

REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA



Solucionario Prueba Bachillerato Académico M11-0-2017.

Pregunta 1

Si el centro de la circunferencia C se ubica en el punto $(4, -3)$ y la medida de su diámetro es 8, entonces la ecuación de esa circunferencia corresponde a:

- A) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$
- B) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$
- C) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$
- D) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 64$

Solución

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

en donde el par ordenado (h, k) es el centro de la circunferencia y r representa la medida de su radio.

Por lo tanto, si $(4, -3)$ es el centro y el diámetro mide 8 y es el doble del radio, entonces $r = 4$, con esta información se puede escribir la ecuación de la circunferencia de la siguiente manera:

$$(x - 4)^2 + (y - -3)^2 = 4^2$$

Es decir:

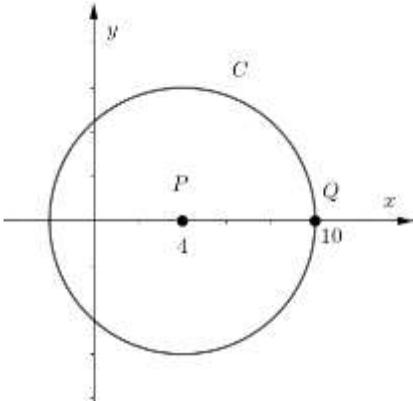
$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Respuesta:

Opción C) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Pregunta 2

Considere la siguiente representación gráfica de una circunferencia C de centro P :

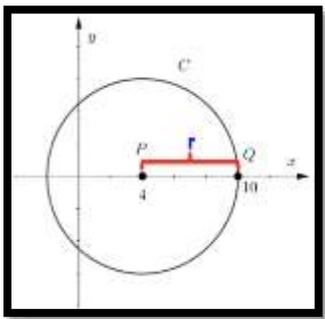


De acuerdo con la información anterior, la ecuación de la circunferencia C corresponde a:

- A) $(x - 4)^2 + y^2 = 36$
- B) $x^2 + (y - 4)^2 = 36$
- C) $(x - 4)^2 + y^2 = 100$
- D) $x^2 + (y - 4)^2 = 100$

Solución

En la figura se observa que el centro de la circunferencia llamada C es el punto P cuya coordenada es $(4, 0)$. Además, su radio es la distancia desde el punto P hasta el punto Q , que se encuentra a 6 unidades de distancia.



Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/Ky4UjpJ5LDs>

Observe que $10 - 4 = 6$, este último dato corresponde a la medida del radio, esto quiere decir que $r = 6$.

Si la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Dado que su centro es $P(4, 0)$ y su radio mide 6, se tiene que la ecuación de C es:

$$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 6^2$$

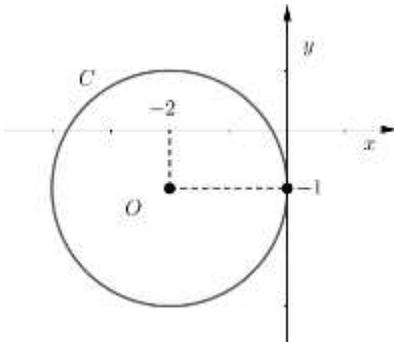
$$(x - 4)^2 + y^2 = 36$$

Respuesta: Opción A) $(x - 4)^2 + y^2 = 36$

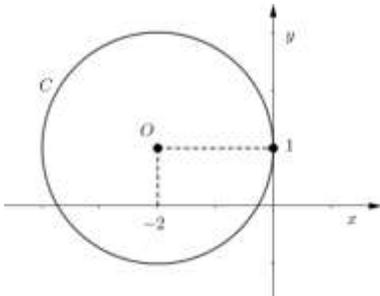
Pregunta 3

¿Cuál es la representación gráfica de la circunferencia C de centro O , dada por $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$?

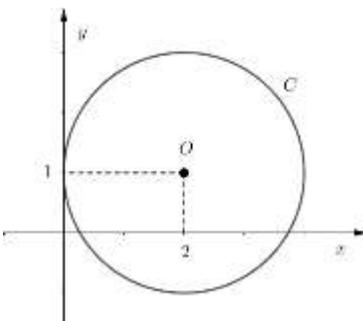
A)



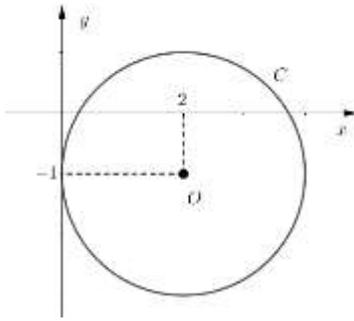
B)



C)



D)



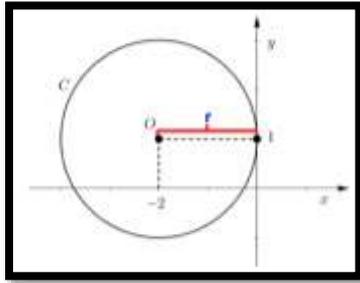
Solución

Si la ecuación de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, se sabe que el centro corresponde al par ordenado (h, k) y que r representa la longitud del radio.

Para el ejercicio que se está resolviendo la ecuación viene dada por $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$, entonces si se expresa la ecuación de la siguiente manera:

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

se puede establecer que las coordenadas del centro, representado por la letra O , son $(-2, 1)$, y su radio es $r = 2$. La única figura que tiene esas dos características es la representada en la opción B, como se muestra a continuación:

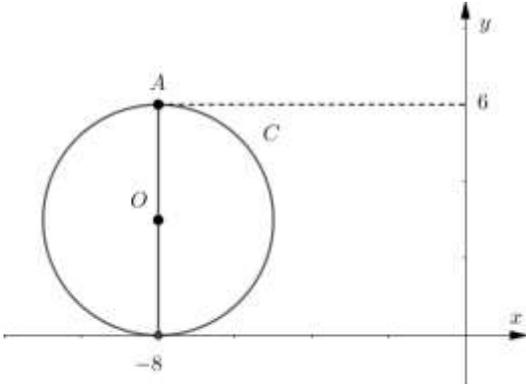


Respuesta:

Opción B)

Pregunta 4

Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O :



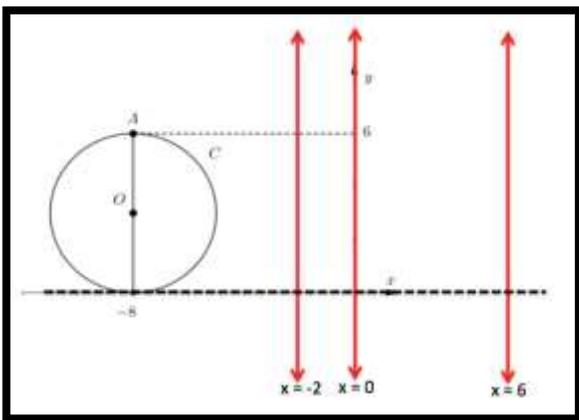
De acuerdo con la información anterior, la ecuación de una recta tangente a C es:

- A) $x = 0$
- B) $x = 6$
- C) $x = -2$
- D) $x = -11$

Solución

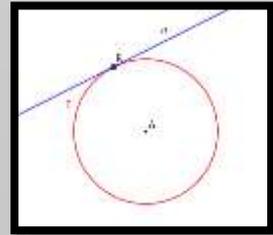
Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un único punto. Existen infinitas rectas tangentes a la circunferencia C .

Analicemos las opciones propuestas:

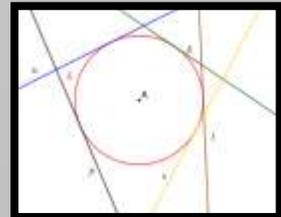


Recta tangente

La recta n y la circunferencia E , con centro A se cortan (o intersecan) en un único punto R , en este caso se dice que la recta es tangente a la circunferencia.



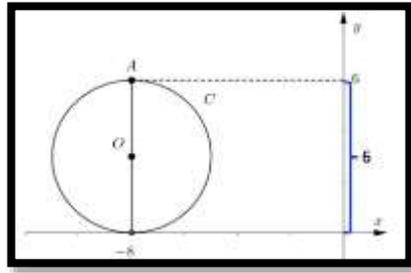
Una circunferencia puede tener un número infinito de rectas tangentes. A continuación se muestran cinco de ellas.



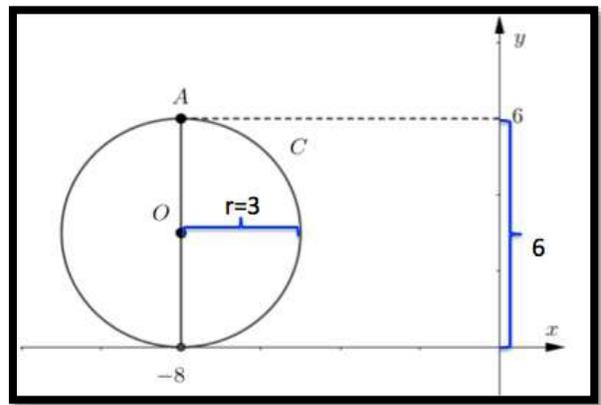
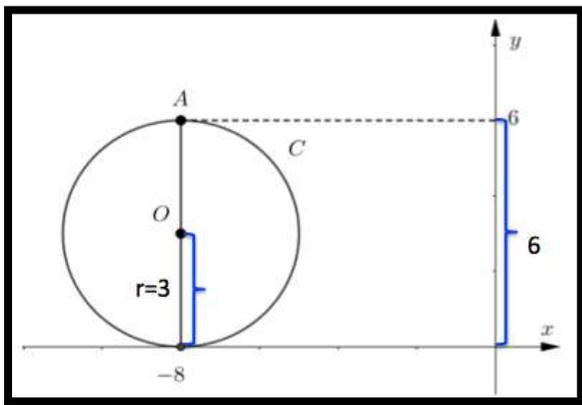
- La recta $x = 0$ es una vertical que pasa por el origen, coincide con el eje y . Esta recta no es tangente a C .
- La recta $x = 6$ es una vertical que pasa por $(6, 0)$. Esta recta no interseca C .
- La recta $x = -2$ es una vertical que pasa por $(-2, 0)$. Esta recta no interseca C .

Entonces, ¿por qué $x = -11$ es la respuesta correcta?

De la figura se deduce que el diámetro de la circunferencia mide 6, debido a que la distancia sobre el eje y esta representada con esa cantidad de unidades. También, se puede observar que la distancia desde $(-8, 0)$ hasta $(-8, 6)$ es de 6 unidades.

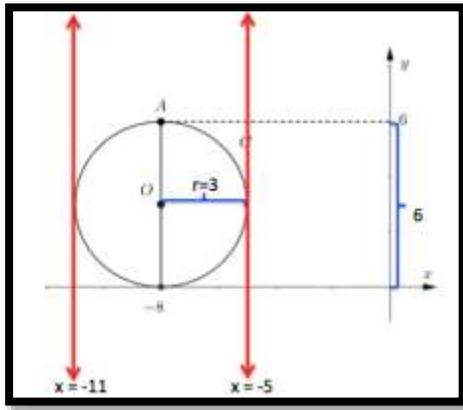


De la información anterior, se deduce que el radio de la circunferencia mide 3.



Dos rectas verticales que intersecan a la circunferencia C en un solo punto se encuentran (según la figura) a 3 unidades a la derecha o a 3 unidades a la izquierda de $x = -8$.

Esto es $x = -5$, o bien $x = -11$.



Respuesta:

Opción D) $x = -11$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/ZIpHv0sjInE>

Pregunta 5

Considere la siguiente información:

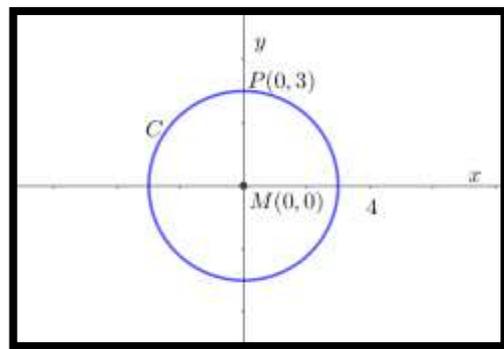
El centro de la circunferencia C , dada por $x^2 + y^2 = 9$, es el punto M . La recta " k " es tangente a C en $P(0, 3)$ y $A(4, n)$ es un punto que pertenece a " k ".

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es la medida de \overline{AM} ? (Si la respuesta es un número entero entonces hay que dejar la parte decimal en blanco)

R/

Solución

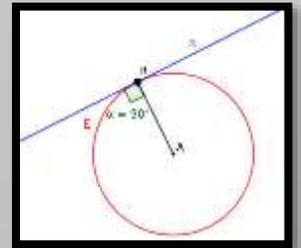
De acuerdo con el enunciado la ecuación de la circunferencia C con centro en el punto M es $x^2 + y^2 = 9$. Si se sabe que la ecuación de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y el centro corresponde al par ordenado (h, k) y que r representa la longitud del radio, entonces se puede establecer que la circunferencia está centrada en el punto $M(0, 0)$ y su radio \overline{MP} mide 3. Gráficamente se puede representar la situación de la siguiente manera:

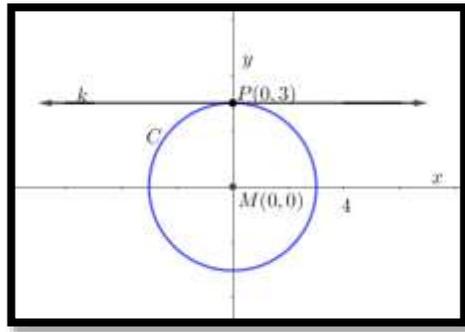


Además, se indica que la recta k es tangente a la circunferencia C en $(0, 3)$.

Relación entre radio y recta tangente a una circunferencia

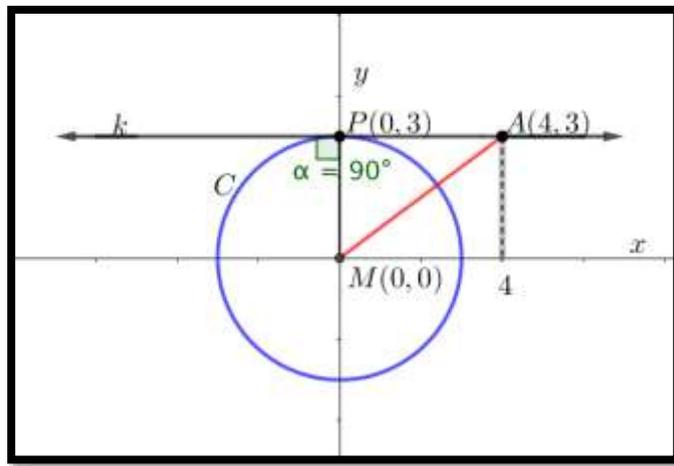
Si E es una circunferencia de centro A y n una recta tangente a E en el punto R , entonces, el radio \overline{AR} de la circunferencia es perpendicular a la recta n .





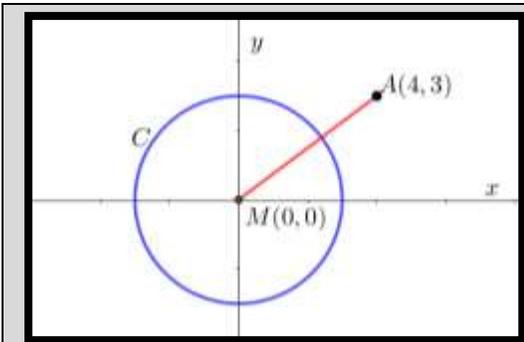
Después de tener el escenario claramente identificado, se coloca la información faltante:

Como la recta k es tangente a la circunferencia C en $(0, 3)$, entonces, es perpendicular al radio \overline{MP} en el punto de intersección. Esto permite afirmar que el punto $A(4, n)$ que pertenece a la recta k , tiene como valor 3 en la posición de n , debido a que la recta k es paralela al eje x y mantiene una distancia constante a él.



Ahora, se centrará la atención en obtener la distancia entre A a M, que corresponde al segmento señalado en la imagen con rojo, existen al menos dos estrategia de solución:

Primera estrategia:

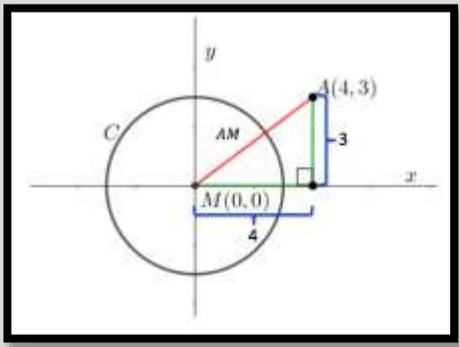


Se trabajará con el punto $M(0, 0)$ y $A(4, 3)$, al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 d(M, A) &= \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{16 + 9} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida del \overline{AM} es 5.

Segunda estrategia:



Se trabajará con el punto $M(0, 0)$ y $A(4, 3)$, esto permite construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos tiene longitud 3 y 4, como se muestra en la imagen. Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene que:

$$\begin{aligned}(AM)^2 &= (4)^2 + (3)^2 \\(AM)^2 &= 16 + 9 \\AM &= \sqrt{25} \\AM &= 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida del \overline{AM} es 5.

Respuesta:

R/

Pregunta 6

Considere las siguientes proposiciones referentes a la circunferencia C , dada por $(x - 3)^2 + y^2 = 8$:

- I. La recta dada por $x = 3$ es secante a C .
- II. La recta dada por $y = x + 1$ es tangente a C .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

A continuación se proponen dos soluciones para este ítem, una que hace énfasis en la representación gráfica y otra en procedimientos algebraicos. Es importante indicar que el estudiante no debe realizar ambas estrategias: gráfica y algebraica, sino aquella que considere de mayor facilidad.

Recordemos que la ecuación de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, donde el centro corresponde al par ordenado (h, k) y que representa la longitud del radio.

Si la circunferencia C viene dada por la ecuación $(x - 3)^2 + y^2 = 8$, también se puede expresar de la siguiente manera: $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{8})^2$, de aquí se puede extraer que tiene su centro en el punto $(3, 0)$ y su radio, se puede obtener después de calcular $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Por lo tanto, la circunferencia C interseca el eje "x" en los pares ordenados $(3 - 2.83, 0)$ y en $(3 + 2.83, 0)$, esto es, $(0.17, 0)$ y $(5,83, 0)$, como se ve en la figura siguiente:

Relación: recta, circunferencia y discriminante

Si $y = mx + b$ es la ecuación de una recta y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia, para determinar, algebraicamente, si la recta es tangente, secante o exterior a la circunferencia, se puede sustituir la y de la ecuación de la circunferencia por $mx + b$ y resolver la ecuación resultante:

$$(x - h)^2 + (mx + b - k)^2 = r^2$$

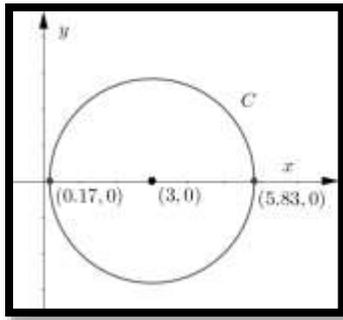
Esta es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es Δ . Se tiene que:

Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto la recta es exterior a la circunferencia.

Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene solo una solución real y por lo tanto la recta es tangente a la circunferencia.

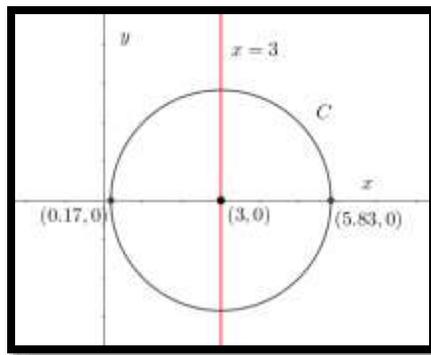
Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y por lo tanto la recta es secante a la circunferencia.

r



Ahora revisemos las proposiciones una a una.

- **Proposición I**, la recta $x = 3$ es secante a C . Gráficamente se puede resolver el ejercicio al trazar la recta indicada, entonces se puede verificar que esta corta a la circunferencia en dos puntos.



Otra forma de resolver el ejercicio es de manera algebraica, para esto se puede proceder como se muestra a continuación:

Se sustituye el valor de x por 3, en la ecuación de la circunferencia, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + y^2 &= 8 \\ (3 - 3)^2 + y^2 &= 8 \\ 0 + y^2 &= 8. \\ y^2 &= 8. \end{aligned}$$

La ecuación cuadrática $y^2 = 8$ posee dos soluciones debido a que $y = \mp\sqrt{8}$.

Por lo tanto, llegamos a la misma conclusión, existen dos intersecciones (hay dos soluciones para la ecuación que se resolvió producto de la sustitución), por lo tanto, la recta $x = 3$ es secante a la circunferencia.

Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

- **Proposición II**, la recta dada por $y = x + 1$ es tangente a C .

Se debe sustituir $y = x + 1$ en la ecuación de la circunferencia C :

$$(x - 3)^2 + y^2 = 8$$

$$(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 8$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2x + 1 = 8$$

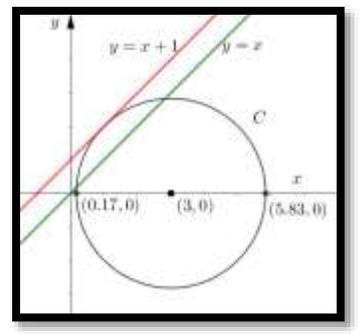
$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

Como el discriminante es igual a 0, esto indica que la ecuación posee solución única en \mathbb{R} y significa que la recta $y = x + 1$ interseca **solamente una vez** a dicha circunferencia, por lo tanto es una recta tangente.

Nota:

Para trazar $y = x + 1$, es necesario saber que $y = x$ pasa por el punto $(0, 0)$ y que con una traslación en el eje x de una unidad horizontalmente a la izquierda (hacia -1) se consigue graficar la recta que buscamos. Por tanto, bastará con hacer los siguientes trazos:



Al determinar la solución de la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x + 2 = 0$ la respuesta corresponde a $x = 1$.

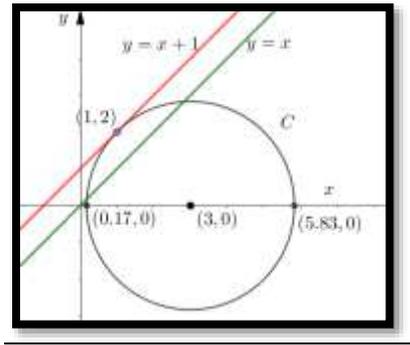
Para encontrar la intersección entre ambas figuras (recta y circunferencia), se puede sustituir $x = 1$ en

$$y = x + 1$$

$$y = 1 + 1$$

$$y = 2$$

Por lo tanto, la intersección de ambas figuras ocurre en el punto (x, y) que está formado por $(1, 2)$, como se puede ver en la figura:



Por lo tanto, la proposición II es verdadera.

Respuesta:

Opción A) Ambas

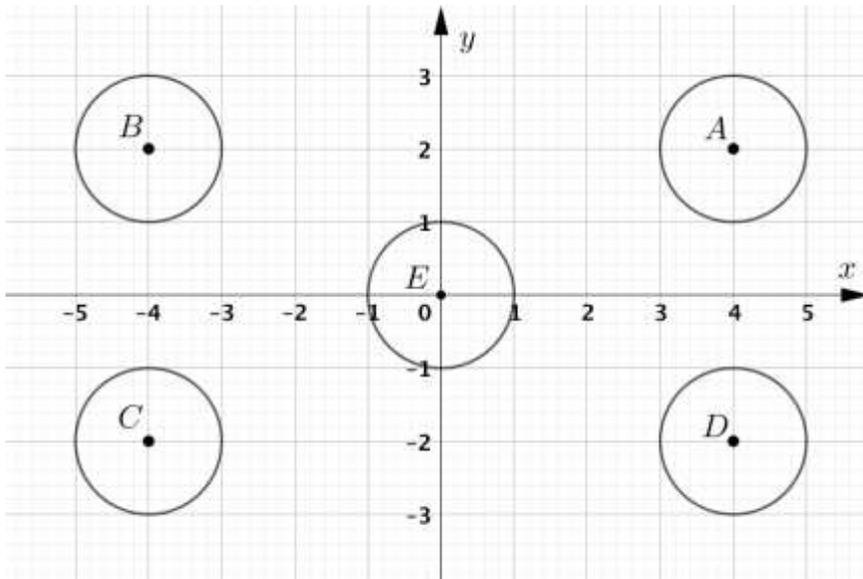
Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/eg8HOMgtUIY>

Considere la siguiente representación gráfica, referente a cinco circunferencias, cuya medida del radio es 1 y cuyos centros son $A(4, 2)$, $B(-4, 2)$, $C(-4, -2)$, $D(4, -2)$ y $E(0, 0)$, para responder los ítems 7 y 8:



Pregunta 7

Considere las siguientes proposiciones:

- I.** La circunferencia de centro B se puede obtener al trasladar 8 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) a la circunferencia de centro A .
- II.** La circunferencia de centro D se puede obtener al trasladar 4 unidades hacia la abajo (verticalmente) a la circunferencia de centro A .

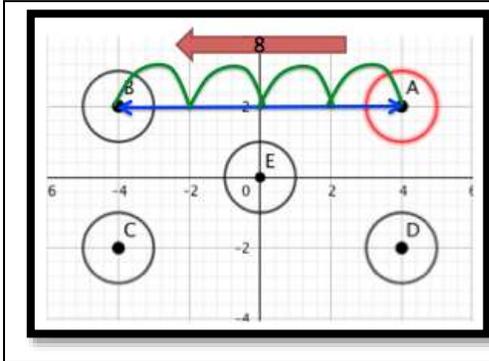
De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

Analicemos cada proposición:

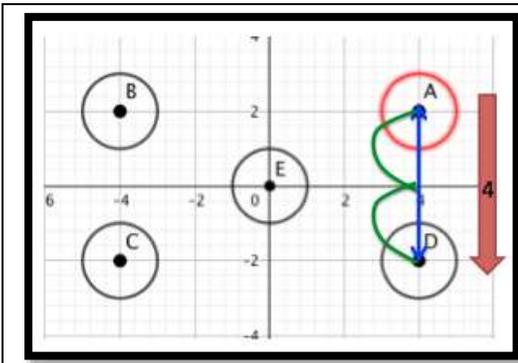
- **Proposición I.** La circunferencia de centro B se puede obtener al trasladar 8 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) a la circunferencia del centro A.



Las coordenadas del punto A son $(4, 2)$. Trasladar este punto 8 unidades a la izquierda significa **restar** 8 unidades a la abscisa (x) de este punto, o sea: $(4 - 8, 2)$, esto es, $(-4, 2)$, que corresponde a las coordenadas de B.

Por lo tanto, la I proposición es verdadera.

- **Proposición II.** La circunferencia de centro D se puede obtener al trasladar 4 unidades hacia abajo (verticalmente) a la circunferencia de centro A.



Las coordenadas del punto A son $(4, 2)$. Trasladar este punto 4 unidades hacia abajo, significa **restar** 4 unidades a la ordenada (y) de este punto, o sea $(4, 2 - 4)$, esto es $(4, -2)$, que corresponde a las coordenadas de D.

Por lo tanto, la II proposición es verdadera.

Respuesta:

Opción A) Ambas

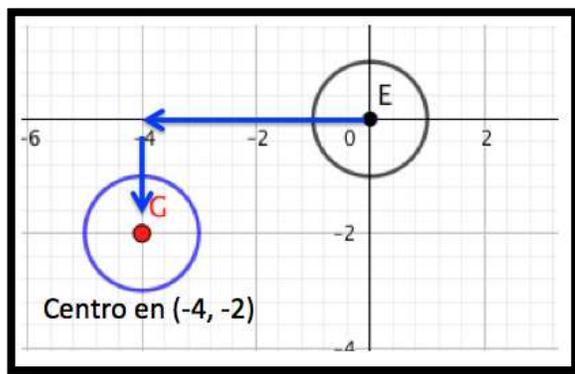
Pregunta 8

Si a la circunferencia de centro E se le aplica una traslación de 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y 2 unidades hacia abajo (verticalmente), entonces se obtiene la circunferencia cuya ecuación es:

- A) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$
- B) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$
- C) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$
- D) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Solución

Si realizamos las traslaciones indicadas, 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y 2 unidades hacia abajo (verticalmente) se tiene que:



Lo anterior, significa que:

- 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) corresponde a operar el punto origen $E(0, 0)$ y restar 4 unidades a la coordenada x como se presenta a continuación: $(0 - 4, 0)$ por lo tanto, se transformó en $(-4, 0)$.
- 2 unidades hacia abajo (verticalmente) corresponde a operar el punto $(-4, 0)$ y restar 2 unidades a la coordenada y como se presenta a continuación: $(-4, 0 - 2)$ por lo tanto, se transformó en $(-4, -2)$.

Por lo tanto, el centro se encuentra en $(-4, -2)$ y como se ha trasladado el mismo objeto, una circunferencia de radio igual a 1, entonces la ecuación corresponde a:

$$(x - -4)^2 + (y - -2)^2 = 1$$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

Respuesta:

Opción B) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/5HDMrvUtp4w>

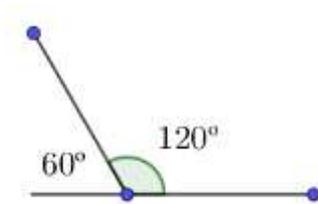
Pregunta 9

¿Cuál es el área de un polígono regular cuya longitud del lado es 12 y la medida de cada ángulo interno es 120° ?

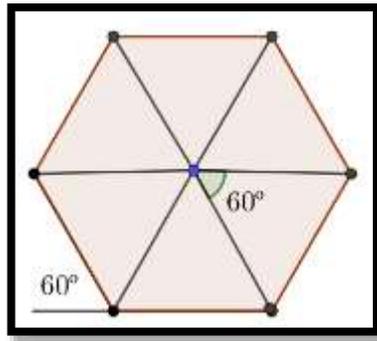
- A) 36
- B) 72
- C) $216\sqrt{3}$
- D) $423\sqrt{3}$

Solución.

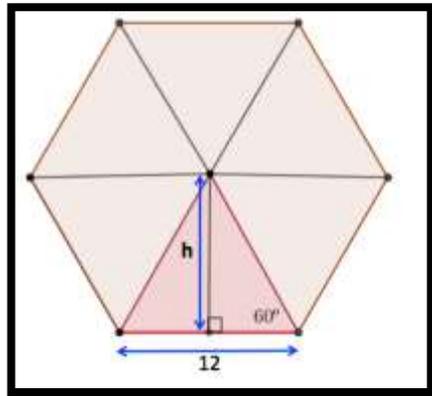
Si la medida del ángulo interno de dicho polígono es 120° , significa que el ángulo externo tiene medida 60° (pues es su suplemento):



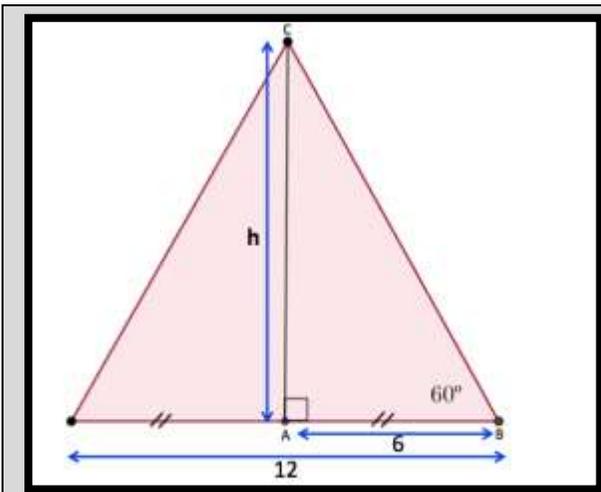
Esto implica que el ángulo central mide igual: 60° (ángulo central y ángulo externo son congruentes). El número de lados de este polígono regular se puede calcular al operar $360 : 60 = 6$, por lo tanto es un hexágono regular.



Como el hexágono regular está compuesto por seis triángulos equiláteros, se puede emplear la siguiente estrategia, calcular el área de uno de los triángulos equiláteros y luego multiplicar por seis. Para esto se necesita conocer de uno de los triángulos equiláteros, su base y altura.



Como se aprecia en la imagen la base mide 12 y se desconoce la altura. Para hallar la altura se empleará el siguiente procedimiento:



Debido a que se está trabajando con un triángulo equilátero, se puede deducir que la altura divide en partes iguales a la base, por lo tanto $AB = 6$.

Empleando el ángulo de 60° y la razón trigonométrica tangente (que relaciona el cateto opuesto con el adyacente) se puede establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \frac{h}{6} \\ \tan 60^\circ \times 6 &= h \\ 6\sqrt{3} &= h\end{aligned}$$

El ítem solicita el área del hexágono que está conformado por seis triángulos equiláteros, por lo tanto, se puede establecer el siguiente procedimiento para hallar esa información:

$$A_{\text{Hexágono}} = 6 \times A_{\text{Triángulo equilátero}}$$

$$A_{\text{Hexágono}} = 6 \times \left(\frac{b \times h}{2} \right)$$

$$A_{\text{Hexágono}} = 6 \times \left(\frac{12 \times 6\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A_{\text{Hexágono}} = 216\sqrt{3} \approx 374,12$$

Respuesta: Opción C) $216\sqrt{3}$

Videos de ayuda

Puede complementar su estudio con videos explicativos accediendo al siguiente enlace:

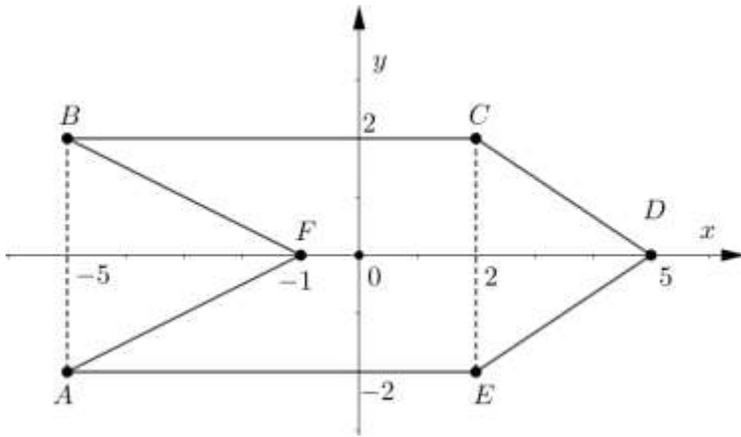


<https://youtu.be/DQ3KwWAmZl8>



<https://youtu.be/cMnCNdDMIPs>

Considere la siguiente representación gráfica para responder los ítems 11 y 12:



Pregunta 11

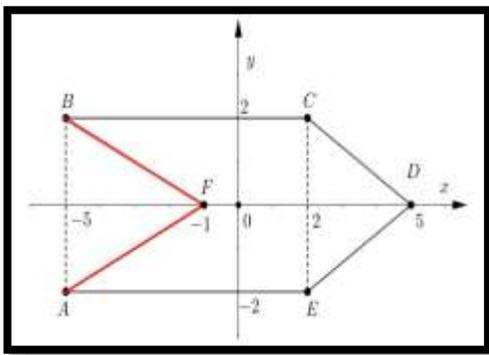
¿Cuál es el perímetro del polígono $AFBCDE$?

- A) $2\sqrt{5} + \sqrt{13} + 7$
- B) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 14$
- C) $4\sqrt{10} + 2\sqrt{13} + 6$
- D) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 14$

Solución

Para obtener el perímetro del polígono $AFBCDE$, se requiere de la medida de cada uno de sus lados. Se puede proceder de la siguiente manera:

Medida de \overline{BF} y \overline{AF}



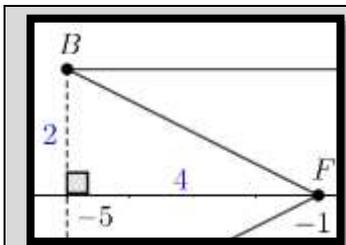
Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



https://youtu.be/wTODJ_7pX2U

En el siguiente triángulo se puede deducir que un cateto mide 4 (pues es la distancia en el eje x desde -1 a -5), y el otro mide 2, pues es la ordenada del punto $B(0, 2)$.



Para obtener la medida de \overline{BF} se utiliza el Teorema de Pitágoras:

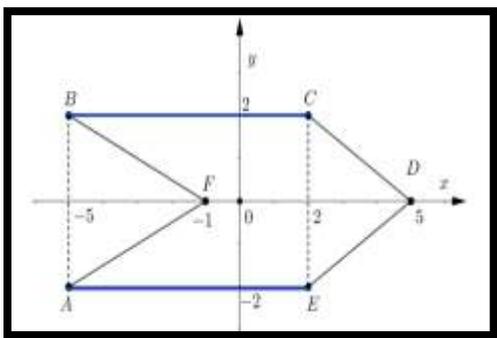
$$BF^2 = 4^2 + 2^2$$

$$BF = \sqrt{16 + 4}$$

$$BF = 2\sqrt{5}$$

De igual forma se procede para obtener la medida de \overline{AF} y se obtiene que $AF = 2\sqrt{5}$

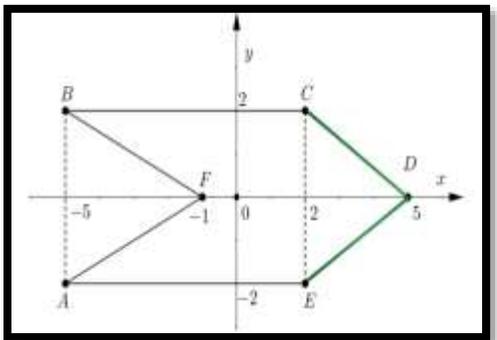
Medida de \overline{BC} y \overline{AE}



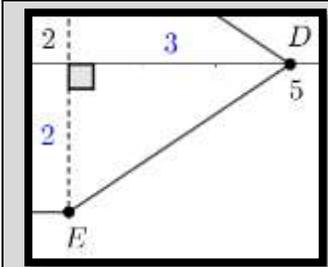
Las coordenadas de B son $(-5, 2)$ y las de C son $(2, 2)$. La distancia entre sus abscisas -5 y 2 , es de 7 unidades de distancia. Por lo tanto, $BC = 7$.

La medida de \overline{AE} se obtiene de la misma forma que la de \overline{BC} , debido a que son congruentes, por lo tanto, $AE = 7$.

Medida de \overline{CD} y \overline{DE}



En el siguiente triángulo se puede deducir que un cateto mide 3 (pues es la distancia en el eje x desde 2 a 5) y el otro mide 2, pues es la ordenada del punto $E(2, -2)$.



Para obtener la medida de \overline{DE} se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$DE^2 = 3^2 + 2^2$$

$$DE = \sqrt{9 + 4}$$

$$DE = \sqrt{13}$$

De igual forma se procede para obtener la medida de \overline{CD} y la respuesta corresponde a $CD = \sqrt{13}$.

Entonces el perímetro del polígono $AFBCDE$ se obtiene al sumar la medida de cada uno de sus seis lados:

$$P_{AFBCDE} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 7 + 7 + \sqrt{13} + \sqrt{13}$$

$$P_{AFBCDE} = 4\sqrt{5} + 14 + 2\sqrt{13}$$

Respuesta: Opción D) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 14$

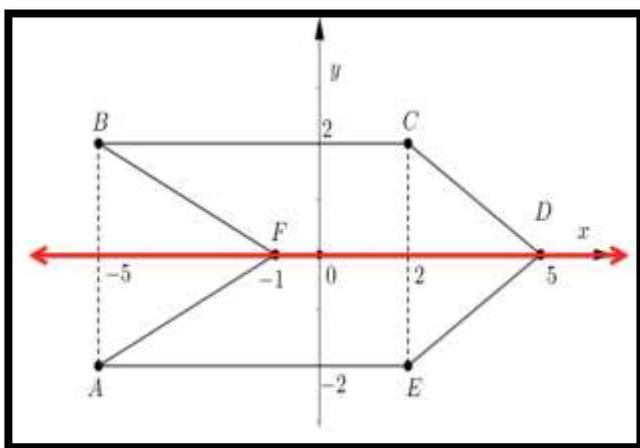
Pregunta 12

¿Cuál es el área del polígono $FBCD$?

- A) 12
- B) 13
- C) 14
- D) 20

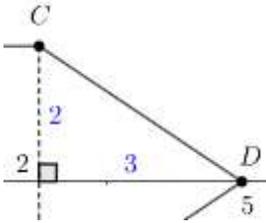
Solución.

Para obtener el área de este polígono se puede proceder de muchas formas. Una de ellas es la siguiente, primero se debe visualizar que la figura puede ser dividida por la mitad porque es simétrica respecto al eje x .



Se va a trabajar con la parte superior de la imagen, se puede distinguir un triángulo y un trapecio. Entonces, se puede calcular el área de ambas figuras y luego sumarlas.

El área del triángulo:



En el caso de este triángulo rectángulo, su área se obtiene así:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot 2}{2}$$

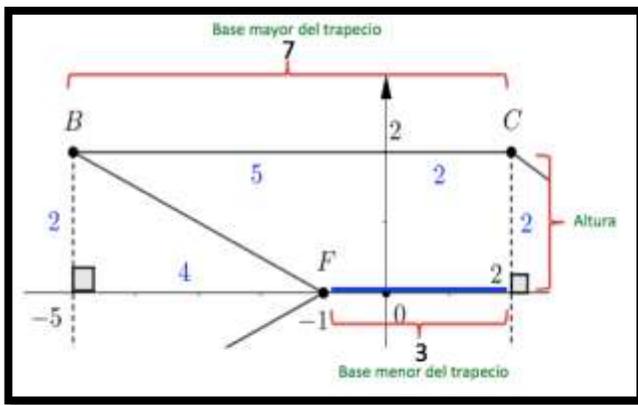
$$A = 3$$

El área del trapecio:

En el caso del trapecio, su área se obtiene así:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Las bases del trapecio miden 7 y 3, según se deduce de la figura siguiente:



Por lo tanto, su área se obtiene así:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{(7 + 3) \cdot 2}{2}$$

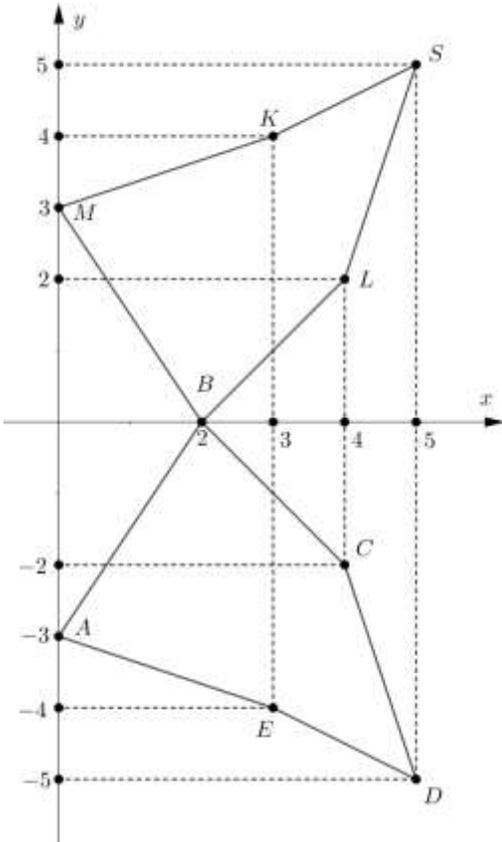
$$A = 10$$

Por lo tanto, el área del polígono *FBCD* es:

$$A_{FBCD} = 3 + 10 = 13$$

Respuesta: Opción B) 13

Considere la siguiente representación gráfica para responder los ítems 13, 14 y 15:



Pregunta 13

Considere las siguientes proposiciones:

- I. El punto L es homólogo con el punto $(-2, 4)$, con respecto al eje " x ".
- II. Los polígonos $MBLSK$ y $ABCDE$ presentan simetría axial, con respecto al eje " y ".

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

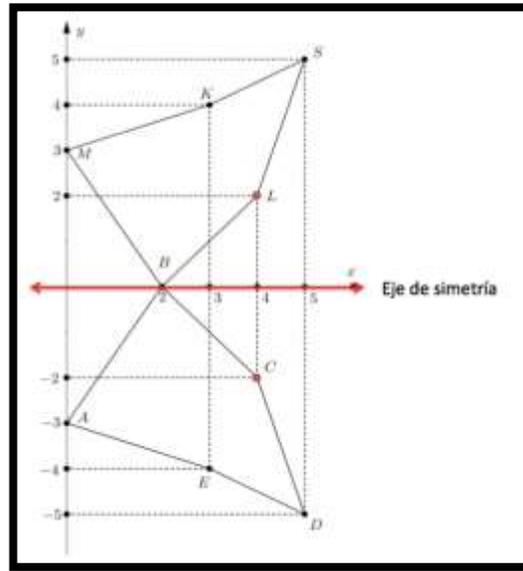
- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

A continuación procederemos con el análisis de cada proposición.

- **Proposición I.** El punto L es homólogo con el punto $(-2, 4)$, con respecto al eje " x ".

La figura presenta un eje de simetría en el eje x .

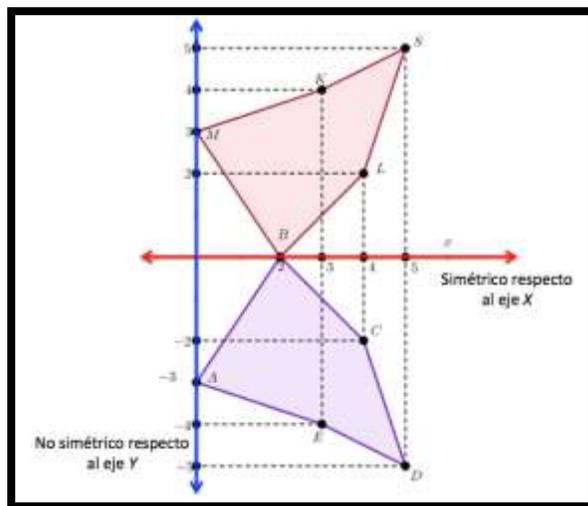


Por lo tanto, el punto homólogo a L es el punto C , cuyas coordenadas son $(4, -2)$. La proposición indica que el punto homólogo se encuentra en $(-2, 4)$, el orden de las coordenadas es incorrecta.

Por lo tanto, la I proposición es falsa.

- **Proposición II.** Los polígonos $MBLSK$ y $ABCDE$ presentan simetría axial, con respecto al eje " y ".

Al identificar los polígonos en la imagen, se puede determinar que la simetría axial que presentan es respecto al eje " x " y no respecto al eje " y " como señala el enunciado:



Se puede observar que las coordenadas de los vértices del polígono $MBSLK$ son $M(0, 3), B(2, 0), L(4, 2), S(5, 5)$ y $K(3, 4)$.

Si se hace una reflexión con respecto al eje y , se obtienen los puntos $M'(0, 3), B'(-2, 0), L'(-4, 2), S'(-5, 5)$ y $K'(-3, 4)$ y estos no corresponden con los puntos del polígono $ABCDE$ que vienen dadas por: $A(0, -3), B(2, 0), C(4, -2), D(5, -5)$ y $E(3, -4)$.

Por lo tanto, la II proposición es falsa.

Respuesta: Opción B) Ninguna.

Pregunta 14

El ángulo homólogo con $\sphericalangle BLS$, con respecto al eje " x " es:

A) $\sphericalangle ABC$

B) $\sphericalangle LSK$

C) $\sphericalangle BCD$

D) $\sphericalangle MKS$

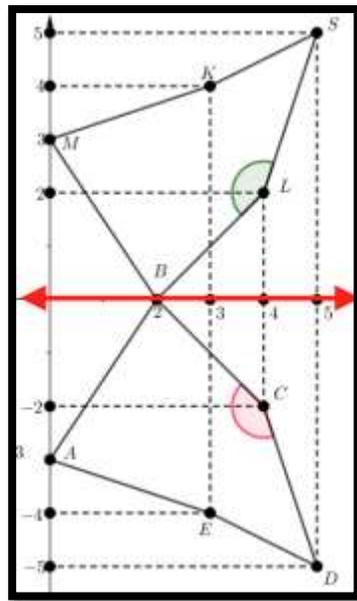
Solución

Al ubicar el ángulo $\sphericalangle BLS$ en la imagen, es rápidamente identificable su ángulo homólogo con respecto al eje " x " y corresponde al $\sphericalangle BCD$.

Nota:

Si se efectúa una reflexión de los puntos $B(2, 0), L(4, 2)$ y $S(5, 5)$ con respecto al eje x , sus imágenes son $(2, 0), (4, -2)$ y $(5, -5)$ las cuales corresponden a las coordenadas de los puntos B, C y D .

Por lo tanto el ángulo homólogo al $\sphericalangle BLS$ es el $\sphericalangle BCD$.



Respuesta: Opción C) $\sphericalangle BCD$

Pregunta 15

Considere las siguientes proposiciones:

- I. El punto homólogo de A es K , con respecto al eje " x ".
- II. El segmento homólogo de \overline{ED} es \overline{KS} , con respecto al eje " x ".

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

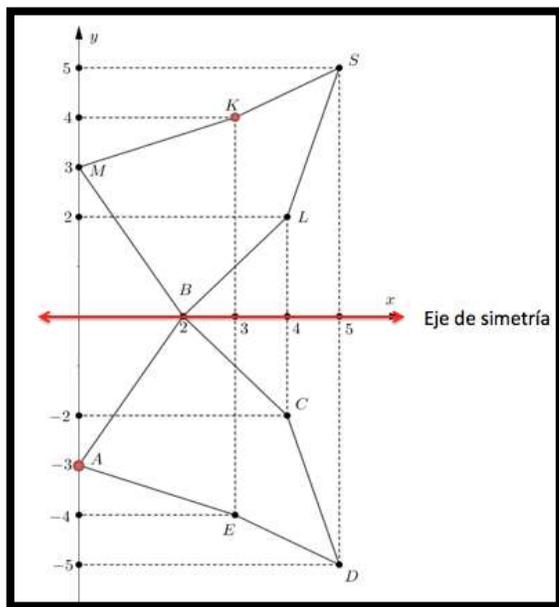
- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

A continuación procederemos con el análisis de cada proposición.

- **Proposición I.** El punto homólogo de A es K , con respecto al eje " x ".

Observe la siguiente imagen:

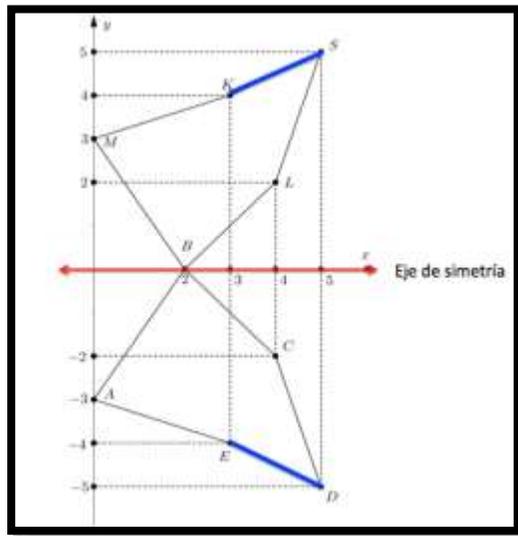


Las coordenadas de A son $(0, -3)$. El homólogo de A , con respecto al eje x tiene coordenadas $(0, 3)$, las cuales no corresponden a las coordenadas del punto $K(3, 4)$.

Por lo tanto, la I proposición es falsa.

- **Proposición II.** El segmento homólogo de \overline{ED} es \overline{KS} , con respecto al eje "x".

Observe la siguiente imagen:

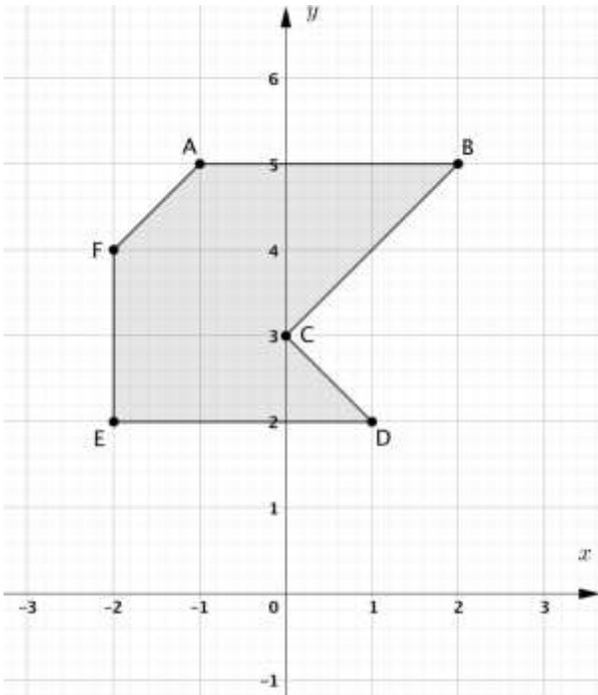


Las coordenadas de E son $(3, -4)$, y las de D son $(5, -5)$. Sus homólogos respecto al eje x son los puntos cuyas coordenadas, respectivamente son $(3, 4)$ y $(5, 5)$, que corresponden efectivamente a los puntos K y S . Se deduce entonces que el segmento homólogo de \overline{ED} con respecto al eje x es el \overline{KS} .

Por lo tanto, la II proposición es verdadera.

Respuesta: Opción D) Solo la II.

Considere la siguiente representación gráfica para responder a los ítems 16 y 17:



Cada representa un cuadrado de lado una unidad.

Pregunta 16

Al reflejar el polígono $ABCDEF$, con respecto a la recta dada por $x = y$, se obtiene el polígono $A'B'C'D'E'F'$. Entonces el punto F' corresponde a

- A) $(2, -4)$
- B) $(-2, 4)$
- C) $(4, -2)$
- D) $(-4, 2)$

Solución

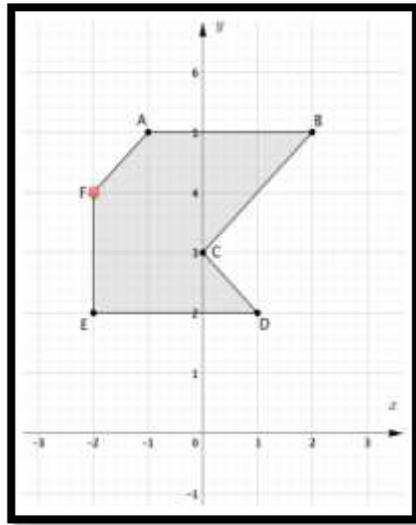
Las coordenadas del punto F son $(-2, 4)$.

Video de ayuda

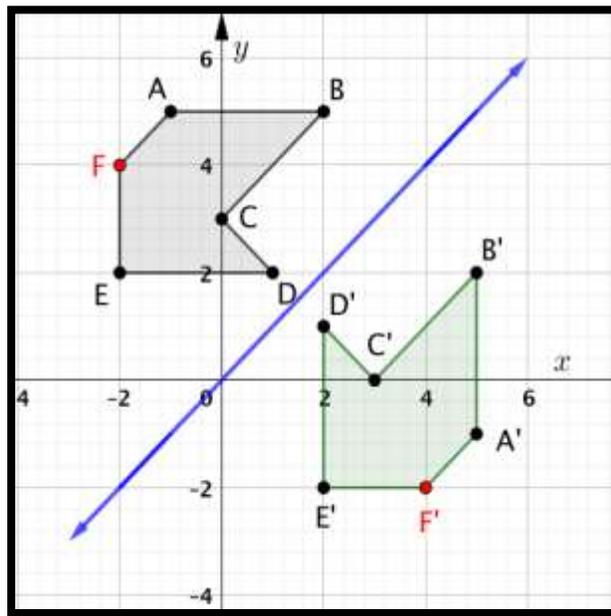
Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/gmwcmmfkcPo>



Al hacer una reflexión con respecto a la recta $x = y$, su imagen es el punto $F'(4, -2)$, pues sus coordenadas se “intercambian”. Como se puede visualizar en la siguiente imagen:



Respuesta: Opción C) $(4, -2)$

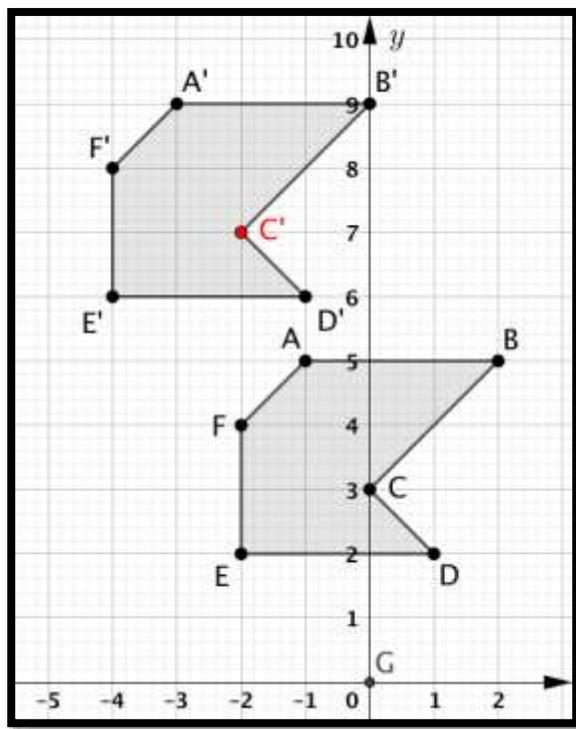
Pregunta 17

Si al trasladar el polígono $ABCDEF$, dos unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y cuatro unidades hacia arriba (verticalmente), se obtiene el polígono $A''B''C''D''E''F''$, entonces, ¿cuáles son las coordenadas del punto C'' ?

- A) $(2, 7)$
- B) $(2, -1)$
- C) $(-2, 7)$
- D) $(-2, -1)$

Solución

Trasladar el polígono $ABCDEF$ dos unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y cuatro unidades hacia arriba (verticalmente), implica restar dos unidades a cada una de las abscisas (x) y sumar cuatro unidades a cada de las ordenadas (y), de las coordenadas de sus vértices. En la figura se puede ver dicha transformación:

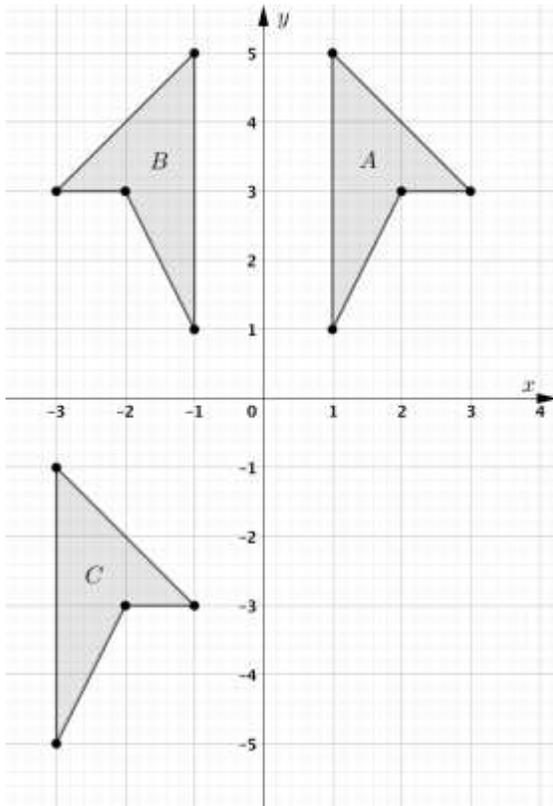


Esto significa que la imagen del punto $C(0, 3)$ es $C''(0 - 2, 3 + 4)$, o sea, $C''(-2, 7)$

Respuesta: Opción C) $(-2, 7)$

Pregunta 18

Considere la siguiente representación gráfica:



Cada \square representa un cuadrado de lado una unidad.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La figura B se puede obtener al aplicarle una homotecia de razón $K = -1$ a la figura A .
- II. La figura C se puede obtener al aplicarle una rotación de 180° , con centro en el origen, a la figura A .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

Para resolver el ítem se debe verificar cada una de las proposiciones:

Proposición I.

La figura B se puede obtener al aplicarle una homotecia de razón $K = -1$ a la figura A.

Considere los vértices de la figura A: $R(1, 1)$, $S(1, 5)$, $T(3, 3)$ y $U(2, 3)$. Si se aplica una homotecia de centro en el origen y razón $k = -1$ los puntos que se obtienen son:

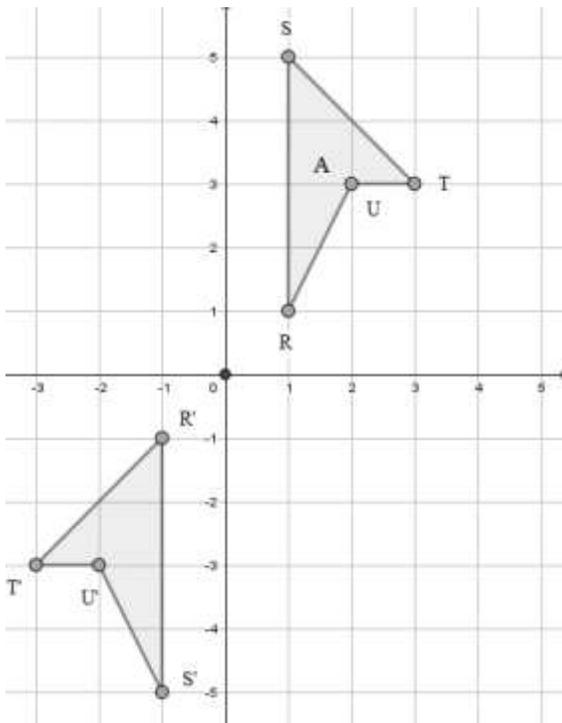
$$R'(-1 \cdot 1, -1 \cdot 1) = R'(-1, -1)$$

$$S'(-1 \cdot 1, -1 \cdot 5) = S'(-1, -5)$$

$$T'(-1 \cdot 3, -1 \cdot 3) = T'(-3, -3)$$

$$U'(-1 \cdot 2, -1 \cdot 3) = U'(-2, -3)$$

Por tanto, se obtiene la figura



Observe que la figura B corresponde a la imagen de una reflexión de la figura A con respecto al eje y. Esta transformación se puede ver en la figura siguiente:

Homotecias

Teorema

Si H es una homotecia de centro O (0, 0) y razón k entonces el homólogo de $P(a, b)$ es $P'(ka, kb)$; es decir

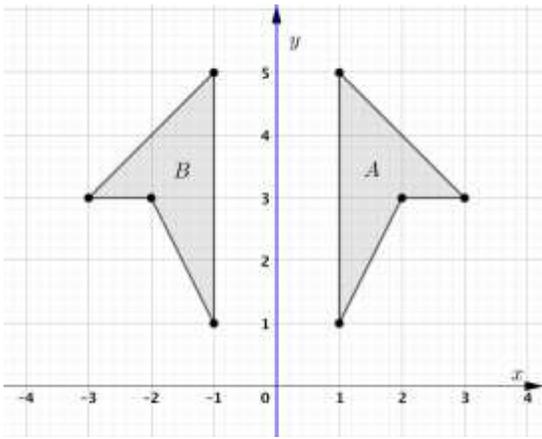
$$H(a, b) = (ka, kb)$$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/0IB3gf2wWNI>



La proposición I es falsa.

Proposición II.

La figura C se puede obtener al aplicarle una rotación de 180° , con centro en el origen, a la figura A.

Considere los vértices de la figura A:

R (1 , 1), S(1 , 5), T(3 , 3) y U(2 , 3). Si se aplica una rotación de 180° con centro en el origen

$$R'(-1, -1)$$

$$S'(-1, -5)$$

$$T'(-3, -3)$$

$$U' (-2, -3)$$

Por tanto, se obtiene la figura

Rotaciones

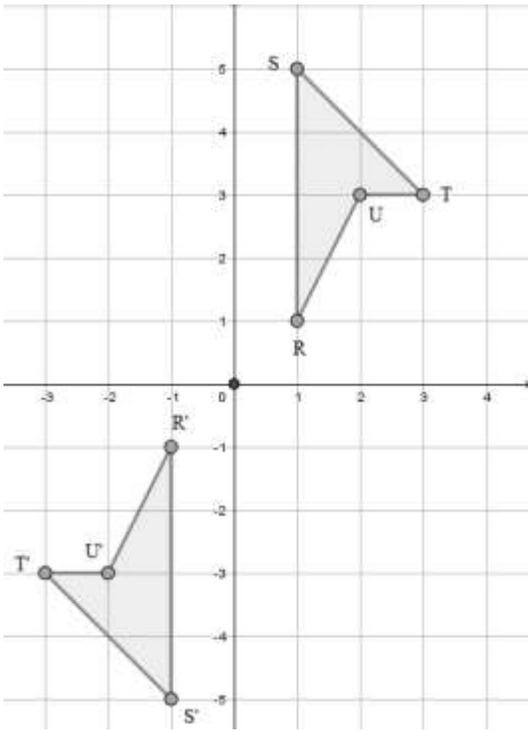
Homólogo bajo una rotación

Si R es una rotación con centro en el origen de coordenadas O (0, 0) y amplitud θ , entonces el homólogo de P(x, y) es

$$R(P(x, y)) = P'((\cos\theta)x - (\sin\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$$

Si rotamos el punto P(x, y) con respecto al origen (0, 0) en un ángulo de giro de 90° , 180° , 270° o 360° , las coordenadas de los puntos obtenidos están dados en la siguiente tabla:

Punto	90°	180°	270°	360°
P(x, y)	P'(-y, x)	P'(-x, -y)	P'(y, -x)	P'(x, y)



Observe que la figura C se puede obtener al aplicarle una traslación de 6 unidades hacia abajo (verticalmente) y 4 unidades a la izquierda (horizontalmente) a la figura A . Por lo tanto, la proposición II es falsa.

Respuesta: Opción B) Ninguna.

Video de ayuda

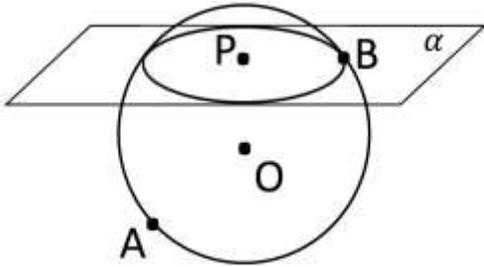
Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/gmwcmfkcPo>

Considere la siguiente información para responder a los ítems 19 y 20:

En la siguiente figura se representa una esfera de centro O intersecada por un plano α . El punto B pertenece a la intersección de ese plano y la superficie de la esfera, y el punto P corresponde al centro de la sección plana generada por esa intersección:



$$OP = 10$$

$$OA = 26$$

$$A - O - B$$

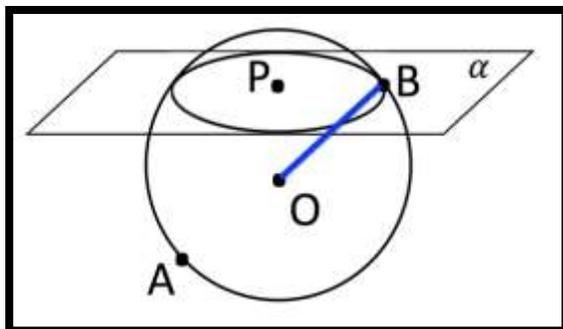
Pregunta 19

Un radio de la esfera corresponde al segmento

- A) \overline{AB}
- B) \overline{OB}
- C) \overline{PB}
- D) \overline{PO}

Solución

Como el punto B pertenece a la superficie de la esfera y O es el centro de esta, entonces \overline{OB} corresponde a uno de los radios.



Respuesta: Opción B) \overline{OB}

Videos de ayuda

Puede complementar su estudio con videos explicativos accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/xpUr4aB3Nyg>



https://youtu.be/tNvvEJU_mH0

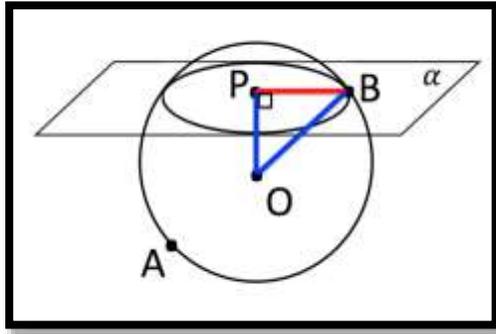
Pregunta 20

¿Cuál es la medida de \overline{PB} ? (si la medida es un número entero entonces no hay que rellenar los campos que corresponden a la parte decimal)

R/ ,

Solución

Se debe recordar que cualquier segmento que va desde el centro O de la esfera, hasta cualquier punto de la superficie de ella es un radio y que todos los radios de la esfera poseen la misma longitud.



Por lo tanto, como \overline{OB} es un radio y se indica que $OA = 26$ y que este segmento es un radio también, entonces, la hipotenusa \overline{OB} del ΔOPB mide 26. Además, se indica que $OP = 10$ y este segmento corresponde a uno de sus catetos.

Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$OB^2 = OP^2 + PB^2$$

$$26^2 = 10^2 + PB^2$$

$$PB = \sqrt{676 - 100} = 24$$

Por lo tanto, la medida de $\overline{PB} = 24$.

R/ 24

Respuesta:

Pregunta 22

Considere la siguiente información:

La medida de la altura de un cilindro recto es 20 cm y la medida del radio de sus bases es 8 cm . A ese cilindro se le va a realizar un corte con un plano paralelo a sus bases, de tal modo que se obtengan dos cilindros de igual altura.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. La medida de la altura de cada uno de los cilindros luego del corte es de 10 cm .

II. La medida del radio de las bases de los cilindros luego del corte es de 4 cm .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

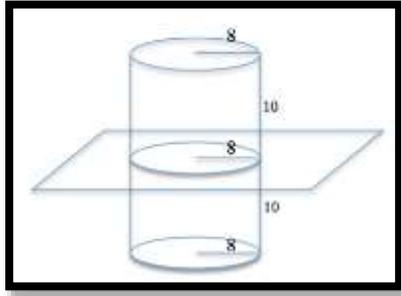
- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

A continuación analizaremos cada una de las proposiciones.

- **Proposición I.** La medida de la altura de cada uno de los cilindros luego del corte es de 10 cm.

Procediendo como indica el enunciado se obtiene una figura como la siguiente:



De la representación se deduce que la medida de la altura de cada uno de los cilindros luego del corte es 10 cm.

Por lo tanto, la I proposición es verdadera.

- **Proposición II.** La medida del radio de las bases de los cilindros luego del corte es de 4 cm.

La medida del radio de cada uno de los cilindros después de cada corte sigue siendo 8 cm, el ancho (grosor) de los cilindros no es afectado por el corte realizado con el plano.

Por lo tanto, la II proposición es falsa.

Respuesta: Opción C) Solo la I

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/QfbNQghzIDk>

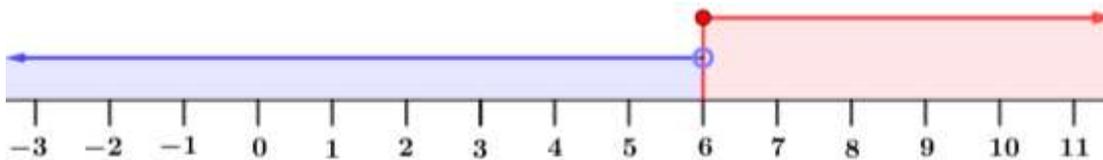
Pregunta 23

Sea M el dominio de una función, con $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 6\}$. Si \mathbb{R} es el conjunto universo, entonces el complemento de M corresponde al intervalo

- A) $]-\infty, 6[$
- B) $]-\infty, 6]$
- C) $]6, +\infty[$
- D) $[6, +\infty[$

Solución.

Al representar el conjunto M graficamente se observa claramente que M contiene los números reales menores que 6 (parte azul), entonces el complemento contiene los números reales mayores o iguales que 6 (parte roja), lo que corresponde al intervalo $[6, +\infty[$.



Respuesta: Opción D) $[6, +\infty[$

Considere la siguiente información para responder a los ítems 24 y 25:

Sean f y g dos funciones tales que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ con $B \subset A$, $A = [1, 14]$ y $B \cap A = [2, 8]$.

Pregunta 24

Considere las siguientes proposiciones:

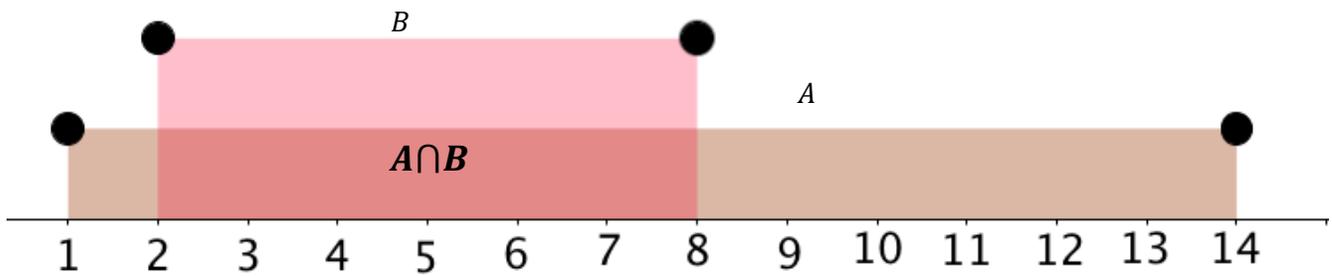
- I. $2 \in B$
- II. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 14\}$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

Al representar gráficamente los dominios se obtiene



Claramente se ve que si $A \cap B = [2, 8]$, implica que $2 \in A$ y $2 \in B$, pues el intervalo es cerrado en sus extremos. Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

Como $A = [1, 14]$, esto significa que contiene a 1 y a 14, pues el intervalo es cerrado en sus extremos. Por lo tanto, la proposición II es falsa, ya que el la proposición $1 < x < 14$, excluye ambos extremos.

Respuesta: Opción C) Solo la I

Pregunta 25

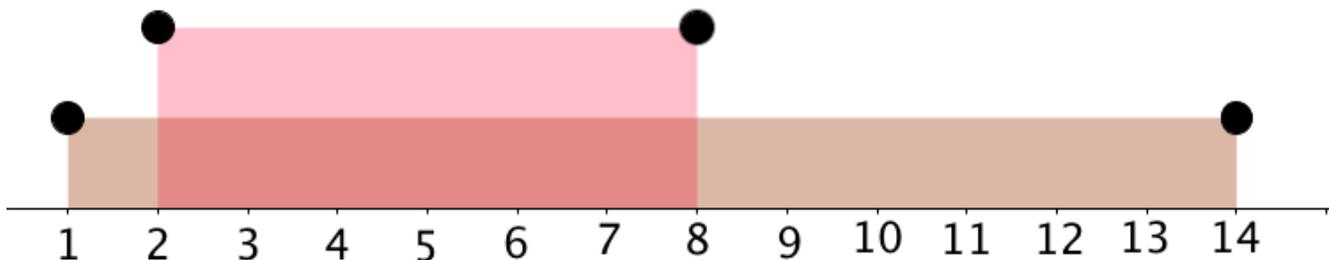
Sean f y g dos funciones tales que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ con $B \subset A$, $A = [1, 14]$ y $B \cap A = [2, 8]$.

Si el dominio de g expresado en notación de intervalo es $B = [a, b]$, entonces, ¿cuál es el valor numérico de "b"? (no incluya decimales después de la coma)

R/ ,

Solución.

Como B está contenido en A , y su intersección contiene los números reales mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 8 ($B \subset A = [1, 14]$ y $B \cap A = [2, 8]$), significa que $B = [2, 8]$. Por lo tanto el valor de b es 8, como se observa en la gráfica.

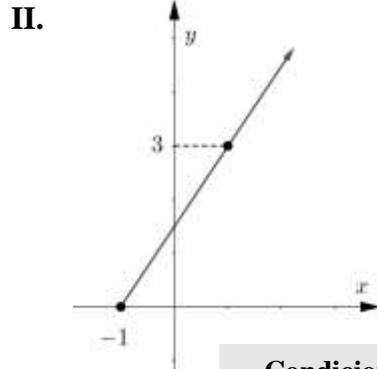
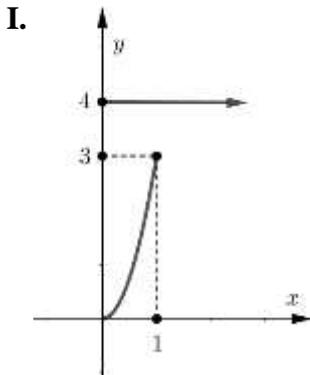


Respuesta:

R/

Pregunta 26

Considere las siguientes representaciones gráficas:



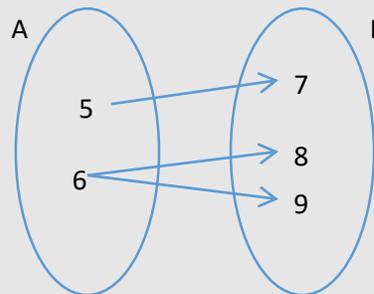
De ellas, ¿cuál o cuáles pueden representar una función?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Condiciones para que una relación sea función

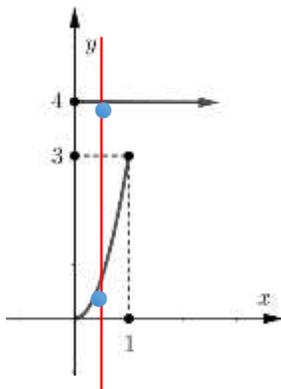
Recuerde, para que una relación sea función debe cumplir que todos los elementos del dominio tienen que tener exactamente una sola imagen.

Por ejemplo, la siguiente relación no es una función pues el elemento 6 tiene dos imágenes (8 y 9)



Solución.

La gráfica I muestra que todos los valores en el intervalo $[0, 1]$ tienen dos imágenes, como se observa en la siguiente imagen (las ordenadas de los dos puntos representados por bolitas azules).



Por lo tanto esta gráfica **no** representa una función.

La gráfica II muestra que cada uno de los valores de su dominio $[-1, +\infty[$ tiene solo una imagen. Por lo tanto la gráfica II representa una función.

Respuesta: Opción D) Solo la II.

Pregunta 27

Considere las siguientes relaciones f y g :

I. $f: [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$, con $f(x) = -x^2$

II. $g: [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$, con $f(x) = -x$

De ellas, ¿cuál o cuáles representa(n) una función?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Solución.

Como el dominio de la función $f(x) = -x^2$ es $[0, +\infty[$, sus imágenes siempre serán números menores o iguales que 0, como se puede observar en la siguiente tabla con algunos valores arbitrarios:

x	$f(x) = -x^2$
0	$f(0) = -0^2 = 0$
1	$f(1) = -1^2 = -1$
2	$f(2) = -2^2 = -4$
5	$f(5) = -5^2 = -25$
10	$f(10) = -10^2$ $= -100$

Por lo general, dado cualquier número real x en el intervalo $[0, +\infty[$, $-x^2$ es un único número real en el intervalo $]-\infty, 0]$. Esto significa que f corresponde a una función.

En el caso de la función $g: [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$, $g(x) = -x$, cada una de sus imágenes será negativa o 0, como se puede observar en la siguiente tabla con algunos valores arbitrarios:

x	$g(x) = -x$
0	$g(0) = -0 = 0$
1	$g(1) = -1$
2	$g(2) = -2$
5	$g(5) = -5$
10	$g(10) = -10$

Como su dominio es $[0, +\infty[$ su codominio es $]-\infty, 0]$. Esto significa que g si corresponde a una función.

Respuesta: Opción A) Ambas.

Pregunta 28

Considere los siguientes criterios correspondientes a las funciones f y g :

$$f(x) = 2x - 1 \qquad g(x) = x^2 + 8$$

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el criterio de $(g \circ f)$?

- A) $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 7$
- B) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 15$
- C) $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 9$
- D) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 9$

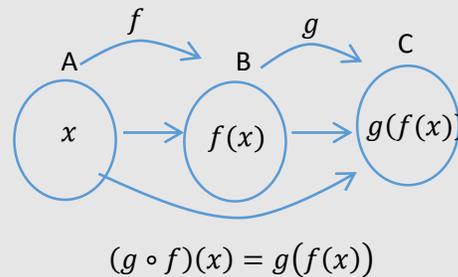
Solución.

Composición de funciones

Recuerde que la composición de funciones se define $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Nótese que para poder aplicar la composición de funciones, es suficiente que el recorrido de la primera función f sea igual al dominio de la segunda g . Es decir, que en este caso se podría realizar la composición $(f \circ g)(x)$.



Para determinar $(g \circ f)(x)$ es necesario sustituir en el criterio de g , el criterio de f , es decir:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (2x - 1)^2 + 8 \\ &= (4x^2 - 4x + 1) + 8 \\ &= 4x^2 - 4x + 9 \\ \therefore (g \circ f)(x) &= 4x^2 - 4x + 9\end{aligned}$$

Video de ayuda

En este video encontrará otro ejemplo de composición de funciones

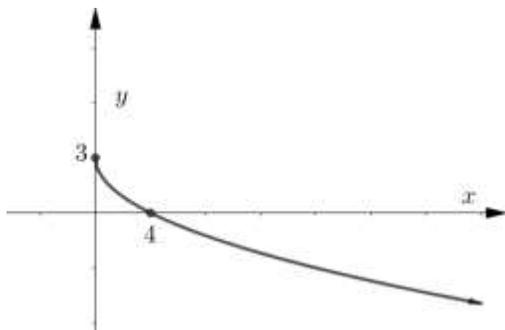


<https://youtu.be/WtRGRh7t-eY>

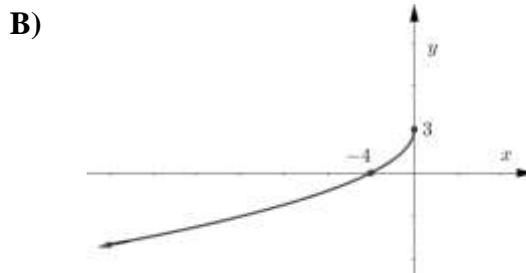
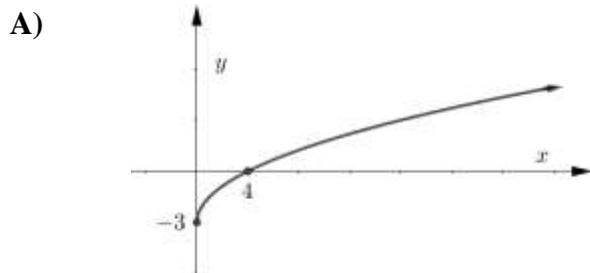
Respuesta: Opción D) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 9$

Pregunta 29

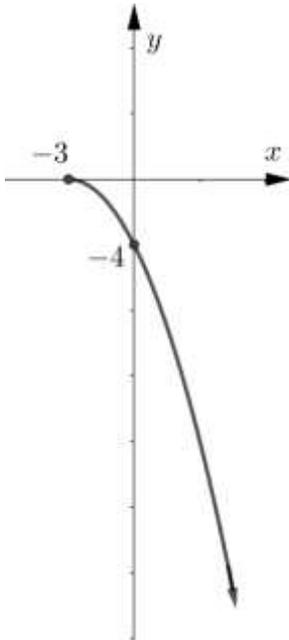
Considere la siguiente representación gráfica de una función:



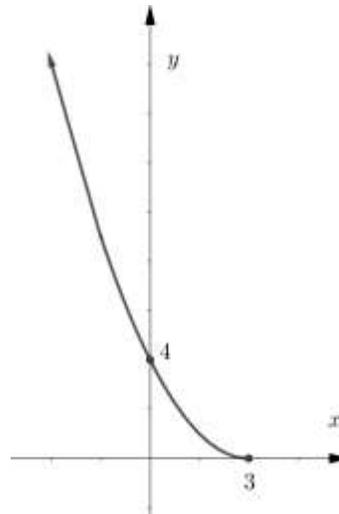
De acuerdo con la información anterior, la gráfica de la función inversa de f corresponde a



C)



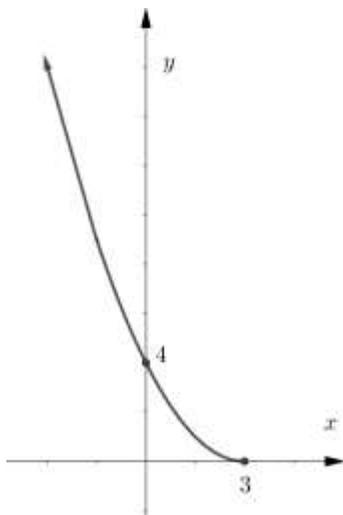
D)



Solución.

Estrategia I

Dos pares ordenados que pertenecen a la función f son $(0, 3)$ y $(4, 0)$. Esto significa que dos pares ordenados que pertenecen a f^{-1} son $(3, 0)$ y $(0, 4)$. La única gráfica que contiene estos dos puntos y que satisface la condición de simetría respecto a la recta $y = x$ es:

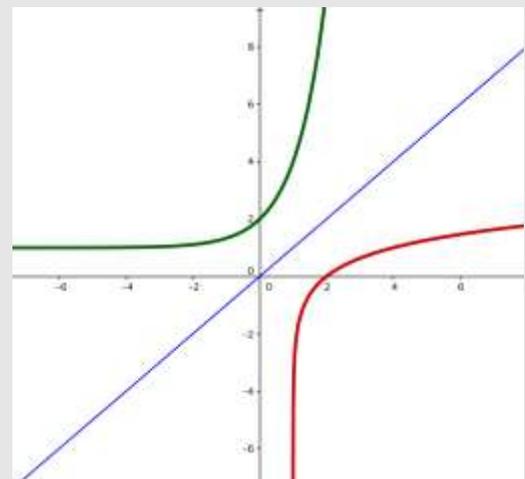


f

f^{-1}

Gráfica de una función y su inversa

Si graficamos una función y su inversa en un mismo sistema de coordenadas, estas son simétricas con respecto a la función identidad $y = x$. Como por ejemplo



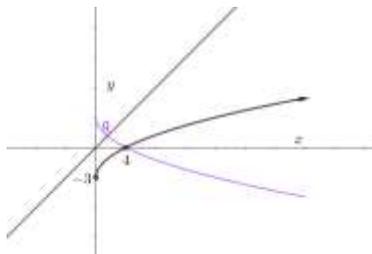
Recuerde que la inversa de una función $f: A \rightarrow B$, es otra función que se denota por $f^{-1}: B \rightarrow A$ y que cumple que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Respuesta: Opción D)

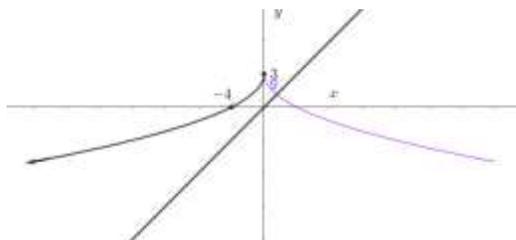
Estrategia II

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo que para resolver el ítem con dibujar la función f “encima” de las opciones y visualizar cuál cumple la condición anterior, como se muestra a continuación:

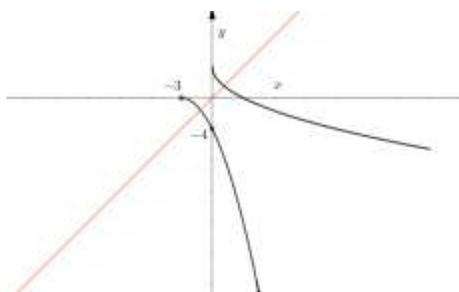
A)



B)



C)



Video de ayuda

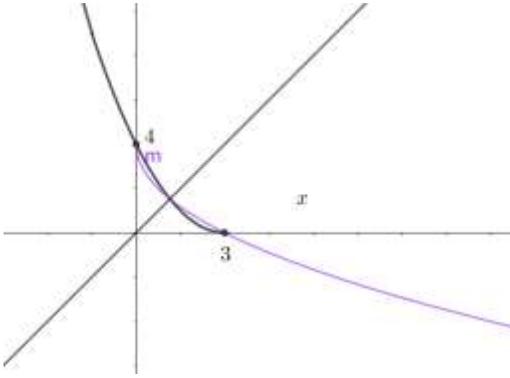
En este video encontrará otra ejemplo donde se calcula la función inversa



<https://youtu.be/nY8oOD26xY8>

con
basta

D)



Respuesta: Opción D)

Pregunta 30

Si f es la función dada por $f(x) = -3x + \frac{1}{3}$, entonces, ¿cuál es el valor de $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$? (si el resultado es entero entonces no escriba en los campos correspondientes a la parte decimal)

R/ ,

Solución.

Estrategia I

Para obtener $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$, basta con igualar el criterio de f a $\frac{-8}{3}$, y despejar el valor de x :

$$\frac{-8}{3} = -3x + \frac{1}{3}$$

$$3x = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

R/ ,

Cálculo de la inversa

Si $f: A \rightarrow B$ tiene función inversa entonces para calcular la fórmula de dicha inversa se despeja la variable x en la ecuación $y = f(x)$.

Por ejemplo para calcular la inversa de $f: [0, +\infty[\rightarrow [-3, +\infty[$,

$$f(x) = 2x^2 - 3$$

$$y = 2x^2 - 3$$

$$y + 3 = 2x^2$$

$$\frac{y + 3}{2} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{y + 3}{2}} = x$$

Así, $f^{-1}: [-3, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, con

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

Respuesta: 1

Estrategia II

Para obtener $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$, primero se calcula la fórmula de la inversa de f , despejando x de la ecuación

$$y = -3x + \frac{1}{3}$$

$$y - \frac{1}{3} = -3x$$

$$\frac{y - \frac{1}{3}}{-3} = x$$

$$\frac{-y}{3} + \frac{1}{9} = x$$

Intercambiando x con y obtenemos $y = f^{-1}(x) = \frac{-x}{3} + \frac{1}{9}$.

Luego se sustituye el valor de $x = \frac{-8}{3}$ en esta función

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right) &= \frac{-\left(\frac{-8}{3}\right)}{3} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Respuesta:

R/

Video de ayuda

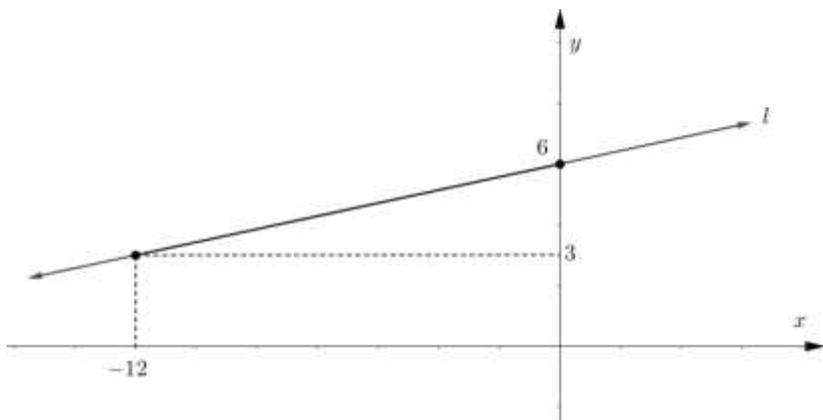
En este video encontrará otra ejemplo donde se calcula la función inversa



<https://youtu.be/nY8oOD26xY8>

Pregunta 31

Considere la siguiente representación gráfica de una recta l :



De acuerdo con la información anterior, la ecuación de l corresponde a

- A) $y = \frac{x}{4} + 6$
- B) $y = 4x + 6$
- C) $y = \frac{-x}{6} + 1$
- D) $y = \frac{-x}{4} + 6$

Cálculo de ecuación de la recta

Recuerde que dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de una recta con ecuación $y = mx + b$, se puede calcular el valor de m y b utilizando las siguientes fórmulas:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - mx_1 \text{ o } b = y_2 - mx_2$$

Solución.

La recta l pasa por los puntos $(-12, 3)$ y $(0, 6)$. Para obtener su pendiente se procede así:

$$m = \frac{6 - 3}{0 - -12} = \frac{1}{4}$$

Como el valor de b corresponde al corte con el eje y , en este caso 6 , la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{x}{4} + 6$$

Respuesta: Opción D) $y = \frac{x}{4} + 6$

Video de ayuda

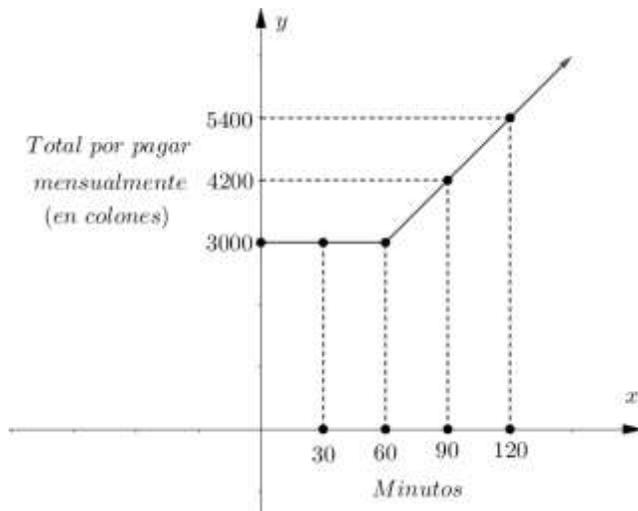
En este video encontrará un problema que se resuelve averiguando la ecuación de una recta.



<https://youtu.be/SXr3sdR7xBo>

Pregunta 32

La siguiente representación gráfica muestra el total por pagar en colones, por un cliente de telefonía fija, de acuerdo con la cantidad de minutos consumidos en las llamadas en un mes. La tarifa mínima por pagar es de $\text{¢}3\ 000$.



De acuerdo con la información anterior, ¿en cuál de los siguientes intervalos de tiempo, en minutos, se pagaría $\text{¢}3\ 000$ en total?

- A) $[0, 90]$
- B) $[30, 50]$
- C) $[20, 90]$
- D) $[30, 120]$

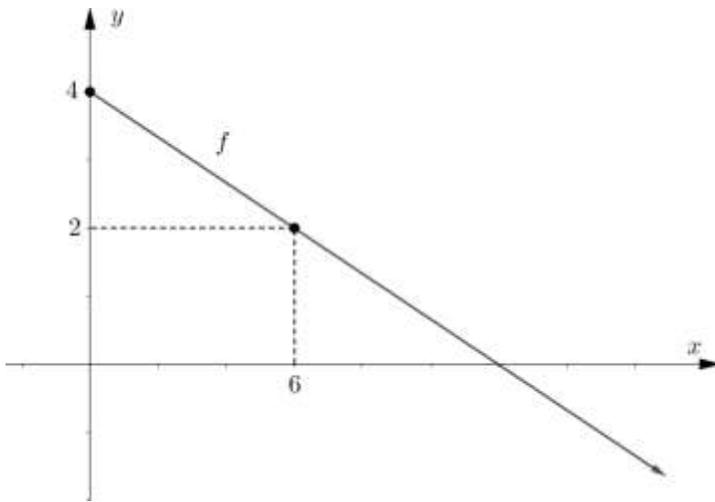
Solución.

Según se observa en la gráfica, la función es constante durante la primera hora. Entonces, por cualquier intervalo de tiempo de llamada incluido en $[0, 60]$ se paga 3000 colones. En particular, en el intervalo $[30, 50]$, que es la respuesta correcta.

Respuesta: Opción B) $[30, 50]$

Pregunta 33

Considere la siguiente representación gráfica de la función lineal f :



De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. $f(0) = 4$
- II. La gráfica de f interseca el eje "x" en $(8, 0)$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

De la figura se deduce que el punto $(0, 4)$ pertenece a la gráfica de la función. Por lo tanto $f(0) = 4$. La proposición I es verdadera.

Videos de ayuda

En estos videos encontrará problemas resueltos donde se utiliza una función lineal



<https://youtu.be/eXNOgmKqToo>



<https://youtu.be/ZoBZRXXGSbr4>

Características de una función lineal

La función lineal $f: A \rightarrow B$,

$$f(x) = mx + b$$

tiene las siguientes características:

- Dominio es \mathbb{R}
- Rango es \mathbb{R}
- Interseca al eje y en el punto $(0, b)$
- Interseca al eje x en el punto $(\frac{-b}{m}, 0)$
- Si $m > 0$ es creciente
- Si $m < 0$ es decreciente
- Si $m = 0$ es constante

Como $f(6) = 2$, podemos usar los pares ordenados $(0, 4)$ y $(6, 2)$ para obtener el valor de la pendiente de la recta:

$$m = \frac{2 - 4}{6 - 0} = \frac{-1}{3}$$

Como el valor de b corresponde al corte con el eje y , en este caso 4, el criterio de f es:

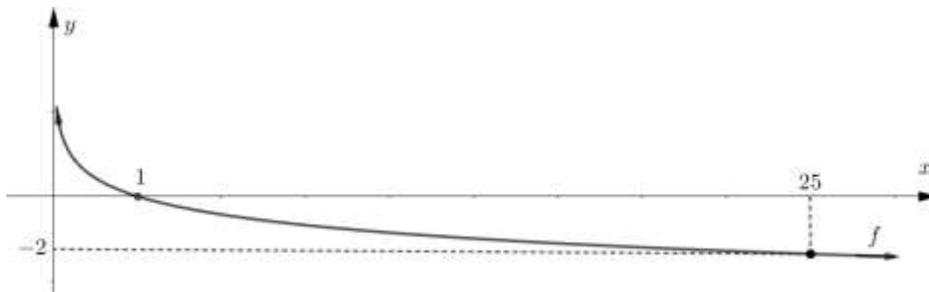
$$f(x) = \frac{-x}{3} + 4$$

La intersección con el eje x es el punto $\left(\frac{-b}{m}, 0\right) = \left(\frac{-4}{\frac{-1}{3}}, 0\right) = (12, 0)$. Por lo tanto la proposición II es falsa.

Respuesta: Opción C) Solo la I

Pregunta 34

Considere la siguiente representación gráfica de la función logarítmica f , dada por $f(x) = \log_a(x)$:



De acuerdo con la información anterior, el valor de " a " corresponde a:

- A) 5
- B) $\frac{1}{5}$
- C) 25
- D) $\frac{1}{25}$

Características de una función logarítmica

La función logarítmica $f: A \rightarrow B$,
 $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
 tiene las siguientes características:

- Dominio es \mathbb{R}^+
- Rango es \mathbb{R}
- No interseca al eje y
- Interseca al eje x en el punto $(1, 0)$
- Si $a > 1$ es creciente
- Si $0 < a < 1$ es decreciente

Solución.*Estrategia I.*

De la gráfica se deduce que $f(25) = -2$. Esto significa que:

$$\log_a 25 = -2$$

Utilizando la definición de logaritmo, se tiene que:

$$a^{-2} = 25$$

$$\frac{1}{a^2} = 25$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \sqrt{25}$$

$$\frac{1}{a} = 5 \text{ pues } a > 0$$

$$a = \frac{1}{5}$$

Nota: $\sqrt{a^2} = |a| = a$ si a es mayor o igual a cero.

Respuesta: Opción B) $\frac{1}{5}$

Estrategia II.

De la gráfica se deduce que $f(25) = -2$. Por lo que basta con sustituir los valores de a dados en las opciones en la ecuación $\log_a 25 = -2$ y la que dé una expresión verdadera es la correcta, como se muestra a continuación

<p>Opción A. $a = 5$ $\log_5 25 = -2?$ $2 \neq -2$ No es correcto</p>	<p>Opción B. $a = \frac{1}{5}$ $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2?$ $\frac{1}{5}^{-2} = -2$ $-2 = -2$ Si es correcto</p>	<p>Opción C. $a = 25$ $\log_{25} 25 = -2?$ $1 \neq -2$ No es correcto</p>	<p>Opción D. $a = \frac{1}{25}$ $\log_{\frac{1}{25}} 25 = -2?$ $\frac{1}{25}^{-1} = -2$ $-1 \neq -2$ No es correcto</p>
---	---	---	---

Nota: $\log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = -2$ pues $\log_b b = 1$ si $b > 0, b \neq 1$

Respuesta: Opción B) $\frac{1}{5}$

Características de una función cuadrática

La función cuadrática $f: A \rightarrow B$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

tiene las siguientes características:

- Dominio es \mathbb{R}
- Si $a > 0$ el rango es $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$
- Si $a < 0$ el rango es $\left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$
- Interseca al eje y en $(0, c)$
- Interseca al eje x en los valores donde se cumple que $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $a > 0$ es cóncava hacia arriba
- Si $a < 0$ es cóncava hacia abajo
- El vértice es $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$
- $\Delta = b^2 - 4ac$ es el discriminante

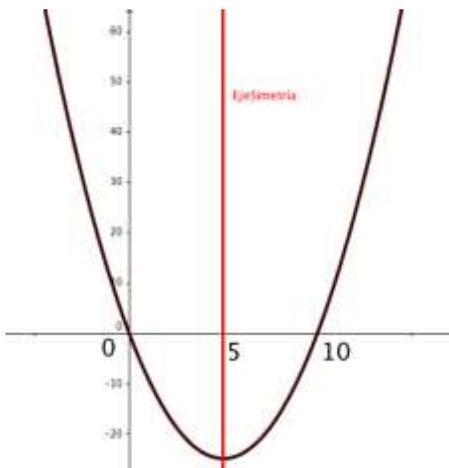
Pregunta 35

Sea f una función cuadrática cuya gráfica interseca al eje " x " en $(0, 0)$ y $(10, 0)$. Si el vértice de f corresponde al punto (m, n) , entonces, ¿cuál es el valor de " m "? (si el valor de m es entero deje los campos correspondientes a los decimales vacíos)

R/ ,

Solución.

Como f interseca el eje x en $(0, 0)$ y $(10, 0)$, significa que el eje de simetría pasa por el punto medio del segmento que une estos puntos, esto es, $x = 5$, que corresponde a la abscisa del vértice. Entonces el valor de m es 5. Gráficamente lo que sucede es lo siguiente:



Respuesta:

R/ 5 ,

Pregunta 36

Considere la siguiente información:

Durante las fiestas se cobró el parqueo como parte de la recolección de fondos. Por un día de parqueo, cada carro pagaba ¢5 000 y cada moto ¢2 000. En el primer día llegó un total de 43 vehículos, entre motos y carros, y se obtuvo un ingreso de ¢161 000 por concepto de parqueo.

De acuerdo con la información anterior, ¿cuántas motos utilizaron el parqueo el primer día?

- A) 18
- B) 20
- C) 23
- D) 35

Solución.

De los datos proporcionados se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5\,000c + 2\,000m = 161\,000 \\ c + m = 43 \end{cases}$$

en donde c representa la cantidad de carros y m la cantidad de motos.

Si se sustituye el valor $c = 43 - m$ en la primera ecuación, obtiene:

$$\begin{aligned} 5\,000(43 - m) + 2\,000m &= 161\,000 \\ 215\,000 - 5\,000m + 2\,000m &= 161\,000 \\ -3\,000m &= -54\,000 \\ m &= 18 \end{aligned}$$

Respuesta: Opción A) 18

Video de ayuda

En este video encontrará otro problema de sistemas de ecuaciones y su respectiva explicación



<https://youtu.be/iBOsYozZfAQ>

se

Pregunta 37

Considere la siguiente información:

Un empresario estima que el ingreso diario " $I(x)$ ", en miles de colones, por la venta de un producto, está dado por $I(x) = 100x - 0,25x^2$, donde " x " representa la cantidad de unidades vendidas diariamente, con $x > 0$.

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el ingreso diario máximo, en miles de colones, que puede obtener el empresario por la venta de ese producto?

- A) 200
- B) 400
- C) 10 000
- D) 40 000

Solución.

Estrategia I

En este caso el problema pregunta por el valor máximo.

Se encuentra el valor del eje de simetría, $x = \frac{-b}{2a}$:

$$x = \frac{-100}{2 \cdot -0,25} = 200$$

Luego, se sustituye este valor en la función

$$\begin{aligned} I(x) &= 100x - 0,25x^2 \\ I(200) &= 100 \cdot 200 - 0,25 \cdot 200^2 \\ &= 10\,000 \end{aligned}$$

Respuesta: Opción C) 10 000

Estrategia II

Otra opción, es hallando el valor de la ordenada del vértice

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, es decir

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\ y &= \frac{-(100^2 - 4 \cdot -0,25 \cdot 0)}{4 \cdot -0,25} = 10\,000 \end{aligned}$$

Respuesta: Opción C) 10 000

Características de una función cuadrática

La función cuadrática $f: A \rightarrow B$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

tiene las siguientes características:

- Si $a > 0$ el vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ es un punto de mínimo
- Si $a < 0$ el vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ es un punto de máximo.

Videos de ayuda

En estos videos encontrará otra aplicación de la función cuadrática:



<https://youtu.be/mIjzWJlh1i4>



<https://youtu.be/nY8oOD26xY8>

Pregunta 38

¿Cuál es la solución de la ecuación $3^{2x-1} = 5^{4(x+2)}$?

A) $\frac{8 \log(5) + \log(3)}{2 \log(3) - 4 \log(5)}$

B) $\frac{2 \log(5) + \log(3)}{2 \log(3) - 4 \log(5)}$

C) $\frac{8 \log(5) - \log(3)}{2 \log(3) - 4 \log(5)}$

D) $\frac{2 \log(5) - \log(3)}{2 \log(3) - 4 \log(5)}$

Propiedades de logaritmos

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$

Solución.

Aplicando logaritmo ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$3^{2x-1} = 5^{4(x+2)}$$

$$\log 3^{2x-1} = \log 5^{4(x+2)}$$

$$(2x - 1)\log 3 = 4(x + 2)\log 5$$

$$2x\log 3 - \log 3 = 4x\log 5 + 8\log 5$$

$$2x\log 3 - 4x\log 5 = 8\log 5 + \log 3$$

$$x(2\log 3 - 4\log 5) = 8\log 5 + \log 3$$

$$x = \frac{8\log 5 + \log 3}{2\log 3 - 4\log 5}$$

Respuesta: Opción A) $\frac{8\log 5 + \log 3}{2\log 3 - 4\log 5}$

Pregunta 39

Considere las siguientes proposiciones:

I. $\log(x + 4) + \log(3x + 5) = \log(4x + 9)$

II. $\log(x^{40}) + 3 \log(x^{10}y^{20}) = \log(x^{70}y^{20})$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Propiedades de logaritmos

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$

Solución.

En la proposición I, se asume que para sumar logaritmos, se suman los términos semejantes de sus argumentos, cuando lo correcto es que se multiplican:

$$\log(x + 4) + \log(3x + 5) = \log[(x + 4)(3x + 5)] = \log(3x^2 + 17x + 20)$$

Por lo tanto, la proposición I es falsa.

Aplicando leyes de logaritmos en el término de la izquierda en la proposición II, se tiene que:

$$\begin{aligned} \log(x^{40}) + 3\log(x^{10}y^{20}) &= \log(x^{40}) + \log(x^{10}y^{20})^3 \\ &= \log(x^{40}) + \log(x^{30}y^{60}) \\ &= \log[(x^{40})(x^{30}y^{60})] \\ &= \log[x^{70}y^{60}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición II es falsa.

Respuesta: Opción B) Ninguna.

Pregunta 40

Considere el siguiente enunciado:

Después de administrar cierto medicamento a un paciente, la cantidad de miligramos de ese medicamento presente en el torrente sanguíneo disminuye a la tercera parte cada 5 horas. La fórmula que modela la situación anterior está dada por $M = 50 \cdot 3^{-\frac{t}{5}}$, donde " M " es la cantidad de medicamento presente en el organismo, en miligramos, y " t " es el tiempo transcurrido, en horas, desde el momento de la aplicación del medicamento, con $t \geq 0$.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La cantidad inicial de medicamento es 50 *mg*.
- II. Para que haya menos de 5 *mg* en el torrente sanguíneo de un paciente, deben transcurrir más de 10 horas.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

Para encontrar la cantidad inicial de medicamento, es necesario sustituir $t = 0$ en la fórmula $M = 50 \cdot 3^{-\frac{t}{5}}$:

$$M = 50 \cdot 3^{\frac{0}{5}} = 50$$

pues $3^0 = 1$.

Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

Para conocer cuánto tarda en haber menos de 5 mg en el torrente sanguíneo, se iguala la fórmula $M = 50 \cdot 3^{-\frac{t}{5}}$ a 5:

$$5 = 50 \cdot 3^{-\frac{t}{5}}$$

$$\frac{1}{10} = 3^{-\frac{t}{5}}$$

Luego se aplica la definición de logaritmo:

Videos de ayuda

En estos videos encontrará dos problemas que involucra una función exponencial para su solución



<https://youtu.be/H4HAJMyT6Xc>



<https://youtu.be/KCKJ91BEDs>

$$\log \frac{1}{10} = \log 3^{\frac{-t}{5}}$$

$$-1 = \frac{-t}{5} \log 3$$

$$\frac{5}{\log 3} = t$$

$$t \approx 10,48$$

Por lo tanto, hacen falta más de 10 horas para que haya menos de 5 mg de este producto en torrente sanguíneo.

Respuesta: Opción A) Ambas

Pregunta 41

Considere la siguiente información:

El valor de un automóvil empieza a disminuir a partir del momento de la compra. Su depreciación (disminución del valor), depende del precio original y del modelo. En las siguientes tablas se muestran ejemplos del valor de dos modelos de automóvil, después de cierta cantidad de años desde el momento en que se realizó su compra:

Modelo A:

Años	0	1	2	3	4
Valor	10 400 000	7 800 000	5 850 000	4 387 000	3 290 625

Modelo B:

Años	0	1	2	3	4
Valor	9 375 000	7 500 000	6 000 000	4 800 000	3 840 000

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. El valor del modelo A, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función lineal.
- II. El valor del modelo B, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

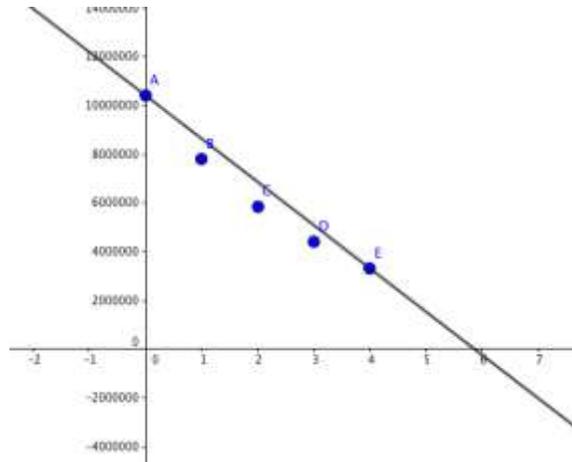
- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

Como se puede observar en la tabla del modelo A, conforme avanzan los años, el valor se deprecia cada vez más lentamente:

Modelo A		
Año	Valor	Depreciación
0	10 400 000	0
1	7 800 000	2 600 000
2	5 850 000	1 950 000
3	4 387 500	1 462 500
4	3 290 625	1 096 875

Por lo tanto, no refleja el comportamiento de una función lineal. Esto se puede visualizar más fácilmente si graficamos los puntos en un sistema de coordenadas, como se muestra a continuación:

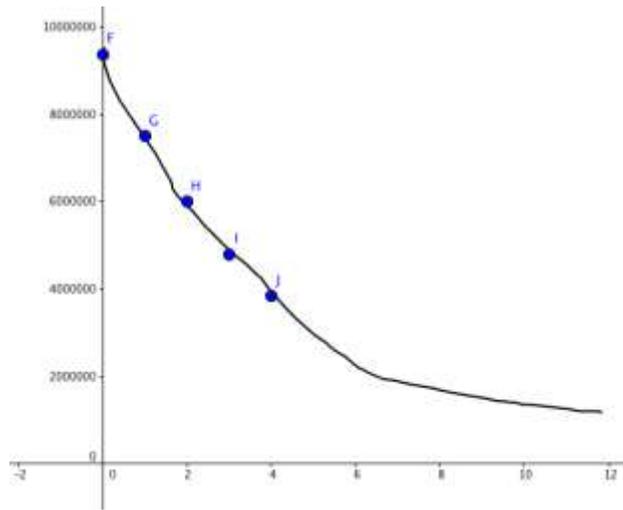


La proposición I es falsa.

En el caso del modelo B, su depreciación ocurre así:

Modelo B		
Año	Valor	Depreciación
0	9 375 000	
1	7 500 000	1 875 000
2	6 000 000	1 500 000
3	4 800 000	1 200 000
4	3 840 000	960 000

El valor del modelo B decrece cada año, pero no en forma lineal: se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial, como se observa en la gráfica siguiente:



Respuesta: Opción D) Solo la II.

Pregunta 42

Considere la siguiente información:

La cantidad " $P(t)$ " de bacterias presentes en un cultivo depende del tiempo " t ", en minutos, transcurridos a partir del momento en que se inicia un experimento. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de la relación que se da entre el tiempo transcurrido y la cantidad de bacterias:

Minutos	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	25 000	30 000	36 000	43 200	51 840	62 208

De acuerdo con la información anterior, el criterio de la función que mejor se adapta para describir la relación entre la cantidad de bacterias y el tiempo, corresponde a

- A) $P(t) = \log_a(t)$, con $a > 1$
- B) $P(t) = \log_a(t)$, con $0 < a < 1$
- C) $P(t) = 25\,000 \cdot a^t$, con $a > 1$
- D) $P(t) = 25\,000 \cdot a^t$, con $0 < a < 1$

Solución.

Al analizar la forma en que la cantidad de bacterias cambia, se puede ver que aumenta cada vez más rápido:

Bacterias presentes en un cultivo		
Tiempo (minutos)	Cantidad	Aumento
0	25 000	
1	30 000	5 000
2	36 000	6 000
3	43 200	7 200
4	51 840	8 640
5	62 208	10 368

Esto nos indica que estamos en presencia de una función exponencial de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

en donde $k > 0$ y la base “ a ” es mayor que 1:

$$a > 1$$

En este caso, la respuesta correcta es $P(t) = 25\,000a^t$, con $a > 1$, pues es positiva y la base “ a ” es mayor que 1.

Puede observar que esta función cumple que:

$$P(0) = 25\,000$$

Observe que $P(t) = \log_a(t)$, con $a > 1$ también es creciente, pero además de crecer más despacio que la exponencial con base mayor que 1, $\log_a(t)$ no está definida en $t = 0$.

El hecho de que:

$$P(1) = 25\,000a^1 = 30\,000$$

permite obtener el valor de “ a ”:

$$25\,000a = 30\,000$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Por lo tanto el criterio sería:

$$P(t) = 25\,000 \left(\frac{6}{5}\right)^t$$

Puede comprobar que en esta función:

$$P(2) = 36\,000$$

$$P(3) = 43\,200$$

Videos de ayuda

En este videos encontrará dos problemas que involucra una función exponencial para su solución



<https://youtu.be/H4HAJMyT6Xc>



<https://youtu.be/KCKJl91BEDs>

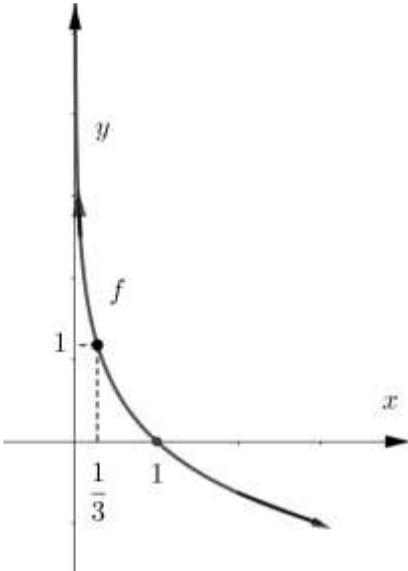
$$P(4) = 51\,840$$

$$P(5) = 62\,208$$

Respuesta: Opción C) $P(t) = 25\,000a^t$, con $a > 1$

Pregunta 43

Considere la siguiente representación gráfica de una función f :



De acuerdo con la representación gráfica anterior, el criterio que mejor se adapta a la función corresponde a

- A) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$
- B) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- C) $f(x) = \log_3(x)$
- D) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

Solución.

La gráfica representa una función logarítmica decreciente. Entre las opciones, solo una cumple esta característica: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$.

Nótese en la gráfica, que los puntos $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y $(1, 0)$ pertenecen al gráfico de f , lo cual cumple el criterio encontrado:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f(1) = 0$$

Respuesta: Opción D) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

Pregunta 44

Considere la siguiente información

Cantidad de horas desde que se inició su estudio	Cantidad de bacterias
1	4
3	12
5	28
7	52
9	84
11	124

De acuerdo con la información anterior, si " x " representa la cantidad de horas desde que se inició el estudio de una colonia de bacterias, y " $C(x)$ " corresponde a la cantidad de bacterias, entonces, ¿cuál es el criterio que mejor modela la cantidad de bacterias, en función de la cantidad de horas, desde que se inició el estudio?

- A) $C(x) = x + 3$
- B) $C(x) = 2^x + 4$
- C) $C(x) = x^2 + 3$
- D) $C(x) = \sqrt{x - 3}$

Solución.

Si se analiza la forma en que la cantidad de bacterias crece, se deduce que su aumento es: 8, 16, 24, 32, 40. Cada vez aumenta más rápido. Esto descarta el hecho de que sea una función lineal o una función radical de la forma dada. Sin embargo, no parece que aumente tan rápido para ser una función exponencial de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x + c$$

Si se sustituye la cantidad de horas en el criterio de la función $C(x) = x^2 + 3$, se obtiene:

Cantidad de horas de sueño desde que se inició el estudio	$C(x) = x^2 + 3$
1	$C(1) = 1^2 + 3 = 4$
3	$C(3) = 3^2 + 3 = 12$
5	$C(5) = 5^2 + 3 = 28$
7	$C(7) = 7^2 + 3 = 52$
9	$C(9) = 9^2 + 3 = 84$
11	$C(11) = 11^2 + 3 = 124$

Respuesta: Opción C) $C(x) = x^2 + 3$

Considere la siguiente información referida al tiempo que tardan los empleados de una empresa en trasladarse desde su casa hasta el trabajo, para responder los ítems 45 y 46

Tiempo en minutos	Cantidad de empleados
[0,15[5
[15, 30[10
[30,45[16
[45,60[12
[60,75[7

Pregunta 45

¿Cuántos minutos en promedio, tardan los empleados desde sus casas hasta su lugar de trabajo?

R/

Solución

Se debe tomar en cuenta que no se conocen los datos exactos (tiempo que tardan los empleados de una empresa en trasladarse desde su casa hasta el trabajo); estos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.

Para determinar el promedio en datos se encuentran agrupados se debe seguir los siguientes pasos:

1. Calcular la marca de clase (punto medio del intervalo), para ello se suman los extremos de cada intervalo y el total se divide entre dos.

Tiempo en minutos	Procedimiento	Punto medio del intervalo (M)
[0,15[$\frac{0 + 15}{2} = 7,5$	7,5
[15, 30[$\frac{15 + 30}{2} = 22,5$	22,5
[30,45[$\frac{30 + 45}{2} = 37,5$	37,5
[45,60[$\frac{45 + 60}{2} = 52,5$	52,5
[60,75[$\frac{60 + 75}{2} = 67,5$	67,5

2. Se multiplica la marca de clase (M) por la frecuencia absoluta (F). Luego se suman esos productos, que será el total de M·F.

Tiempo en minutos	Punto medio del intervalo (M)	Cantidad de empleados Frecuencia (F)	M· F
[0,15[7,5	5	$7,5 \cdot 5 = 37,5$
[15, 30[22,5	10	$22,5 \cdot 10 = 225$
[30,45[37,5	16	$37,5 \cdot 16 = 600$
[45,60[52,5	12	$52,5 \cdot 12 = 630$
[60,75[67,5	7	$67,5 \cdot 7 = 472,5$
Total		50	1965

Total de M·F

Total de F

3. Por último, el promedio ponderado (\bar{x}) será el cociente entre el **Total de M·F** y el **Total de F**:

$$\bar{x} = \frac{\text{Total de } M \cdot F}{\text{Total de } F} = \frac{37,5 + 225 + 600 + 630 + 472,5}{5 + 10 + 16 + 12 + 7} = \frac{1965}{50} = 39,3$$

Respuesta corta: 39,3

R/ ,

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/h1JEn-edede>

Pregunta 46

Considere las siguientes proposiciones:

- I. La mediana de los datos corresponde a un valor mayor o igual a 30 y menor que 45
- II. Con certeza, el tiempo mínimo que tardan los empleados desde su casas hasta su trabajo es de 5 minutos.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Sólo I
- D) Sólo II

Solución

Para resolver el ítem se debe verificar cada proposición de la siguiente manera:

Tome en cuenta la tabla propuesta en el ítem, para evaluar las dos afirmaciones planteadas:

Tiempo en minutos	Cantidad de empleados
[0,15[5
[15, 30[10
[30,45[16
[45,60[12
[60,75[7
Total	50

Proposición I: “La mediana de los datos corresponde a un valor mayor o igual a 30 y menor que 45”

Recuerde que la mediana divide al grupo de datos en dos subconjuntos y se ubica en la mitad, cumple la siguiente propiedad: el 50% de los datos toma un valor numérico menor o igual que ella y el otro 50% tiene un valor numérico mayor o igual. Para calcular la mediana se utiliza la siguiente fórmula:

$$Me: \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En este caso $n = 50$ datos, que corresponde a un valor par, entonces la mediana se calcula:

$$\begin{aligned} Me &= \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \\ Me &= \frac{X_{\left(\frac{50}{2}\right)} + X_{\left(\frac{50}{2}+1\right)}}{2} \\ Me &= \frac{X_{(25)} + X_{(25+1)}}{2} \\ Me &= \frac{X_{(25)} + X_{(26)}}{2} \end{aligned}$$

Lo anterior indica que la mediana es el promedio de los datos que están en la posición 25 y 26. Revisando la tabla de frecuencias del dato en la posición 16 al dato en posición 31 están ubicados en $[30,45[$, por lo que la mediana estaría en ese intervalo. Aunque se desconoce el valor de cada dato, con certeza se sabe que al valor mínimo que podrían tomar es 30 y el máximo un número cercano a 45 (los extremos del intervalo $[30,45[$). Por lo tanto, la mediana tomará valores iguales o mayores que 30, pero menores que 45. Aquí es importante tener claro que para la valoración de la proposición no se necesita conocer de forma precisa el valor de la mediana.

La proposición I es verdadera

Proposición II: “Con certeza, el tiempo mínimo que tardan los empleados desde su casas hasta su trabajo es de 5 minutos.”

Recuerde que el mínimo corresponde al menor valor dentro del conjunto de datos. En este caso, al no contar con los tiempos de cada empleado, no se puede determinar con certeza cuál sería el tiempo mínimo.

La proposición II es falsa.

Respuesta: Opción C) Solo I

Puede complementar su estudio con dos videos explicativos accediendo a los siguientes enlaces:



<https://youtu.be/O7m17qjsLcw>



<https://youtu.be/ZDfO7sDa95E>

Pregunta 47

Considere la siguiente información:

La nota final de un curso se obtiene del promedio ponderado de las calificaciones (de 1 a 100) de los rubros que componen la evaluación del curso. El porcentaje que le corresponde a cada rubro, así como la calificación que obtuvo un estudiante en cada uno de ellos, se muestran en la siguiente tabla:

Rubro	Porcentaje de la nota final	Calificación del estudiante
Prueba escrita	50%	60
Prueba de ejecución	30%	90
Prueba oral	20%	100
Total	100%	

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál fue la nota final que obtuvo el estudiante en el curso?

- A) 31
- B) 58
- C) 77
- D) 83

Solución

Aquí hay que tomar en cuenta que cada rubro de calificación tiene un peso diferente (porcentaje diferente) respecto a la nota final, por lo que es necesario ponderar según el peso relativo o ponderación (porcentaje) de cada dato. En estos casos se aplica la fórmula:

Promedio ponderado

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{\text{suma de (datos} \cdot \text{ponderación)}}{\text{suma de(ponderaciones)}}$$

En el caso de este ítem se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{50 \cdot 60 + 30 \cdot 90 + 20 \cdot 100}{50 + 30 + 20} = \frac{7700}{100} = 77$$

La nota final que obtuvo el estudiante en el curso es de 77

Respuesta: Opción C) 77

Considere la siguiente información para responder los ítems 48 y 49:

En la siguiente tabla se presenta información sobre la masa, en kilogramos, de los estudiantes de tres secciones en un colegio:

Sección	Mínimo	Cuartiles			Máximo
		Q_1	Q_2	Q_3	
A	52	60	65	72	84
B	56	58	65	67	72
C	54	60	68	75	90

Pregunta 48

Considere las siguientes proposiciones:

- I. En la sección A, el recorrido intercuartílico es 12 kg.
- II. La sección C es la que tiene mayor recorrido en cuanto a las masas de sus estudiantes.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

Para resolver el ítem se debe verificar cada proposición de la siguiente manera:

Proposición I: “En la sección A, el recorrido intercuartílico es 12 kg.”

El rango o recorrido intercuartílico es una medida de dispersión que representa la distancia entre el tercer (Q_3) y primer (Q_1) cuartil de una distribución de datos. Por esta razón, su fórmula de cálculo es:

$$\text{Recorrido intercuartílico} = Q_3 - Q_1$$

Para este ítem se tiene que para la sección A, Q_3 es 72 y Q_1 es 60. Por lo tanto,

$$\text{Recorrido intercuartílico} = 72 - 60 = 12$$

El recorrido intercuartílico es de 12kg, por lo que la proposición I es verdadera.

Proposición II: “La sección C es la que tiene mayor recorrido en cuanto a los pesos de sus estudiantes.”

El recorrido corresponde a la diferencia del máximo y mínimo en una distribución de datos,

$$\text{Sección A: } \text{Recorrido} = 84 - 52 = 32$$

$$\text{Sección B: } \text{Recorrido} = 72 - 56 = 16$$

$$\text{Sección C: } \text{Recorrido} = 90 - 54 = 36$$

Como la sección C es la que tiene mayor recorrido, se concluye que la proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción A) Ambas

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/4JspPmphyrI>

Pregunta 49

Considere las siguientes proposiciones:

- I. En la sección *B* hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son mayores o iguales que 58 *kg* y menores o iguales que 67 *kg*.
- II. En la sección *A* hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son menores iguales que 60 *kg* o mayores o iguales que 72 *kg*.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución:

Hay que tomar en cuenta la tabla propuesta para el ítem, en donde se presenta información sobre la masa, en kilogramos, de los estudiantes de tres secciones en un colegio:

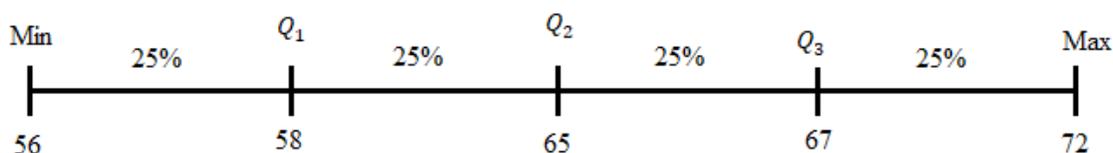
Sección	Mínimo	Cuartiles			Máximo
		Q_1	Q_2	Q_3	
A	52	60	65	72	84
B	56	58	65	67	72
C	54	60	68	75	90

Los cuartiles son tres valores que dividen al grupo de datos en cuatro partes. El primer cuartil o Q_1 cumple que el 25% de los datos son menores o iguales a él y el 75% son mayores o iguales. El segundo cuartil Q_2 corresponde a la mediana. El segundo cuartil Q_2 es un valor tal que el 50% de los datos toma un valor numérico menor o igual que él y el otro 50% tiene un valor numérico mayor o igual. El tercer cuartil o Q_3 cumple que el 75% de los datos son menores o iguales a él y el 25% son mayores o iguales.

A partir de lo anterior se evaluarán las dos proposiciones planteadas:

Proposición I “En la sección *B* hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son mayores o iguales que 58 *kg* y menores o iguales que 67 *kg*.”

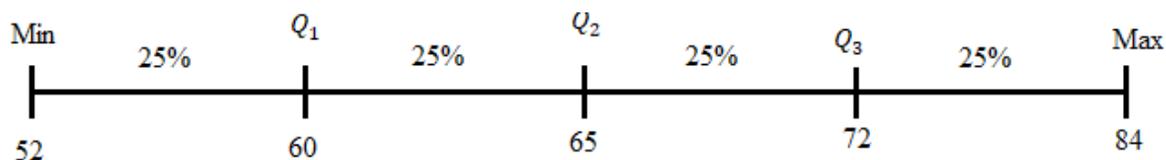
De acuerdo a los datos presentados en el contexto del ítem se tiene que:



La frase “en la sección B hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son mayores o iguales que 58 kg” es falsa, ya que al ser el primer cuartil es un 75% . Lo mismo sucede con la otra parte de la afirmación “en la sección B hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son menores o iguales que 67 kg”, en realidad corresponde a un 75% porque es el tercer cuartil. Por lo que la proposición es falsa.

Proposición II: “En la sección A hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son menores iguales que 60 kg o mayores o iguales que 72 kg.”

De acuerdo a los datos presentados en el contexto del ítem se tiene que:



En la frase “en la sección A hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son menores iguales que 60 kg”, es falso ya que corresponde a un 25% porque 60kg representa el primer cuartil. Luego la otra parte de la afirmación, “en la sección A hay un 50% de los estudiantes cuyas masas son mayores o iguales que 72 kg” es falsa ya que corresponde a un 25% porque 72kg representa el tercer cuartil.

La proposición es falsa.

Respuesta: Opción B) Ninguna

Videos de ayuda.

Puede complementar su estudio con dos videos explicativos accediendo a los siguientes enlaces:



<https://youtu.be/O7m17qjsLcw>

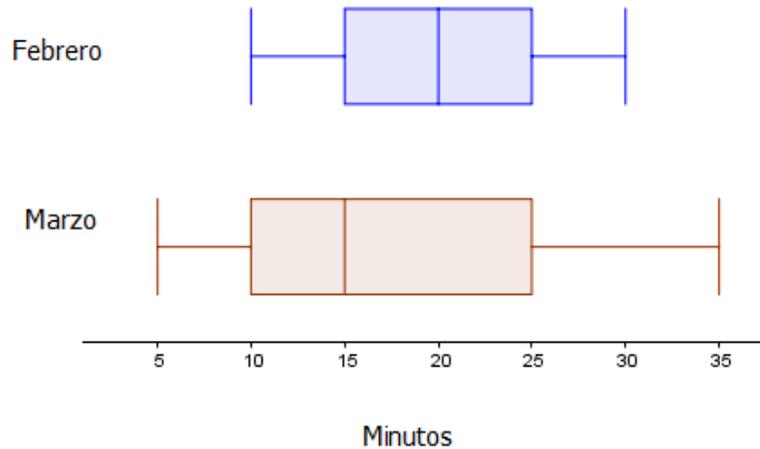


<https://youtu.be/ZDfO7sDa95E>

Considere la siguiente información para responder los ítems 50 y 51:

El siguiente diagrama de cajas representa la duración, en minutos, de las entrevistas realizadas en encuestas telefónicas a 800 personas (400 personas por mes) durante los meses de febrero y marzo:

Duración, en minutos, de las entrevistas realizadas durante febrero y marzo



Pregunta 50

Considere las siguientes proposiciones:

- I. En cada mes se tardó 25 minutos o menos, en realizar el 75% de las entrevistas.
- II. Al menos una de las entrevistas realizadas en el mes de marzo duró más que cualquiera de las entrevistas realizadas en el mes de febrero.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

Diagrama de cajas

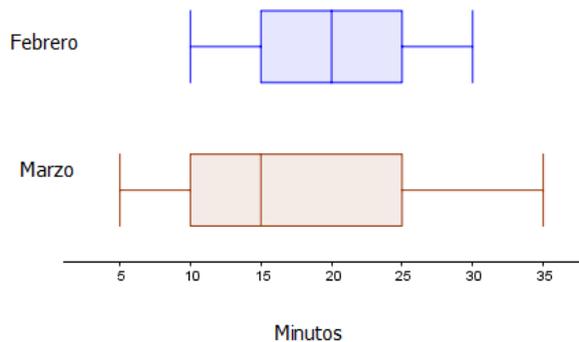
Un diagrama de cajas, también llamado gráfico de bigotes, consiste en una representación estadística en la cual se incluyen las principales medidas de orden de la siguiente manera:



A partir de lo anterior se evaluarán las dos proposiciones:

Proposición I: “En cada mes se tardó 25 minutos o menos, en realizar el 75% de las entrevistas.”

Al observar los diagramas de cajas se aprecia que el tiempo 25 minutos corresponde en ambos al tercer cuartil. Como el tercer cuartil o Q_3 cumple que el 75% de los datos son menores o iguales a él, entonces la afirmación: “en cada mes se tardó 25 minutos o menos, en realizar el 75% de las entrevistas” es verdadera.



Video de ayuda

Puede complementar su estudio accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/Pm6Vxq0GiSM>

Proposición II: “Al menos una de las entrevistas realizadas en el mes de marzo duró más que cualquiera de las entrevistas realizadas en el mes de febrero”

Al observar el diagrama del mes de febrero se aprecia que el máximo corresponde a 30 minutos, mientras que en el mes de marzo es de 35 minutos, es decir, hay un subconjunto de datos (no vacío) en el mes de marzo entre 30 y 35 minutos, por lo que la proposición: “al menos una de las entrevistas realizadas en el mes de marzo duró más que cualquiera de las entrevistas realizadas en el mes de febrero” es verdadera

Respuesta: Opción A) Ambas

Pregunta 51

Considere las siguientes proposiciones:

- I. El recorrido de la duración de las entrevistas realizadas en el mes de marzo es mayor que el recorrido de la duración de las entrevistas realizadas en el mes de febrero.
- II. En el mes de febrero, 300 entrevistas duraron 15 minutos o más, mientras que en marzo fueron 200 entrevistas las que duraron 15 minutos o más.

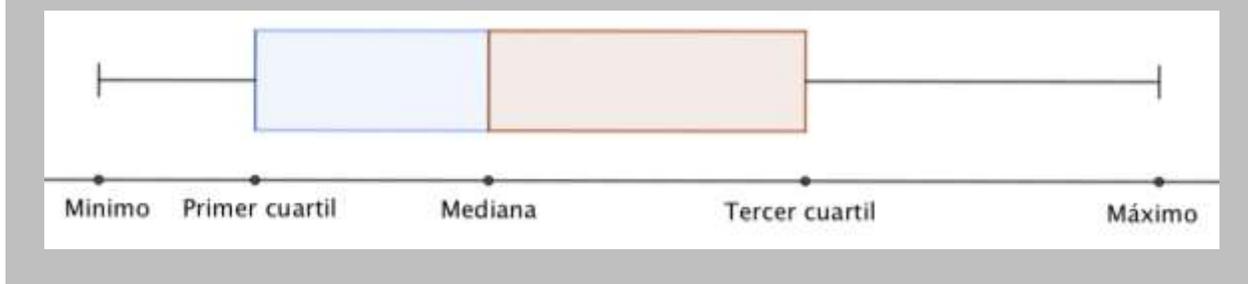
De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

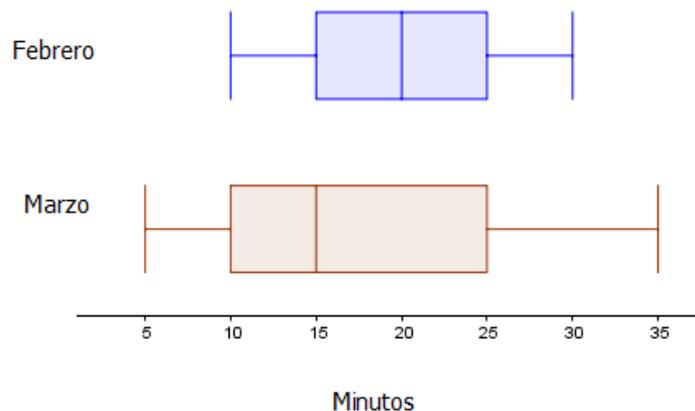
Solución

Diagrama de cajas

Un diagrama de cajas, también llamado gráfico de bigotes, consiste en una representación estadística en la cual se incluyen las principales medidas de orden de la siguiente manera:



Tomando en cuenta el diagrama de cajas propuesto para este ítem se evaluarán ambas proposiciones.



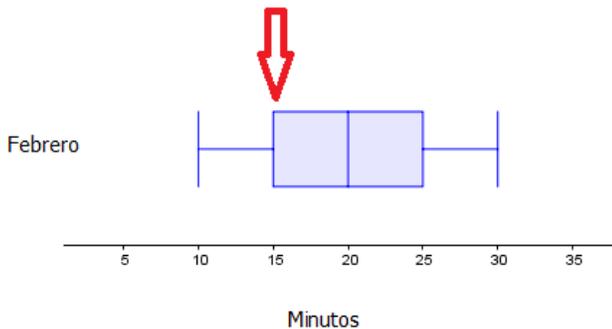
Proposición I: “El recorrido de la duración de las entrevistas realizadas en el mes de marzo es mayor que el recorrido de la duración de las entrevistas realizadas en el mes de febrero.”

Al observar los diagramas de cajas se tiene que para el mes de febrero el mínimo es de 10 min y máximo de 30 minutos, es decir, el recorrido corresponde a 20min (máximo – mínimo = 30 – 10). Para el mes de marzo el

mínimo corresponde a 5min y el máximo a 35 min, de donde el recorrido es de 30min (máximo – mínimo = 35 – 5). Por tanto, la proposición es verdadera.

Proposición II: “En el mes de febrero, 300 entrevistas duraron 15 minutos o más, mientras que en marzo fueron 200 entrevistas las que duraron 15 minutos o más.”

De acuerdo a la información proporcionada en el contexto, se entrevistaron 400 personas por mes. En el diagrama de cajas correspondiente a las entrevistas del mes de febrero el 75% de las mismas (primer cuartil) duraron 15 minutos o más; es decir, $400 \cdot 0,75 = 300$ personas encuestadas.



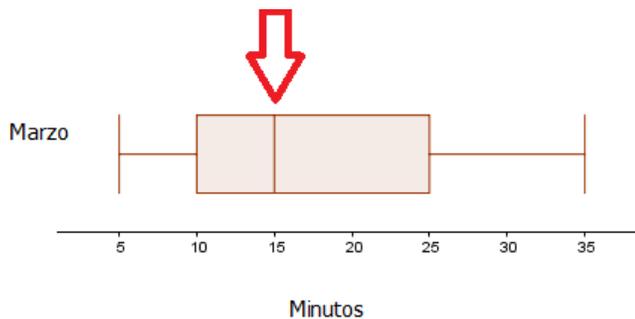
Videos de Ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/Pm6Vxq0GiSM>

En el diagrama de cajas correspondiente a las entrevistas del mes de marzo el 50% de las mismas (mediana) duraron 15 minutos o más; es decir, $400 \cdot 0,50 = 200$ personas encuestadas.



De lo anterior, la proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción A) Ambas

Pregunta 52

Considere la siguiente información:

A dos secciones de octavo año se les aplicó la misma prueba en iguales condiciones. La nota (de 1 a 100) más alta obtenida por un estudiante de cada sección, así como la media aritmética y la desviación estándar de las notas obtenidas por los estudiantes de cada sección, se muestran en la siguiente tabla:

Sección	Media aritmética	Desviación estándar	Nota más alta
8-1	50	10	80
8-2	52	8	78

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La nota más alta obtenida por un estudiante de la sección 8 - 2, tiene una mejor posición relativa que la nota más alta obtenida por un estudiante de la sección 8-1, con respecto a las notas de su correspondiente sección.
- II. Las notas de los estudiantes de la sección 8-1 presentan mayor variabilidad relativa que las notas de los estudiantes de la sección 8- 2

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

A partir de la información de la tabla se evaluarán las dos proposiciones planteadas:

Proposición I: “La nota más alta obtenida por un estudiante de la sección 8 - 2, tiene una mejor posición relativa que la nota más alta obtenida por un estudiante de la sección 8-1, con respecto a las notas de su correspondiente sección”

Lo primero que hay tener claro, es que las notas de la sección 8-1 no se pueden comparar en términos absolutos con las de la sección 8-2, debido a que son dos distribuciones con diferente comportamiento. Es por esto que se deben estandarizar los datos (notas) para que puedan ser comparables.

Estandarización

La estandarización consiste en una estrategia que se utiliza para realizar comparaciones con datos que pertenecen a diferentes contextos o diferentes magnitudes. Para que los datos sean comparables se les debe estandarizar: para cada uno se calcula su diferencia respecto al promedio y el resultado se divide por la desviación estándar:

$$\text{Valor estandarizado} = \frac{\text{Dato} - \text{promedio}}{\text{desviación estándar}}$$

Con esta medida se elimina el efecto de la unidad de medida de los datos debido a que se modifica su posición, llevándolos a un estándar comparativo. Un dato estandarizado puede ser positivo, negativo o incluso nulo.

Nota más alta de la (Sección 8-1):

$$\frac{80 - 50}{10} = 3,0$$

Nota más alta (Sección 8-2):

$$\frac{78 - 52}{8} = 3,25$$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/fM6ml4gskgM>

Como el valor estandarizado de la sección 8-2 (3,25) es mayor que el del sección 8-1 (3,0), entonces se concluye que la proposición I es verdadera.

Proposición II: “Las notas de los estudiantes de la sección 8-1 presentan mayor variabilidad relativa que las notas de los estudiantes de la sección 8- 2”

Coefficiente de variación

El coeficiente de variación consiste en una relación estadística que permite comparar la variabilidad de diferentes grupos de datos que provenientes de contextos diferentes o que poseen diferentes magnitudes. Se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{\text{desviación estándar}}{\text{media aritmética}} \cdot 100$$

Al igual que en los análisis de posición relativa, el coeficiente de variación elimina la unidad de medida para poder hacer una comparación de la variabilidad en forma equitativa.

Sección 8-1:

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{10}{50} \cdot 100 = 20$$

Sección 8-2:

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{8}{52} \cdot 100 = 15,38$$

Como el coeficiente de variación de la sección 8-1 es mayor que el de la sección 8-2 entonces se concluye que la proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción A) Ambas

Pregunta 53

Considere la siguiente Información:

Dos trabajadores que desempeñan el mismo puesto, uno en la empresa N y el otro en la empresa T , tienen un salario de ¢744 000 y ¢820 000 respectivamente. En la empresa N , el salario promedio es ¢688 000, con una desviación estándar de ¢46 500, mientras en la empresa T , el salario promedio es ¢818 000, con una desviación estándar de ¢58 900.

De acuerdo con la Información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. Los salarios en la empresa T poseen una menor variabilidad relativa que los salarios en la empresa N .
- II. El salario del trabajador de la empresa N ocupa una mejor posición relativa, con respecto a los salarios en su empresa, que el salario del trabajador de la empresa T , con respecto a los salarios en su empresa.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución

Lo primero que hay tener claro, es que los salarios de la empresa N y la empresa T no son comparables en términos absolutos debido a que las distribuciones de datos presentan un comportamiento diferente.

De acuerdo a la información presentada en el ítem se evaluarán las dos proposiciones planteadas

Proposición I: “Los salarios en la empresa T poseen una menor variabilidad relativa que los salarios en la empresa N .”

Coefficiente de variación

El coeficiente de variación consiste en una relación estadística que permite comparar la variabilidad de diferentes grupos de datos que provenientes de contextos diferentes o que poseen diferentes magnitudes. Se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{\text{desviación estándar}}{\text{media aritmética}} \cdot 100$$

El coeficiente de variación elimina la unidad de medida para poder hacer una comparación de la variabilidad en forma equitativa.

Empresa T

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{58900}{818000} \cdot 100 = 7,2$$

Empresa N

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{46500}{688000} \cdot 100 = 6,76$$

Como el coeficiente de variación de la empresa T es mayor al de la empresa N, se concluye que la proposición I es falsa.

Proposición II: “El salario del trabajador de la empresa N ocupa una mejor posición relativa, con respecto a los salarios en su empresa, que el salario del trabajador de la empresa T, con respecto a los salarios en su empresa”

Para que los salarios sean comparables se les debe estandarizar: para cada uno se calcula su diferencia respecto al promedio y el resultado se divide por la desviación estándar:

$$\text{Valor estandarizado} = \frac{\text{Dato} - \text{promedio}}{\text{desviación estándar}}$$

Con esta medida se elimina el efecto de la unidad de medida de los datos debido a que se modifica su posición, llevándolos a un estándar comparativo. Un dato estandarizado puede ser positivo, negativo o incluso nulo.

Salario empresa T:

$$\frac{820000 - 818000}{58900} = 0,034$$

Salario empresa N:

$$\frac{744000 - 688000}{46500} = 1,204$$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/fM6ml4gskgM>

Como el salario estandarizado de la empresa N es un valor mayor al de la empresa T, se concluye que la proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción D) Solo la II

Considere la siguiente Información para responder los ítems 54, 55 y 56:

Una baraja está compuesta por cuatro grupos de 15 cartas cada uno: uno azul, uno rojo, uno amarillo y el otro verde. En cada grupo, cada carta posee un número diferente del 1 al 15

Al seleccionar al azar una carta de la baraja, cada una tiene la misma probabilidad de salir.

Se definen los siguientes eventos:

- Evento A: obtener una carta de color azul.
- Evento B: obtener una carta que tenga un número impar.
- Evento C: obtener una carta con un número divisible por 5.
- Evento D: obtener una carta con un número mayor que 10.

Pregunta 54

¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $A \cap D$?

- A) 4
- B) 5
- C) 23
- D) 27

Solución.

Intersección de eventos: Si A y B son eventos de un espacio muestral S , la ocurrencia de los eventos A y B al mismo tiempo se interpreta como la *intersección* de los eventos A y B , y se denotada con $A \cap B$. Esta intersección incluye los puntos muestrales que están en A y B a la vez. Recuerde: Los puntos muestrales son los resultados simples de un experimento. Es decir, los puntos muestrales son los eventos simples de un espacio muestral.

Considere la baraja descrita en el contexto del ítem:

Cartas color azul: **A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15.**

Cartas color rojo: **R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10, R11, R12, R13, R14, R15.**

Cartas color amarillo: **Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8, Y9, Y10, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15.**

Cartas color verde: **V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8, V9, V10, V11, V12, V13, V14, V15**

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:



<https://youtu.be/dFmqqw1BTVY>

Se tienen los siguientes eventos

$$A = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15\}$$

$$D = \{A11, A12, A13, A14, A15, R11, R12, R13, R14, R15, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15, V11, V12, V13, V14, V15\}$$

Los elementos comunes en estos conjuntos corresponden a la intersección:

$$A \cap D = \{A11, A12, A13, A14, A15\}$$

Es decir, la intersección entre A y D se interpreta como “las cartas de color azul que son mayores a 10.”

El evento posee 5 puntos muestrales.

Respuesta: Opción B) 5

Pregunta 55

¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $B \cup C$?

R/ ,

Solución.

Unión de eventos.

Si A y B son eventos de un espacio muestral S , la ocurrencia del evento A o del evento B (o de ambos), corresponde a los que se denomina *unión* de los eventos A y B , se denota con $A \cup B$, e incluye a los puntos muestrales de A y los de B .

Considere la baraja descrita en el contexto del ítem:

Cartas color azul: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15

Cartas color rojo: R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10, R11, R12, R13, R14, R15

Cartas color amarillo: Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8, Y9, Y10, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15

Cartas color verde: V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8, V9, V10, V11, V12, V13, V14, V15

Se tienen los siguientes eventos

$$B = \{A1, A3, A5, A7, A9, A11, A13, A15, R1, R3, R5, R7, R9, R11, R13, R15, Y1, Y3, Y5, Y7, Y9, Y11, Y13, Y15, V1, V3, V5, V7, V9, V11, V13, V15\}$$

$$C = \{A1, A5, A10, A15, R1, R5, R10, R15, Y1, Y5, Y10, Y15, V1, V5, V10, V15\}$$

$$B \cup C = \{A1, A3, A5, A7, A9, A10, A11, A13, A15, R1, R3, R5, R7, R9, R10, R11, R13, R15, Y1, Y3, Y5, Y7, Y9, Y10, Y11, Y13, Y15, V1, V3, V5, V7, V9, V10, V11, V13, V15\}$$

La unión de los eventos B y C se puede interpretar como “las cartas que tengan un número impar o que el número sea divisible por 5”. En este caso, los elementos del conjunto B se le agregaron las cartas con el número 10 (divisible por 5).

El evento posee 36 puntos muestrales.

Respuesta: 36

R/ ,

Pregunta 56

Considere las siguientes proposiciones:

- I. Los eventos A y D son mutuamente excluyentes.
- II. El complemento del evento A , con respecto al espacio muestral, tiene 45 puntos muestrales.

De ellas ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución.

Para evaluar las proposiciones de debe considerar la baraja del contexto:

Cartas color azul: **A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15**

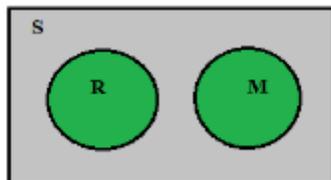
Cartas color rojo: **R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10, R11, R12, R13, R14, R15**

Cartas color amarillo: **Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8, Y9, Y10, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15**

Cartas color verde: **V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8, V9, V10, V11, V12, V13, V14, V15**

Proposición I: “Los eventos A y D son mutuamente excluyentes”

Recuerde que si R y M son eventos de un espacio muestral S , se dice que los eventos R y M son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común, es decir $R \cap M = \emptyset$.



Considerando la baraja descrita en el contexto del ítem, se tienen los siguientes eventos

$A = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15\}$

$D = \{A11, A12, A13, A14, A15, R11, R12, R13, R14, R15, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15, V11, V12, V13, V14, V15\}$

Note que estos eventos tienen en común los siguientes puntos muestrales $\{A11, A12, A13, A14, A15\}$. Por lo tanto, como la intersección no es vacía, entonces A y D no son eventos no son excluyentes. La proposición I es falsa.

Proposición II: “El complemento del evento A, con respecto al espacio muestral, tiene 45 puntos muestrales.”

Complemento

Si A es un evento de un espacio muestral S, la no ocurrencia del evento A se interpreta como la ocurrencia del *complemento* de A, y se representa con A^C . Este incluye los puntos muestrales que no están en A.

El evento A contiene los siguientes puntos muestrales:

$A = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15\}$

La baraja contiene 60 cartas, 15 de cada color (60 puntos muestrales) y el evento A posee 15 puntos muestrales; por lo tanto, el complemento de A viene dado por las 15 cartas de los otros tres colores (amarillo, rojo y verde), es decir, 45 puntos muestrales.

La proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción D) Solo la II

Pregunta 57

Considere la siguiente Información:

La siguiente tabla muestra los datos correspondientes a la cantidad de hogares que hay en 4 países y a la cantidad de esos hogares que poseen el servicio de televisión por cable:

País	Cantidad de hogares (en millones)	Cantidad de hogares(en millones) que poseen el servicio de televisión por cable
J	48	21
F	24,5	22
S	4,4	4,0
N	2	0,9

De acuerdo con la información anterior, si una empresa desea establecerse en el país en el cual tenga la mayor probabilidad de elegir al azar un hogar con televisión por cable, entonces, ¿en cuál país debe establecerse la empresa?

- A) *J*
- B) *F*
- C) *S*
- D) *N*

Solución:

Para efectuar este ítem se debe emplear el concepto empírico o frecuentista de probabilidad:

Concepto empírico o frecuentista de probabilidad:

En una muestra aleatoria que incluye n elementos igualmente probables, de los cuales existe una frecuencia de k elementos a favor de evento A , se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra (se representa con $P(A)$) y viene dada por la razón:

$$P(A) = \frac{\text{frecuencia de resultados a favor de } A}{\text{tamaño de la muestra}} = \frac{k}{n}$$

La empresa debe establecerse en el país que al elegir al azar un hogar haya mayor probabilidad de que este tenga televisión por cable, para determinar dicha probabilidad se parte de los datos proporcionados en la tabla de la siguiente manera:

$$\text{Probabilidad de cada país} = \frac{\text{Cantidad de hogares(en millones) que poseen el servicio de televisión por cable}}{\text{Cantidad de hogares (en millones)}}$$

$$P(J) = \frac{21}{48} = 0,44$$

$$P(F) = \frac{22}{24,5} = 0,90$$

$$P(S) = \frac{4}{4,4} = 0,91$$

$$P(N) = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

La respuesta es el país *S*.

Respuesta: Opción C) *S*

Pregunta 58

Considere la siguiente información:

En una sección de sexto grado la maestra tiene cuatro cajas, cada una de un color diferente, en las cuatro hay chocolates de 4 tipos: M , N , P y Q . Los chocolates solo difieren en el sabor y están distribuidos de la siguiente forma:

Cajas	Tipos de Chocolate			
	M	N	P	Q
Gris	6	10	15	20
Azul	6	10	9	10
Verde	6	12	10	18
Amarilla	12	16	14	18

Si un estudiante puede sacar un chocolate al azar de una de las cajas y desea que sea del tipo N , entonces, ¿cuál caja tiene que escoger para tener la mayor probabilidad de obtener el tipo de chocolate deseado?

- A) Gris
- B) Azul
- C) Verde
- D) Amarilla

Solución

Para efectuar este ítem se debe recordar el concepto clásico de probabilidad:

Concepto clásico de probabilidad.

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables (es decir el espacio muestral tiene n elementos) y un evento A cualquiera tiene a su favor k resultados ($k \leq n$) entonces se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra (se representa con $P(A)$) viene dada por la razón

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados a favor de } A}{\text{Total de resultados del experimento}} = \frac{k}{n}$$

Para poder emplear esta definición es importante conocer los totales de chocolates de cada una de las cajas:

Cajas	Tipos de Chocolate				Total
	M	N	P	Q	
Gris	6	10	15	20	51
Azul	6	10	9	10	35
Verde	6	12	10	18	46
Amarilla	12	16	14	18	60

De acuerdo a los datos de la tabla anterior se tiene para cada caja:

Caja gris:

En la caja gris hay en total 51 chocolates de los cuales 10 son del tipo N, así que la probabilidad viene dada por

$$P(\text{Chocolate } N) = \frac{10}{51} = 0,20$$

Caja azul:

En la caja azul hay en total 35 chocolates de los cuales 10 son del tipo N, así que la probabilidad viene dada por

$$P(\text{Chocolate } N) = \frac{10}{35} = 0,29$$

Caja verde:

En la caja verde hay en total 46 chocolates de los cuales 12 son del tipo N, así que la probabilidad viene dada por

$$P(\text{Chocolate } N) = \frac{12}{46} = 0,26$$

Caja amarilla:

En la caja amarilla hay en total 60 chocolates de los cuales 16 son del tipo N, así que la probabilidad viene dada por

$$P(\text{Chocolate } N) = \frac{16}{60} = 0,2\bar{6}$$

De acuerdo a cada una de las probabilidades calculadas, se concluye que el estudiante debe escoger la caja azul.

Respuesta: Respuesta B) Azul

Pregunta 59

Considere la siguiente información:

En una tienda se tiene un inventario de 1500 bolsos, de los cuales el 40% son negros y el 30% son de cuero. Además, un 5% de los 1500 bolsos son negros y de cuero. De acuerdo con la información anterior, si se selecciona al azar un bolso, entonces, ¿cuál es la probabilidad, en notación decimal, de que **no** sea de cuero ni negro?

R/ ,

Solución

Para organizar mejor la información del problema y hacer un análisis más sencillo, los datos se pueden resumir en un cuadro o en un diagrama de Venn tal como se muestra a continuación.

Material del bolso	Color de bolso		Total (%)
	Negro (%)	Otro color (%)	
Cuero	5	25	30
Otro material	35	35	70
Total	40	60	100

Observe que solamente los valores sombreados fueron dados en el problema, los restantes fueron obtenidos por diferencia. Como en la tienda hay 1500 bolsos, en términos absolutos (cantidad de bolsos) se tiene la siguiente información:

Material del bolso	Color de bolso		Total
	Negro	Otro color	
Cuero	75	375	450
Otro material	525	525	1050
Total	600	900	1500

Ahora, considere los siguientes eventos:

Evento E: el bolso seleccionado sea de cuero

Evento N: el bolso seleccionado sea negro

Empleando la definición clásica de probabilidad, se tiene:

$$P(E) = \frac{450}{1500} = 0,30$$

$$P(N) = \frac{600}{1500} = 0,40$$

$$P(E \cap N) = \frac{75}{1500} = 0,05$$

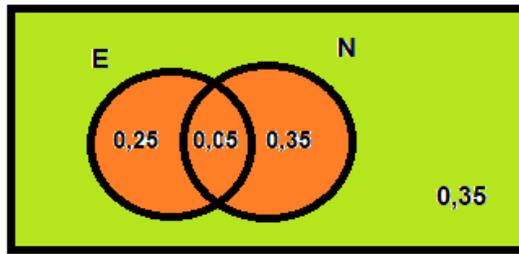
Por lo anterior, la probabilidad de $E \cup N$ se calcula por:

$$\begin{aligned} P(E \cup N) &= P(E) + P(N) - P(E \cap N) \\ &= 0,30 + 0,40 - 0,05 \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

Como el ítem pregunta por la probabilidad de que el bolso **NO** sea negro o de cuero se necesita el complemento, es decir,

$$P(E \cup N)^c = 1 - P(E \cup N) = 1 - 0,65 = 0,35$$

El análisis anterior se puede representar mediante diagramas de Venn de la siguiente manera:



Respuesta: 0,35

R/ 0 ,

Pregunta 60

Considere la siguiente información:

La siguiente tabla muestra los datos correspondientes a la cantidad, en millones, de personas sedentarias o activas, según sexo, en un país:

Categoría	Sexo		Total
	Hombres	Mujeres	
Sedentario	1,16	1,87	3,03
Activo	0,84	0,73	1,57
Total	2	2,6	4,6

De acuerdo con la información anterior, si se selecciona al azar una persona de ese país, entonces, ¿cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que sea una persona activa o un hombre?

- A) 0,34
- B) 0,43
- C) 0,59
- D) 0,78

Solución

Considere los siguientes eventos

Evento A: activo
Evento H: hombre

Como el espacio muestral está compuesto de 4,6 (millones de personas), entonces empleando la definición clásica de probabilidad se tiene que:

$$P(A) = \frac{1,57}{4,6} = 0,34$$

$$P(H) = \frac{2}{4,6} = 0,43$$

$$P(A \cap H) = \frac{0,84}{4,6} = 0,18 \text{ (hombres activos)}$$

Por lo anterior, la probabilidad de $A \cup H$ se calcula por:

$$\begin{aligned} P(A \cup H) &= P(A) + P(H) - P(A \cap H) \\ &= 0,34 + 0,43 - 0,18 \\ &= 0,59 \end{aligned}$$

Es decir, al seleccionar al azar una persona de ese país, la probabilidad de que sea una persona activa o un hombre es igual a 0,59.

Respuesta: Opción C) 0,59