REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Conceptos básicos de funciones.

En este documento usted podrá encontrar la solución de los ítems 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y 30. A continuación se detalla cada solución:

Pregunta 23

Sea M el domino de una función, con $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,, x < 6\,\}$. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto universo, entonces el complemento de M corresponde al intervalo

A) $]-\infty\,, 6[$

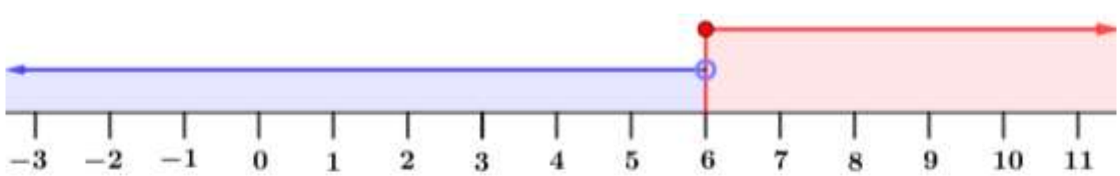
B) $]-\infty\,, 6]$

C) $]6\,, +\infty[$

D) $[6\,, +\infty[$

Solución.

Al representar el conjunto M graficamente se observa claramente que M contiene los números reales menores que 6 (parte azul), entonces el complemento contiene los números reales mayores o iguales que 6 (parte roja), lo que corresponde al intervalo $[6\,, +\infty[$.



Respuesta: Opción D**)**

Considere la siguiente información para responder a los ítems 24 y 25:

Sean f y g dos funciones tales que $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ con $B \subset A$, $A = [1\,, 14]$ y $B \cap A = [2\,, 8]$.

Pregunta 24

Considere las siguientes proposiciones:

I. $2 \in B$

II. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ 1 < x < 14\,\}$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

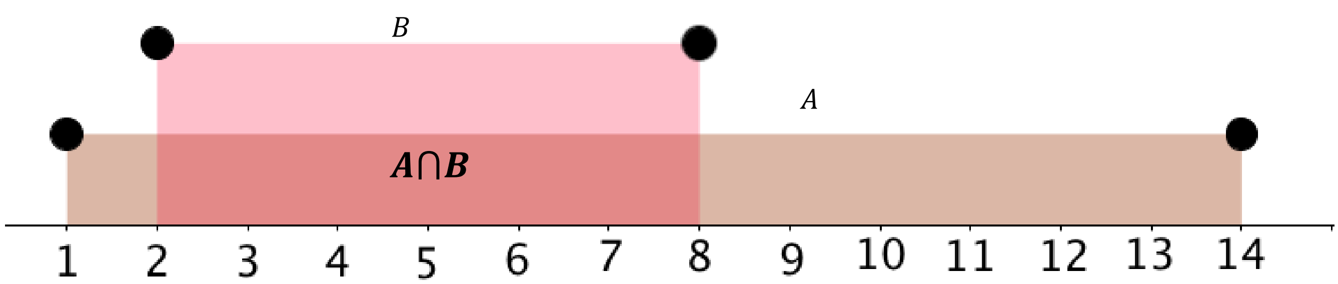
B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Solución.

Al representar gráficamente los dominios se obtiene



Claramente se ve que si $A \cap B = [2\,, 8]$, implica que $2 \in A$ y $2 \in B$, pues el intervalo es cerrado en sus extremos. Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

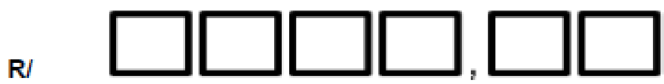
Como $A = [1\,, 14]$, esto significa que contiene a 1 y a 14, pues el intervalo es cerrado en sus extremos. Por lo tanto, la proposición II es falsa, ya que la proposición $1 < x < 14$, excluye ambos extremos.

Respuesta: Opción C) **Solo** la I

Pregunta 25

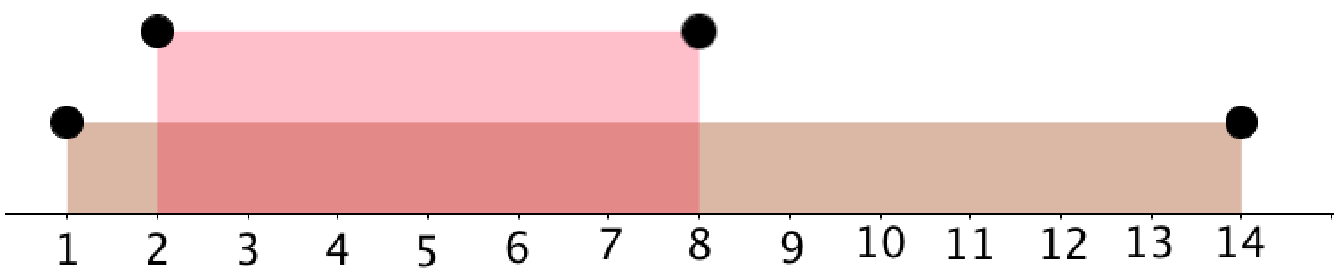
Sean f y g dos funciones tales que $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ con $B \subset A$, $A = [1\,,14]$ y $B \cap A = [2\,,8]$.

Si el dominio de g expresado en notación de intervalo es $B = [a\,,b]$, entonces, ¿cuál es el valor numérico de "b"? (no incluya decimales después de la coma)

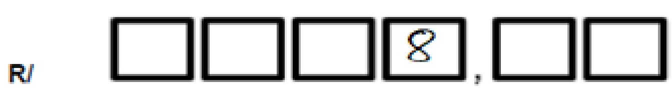


Solución.

Como B está contenido en A, y su intersección contiene los números reales mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 8 ($B \subset A = [1\,,14]$ y $B \cap A = [2\,,8]$), significa que $B = [2\,,8]$. Por lo tanto el valor de b es 8, como se observa en la gráfica.



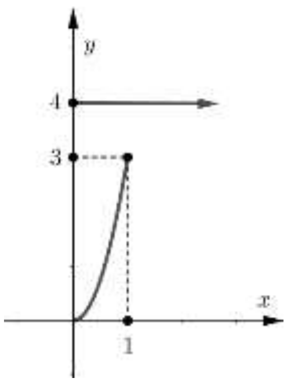
Respuesta:



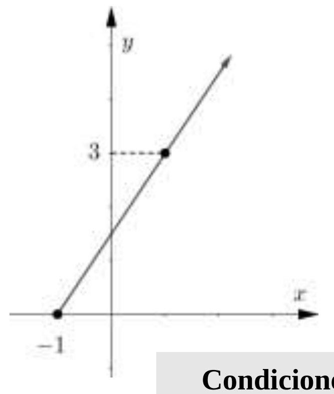
Pregunta 26

Considere las siguientes representaciones gráficas:

I.



II.



De ellas, ¿cuál o cuáles pueden representar una función?

A) Ambas

B) Ninguna

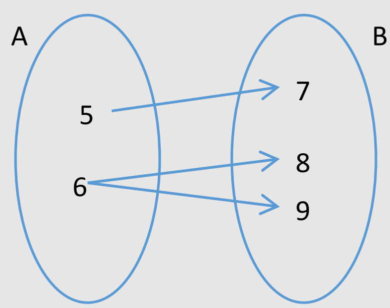
C) Solo la I

D) Solo la II

Condiciones para que una relación sea función

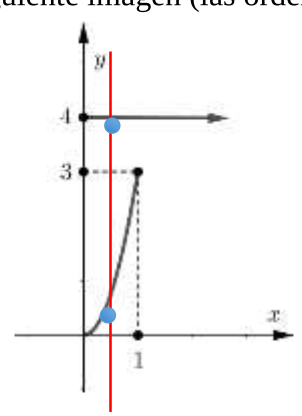
Recuerde, para que una relación sea función debe cumplir que todos los elementos del dominio tienen que tener exactamente una sola imagen.

Por ejemplo, la siguiente relación no es una función pues el elemento 6 tiene dos imágenes (8 y 9)



Solución.

La gráfica I muestra que todos los valores en el intervalo $[0\,,1]$ tienen dos imágenes, como se observa en la siguiente imagen (las ordenadas de los dos puntos representados por bolitas azules).



Por lo tanto esta gráfica **no** representa una función.

La gráfica II muestra que cada uno de los valores de su dominio $[-1\,,+\infty[$ tiene solo una imagen. Por lo tanto la gráfica II representa una función.

Respuesta: Opción D) **Solo** la II.

Pregunta 27

Considere las siguientes relaciones f y g:

I. $f: [0\,,+\infty[\ \to\ ]-\infty\,,0]$, con $f(x) = -x^2$

II. $g: [0\,,+\infty[\ \to\ ]-\infty\,,0]$, con $f(x) = -x$

De ellas, ¿cuál o cuáles representa(n) una función?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Solución.

Como el dominio de la función $f(x) = -x^2$ es $[0\,,+\infty[$, sus imágenes siempre serán números menores o iguales que 0, como se puede observar en la siguiente tabla con algunos valores arbitrarios:

x	$f(x) = -x^2$
0	$f(0) = -0^2 = 0$
1	$f(1) = -1^2 = -1$
2	$f(2) = -2^2 = -4$
5	$f(5) = -5^2 = -25$
10	$f(10) = -10^2 = -100$

Por lo general, dado cualquier número real *x* en el intervalo $[0\,,+\infty[$, $-x^2$ es un único número real en el intervalo $]-\infty\,,0]$. Esto significa que f corresponde a una función.

En el caso de la función $g: [0\,,+\infty[\, \rightarrow\,]-\infty\,,0]$, $g(x) = -x$, cada una de sus imágenes será negativa o 0, como se puede observar en la siguiente tabla con algunos valores arbitrarios:

x	$g(x) = -x$
0	$g(0) = -0 = 0$
1	$g(1) = -1$
2	$g(2) = -2$
5	$g(5) = -5$
10	$g(10) = -10$

Como su dominio es $[0\,,+\infty[$s u codominio es $]-\infty\,,0]$. Esto significa que g si corresponde a una función.

Respuesta: Opción A) Ambas.

28) Considere los siguientes criterios correspondientes a las funciones f y g:

$f(x) = 2x - 1$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^2 + 8$

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el criterio de $(g \circ f)$?

A) $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 7$

B) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 15$

C) $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 9$

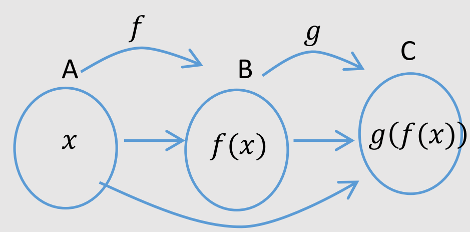
D) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 9$

Composición de funciones

Recuerde que la composición de funciones se define $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Nótese que para poder aplicar la composición de funciones, es suficiente que el recorrido de la primera función f sea igual al dominio de la segunda g. Es decir, que en este caso se podría realizar la composición $(f \circ g)(x)$.



$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Solución.

Para determinar $(g \circ f)(x)$ es necesario sustituir en el criterio de g, el criterio de f, es decir:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$= (2x-1)^2 + 8$$

$$= (4x^2 - 4x + 1) + 8$$

$$= 4x^2 - 4x + 9$$

$$\therefore\ (g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 9$$

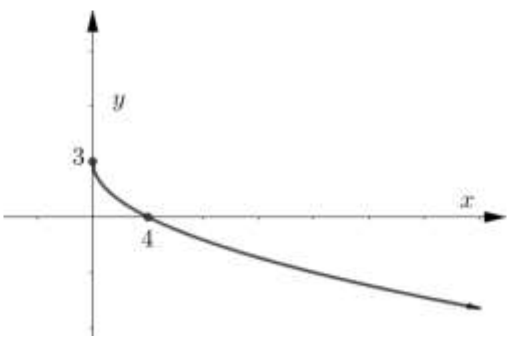
Video de ayuda
En este video encontrará otro ejemplo de composición de funciones

https://youtu.be/WtRGRh7t-eY

Respuesta: Opción D) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 9$

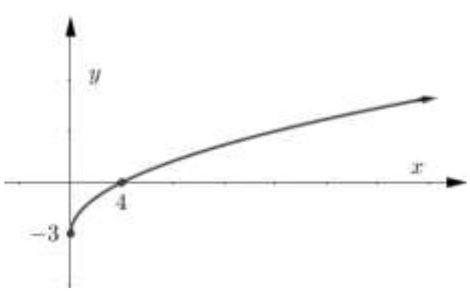
Pregunta 29

Considere la siguiente representación gráfica de una función:

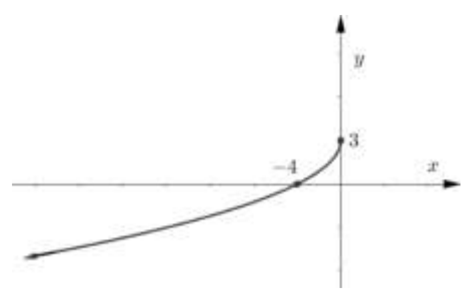


De acuerdo con la información anterior, la gráfica de la función inversa de f corresponde a

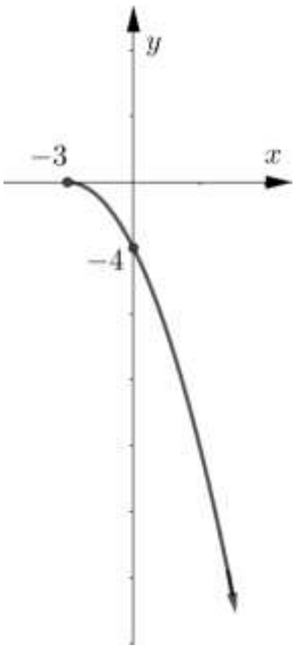
A)



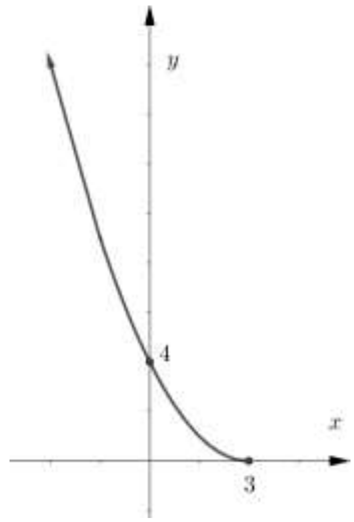
B)



C)



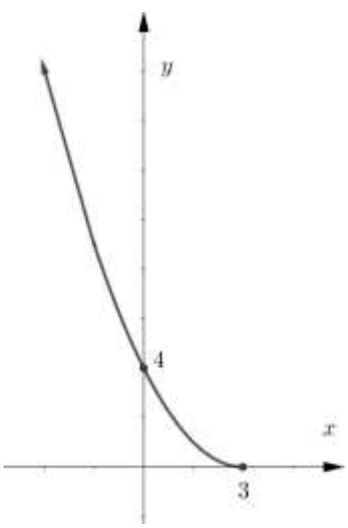
D)



Solución.

Estrategia I

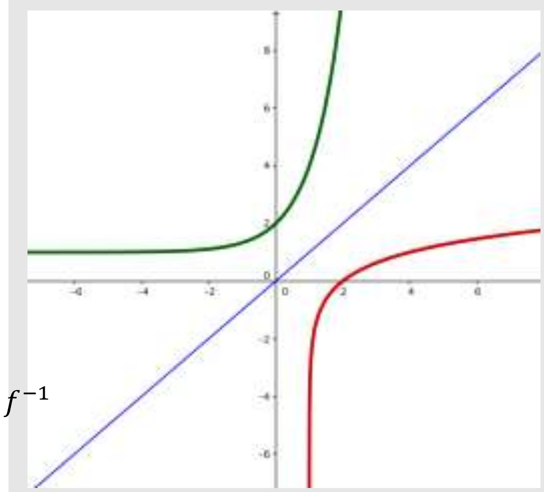
Dos pares ordenados que pertenecen a la función f son $(0\,,3)$ y $(4\,,0)$. Esto significa que dos pares ordenados que pertenecen a f^{-1} son $(3\,,0)$ y $(0\,,4)$. La única gráfica que contiene estos dos puntos y que satisface la condición de simetría respecto a la recta $y = x$ es:



Gráfica de una función y su inversa

Si graficamos una función y su inversa en un mismo sistema de coordenadas, estas son simétricas con respecto a la función identidad $y = x$. Como por ejemplo

f



f^{-1}

Recuerde que la inversa de una función $f: A \to B$, es otra función que se denota por $f^{-1}: B \to A$ y que cumple que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Respuesta: Opción D)

Estrategia II

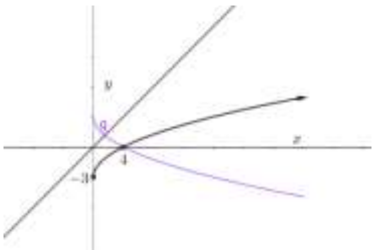
Las gráficas de una función y su inversa son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Por lo que para resolver el ítem basta con dibujar la función f "encima" de las opciones y visualizar cuál cumple la condición anterior, como se muestra a continuación:

Video de ayuda

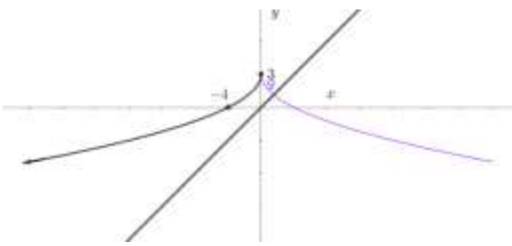
En este video encontrará otro ejemplo donde se calcula la función inversa

https://youtu.be/nY8oOD26xY8

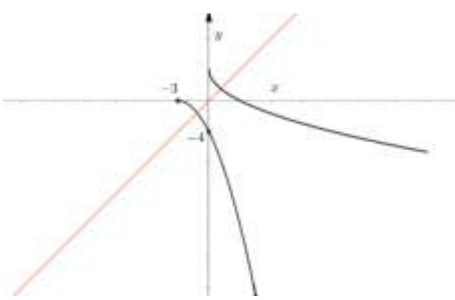
A)



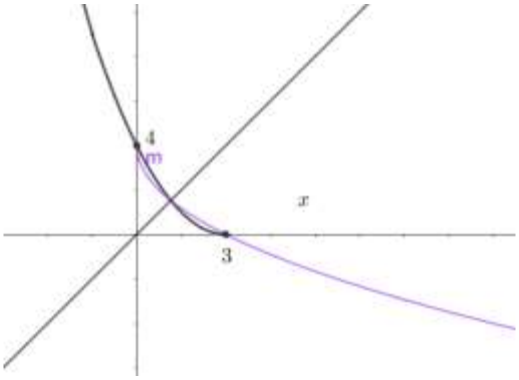
B)



C)



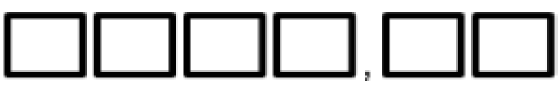
D)



Respuesta: Opción D)

Pregunta 30

Si f es la función dada por $f(x) = -3x + \frac{1}{3}$, entonces, ¿cuál es el valor de $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$? (si el resultado es entero entonces no escriba en los campos correspondientes a la parte decimal)

R/ 

Solución.

Estrategia I

Para obtener $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$, basta con igualar el criterio de f a $\frac{-8}{3}$, y despejar el valor de x:

$$\frac{-8}{3} = -3x + \frac{1}{3}$$

$$3x = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}$$

$$3x = 3$$

Cálculo de la inversa

Si $f: A \to B$ tiene función inversa, entonces para calcular la fórmula de dicha inversa se despeja la variable x en la ecuación $y = f(x)$.
Por ejemplo para calcular la inversa de $f: [0, +\infty[\to [-3, +\infty[$,

$$f(x) = 2x^2 - 3$$
$$y = 2x^2 - 3$$
$$y + 3 = 2x^2$$
$$\frac{y+3}{2} = x^2$$
$$\sqrt{\frac{y+3}{2}} = x$$

Así, $f^{-1}: [-3, +\infty[\to [0, +\infty[$, con $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

$x = 1$

Video de ayuda
En este video encontrará otro ejemplo donde se calcula la función inversa

https://youtu.be/nY8oOD26xY8

Estrategia II

Para obtener $f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right)$, primero se calcula la fórmula de la inversa de f, despejando x de la ecuación

$$y = -3x + \frac{1}{3}$$

$$y - \frac{1}{3} = -3x$$

$$\frac{y - \frac{1}{3}}{-3} = x$$

$$\frac{-y}{3} + \frac{1}{9} = x$$

Intercambiando x con y obtenemos $y = f^{-1}(x) = \frac{-x}{3} + \frac{1}{9}$.

Luego se sustituye el valor de $x = \frac{-8}{3}$ en esta función

$$f^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{-\left(\frac{-8}{3}\right)}{3} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= 1$$

Respuesta:

R/ $\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{1}\,,\,\boxed{}\,\boxed{}$