REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Modelos.

En este documento usted podrá encontrar la solución de los ítems 40, 41, 42, 43 y 44. A continuación se detalla cada solución:

Pregunta 40

Considere el siguiente enunciado:

Después de administrar cierto medicamento a un paciente, la cantidad de miligramos de ese medicamente presente en el torrente sanguíneo disminuye a la tercera parte cada 5 horas. La fórmula que modela la situación anterior está dada por $M = 50 \cdot 3^{\frac{-t}{5}}$, donde "$M$" es la cantidad de medicamento presente en el organismo, en miligramos, y "t" es el tiempo transcurrido, en horas, desde el momento de la aplicación del medicamento, con $t \geq 0$.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. La cantidad inicial de medicamento es $50\ mg$.

II. Para que haya menos de $5\ mg$ en el torrente sanguíneo de un paciente, deben transcurrir más de 10 horas.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Solución.

Para encontrar la cantidad inicial de medicamento, es necesario sustituir $t = 0$ en la fórmula $M = 50 \cdot 3^{\frac{-t}{5}}$:

$$M = 50 \cdot 3^{\frac{0}{5}} = 50$$

pues $3^0 = 1$.

Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

Para conocer cuánto tarda en haber menos de 5 mg en el torrente sanguíneo, se iguala la fórmula $M = 50 \cdot 3^{\frac{-t}{5}}$ a 5:

$$5 = 50 \cdot 3^{\frac{-t}{5}}$$

$$\frac{1}{10} = 3^{\frac{-t}{5}}$$

Luego se aplica la definición de logaritmo:

$$log\frac{1}{10} = log3^{\frac{-t}{5}}$$

$$-1 = \frac{-t}{5}log3$$

$$\frac{5}{log3} = t$$

$$t \approx 10{,}48$$

Por lo tanto, hacen falta más de 10 horas para que haya menos de 5 mg de este producto en torrente sanguíneo.

Respuesta: Opción A) Ambas

Videos de ayuda

En estos videos encontrará dos problemas que involucra una función exponencial para su solución

https://youtu.be/H4HAJMyT6Xc

https://youtu.be/KCKJl91BEDs

Pregunta 41

Considere la siguiente información:

El valor de un automóvil empieza a disminuir a partir del momento de la compra. Su depreciación (disminución del valor), depende del precio original y del modelo. En las siguientes tablas se muestran ejemplos del valor de dos modelos de automóvil, después de cierta cantidad de años desde el momento en que se realizó su compra:

Modelo A:

Años	0	1	2	3	4
Valor	10 400 000	7 800 000	5 850 000	4 387 000	3 290 625

Modelo B:

Años	0	1	2	3	4
Valor	9 375 000	7 500 000	6 000 000	4 800 000	3 840 000

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. El valor del modelo A, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función lineal.

II. El valor del modelo B, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

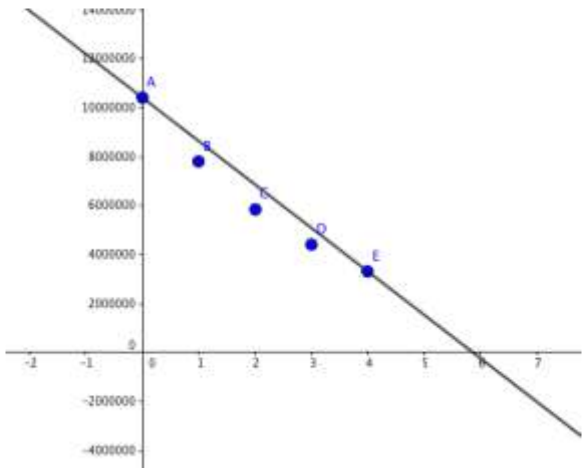
Solución.

Proposición I: El valor del modelo A, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función lineal.

Como se puede observar en la tabla del modelo A, conforme avanzan los años, el valor se deprecia cada vez más lentamente:

Modelo A		
Año	**Valor**	**Depreciación**
0	10 400 000	0
1	7 800 000	2 600 000
2	5 850 000	1 950 000
3	4 387 500	1 462 500
4	3 290 625	1 096 875

Por lo tanto, no refleja el comportamiento de una función lineal. Esto se puede visualizar más fácilmente si graficamos los puntos en un sistema de coordenadas, como se muestra a continuación:



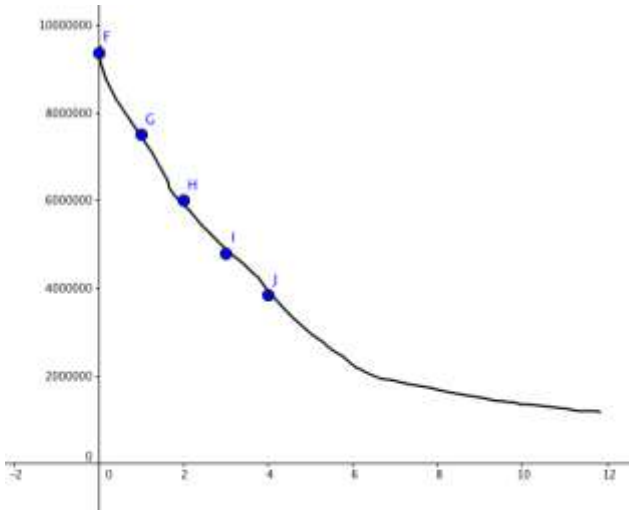
La proposición I es falsa.

<u>Proposición II.</u> El valor del modelo B, según su depreciación, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial.

En el caso del modelo B, su depreciación ocurre así:

Modelo B		
Año	**Valor**	**Depreciación**
0	9 375 000	
1	7 500 000	1 875 000
2	6 000 000	1 500 000
3	4 800 000	1 200 000
4	3 840 000	960 000

El valor del modelo B decrece cada año, pero no en forma lineal: se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial, como se observa en la gráfica siguiente:



La proposición II es verdadera.

Respuesta: Opción D) **Solo** la II.

Pregunta 42

Considere la siguiente información:

La cantidad "$P(t)$" de bacterias presentes en un cultivo depende del tiempo "t", en minutos, transcurridos a partir del momento en que se inicia un experimento. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de la relación que se da entre el tiempo transcurrido y la cantidad de bacterias:

Minutos	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	25 000	30 000	36 000	43 200	51 840	62 208

De acuerdo con la información anterior, el criterio de la función que mejor se adapta para describir la relación entre la cantidad de bacterias y el tiempo, corresponde a

A) $P(t) = log_a(t),$ con $a > 1$

B) $P(t) = log_a(t),$ con $0 < a < 1$

C) $P(t) = 25\,000 \cdot a^t,$ con $a > 1$

D) $P(t) = 25\,000 \cdot a^t,$ con $0 < a < 1$

Solución.

Al analizar la forma en que la cantidad de bacterias cambia, se puede ver que aumenta cada vez más rápido:

Bacterias presentes en un cultivo		
Tiempo (minutos)	Cantidad	Aumento
0	25 000	
1	30 000	5 000
2	36 000	6 000
3	43 200	7 200
4	51 840	8 640
5	62 208	10 368

Esto nos indica que estamos en presencia de una función exponencial de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

en donde $k > 0$ y la base "a" es mayor que 1:

$$a > 1$$

Videos de ayuda

En estos videos encontrará dos problemas que involucra una función exponencial para su solución

https://youtu.be/H4HAJMyT6Xc

https://youtu.be/KCKJl91BEDs

En este caso, la respuesta correcta es $P(t) = 25\,000a^t$, con $a > 1$, pues es positiva y la base "a" es mayor que 1.

Puede observar que esta función cumple que:

$$P(0) = 25\,000$$

Observe que $P(t) = log_a(t)$, con $a > 1$ también es creciente, pero además de crecer más despacio que la exponencial con base mayor que 1, $log_a(t)$ no está definida en $t = 0$.

El hecho de que:

$$P(1) = 25\,000a^1 = 30\,000$$

permite obtener el valor de "a":

$$25\,000a = 30\,000$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Por lo tanto el criterio sería:

$$P(t) = 25\,000\left(\frac{6}{5}\right)^t$$

Puede comprobar que en esta función:

$$P(2) = 36\ 000$$

$$P(3) = 43\ 200$$

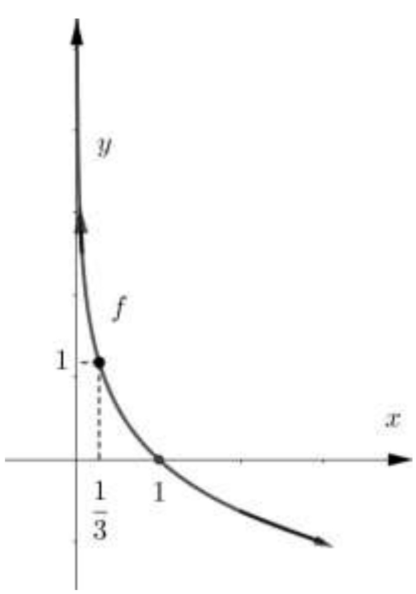
$$P(4) = 51\ 840$$

$$P(5) = 62\ 208$$

Respuesta: Opción C) $P(t) = 25\ 000a^t$, con $a > 1$

Pregunta 43

Considere la siguiente representación gráfica de una función f:



De acuerdo con la representación gráfica anterior, el criterio que mejor se adapta a la función corresponde a

A) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

B) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

C) $f(x) = log_3(x)$

D) $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x)$

Solución.

La gráfica representa una función logarítmica decreciente. Entre las opciones, solo una cumple esta característica: $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x)$.

Nótese en la gráfica, que los puntos $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y $(1\ , 0)$ pertencen al gráfico de f, lo cual cumple el criterio encontrado:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f(1) = 0$$

Respuesta: Opción D) $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x)$

Pregunta 44

Considere la siguiente información

Cantidad de horas desde que se inició su estudio	Cantidad de bacterias
1	4
3	12
5	28
7	52
9	84
11	124

De acuerdo con la información anterior, si "x" representa la cantidad de horas desde que se inició el estudio de una colonia de bacterias, y "$C(x)$" corresponde a la cantidad de bacterias, entonces, ¿cuál es el criterio que mejor modela la cantidad de bacterias, en función de la cantidad de horas, desde que se inició el estudio?

A) $C(x) = x + 3$

B) $C(x) = 2^x + 4$

C) $C(x) = x^2 + 3$

D) $C(x) = \sqrt{x - 3}$

Solución.

Si se analiza la forma en que la cantidad de bacterias crece, se deduce que su aumento es: 8, 16, 24, 32, 40. Cada vez aumenta más rápido. Esto descarta el hecho de que sea una función lineal o una función radical de la forma dada. Sin embargo, no parece que aumente tan rápido para ser una función exponencial de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x + c$$

Si se sustituye la cantidad de horas en el criterio de la función $C(x) = x^2 + 3$, se obtiene:

Cantidad de horas de sueño desde que se inició el estudio	$\boldsymbol{C(x) = x^2 + 3}$
1	$C(1) = 1^2 + 3 = 4$
3	$C(3) = 3^2 + 3 = 12$
5	$C(5) = 5^2 + 3 = 28$
7	$C(7) = 7^2 + 3 = 52$
9	$C(9) = 9^2 + 3 = 84$
11	$C(11) = 11^2 + 3 = 124$

Respuesta: Opción C) $C(x) = x^2 + 3$