REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Circunferencias y rectas.

En este documento usted podrá encontrar la solución de los ítems 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. A continuación se detalla cada solución:

Pregunta 1

Si el centro de la circunferencia C se ubica en el punto $(4\,,-3)$ y la medida de su diámetro es 8, entonces la ecuación de esa circunferencia corresponde a:

A) $(x+4)^2+(y-3)^2=4$

B) $(x+4)^2+(y-3)^2=8$

C) $(x-4)^2+(y+3)^2=16$

D) $(x-4)^2+(y+3)^2=64$

Solución

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

en donde el par ordenado (h,k) es el centro de la circunferencia y r representa la medida de su radio.

Por lo tanto, si $(4,-3)$ es el centro y el diámetro mide 8 y es el doble del radio, entonces $r=4$, con esta información se puede escribir la ecuación de la circunferencia de la siguiente manera:

$$(x-4)^2+(y--3)^2=4^2$$

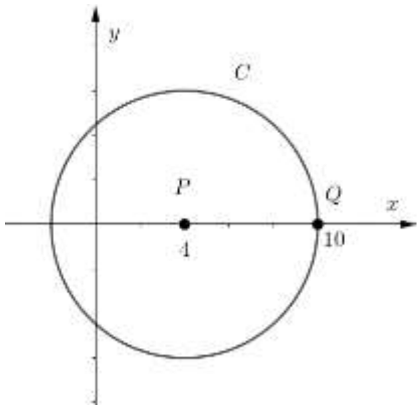
Es decir:

$$(x-4)^2+(y+3)^2=16$$

Respuesta: Opción C) $(x-4)^2+(y+3)^2=16$

Pregunta 2

Considere la siguiente representación gráfica de una circunferencia C de centro P:



De acuerdo con la información anterior, la ecuación de la circunferencia C corresponde a:

A) $(x-4)^2+y^2=36$

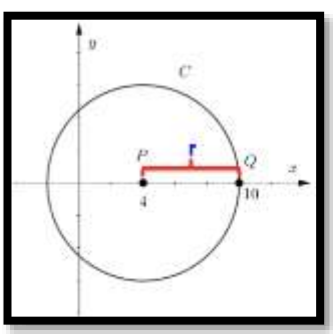
B) $x^2+(y-4)^2=36$

C) $(x-4)^2+y^2=100$

D) $x^2+(y-4)^2=100$

Solución

En la figura se observa que el centro de la circunferencia llamada C es el punto P cuya coordenada es $(4\,,0)$. Además, su radio es la distancia desde el punto P hasta el punto Q, que se encuentra a 6 unidades de distancia.



Video de ayuda

Para complementar su estudio:

https://youtu.be/Ky4UjpJ5LDs

Observe que $10 - 4 = 6$, este último dato corresponde a la medida del radio, esto quiere decir que $r = 6$.

Si la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Dado que su centro es $P(4\,,0)$ y su radio mide 6, se tiene que la ecuación de C es:

$$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 6^2$$

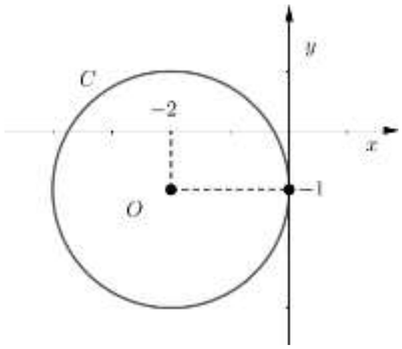
$$(x - 4)^2 + y^2 = 36$$

Respuesta: Opción A) $(x - 4)^2 + y^2 = 36$

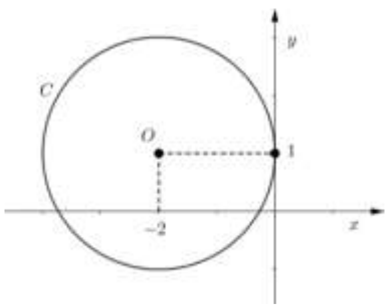
Pregunta 3

¿Cuál es la representación gráfica de la circunferencia C de centro O, dada por $(x+2)^2+(y-1)^2=4$?

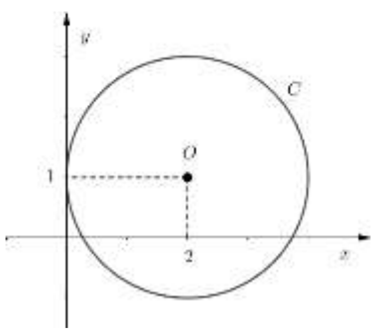
A)



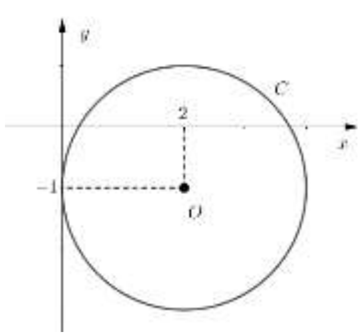
B)



C)



D)



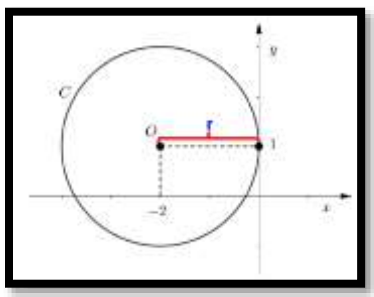
Solución

Si la ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, se sabe que el centro corresponde al par ordenado (h,k) y que r representa la longitud del radio.

Para el ejercicio que se está resolviendo la ecuación viene dada por $(x+2)^2+(y-1)^2=4$, entonces si se expresa la ecuación de la siguiente manera:

$$(x--2)^2+(y-1)^2=2^2$$

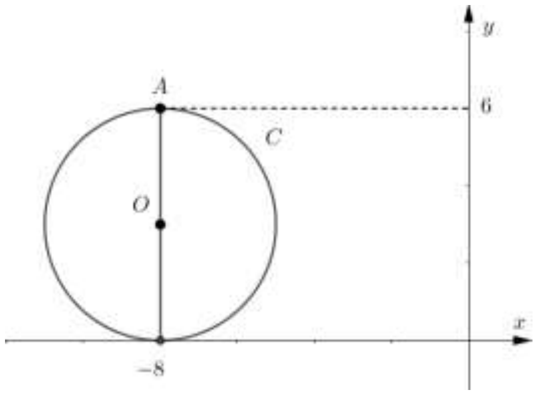
se puede establecer que las coordenadas del centro, representado por la letra O, son $(-2\,,1)$, y su radio es $r=2$. La única figura que tiene esas dos características es la representada en la opción B, como se muestra a continuación:



Respuesta: Opción B)

Pregunta 4

Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O:



De acuerdo con la información anterior, la ecuación de una recta tangente a C es:

A) $x = 0$

B) $x = 6$

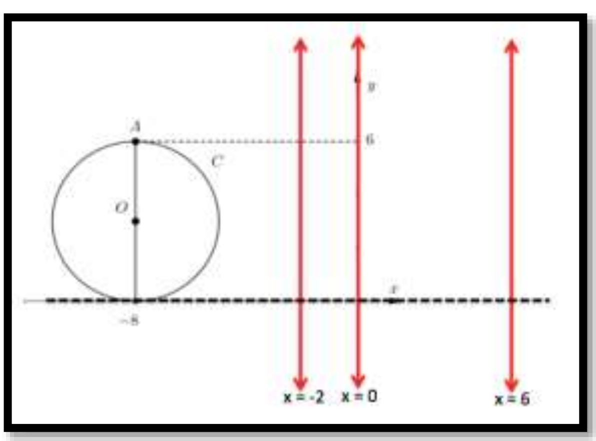
C) $x = -2$

D) $x = -11$

Solución

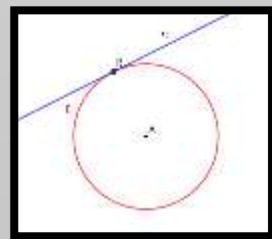
Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un único punto. Existen infinitas rectas tangentes a la circunferencia C.

Analicemos las opciones propuestas:

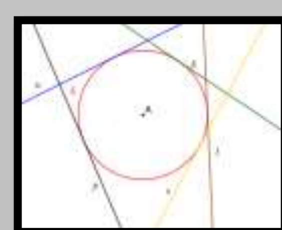


Recta tangente

La recta n y la circunferencia E, con centro A se cortan (o intersecan) en un único punto R, en este caso se dice que la recta es tangente a la circunferencia.



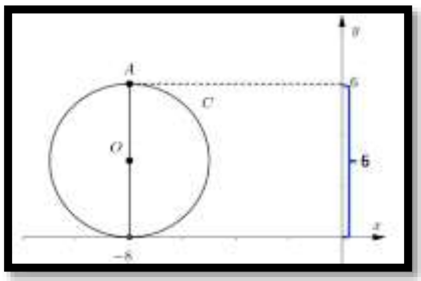
Una circunferencia puede tener un número infinito de rectas tangentes. A continuación se muestran cinco de ellas.



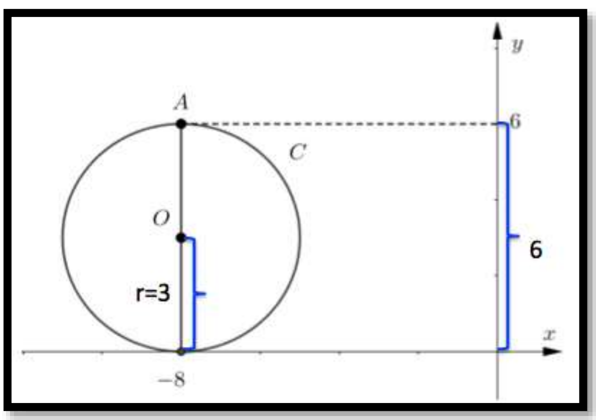
- La recta $x = 0$ es una vertical que pasa por el origen, coindice con el eje y. Esta recta no es tangente a C.
- La recta $x = 6$ es una vertical que pasa por $(6\,,0)$. Esta recta no interseca C.
- La recta $x = -2$ es una vertical que pasa por $(-2\,,0)$. Esta recta no interseca C.

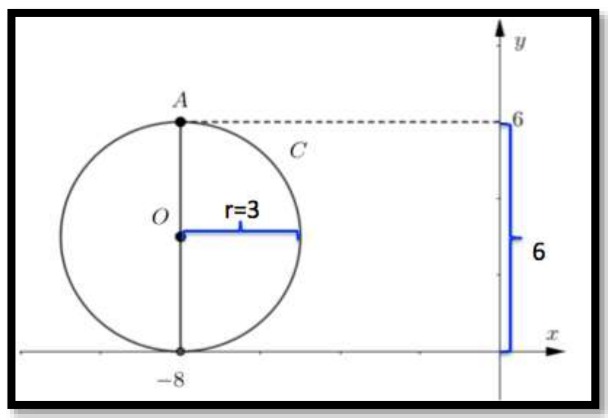
Entonces, ¿por qué $x = -11$ es la respuesta correcta?

De la figura se deduce que el diámetro de la circunferencia mide 6, debido a que la distancia sobre el eje y esta representada con esa cantidad de unidades. También, se puede observar que la distancia desde $(-8\,,0)$ hasta $(-8\,,6)$ es de 6 unidades.



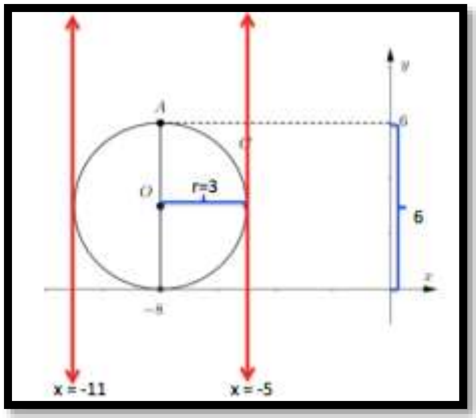
De la información anterior, se deduce que el radio de la circunferencia mide 3.





Dos rectas verticales que intersecan a la circunferencia C en un solo punto se encuentran (según la figura) a 3 unidades a la derecha o a 3 unidades a la izquierda de $x = -8$.

Esto es $x = -5$, o bien $x = -11$.



Respuesta:

Opción D) $x = -11$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:

https://youtu.be/ZIpHv0sjInE

Pregunta 5

Considere la siguiente información:

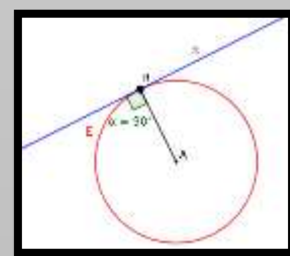
El centro de la circunferencia C, dada por $x^2 + y^2 = 9$, es el punto M. La recta "k" es tangente a C en $P(0\,,3)$ y $A(4, n)$ es un punto que pertenece a "k".

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es la medida de $\overline{AM}$? (Si la respuesta es un número entero entonces hay que dejar la parte decimal en blanco)

R/ ☐☐☐☐,☐☐

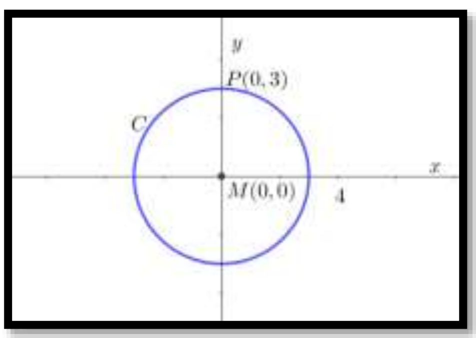
Relación entre radio y recta tangente a una circunferencia

Si E es una circunferencia de centro A y n una recta tangente a E en el punto R, entonces, el radio $\overline{AR}$ de la circunferencia es perpendicular a la recta n.

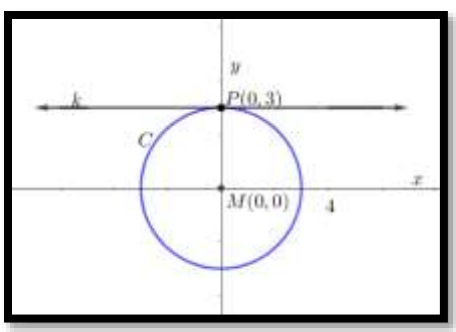


Solución

De acuerdo con el enunciado la ecuación de la circunferencia C con centro en el punto M es $x^2 + y^2 = 9$. Si se sabe que la ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y el centro corresponde al par ordenado (h, k) y que r representa la longitud del radio, entonces se puede establecer que la circunferencia está centrada en el punto $M(0\,,0)$ y su radio $\overline{MP}$ mide 3. Gráficamente se puede representar la situación de la siguiente manera:

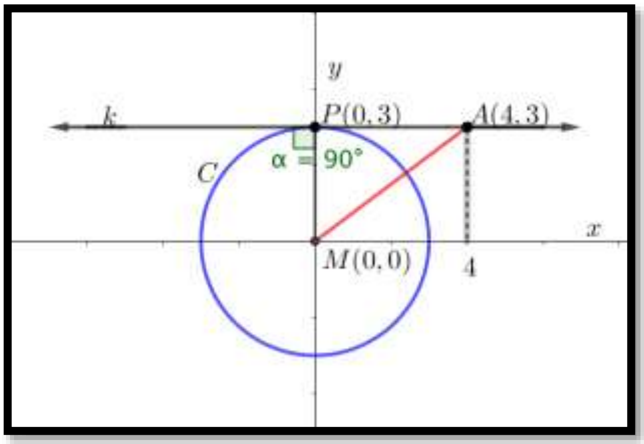


Además, se indica que la recta k es tangente a la circunferencia C en $(0\,,3)$.



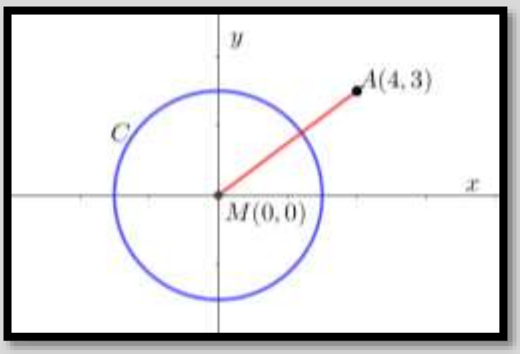
Después de tener el escenario claramente identificado, se coloca la información faltante:

Como la recta k es tangente a la circunferencia C en $(0\,,3)$, entonces, es perpendicular al radio $\overline{MP}$ en el punto de intersección. Esto permite afirmar que el punto $A(4, n)$ que pertenece a la recta k, tiene como valor 3 en la posición de n, debido a que la recta k es paralela al eje x y mantiene una distancia constante a él.



Ahora, se centrará la atención en obtener la distancia entre A a M, que corresponde al segmento señalado en la imagen con rojo, existen al menos dos estrategia de solución:

Primera estrategia:

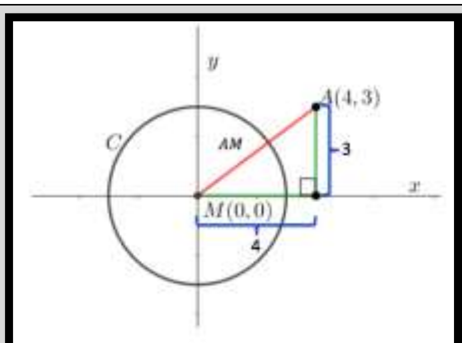


Se trabajará con el punto $M(0\,,0)$ y $A(4\,,3)$, al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
d(M, A) &= \sqrt{(0-4)^2 + (0-3)^2} \\
&= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{16 + 9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la medida del $\overline{AM}$ es 5.

Segunda estrategia:



Se trabajará con el punto $M(0\,,0)$ y $A(4\,,3)$, esto permite construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos tiene longitud 3 y 4, como se muestra en la imagen. Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
(AM)^2 &= (4)^2 + (3)^2 \\
(AM)^2 &= 16 + 9 \\
AM &= \sqrt{25} \\
AM &= 5
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la medida del $\overline{AM}$ es 5.

Respuesta: R/ □□□5,□□

Pregunta 6

Considere las siguientes proposiciones referentes a la circunferencia C, dada por $(x-3)^2+y^2=8$:

I. La recta dada por $x=3$ es secante a C.

II. La recta dada por $y=x+1$ es tangente a C.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

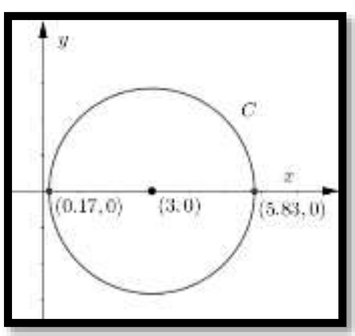
Solución

A continuación se proponen dos soluciones para este ítem, una que hace énfasis en la representación gráfica y otra en procedimientos algebraicos. Es importante indicar que el estudiante no debe realizar ambas estragegias: gráfica y algebraica, sino aquella que considere de mayor facilidad.

Recordemos que la ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde el centro corresponde al par ordenado (h,k) y que r representa la longitud del radio.

Si la circunferencia C viene dada por la ecuación $(x-3)^2+y^2=8$, también se puede expresar de la siguiente manera:$(x-3)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$, de aquí se puede extraer que tiene su centro en el punto $(3\,,0)$ y su radio, se puede obtener después de calcular $\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$.

Por lo tanto, la circunferencia C interseca el eje "x" en los pares ordenados $(3-2.83\,,0)$ y en $(3+2.83\,,0)$, esto es, $(0.17\,,0)$ y $(5{,}83\,,0)$, como se ve en la figura siguiente:



Ahora revisemos las proposiciones una a una.

Relación: recta, circunferencia y discriminante

Si $y = \boldsymbol{mx+b}$ es la ecuación de una recta y $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ es la ecuación de una circunferencia, para determinar, algebraicamente, si la recta es tangente, secante o exterior a la circunferencia, se puede sustituir la y de la ecuación de la circunferencia por $\boldsymbol{mx+b}$ y resolver la ecuación resultante:

$$(x-h)^2+(\boldsymbol{m\,x+b}-k)^2=r^2$$

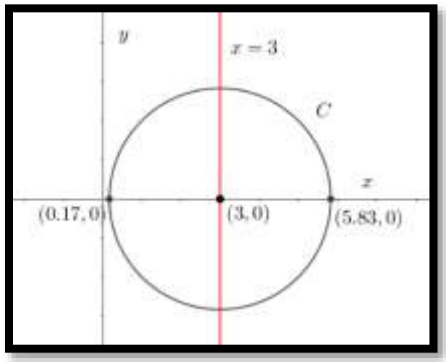
Esta es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es Δ. Se tiene que:

Si $\Delta < \mathbf{0}$, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto la recta es exterior a la circunferencia.

Si $\Delta = \mathbf{0}$, la ecuación tiene solo una solución real y por lo tanto la recta es tangente a la circunferencia.

Si $\Delta > \mathbf{0}$, la ecuación tiene dos soluciones reales y por lo tanto la recta es secante a la circunferencia.

- **Proposición I**, la recta $x = 3$ es secante a C. Gráficamente se puede resolver el ejercicio al trazar la recta indicada, entonces se puede verificar que esta corta a la circunferencia en dos puntos.



Otra forma de resolver el ejercicio es de manera algebraica, para esto se puede proceder como se muestra a continuación:

> Se sustituye el valor de x por 3, en la ecuación de la circunferencia, de la siguiente manera:
> $(x-3)^2 + y^2 = 8$
> $(3-3)^2 + y^2 = 8$
> $0 \quad + \ y^2 = 8.$
> $y^2 = 8.$
> La ecuación cuadrática $y^2 = 8$ posee dos soluciones debido a que $y = \mp\sqrt{8}$.
>
> Por lo tanto, llegamos a la misma conclusión, existen dos intersecciones (hay dos soluciones para la ecuación que se resolvió producto de la sustitución), por lo tanto, la recta $x = 3$ es secante a la circunferencia.

Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

- **Proposición II,** la recta dada por $y = x + 1$ es tangente a C.

Se debe sustituir $y = x + 1$ en la ecuación de la circinferencia C:

$$(x-3)^2 + y^2 = 8$$

$$(x-3)^2 + (x+1)^2 = 8$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2x + 1 = 8$$

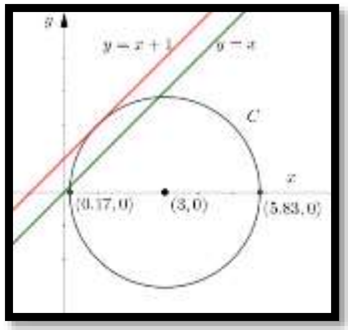
$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

Como el discriminante es igual a 0, esto indica que la ecuación posee solución única en IR y significa que la recta $y = x + 1$ interseca **solamente una vez** a dicha circunferencia, por lo tanto es una recta tangente.

Nota:

Para trazar $y = x + 1$, es necesario saber que $y = x$ pasa por el punto $(0, 0)$ y que con una traslación en el eje x de una unidad horizontalmente a la izquierda (hacia -1) se consigue graficar la recta que buscamos. Por tanto, bastará con hacer los siguientes trazos:



Al determinar la solución de la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x + 2 = 0$ la respuesta corresponde a $x = 1$.

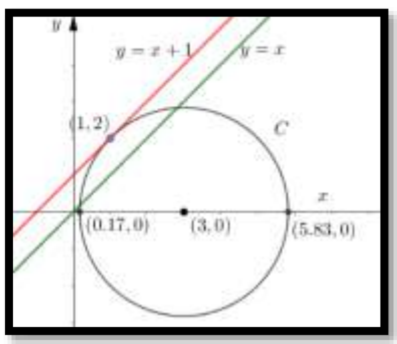
Para encontrar la intersección entre ambas figuras (recta y circunferencia), se puede sustituir $x = 1$ en

$y = x + 1$

$y = 1 + 1$

$y = 2$

Por lo tanto, la intersección de ambas figuras ocurre en el punto (x , y) que esta formado por $(1 , 2)$, como se puede ver en la figura:



Por lo tanto, la proposición II es verdadera.

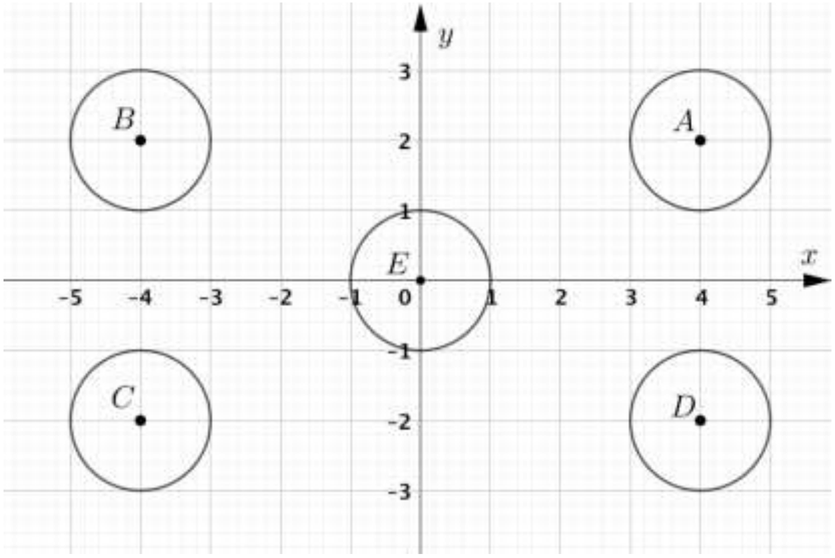
Respuesta: Opción A) Ambas

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:

https://youtu.be/eg8HOmgtUlY

Considere la siguiente representación gráfica, referente a cinco circunferencias, cuya medida del radio es 1 y cuyos centros son $A(4\,,2)$, $B(-4\,,2)$, $C(-4\,,-\,2)$, $D(4\,,-2)$ y $E(0\,,0)$, para responder los ítems 7 y 8:



Pregunta 7

Considere las siguientes proposiciones:

I. La circunferencia de centro B se puede obtener al trasladar 8 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) a la circunferencia de centro A.

II. La circunferencia de centro D se puede obtener al trasladar 4 unidades hacia la abajo (verticalmente) a la circunferencia de centro A.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

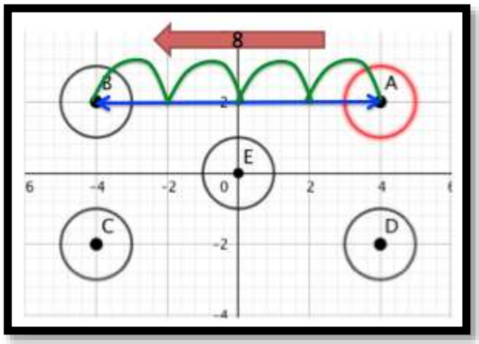
C) Solo la I

D) Solo la II

Solución

Analicemos cada proposición:

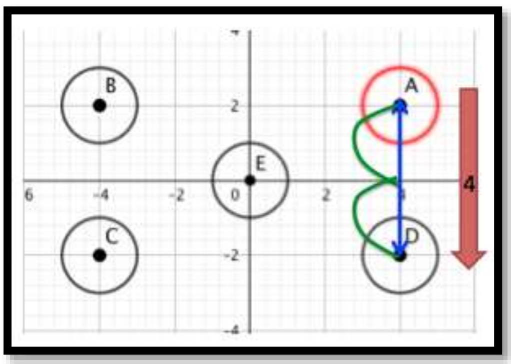
- **Proposición I.** La circunferencia de centro B se puede obtener al trasladar 8 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) a la circunferencia del centro A.



Las coordenadas del punto A son $(4\,,2)$. Trasladar este punto 8 unidades a la izquierda significa **restar** 8 unidades a la abscisa (x) de este punto, o sea: $(4-8\,,2)$, esto es, $(-4\,,2)$, que corresponde a las coordenadas de B.

Por lo tanto, <u>la I proposición es verdadera.</u>

- **Proposición II.** La circunferencia de centro D se puede obtener al trasladar 4 unidades hacia abajo (verticalmente) a la circunferencia de centro A.



Las coordenadas del punto A son $(4\,,2)$. Trasladar este punto 4 unidades hacia abajo, significa **restar** 4 unidades a la ordenada (y) de este punto, o sea $(4\,,2-4)$, esto es $(4,-2)$, que corresponde a las coordenadas de D.

Por lo tanto, <u>la II proposición es verdadera.</u>

Respuesta:

Opción A) Ambas

Pregunta 8

Si a la circunferencia de centro E se le aplica una traslación de 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y 2 unidades hacia abajo (verticalmente), entonces se obtiene la circunferencia cuya ecuación es:

A) $(x-4)^2+(y-2)^2=1$

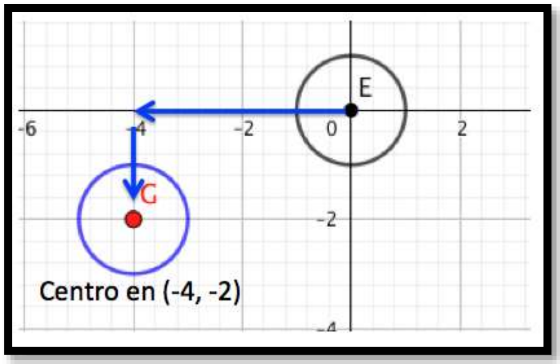
B) $(x+4)^2+(y+2)^2=1$

C) $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

D) $(x+4)^2+(y-2)^2=1$

Solución

Si realizamos las traslaciones indicadas, 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) y 2 unidades hacia abajo (verticalmente) se tiene que:



Lo anterior, significa que:

- 4 unidades hacia la izquierda (horizontalmente) corresponde a operar el punto origen E$(0\,,0)$ y restar 4 unidades a la coordenada x como se presenta a continuación: $(0-4,0)$ por lo tanto, se transformó en $(-4,0\,)$.
- 2 unidades hacia abajo (verticalmente) corresponde a operar el punto $(-4\,,0)$ y restar 2 unidades a la coordenada y como se presenta a continuación: $(-4,0-2)$ por lo tanto, se transformó en $(-4,-2)$.

Por lo tanto, el centro se encuentra en $(-4,-2)$ y como se ha trasladado el mismo objeto, una circunferencia de radio igual a 1, entonces la ecuación corresponde a:

$$(x--4)^2+(y--2)^2=1$$

$$(x+4)^2+(y+2)^2=1$$

Respuesta: Opción B) $(x+4)^2+(y+2)^2=1$

Video de ayuda

Puede complementar su estudio con un video explicativo accediendo al siguiente enlace:

https://youtu.be/5HDMrvUtp4w