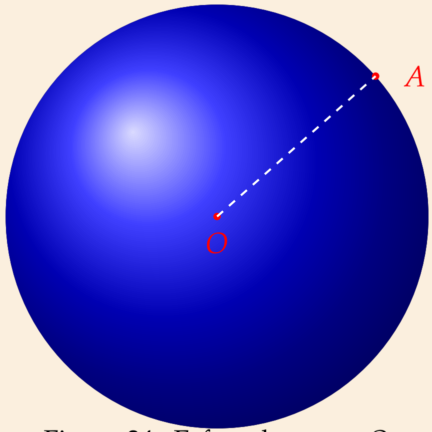


Figura 24: Esfera de centro O y radio $\overline{OA}$.

Área de la esfera

El área de una esfera se calcula mediante la fórmula:

$$A = 4\pi r^2,$$

donde A es el área de la esfera y r es su radio.

Ejemplo 7

Determinar el área de una esfera cuyo radio es 5 cm.

Solución

De acuerdo con la fórmula anterior tenemos que

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi.$$

Intersección de una esfera con un plano

Dadas una esfera y un plano en el espacio pueden suceder tres cosas: que la esfera y el plano no se intersequen, que el plano sea tangente a la esfera (su intersección es un punto) o que el plano corte a la esfera en más de un punto, en este último caso la intersección entre ambos es una circunferencia.

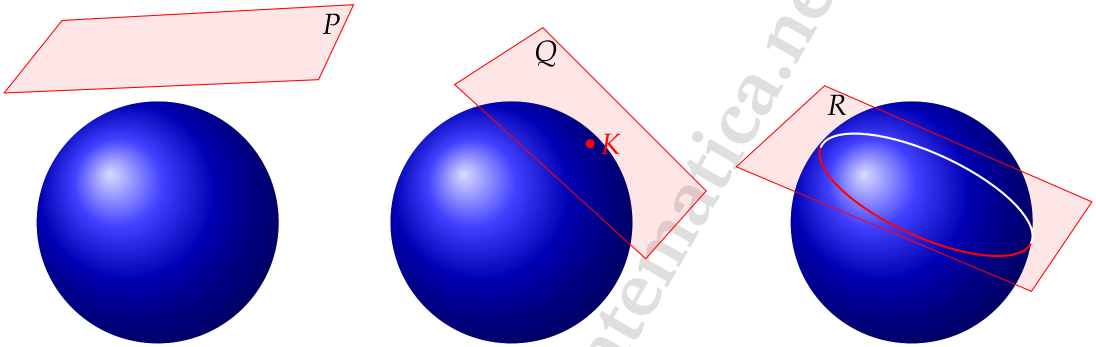


Figura 25: A la izquierda, el plano P y la esfera no se intersecan. Al centrol, el plano Q es tangente a la esfera en el punto K. A la derecha, el plano R corta a la esfera en una circunferencia.

Circunferencias máximas de una esfera

Si el plano corta a la esfera en una circunferencia, decimos que la intersección es una **circunferencia máxima de la esfera** si el plano contiene al centro de la esfera.

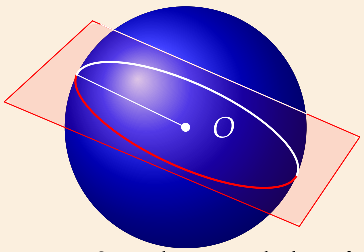


Figura 26: O es el centro de la esfera y de la circunferencia, por lo tanto esta es una circunferencia máxima de la esfera.

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos de la esfera y elementos de las circunferencias que se forman cuando la esfera se corta con un plano.

Ejemplo 8

Una esfera de 10 cm de radio es cortada por un plano Q, cuya distancia al centro de la esfera es 5 cm, ¿cuál es el radio del círculo que se forma al intersecar la esfera con el plano Q?

Solución

La figura ilustra la situación propuesta y sugiere la forma en que se puede resolver el problema.

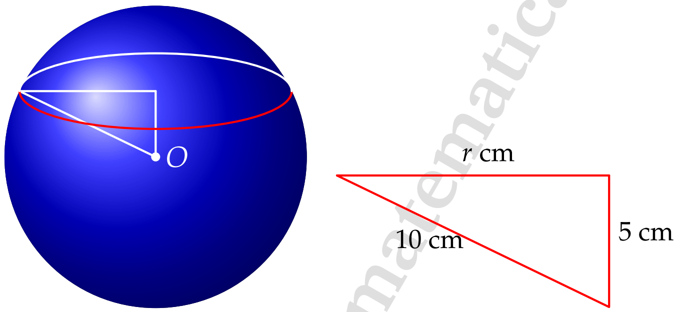


Figura 27: A la izquierda, el plano corta a la esfera en una circunferencia. A la derecha, el esquema dela situación por resolver.

En efecto, el radio r del círculo corresponde a un cateto de un triángulo rectángulo en el que el otro cateto es la distancia entre los dos planos y la hipotenusa es el radio de la esfera. De modo que

$$r = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Es decir, el radio del círculo es $r = 5\sqrt{3}$ cm.

Bibliografía

Coxeter, H. & Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. Washington: MAA.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Usiskin, Z., Hirschhorn, D., Cosxford, A., Highstone, V., Lewellen, H., Oppong, N., DiBianca, R. & Maeir, M. (1997). *Geometry*. Glenview: Scott ForesmanAddisson Wesley.

Varilly, J. (1988). *Elementos de geometría plana*. San José, Costa Rica: EUCR.

Vázquez, A. & De Santiago, J. (2007). *Geometría Analítica*. México: Pearson Educación.

Créditos

Conos, cilindros y esferas. Material complementario, es un recurso que brinda apoyo al Mini MOOC *Conos, cilindros y esferas*, una actividad del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*. Este proyecto del Ministerio de Educación Pública es apoyado por Asociación Empresarial para el Desarrollo y por la Fundación Costa Rica - Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor

Hugo Barrantes Campos

Revisores de este documento

Johanna Mena, Ángel Ruiz

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). *Conos, cilindros y esferas. Material complementario.* San José, Costa Rica: autor.