Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

www.reformamatematica.net

CRUSA
Fundación para la cooperación

# MODELOS DE PLAN DE LECCIÓN Y PLANEAMIENTO DIDÁCTICO EMPLEANDO LA INTEGRACIÓN DE HABILIDADES MATEMÁTICAS (SECUNDARIA)

## INTRODUCCIÓN

Se presentan dos documentos correlacionados, el primero es un modelo de plan de lección para la materia de Matemática en educación secundaria y el otro es un fragmento de planeamiento didáctico correspondiente a las habilidades específicas que se desarrollarán en dicho plan de lección. Ambos tienen como propósito brindar una orientación a los docentes en el empleo de la integración de habilidades matemáticas en la acción de aula. Esta propuesta se sustenta en el programa de estudios (MEP, 2012, p.45):

> (…) Las habilidades no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado. (…) Por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades.

En ambos documentos se puntualizan cada uno de los momentos de la Etapa 1: *El aprendizaje del conocimiento*. Se describe el abordaje de las habilidades de manera integrada durante la ejecución de la clase. También, contiene la planificación de la Etapa 2: *La movilización y aplicación de los conocimientos*, mediante problemas y ejercicios de diversos niveles de complejidad.

Para este producto se han considerado varios elementos: la circular del MEP DM-0033-11-11 "Disposiciones sobre el Planeamiento Didáctico en los Centros Educativos", el documento de *Integración de habilidades matemáticas en la acción de aula en secundaria*, el formato de plan de lección (con algunas modificaciones) suministrado por el asesor pedagógico Javier Barquero así como sus aportes.

El modelo de plan de lección debe ajustarse a las condiciones particulares del entorno educativo, de ninguna manera se pretende su uso obligatorio, su objetivo es meramente pedagógico para la formación docente.

# *Plan de lección*

| | |
|---|---|
| Departamento: Matemática | Profesor: ….. |
| Asignatura: Matemática | Periodo: I |
| Nivel: Noveno año | Año: 2015 |

## DESCRIPCIÓN

**Conocimientos:** Pirámide recta, Apotema, Prisma recto, Área lateral, Área total

**Habilidades específicas:**

1. Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero.
2. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.
3. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

**Habilidades previas:**

**Geometría:** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos. (MEP, 2012, p.315)

**Números:** Utilizar la calculadora para resolver operaciones radicales. (MEP, 2012, p.292)

**Medidas**

- Reconocer el símbolo de kilogramo. (MEP, 2012, p.126)
- Realizar conversiones de medida entre el metro, sus múltiplos y submúltiplos. (MEP, 2012, p.128)
- Aplicar el uso del sistema monetario nacional en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p.225)
- Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p.225)

**Cronograma:** Del 20 al 30 de abril del 2015

## I Etapa: Aprendizaje de los conocimientos. (Tiempo propuesto: 3 lecciones)*

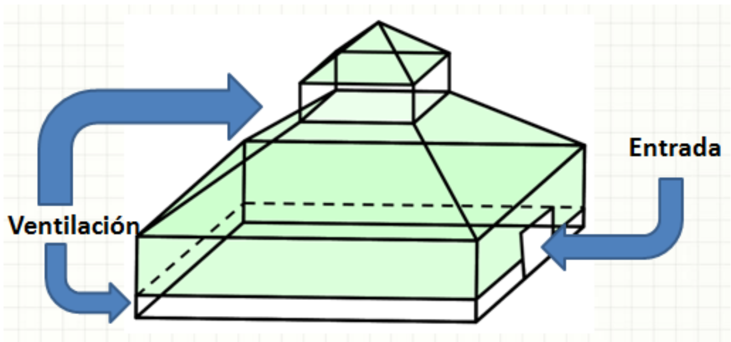
## Propuesta del Problema

**Problema:**

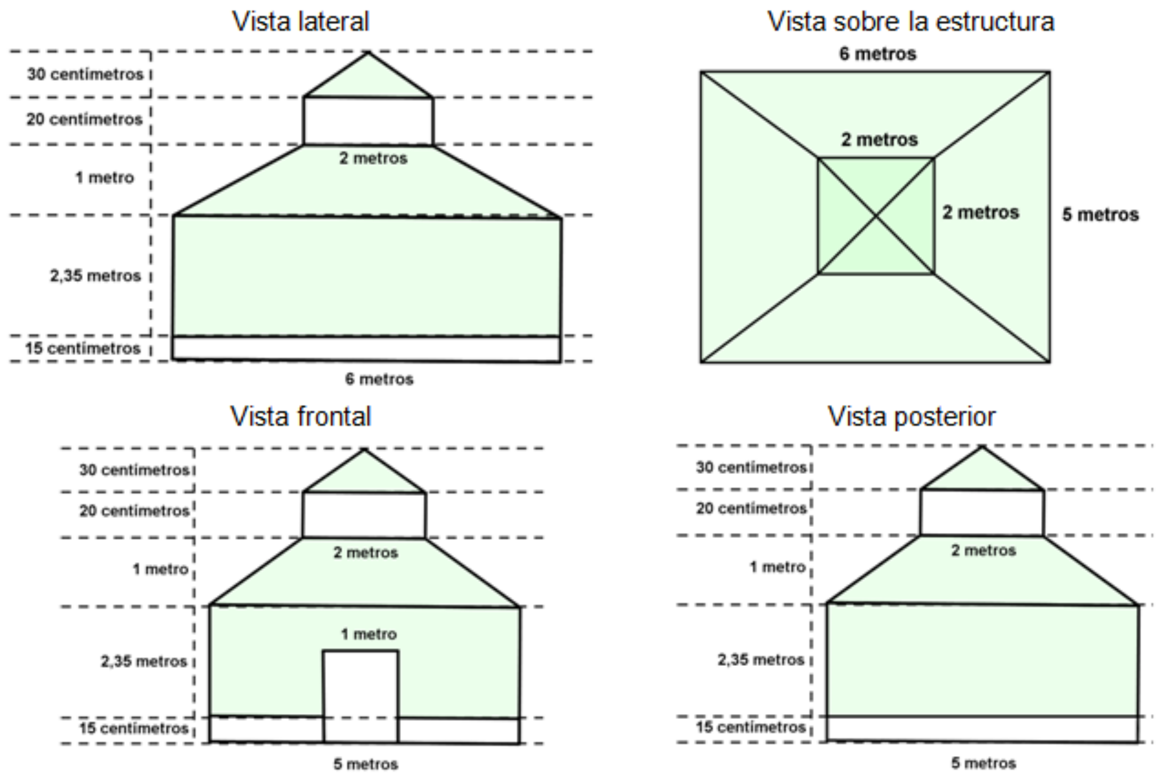
☺ “Don Carlos, es productor agrícola y quiere construir un invernadero para cultivo hidropónico donde se pueda cultivar lechugas, fresas, tomates, etc. El invernadero que diseñó tiene paredes rectangulares, con una entrada rectangular de 1 metro de ancho por 2,15 metros de alto y un techo formado por 4 trapecios isósceles, 4 respiraderos rectangulares y una parte superior en forma de pirámide de base cuadrada para la caída de agua.

Este tipo de invernaderos se construye formando una estructura de metal (tubo de dos pulgadas de diámetro) cubierta totalmente de un plástico grueso especial. En la siguiente imagen el color verde representa el plástico (debe estar a 15 cm del suelo para la ventilación):

**Vista en tres dimensiones**




**Vistas planas del invernadero**



Don Carlos ya construyó la estructura metálica y quiere saber cuántos metros cuadrados de plástico debe comprar para cubrir el invernadero. Hay que tomar en cuenta que el metro de plástico tiene 4 varas de ancho (3,35 metros aproximadamente), o sea, no se vende un metro cuadrado. Además el plástico se vende por kilogramo, por cada metro que se compra le pesan 3,35 metros cuadrados, lo cual pesa alrededor de medio kilogramo. **¿Cuántos metros cuadrados de plástico necesita comprar don Carlos y cuánto pagaría aproximadamente si el kilogramo de plástico cuesta 2640 colones?**"

## Trabajo estudiantil independiente

**Una posible estrategia de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes es descomponer el invernadero en figuras planas:**

- Paredes:
  - 2 rectángulos de 5 metros de largo por 2,35 metros de ancho (tomando en cuenta los 15 cm de ventilación). A uno de los rectángulos se le debe quitar el orificio donde irá la entrada, que es un rectángulo de 1 metro de ancho por 2,15 metros de alto, tomando en cuenta los 15cm de ventilación sería restarle un rectángulo con dimensiones de 1 por 2 metros.
  - 2 rectángulos de 6 metros de largo por 2,35 metros de ancho (tomando en cuenta los 15 cm de ventilación).
- Techo:
  - 2 trapecios isósceles de bases 5 metros y 2 metros y altura desconocida.
  - 2 trapecios isósceles de bases 6 metros y 2 metros y altura desconocida.
  - 4 triángulos isósceles de base 2 metros y altura desconocida.

**Para el cálculo del área de la superficie de las paredes, los estudiantes podrían calcular cada área por separado y sumarlas, o darse cuenta que hay rectángulos congruentes y emplear la propiedad asociativa:**

$$2\cdot(5\cdot 2{,}35) - 1\cdot 2 + 2\cdot(6\cdot 2{,}35) = 23{,}5 - 2 + 28{,}2 = 49{,}7\text{m}^2$$

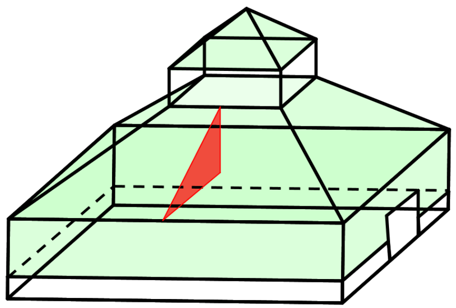
**Posible dificultad:** Puede ser que el estudiante no tome en cuenta la ventilación de 15cm o el espacio correspondiente a la entrada. También puede ser que tome en cuenta la parte de ventilación correspondiente a la entrada, esto causaría que restara en dos ocasiones esta superficie.

**Recomendación:** Es importante que el docente esté realizando preguntas correspondientes al planteamiento del problema, por ejemplo:

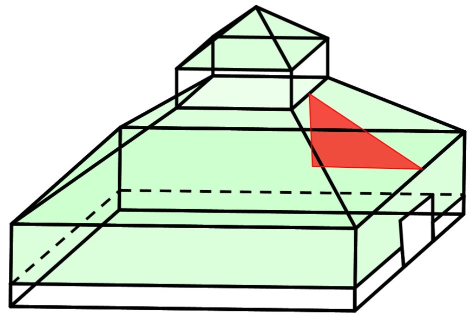
- **¿Se está tomando en cuenta que el plástico de las paredes debe estar a 15cm del suelo?**
- **¿Se está tomando en cuenta que la entrada no debe tener plástico?**

Para el cálculo del área de los trapecios que conforman el techo se necesita conocer sus respectivas alturas. Para esto se utilizará el Teorema de Pitágoras tomando como hipotenusa la altura del trapecio y de catetos la longitud correspondiente de acuerdo a las siguientes vistas planas.

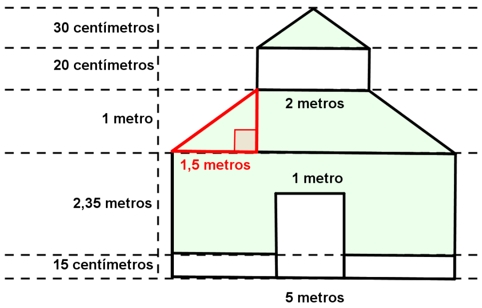
- Para los trapecios con bases de 6 y 2 metros se tiene el siguiente triángulo rectángulo:



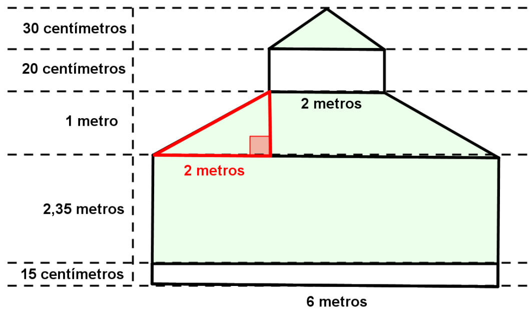
- Para los trapecios con bases de 5 y 2 metros se tiene el siguiente triángulo rectángulo:



**Posible dificultad:** El estudiante puede tener dificultad en visualizar estos triángulos rectángulos. Para esto es importante que el docente insista que deben analizar las vistas planas que proporciona el problema:




$$h^2 = (1,5)^2 + 1^2$$
$$h^2 = 3,25$$
$$h = \frac{\sqrt{13}}{2}$$




$$h^2 = 2^2 + 1^2$$
$$h^2 = 5$$
$$h = \sqrt{5}$$

**Posibles dificultades:** Es posible que el estudiante tenga dificultad en visualizar la altura de los trapecios (vista plana) y los confunda con la altura que alcanza la base menor del trapecio con la altura de la pared (1 metro). También se puede creer que los cuatro trapecios son congruentes, ya que tienen la base menor congruente.

**Recomendación:** El docente puede realizar las siguientes preguntas, por ejemplo:

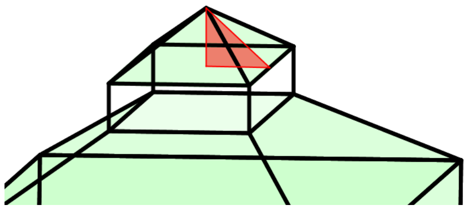
- **¿Cómo calcularon la altura de los trapecios?**
- **¿Hay alguna diferencia entre los cuatro trapecios?**
- **¿Hay trapecios congruentes?**

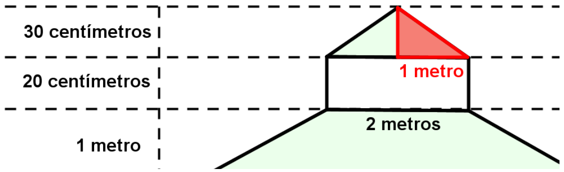
Si logran deducir que hay dos parejas de trapecios congruentes podrían calcular el área total de los trapecios que conforman parte del techo utilizando la propiedad asociativa:

$$2\cdot\frac{(2+6)\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}{2}+2\cdot\frac{(2+5)\cdot\sqrt{5}}{2}=4\sqrt{13}+7\sqrt{5}$$

**Aquí es importante puntualizar que se pueden utilizar dos tipos de representación para el área: la aproximación en decimales del número o la notación radical. Hay que enfatizar que al emplear la primera representación se pierde exactitud y podría faltar plástico.**

Ahora para calcular el área de la pirámide del techo, se tienen 4 triángulos isósceles de base 2 metros y se necesita encontrar la altura. Para esto se utilizará el Teorema de Pitágoras para el siguiente triángulo:






Por lo que la altura del triángulo isósceles se pude calcular:

$$h^2 = (0{,}30)^2 + 1^2 = 1{,}09$$

$$h = \frac{\sqrt{109}}{10}$$

Entonces el área del triángulo es:

$$\frac{2\cdot\frac{\sqrt{109}}{10}}{2}=\frac{\sqrt{109}}{10}$$

Tomando en cuenta que son 4 caras triangulares porque es una pirámide de base cuadrada entonces el área total es: $4 \cdot \frac{\sqrt{109}}{10} = \frac{2\sqrt{109}}{5}$

**Posible dificultad:** Es posible que el estudiante tenga dificultad en visualizar la altura de los triángulos (vista plana) y los confunda con la altura de la pirámide (30cm).

Ahora, sumando el área de las paredes y de las partes que componen el techo se tiene:

$$49,7 + 4\sqrt{13} + 7\sqrt{5} + \frac{2\sqrt{109}}{5} \approx 83,95$$

**Aquí es importante puntualizar que se están utilizando dos tipos de representación para los números. Por el tipo de contexto del problema es necesario recurrir a la aproximación en decimales del número ya que es más representativa que la notación radical.**

**Una pregunta generadora sería, ¿cuántos metros de plástico se deben comprar?**

De acuerdo al contexto no tiene mucho sentido solicitarle al vendedor 83,95 metros cuadrados de plástico. Como el plástico tiene un ancho fijo de 3,35 metros (4 varas) entonces se debe comprar la longitud entera de acuerdo a la cantidad de metros cuadrados que se necesitan; por lo que se deben comprar 26 metros de plástico para un área de 87,1 metros cuadrados.

**Una pregunta generadora sería, ¿Por qué no comprar 25 metros de plástico?**

Al calcular el área correspondiente al plástico se obtendrían 83,75 metros cuadrados, por lo que faltaría material. Además, en estos contextos es mejor que sobre material a que falte.

Ahora, como 3,35 metros cuadrados pesan aproximadamente medio kilogramo (de acuerdo a los datos del problema) entonces se ocupan alrededor de 87,1 ÷ 6,7 que es aproximadamente 13 kilogramos de plástico.

**Respuesta:** Don Carlos tendrá que pagar 34 320 colones en la compra del plástico.

<table>
<tr>
<th>Discusión interactiva y comunicativa</th>
<th>Clausura o cierre</th>
</tr>
<tr>
<td>

Los estudiantes exponen las diferentes estrategias implementadas y el docente les puede hacer las siguientes preguntas generadoras que orientan la fase de cierre o clausura:

- ¿Cómo encontró la medida de la altura de los triángulos que conforman la parte superior del techo? **Con esto se puede formalizar el concepto de apotema de la pirámide.**
- ¿Cómo calcularon el área de la parte superior del techo (forma de pirámide)? **Con esto se puede formalizar el concepto de área lateral de una pirámide.**
- ¿Cómo calcularon el área de las paredes del invernadero? **Con esto se puede formalizar el área lateral de un prisma.**

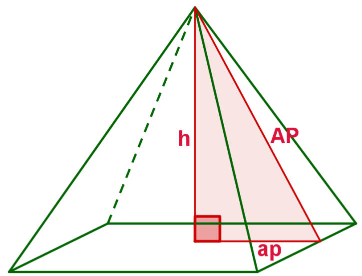
Lo escrito en color **azul** corresponde al enlace que el docente realiza con base en el trabajo desarrollado por el estudiante para posteriormente y de forma natural formalizar los conceptos.

</td>
<td>

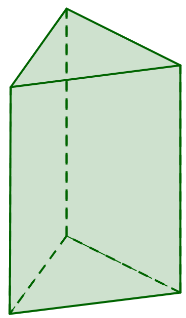
Se deben conectar los diversos desarrollos y estrategias empleadas por los estudiantes haciendo uso de las preguntas generadoras en la fase de *Discusión interactiva y comunicativa,* para que ellos puedan deducir los elementos teóricos que se intentan desarrollar:

1. Que para calcular la **apotema de la pirámide (AP)**, conociendo la **altura (h)** y la **apotema de la base (ap)**, se puede aplicar el **teorema de Pitágoras**:

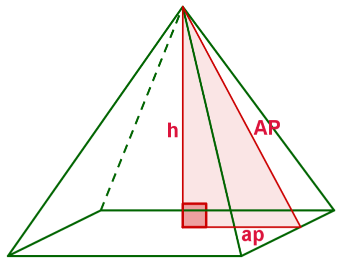
$$AP^2 = h^2 + ap^2$$




2. Que el área total de un poliedro es igual a la sumatoria de las áreas de cada polígono que lo conforman. **Caso particular**: el prisma y la pirámide:



$$\mathbf{A_T = A_L + 2 \cdot A_B}$$




$$\mathbf{A_T = A_L + A_B}$$

</td>
</tr>
</table>

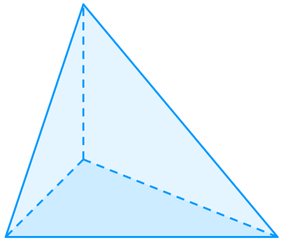
Observaciones:______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

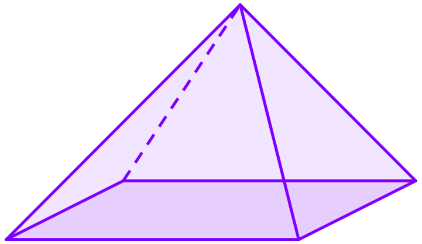
______________________________________________________________________________________

## II Etapa Movilización y aplicación del conocimiento. (Tiempo propuesto: 5 lecciones)*

1. Identifique y calcule la apotema de las siguientes pirámides rectas cuya base es un triángulo equilátero y un cuadrado respectivamente.



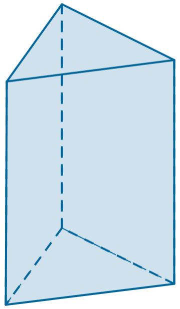
Lado de la base: $6\sqrt{3}$ cm
Apotema de la base: __________
Altura de la pirámide: 4 cm
Apotema de la pirámide: __________



Lado de la base: 10 cm
Apotema de la base: __________
Altura de la pirámide: 12 cm
Apotema de la pirámide: __________

2. Con los datos obtenidos en el ejercicio 1 calcule el área lateral y el área total de las anteriores pirámides rectas.

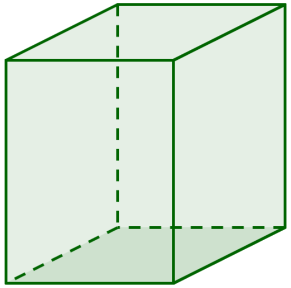
3. Calcule el área lateral y el área total de los siguientes prismas rectos de base regular.



Lado de la base: $6\sqrt{3}$ cm
Altura de prisma: 4 cm

Área lateral: __________

Área total: _________



Lado de la base: 5 cm
Altura de prisma: 10 cm

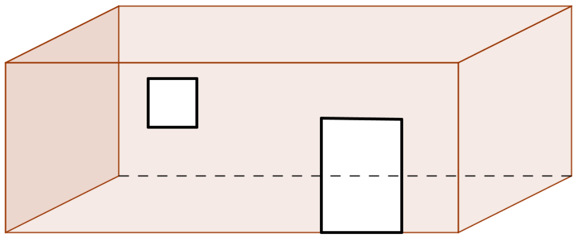
Área lateral: __________

Área total: _________

4. Resuelva los siguientes problemas:

***Reproducción:***

Juan quiere pintar su dormitorio (ver imagen representativa) que mide 4,5 metros de largo, 3 metros de ancho y 2,5 metros de altura. El cuarto tiene una puerta de forma rectangular de 2,15 m de alto por 0,75 metros de ancho y una ventana cuadrada de 50 cm de lado. Si un galón de pintura económica cubre 20 metros cuadrados, ¿Cuántos galones ocupará Juan para pintar las paredes de su cuarto?



***Conexión:***

*La Gran pirámide de Guiza* es la más antigua de las Siete maravillas del mundo y la única que aún perdura, además de ser la mayor de las pirámides de Egipto. El egiptólogo británico Sir William Matthew Flinders Petrie hizo el estudio más detallado realizado hasta el momento acerca del monumento, siendo sus dimensiones las siguientes:

- Altura original ≈ 146,61 m
- Altura actual = 136,86 m
- La base es aproximadamente cuadrada de lado promedio de 230,347 m (9068,8 pulgadas)

Con base a los datos anteriores:

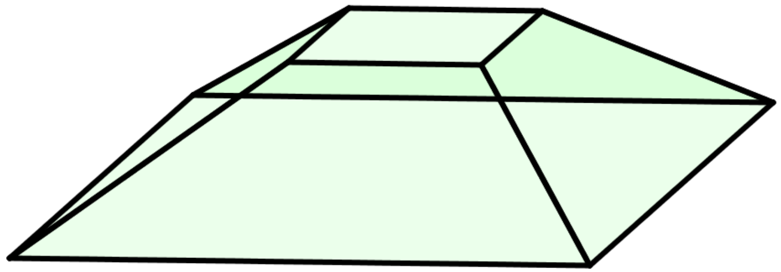
a) Encuentre una aproximación para el área de la superficie lateral que actualmente posee la *Gran pirámide de Guiza.*

b) ¿Qué porcentaje de área lateral ha perdido la *Gran pirámide de Guiza*?

La información de este problema se tomó de:
Gran Pirámide de Guiza. (2015, 3 de marzo). En *Wikipedia, la enciclopedia libre*. Recuperado el 09 de marzo de 2015 a las 9:00 de <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Gran_Pir%C3%A1mide_de_Guiza&oldid=80375585>

***Reflexión:***

Una pirámide truncada es el cuerpo geométrico que resulta al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base y separar la parte que contiene al vértice. Por ejemplo, la parte del techo del invernadero formada por trapecios isósceles es una pirámide truncada.



Tomando en cuenta lo desarrollado en el problema del invernadero, deduzca una fórmula para el cálculo del área lateral de la pirámide truncada de base cuadrada tomando en cuenta la altura *h* y la apotema de la base mayor *a* de la pirámide que la origina.

Observaciones:________________________________________________________________________________

*El tiempo propuesto fue tomado del documento *Integración de habilidades matemáticas en la acción de aula en secundaria (2014).*