CUADERNOS 18
DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019

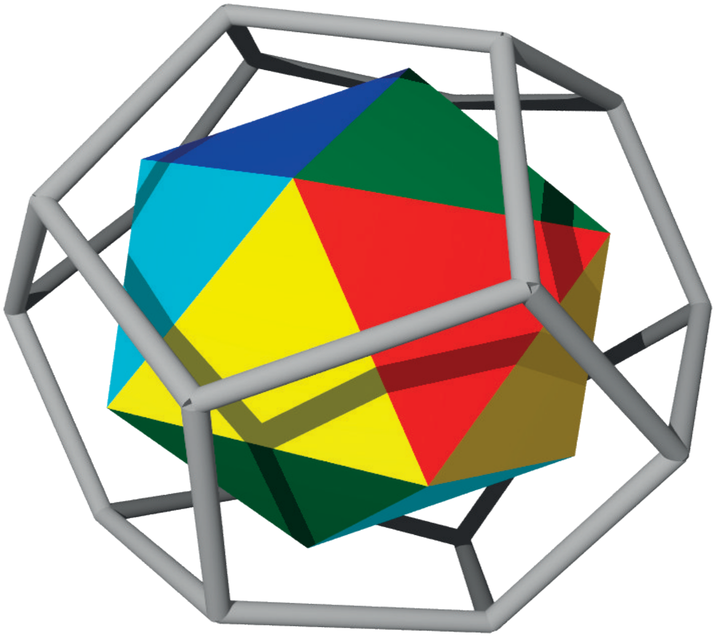
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Trabajos invitados seleccionados de la
XV Conferencia Interamericana
de Educación Matemática

SEGUNDA DÉCADA



Centro de Investigación y Formación
en Educación Matemática
www.cifemat.org

AÑO 14, NÚMERO 18, DICIEMBRE DE 2019

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática es una publicación seriada que busca nutrir la comunidad de Educación Matemática con instrumentos teóricos que permitan potenciar los quehaceres dentro de esta comunidad.

Cuadernos es una iniciativa del Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática CIFEMAT (www.cifemat.org) que integra investigadores y proyectos asociados a universidades públicas y otras instituciones académicas de Costa Rica.

Cuadernos es una publicación inscrita formalmente en el Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas (http://cimm.ucr.ac.cr) y la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica y ha contado desde su creación con el respaldo de esta institución.

Cada número de los *Cuadernos* se concentra en una temática específica, aunque incluye otros temas de interés. Posee una regularidad de al menos 1 número por año (o dos cada dos años).

Cuadernos posee una doble presentación: impresa en papel y digital. El número de ejemplares que se imprimen en papel depende de cada número.

Las secciones de los *Cuadernos* son:

- **Investigación y ensayos**
- **Experiencias**
- **Propuestas**
- **Tesis**
- **Software**
- **Reseñas**
- **Documentos**

Publica trabajos inéditos en español, portugués y en inglés, así como artículos o documentos ya publicados que puedan ser de interés para la comunidad de Educación Matemática.

Cuadernos ha establecido una alianza estratégica con el *Comité Interamericano de Educación Matemática* CIAEM (www.ciaem-iacme.org), organismo regional oficial de la *International Commission on Mathematical Instruction* ICMI) y la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (www.redumate.org).

Cuadernos posee un *Consejo Asesor Internacional* del más alto nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática. También hay un *Comité Editorial* que se encarga de las tareas regulares de gestión, edición y publicación. Este último también tiene un carácter internacional.

El *Director* asume la conducción general permanente de *Cuadernos*, pero para cada número hay una *Dirección ejecutiva*.

510.1
C961c

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática / Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica. – Año 14, No. 18 (Diciembre 2019). San José, C.R.: Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica, 2019- xviii.

ISSN: 2215-5627, 1659-2573

1. MATEMÁTICAS - PUBLICACIONES SERIADAS
2. MATEMÁTICAS - ENSEÑANZA - COSTA RICA

Tabla de contenidos

Editorial

Educación Matemática en las Américas: 2019

Para *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* publicar trabajos seleccionados de la XV CIAEM constituye una valiosa oportunidad para divulgar contribuciones relevantes para el progreso de la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en las Américas. Estas publicaciones reflejan convergencia y cooperación entre varias entidades internacionales, algo que ha tenido continuidad durante bastantes años. *Cuadernos* ha publicado los trabajos de:

XIII CIAEM

- CIAEM: 50 años: Historia y perspectivas, Primeros escritos de Ubiratan D'Ambrosio (junio 2011)
- CIAEM: 50 años: Medios e hipermedios (junio 2011)
- CIAEM: 50 años: Currículo, evalaución, formación docente, competencias (junio 2011)
- Trabajos de la XIII CIAEM, Reseña sobre Ubiratan D'Ambrosio (diciembre 2012)
- Trabajos de la XIII CIAEM (diciembre 2013)

XIV CIAEM

- Trabajos de la XIV CIAEM (junio 2016)

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín.

Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez

(Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil).

En el evento fueron entregadas la *Medalla Luis Santaló* a Salvador Llinares (España) y la *Medalla Marshall Stone* a Hugo Barrantes (Costa Rica) y José Chamoso (España).

La organización científica estuvo a cargo de un *Comité Asesor Internacional*, un *Comité Internacional del Programa*, Dirección científica de la plataforma (Open Conferences System), 22 Directores de tema y 400 Revisores científicos de varias latitudes, todo bajo la coordinación estrecha por el Comité Ejecutivo del CIAEM. La logística estuvo a la altura de las demandas científicas y fue realizada con eficacia por un *Comité Organizador Local*.

El CIAEM (**www.ciaem-iacme.org**) es la única organización multinacional en las Américas afiliada formalmente a la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) y el congreso es la conferencia regional del ICMI. Varios miembros del Comité Ejecutivo del ICMI participaron en este evento: Jill Adler (presidenta 2017-2020). Ferdinando Arzarello (expresidente 2013-2016) y Yuriko Baldin (vocal 2013-2020). Cabe mencionar que otro de los invitados, Yoshinori Shimizu, fue co-coordinador del importante *ICMI Study 24* sobre reformas curriculares. La relación estratégica y siempre estrecha entre ICMI y CIAEM, se manifestó con fuerza en este evento.

Los congresos CIAEM son la referencia de mayor nivel científico e impacto intelectual en la Educación Matemática de las Américas.

Deseo agradecer a los colegas que llevaron a cabo la coordinación científica de este número monográfico Nelly León (Venezuela) y Hugo Barrantes (Costa Rica), y agradezco muy especialmente a los árbitros científicos que revisaron los trabajos escogidos:

- Carlos Sánchez (Cuba)
- Claudia Groenwald (Brasil)
- Edison de Faria (Costa Rica)
- Edwin Chaves (Costa Rica)
- Hugo Barrantes (Costa Rica)
- Hugo Parra (Venezuela)
- José Chamoso (España)
- Jhony Villa (Colombia)
- María José Cáceres (España)
- Martha Iglesias (Venezuela)
- Nelly León (Venezuela)
- Patrick Scott (Estados Unidos)
- Ricardo Poveda (Costa Rica)
- Ronnys Vicent (Venezuela)
- Salvador Llinares (España)
- Walter Beyer (Venezuela)
- Ángel Ruiz (Costa Rica)

Y sobre todo manifiesto mi más profundo agradecimiento a los autores que sometieron sus artículos a nuestro proceso editorial y de publicación.

Las artes gráficas fueron elaboradas por Hugo Barrantes, al igual que el diseño y colocación en la plataforma digital de *Cuadernos* en la Universidad de Costa Rica. Una buena parte de las traducciones al inglés de los "abstracts" fue hecha por Patrick Scott (Estados Unidos).

Cuadernos se siente halagada por haber contribuido con esta obra.

Angel Ruiz

Director *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*

ruizz.angel@gmail.com

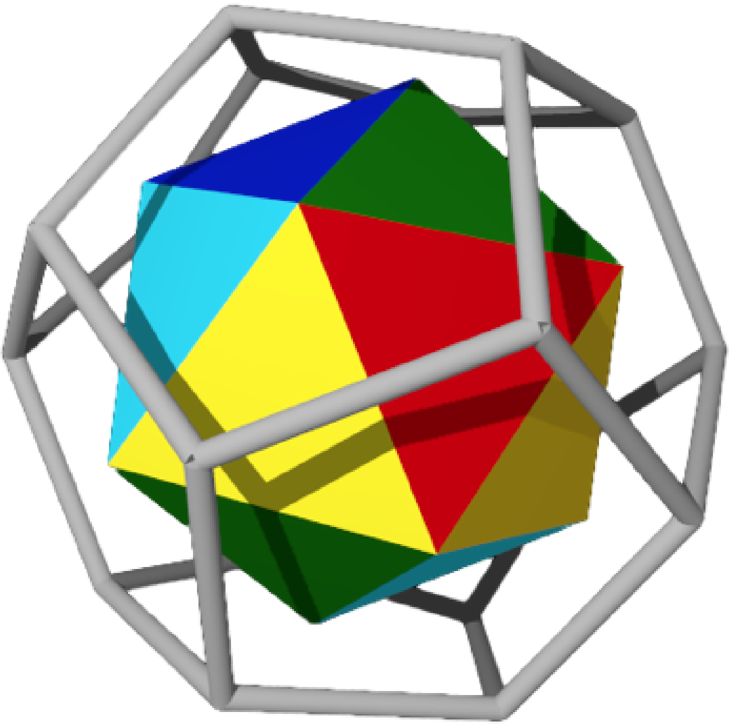
https://www.angelruizz.com

Concepción de Tres Ríos

Cartago, Costa Rica

Índice de autores

Investigación y ensayos



La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica[1]

Ferdinando Arzarello

Resumen

El artículo describe la *covariación* como un aspecto importante y teóricamente ubicuo del pensamiento matemático, pero no solo en términos de enseñanza. Se centraen la forma multimodal en la cual los procesos de aprendizaje de lo "relativo" ocurren y se desarrollan en la clase de matemáticas y como los recursos semióticos son cruciales para este desarrollo. El artículo se centra en la génesis dinámica de una variedad de signos cuando se utilizan artefactos para instruir los procesos de aprendizaje. Más precisamente, en la segunda parte se introduce la noción de *covariación instrumentada*. La instrumentación coordinada con múltiples artefactos puede ayudar al aprendizaje a través de una cuidadosa planificación didáctica. Esto se ilustra con ejemplos que muestran la sinergia positiva producida por el potencial semiótico de la instrumentación coordinada utilizado en el aula en diferentes niveles de grado.

Palabras clave: covariación, instrumentación, haz semiótico, problema abierto, sinergia de artefactos.

Abstract[2]

The article describes *covariation* as an important and theoretically ubiquitous aspect of mathematical thinking, but not only in terms of teaching. It focuses on the multimodal form in which the processes of "relative" learning occur and develop in the Mathematics classroom, and how semiotic resources are crucial to this development. The article focuses on the dynamic genesis of a variety of signs when artifacts are used to instruct the learning processes. More precisely, in the second part, the notion of *instrumented covariation* is introduced. Coordinated instrumentation with multiple artifacts can help learning through careful didactic planning. This is illustrated by examples that show the positive synergy produced by the semiotic potential of the coordinated instrumentation used in the classroom at different grade levels.

Keywords: covariation, instrumentation, semiotic bundle, open-ended problems, synergy of artifacts.

F. Arzarello
Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Italia
ferdinando.arzarello@unito.it

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia plenaria dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 4 de junio de 2019 y aceptado el 18 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 11–29. Costa Rica

1. Introducción

Una excelente profesora de matemáticas del Liceo Classico italiano (secundaria superior: grados 9-12), que participó en un experimento de enseñanza sobre el uso de las matemáticas para modelar fenómenos físicos me dijo un día: "Esta mañana hicimos una actividad sobre la ley de Hooke [...] En mi opinión, hubo un malentendido muy importante entre el sentido del estiramiento y el de la longitud [allungamento - lunghezza en italiano] del resorte. Esto impidió a mis alumnos encontrar las respuestas correctas. ¡Y mis alumnos están en Liceo Classico!". Los malentendidos similares a estos son comunes y difusos y se refieren a un gran fenómeno, que tiene profundas raíces cognitivas y epistemológicas, y destacan un importante problema didáctico. El reconocer este fenómeno tiene consecuencias relevantes para el diseño de la enseñanza.

El propósito de esta contribución es enmarcar teóricamente estos problemas y discutir estrategias de enseñanza apropiadas para superarlos. Compartiré algunas ideas sobre un campo de investigación con fundamento semiótico y epistemológico, que yo y otros hemos desarrollado en los últimos años.

Estos problemas me llevan a centrarme en una raíz común a los diferentes fenómenos semióticos descritos en la literatura, que pueden servir como base para la concepción de tareas matemáticas en la escuela: la noción de covariación, ampliamente estudiada (para un excelente resumen, vea Thompson y Carlson, 2017). Basándome en esta noción y utilizando un punto de vista semiótico, he desarrollado una herramienta de análisis más compleja, que tiene una contraparte didáctica, a la que llamo covariación instrumentada (CI).

En este artículo, definiré la CI como una posible metodología didáctica que puede desencadenar y apoyar un enfoque covariante de las matemáticas.

2. Covariación en matemática

Muchos estudios muestran la relevancia del razonamiento covariante en matemáticas desde un punto de vista epistemológico: de hecho, la covarianza es crucial para comprender la noción de función, una herramienta indispensable para modelar el mundo (físico, económico, etc.) y para ingresar a las matemáticas modernas: todo el Análisis depende de esta noción. De manera específica, muchos currículos matemáticos lo ponen como el principal objetivo de enseñanza.

> Enfatizamos que el razonamiento covariante continuo, o el razonamiento acerca de los valores de dos o más cantidades que varían simultáneamente, desempeñó un papel crucial en la invención de los matemáticos de los conceptos que llevaron a la definición moderna de la función, el uso de ecuaciones para representar una variación restringida mediante representaciones explícitas de relaciones deterministas entre cantidades. (Thompson y Carlson, 2017, pp. 423, traducido por el autor).

El razonamiento covariante apareció dramáticamente en las matemáticas con el nacimiento y el desarrollo del álgebra moderna gracias a los trabajos de Viète, Descartes y otros. Los métodos de análisis y síntesis en álgebra, tomados de la geometría de los griegos, introducen una forma revolucionaria de abordar los problemas de las matemáticas, que Lagrange a principios del siglo XIX resumiría de la siguiente manera:

> El álgebra, tomado en el sentido más amplio, es el arte de determinar las incógnitas por funciones de las cantidades conocidas, o lo que consideramos conocido. (Lagrange, 1808, pp. vii; traducido por el autor).

La ruptura del nuevo paradigma con la idea de un álgebra elemental como aritmética generalizada, de acuerdo con una imagen a menudo presente en los libros de texto (pero no solo), fue discutida en un artículo muy importante de Chevallard (1989), donde destaca el papel crucial que desempeñan las variables y los parámetros en el nuevo álgebra, tanto desde un punto de vista epistemológico como didáctico. Por ejemplo, la solución "aritmética" (verbal) de un problema básico como el siguiente *"Divida un número dado en dos partes, de manera que la primera exceda la segunda en un exceso dado",* se puede traducir a términos algebraicos solo si uno hace un razonamiento covariante, utilizando parámetros para representar (y manipular) los números (supuestos) dados.

De hecho, el nuevo método de razonamiento covariante con cantidades físicas fue una de las raíces que hizo posible el nacimiento de la ciencia moderna con los "experimentos sensibles" y las demostraciones matemáticas (le sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche) de G. Galilei (1615). Este tipo de razonamiento se desarrolló como una búsqueda de relaciones entre variables concretas, dinámicas y continuas, para expresar la idea de cambio y los fenómenos del movimiento.

Esta es una historia muy antigua: los antiguos eruditos carecían de una descripción matemática del movimiento; vieron la distancia y el tiempo como cantidades medibles, pero no tanto por la velocidad. De hecho, la noción de cambio, según la filosofía de Aristóteles, era solo de naturaleza cualitativa y tenía un significado muy amplio (Generación y Corrupción, Alteración, Aumento y Disminución, Movimiento Local). Las ideas cambiaron desde la Edad Media y fue en el siglo XIV cuando las nuevas ideas revolucionarias maduraron en Oxford al Merton College, y en París con Nicole Oresme (1325-1380). Los filósofos de la Edad Media se dieron cuenta de que las cualidades también tienen una intensidad (Arzarello, 2008). Las leyes matemáticas de la nueva ciencia se pueden expresar porque comenzamos a razonar de manera covariante. El álgebra, sin embargo, ya no es suficiente y es necesario un nuevo cálculo. Desafortunadamente, esta forma fundamental de razonamiento se ha descuidado en las escuelas: como el álgebra se enseña como una aritmética generalizada, las funciones también se enseñan a menudo de acuerdo con la definición estática de Bourbaki, que congela su naturaleza dinámica en el lenguaje estático de la teoría de conjuntos.

Esta declaración sobre la conveniencia de apoyar el razonamiento covariable en la escuela también se menciona en el documento citado por Thompson y Carlson (2017), con muchas referencias:

> [Argumentamos] que la variante y el razonamiento covariante son fundamentales para el desarrollo matemático de los estudiantes. Basamos esta afirmación en investigaciones que resaltan las dificultades experimentadas por los estudiantes con respecto a las relaciones funcionales, porque carecen de la capacidad de razonar de forma alternativa o covariante, y en investigaciones que muestran cambios productivos en sus relaciones. Concepciones y usos de las

> funciones por parte de profesores y alumnos, cuando utilizan el razonamiento covariante. (*ibid.,* traducción del autor).

La misma pregunta fue analizada desde un punto de vista diferente en psicología por Piaget (1950) y en matemáticas por Lawvere & Shanuel (1991): el primero definiendo la noción de operador multiplicativo; los últimos al discutir la noción de productos, coproductos y adiciones dentro de la teoría de las categorías.

Saldanha y Thompson (1998) repiten el trabajo de Piaget:

> La idea de Saldanha y Thompson de un objeto multiplicativo se deriva de la noción de Piaget de "y" [conjunción] como un operador multiplicativo, una operación que Piaget describió como una clasificación operativa subyacente y seriación en el pensamiento de los niños. (Thompson & Carlson, 2017, 433, traducción del autor)

Este trabajo ilustra la covariación desde dos puntos de vista competidores, el epistemológico y el cognitivo.

Para el primero: en su libro introductorio sobre la teoría de categorías, Lawvere y Shanuel (1991) también introducen el fenómeno de la covariación con la noción de objeto multiplicativo basado en un ejemplo histórico, que muestra tanto su relación directa con la noción de Piaget (de hecho, él usa la misma terminología), y su relevancia para la revolución científica:

> Comencemos con Galileo, hace cuatro siglos, que cuestiona el problema del movimiento. Quería entender el movimiento preciso de una piedra lanzada o un chorro de agua de una fuente. Todos han observado los graciosos arcos parabólicos que producen; pero el movimiento de una roca significa más que su trayectoria. El movimiento implica, para cada momento, la posición de la roca en este momento; para grabarlo requiere una imagen animada en lugar de una exposición temporal. Decimos que el movimiento es un "mapa"(o función) del tiempo en el espacio.
>
> [...]
>
> Estos dos mapas, sombra y nivel, parecen reducir cada problema de espacio a dos problemas más simples, uno para el plano y otro para la línea. Por ejemplo, si hay un ave en el espacio y solo se conoce la sombra y la altitud del ave, puede reconstruir la posición del ave. Hay más, sin embargo. Supongamos que tiene una película que muestra la sombra del ave mientras vuela, y una película de su altitud [...] A partir de estas dos películas, ¡podrás reconstruir todo el vuelo del ave! Por lo tanto, no solo se reduce una posición en el espacio a una posición en el plano y otra a la línea, sino que también se reduce el movimiento en el espacio al movimiento en el plano y otra en la línea.
>
> [...]
>
> El descubrimiento de Galileo es que, de estos dos movimientos más simples, en el plano y en la línea, pudo encontrar completamente el complejo movimiento en el espacio. (Lawvere y Shanuel, 1991, pp. 3-6, traducido por el autor).

Para el segundo: una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades cuando mentalmente une sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual que es simultáneamente uno y el otro. Saldanha y Thompson (1998) ilustran esto considerando la participación de los estudiantes en tareas basadas en actividades para rastrear y describir el comportamiento de las distancias entre un automóvil y dos aldeas a medida que el automóvil avanza por una carretera.

Presento aquí un ejemplo que ilustra este punto: está sustancialmente tomado de la obra citada de Saldanha y Thompson.

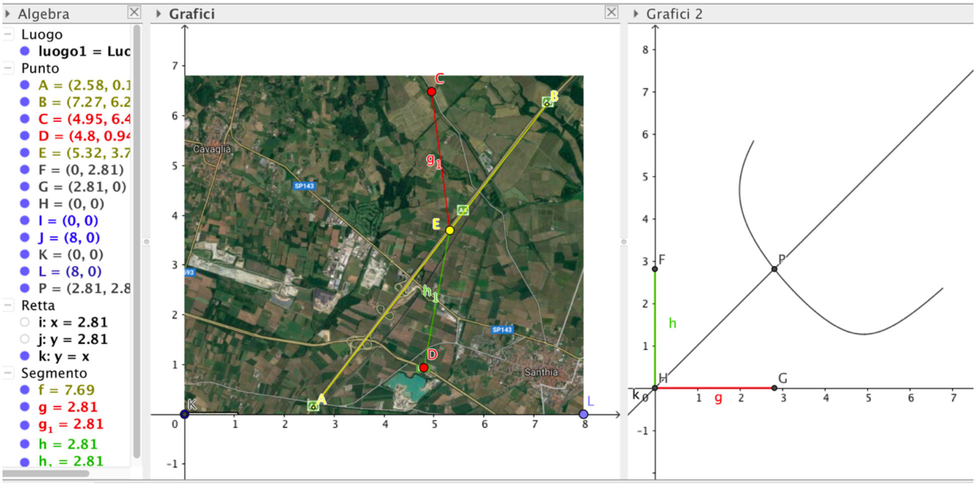


Figura 1: Movimiento de un automóvil.

La Figura 1 (construida con Geogebra) representa el movimiento de un automóvil (E) que recorre la autopista de A a B; en D y C hay dos repetidores para teléfonos móviles y es necesario identificar cuándo el teléfono móvil en el automóvil pasa de la celda C a la de D. En el gráfico cartesiano la abscisa representa la distancia EC, mientras que la ordenada representa la distancia ED. Se deduce que el punto P identifica la posición en la que las dos distancias son iguales y, por lo tanto, el punto en el que comienza la transición de una celda a la otra.

Detrás de este problema encontramos un importante fenómeno didáctico, que la *covariación instrumentada* puede ayudar a los profesores a diseñar situaciones didácticas apropiadas, cuyo propósito es introducir a los estudiantes al razonamiento covariante en entornos de geometría dinámica.

Un enfoque covariante es un fenómeno profundo que no está ni epistemológica ni didácticamente presente, por ejemplo en la formulación didáctica habitual de la Geometría Euclidiana (GE). Por eso los hábitos escolares van en la dirección opuesta. Por lo tanto, un enfoque covariante:

- implica un cambio epistemológico con respecto a GE;

- tiene consecuencias cognitivas (razonamiento "hacia atrás");

- puede tener consecuencias didácticas en el aula.

Esto demuestra una discontinuidad epistemológica entre la formulación habitual de problemas tales como "demuestra que ... " y en el que, en cambio, se pide explorar una situación abierta (Arsac, Germain y Mante, 1991; Arsac y Mante, 2007). Cognitivamente, la discontinuidad es particularmente marcada cuando el problema se aborda en entorno de geometría dinámica (EGD). El valor agregado en este caso viene dado por el enfoque covariante, que está ausente en el entorno de GE. Muchas diferencias cognitivas entre los dos entornos son solo la contrapartida cognitiva de esta discontinuidad.

La investigación / descubrimiento de la covarianza, a la que apuntan los problemas abiertos, es el pegamento que une los pasos de los argumentos. El trabajo con el software constituye una "instrumentación" de este proceso de búsqueda covariante. También puede tener lugar en el entorno de papel y lápiz, pero por lo general requiere más resolutores expertos. El entorno de geometría dinámica es un artefacto que amplifica los fenómenos que dependen de la formulación del problema y permite su instrumentación. Una lente semiótica puede ayudarnos a describir adecuadamente estos fenómenos de covariación instrumentada producidos por la ingeniería didáctica apropiada con los artefactos.

Por supuesto, la palabra instrumentación deriva del enfoque instrumental de Verillon y Rabardel (1995), que enfatiza la distinción entre un artefacto (un objeto material o abstracto, ya producido por la actividad humana) y un instrumento (una entidad mixta con un componente de artefacto y un componente cognitivo, representado por patrones de uso).

Ahora presento los extractos de una discusión en el noveno grado (primera clase de escuela secundaria), donde hay ejemplos de covariación instrumentada.

3. La covariación instrumentada en la escuela secundaria

Discutiré brevemente un ejemplo de un experimento didáctico realizado en 2017 en una escuela secundaria (estudiantes de grado 9) con la profesora S. Beltramino y la colaboración del profesor O. Swidan, de la Universidad Ben Gurion del Negev (Israel). Se verá así como la covariación instrumental puede ser una consecuencia de un método basado en la investigación en un contexto tecnológico (Fibonacci 2012); más precisamente, cómo los estudiantes pueden comprender el complejo proceso de covariación de cantidades involucradas en un fenómeno físico (el movimiento de una bola a lo largo de un plano inclinado), gracias a sus investigaciones en un entorno donde hay dos artefactos tecnológicos presentes. El primer artefacto es un video profesional (producido por el museo Galilei en Florencia), que retoma el famoso experimento de Galilei (descrito en Galilei, 1638), en el que se introduce y subraya la covariación entre las cantidades en juego (Fig. 2a); el segundo es una simulación en Geogebra del mismo fenómeno, en el que los estudiantes pueden variar la inclinación del plano inclinado: los datos relativos al tiempo y al espacio se representan en el plano cartesiano y en la hoja de cálculo del software (Fig. 2b).

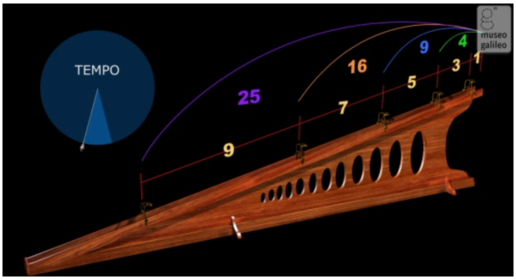


Figura 2a. Video (Museo Galilei, Florencia)

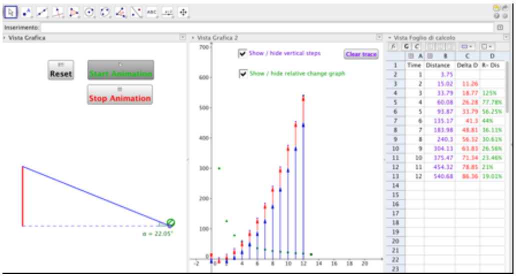


Figura 2b. Applet en Geogebra

En este proceso, tanto las intervenciones de la profesora como los signos producidos por los estudiantes o a las que los estudiantes están expuestos, juegan gradualmente un papel esencial.

Los dos artefactos son de una naturaleza diferente: el video reproduce un experimento real, el segundo lo simula. Por tanto, podemos hablar de un dúo de artefactos en el sentido de Maschietto y Soury-Lavergne (2013), ya que aquí los dos artefactos reproducen o simulan un fenómeno adicional, aunque el artefacto digital simula un artefacto físico. Sin embargo, también podemos considerar el posible **valor agregado** (*ibid.,* p.969) proporcionado por los dos artefactos – es decir, cómo la interacción con ambos ayuda los estudiantes a comprender el fenómeno físico examinado–, y cuánto se produce esta interacción de manera consonante o disonante entre los dos artefactos: hablaremos respectivamente de continuidad o discontinuidad entre los efectos de tal interacción.

Nos limitaremos aquí a esbozar los puntos cruciales en este proceso de aprendizaje, enfatizando las dificultades y el progreso del proceso de comprensión de las covariancias entre las cantidades involucradas en el experimento y el papel desempeñado por el maestro, por los dos artefactos y por los signos en él ([3]).

[3] En otro experimento didáctico, construimos físicamente el plano inclinado con los estudiantes e hicimos el experimento de manera concreta con ellos, con las mismas modalidades que las del video, y luego utilizamos la simulación en Geogebra. Sin embargo, los resultados de aprendizaje parecen ser más bajos que los descritos en este artículo. Estamos tratando de entender estas diferencias, pero está más allá de esta exposición para discutir este importante problema.

Dividimos este proceso en cuatro pasos, que corresponden a cuatro episodios en el transcurso de una discusión matemática de 40′ con la profesora, que tuvo lugar después de que los estudiantes, trabajando en grupos pequeños, habían visto el video, usado el applet de Geogebra, contestado algunas preguntas que les hicieron para describir las características sobresalientes del experimento.

En la discusión los estudiantes todavía están divididos en grupos (A, B, C, D, E) de 4-5 personas; las respuestas son a menudo "grupo" y por esta razón generalmente solo indicamos el grupo (a veces indicamos con Xi un alumno / alumna del grupo X).

Para el análisis utilizaremos también la jerarquía de Thompson y Carlson (2017), que distingue seis niveles de covariación (1. Sin coordinación, 2. Pre-coordinación de valores, 3. Coordinación en bruto de valores, 4. Coordinación de valores, 5. Covariación continua por partes, 6. Covariación continua suave). Aquí agregamos un nivel adicional de segundo orden: mientras que los primeros seis niveles corresponden a la ruta hacia la *variable(s)* del modelo (típicamente, el tiempo y la distancia), el segundo nivel de orden corresponde a los *parámetros* según los cuales el modelo puede describir diferentes situaciones (en nuestro caso, en relación con el ángulo de inclinación del plano). En lo que sigue usaremos el acrónimo ECTJ para indicar esta jerarquía extendida de Carlson y Thompson.

El magma inicial de las magnitudes en juego

22.37 I (profesora). ¿Qué podemos "ver" mientras vemos el video?

22:50 A: La velocidad aumenta a medida que baja

Al principio es más lento luego más tarde ...

23:30 B: el tiempo es siempre el mismo, la velocidad cambia

23:50 C: la distancia entre las puertas [en el video] siempre fue dos

Yo: ¿era?

C: aumentado

24:15 B: 1, 3, 5, 7 [son los números que en el video indican el espacio cubierto gradualmente]

24:23 I: ¿Entre una puerta y otra aumentó la distancia o el tiempo?

24:39 C: El mismo tiempo para correr más rápido

24: 52 I: ¿Y variando la inclinación del plano?

25:00 C: Cuanto más se inclina, más rápida será la velocidad.

Aquí se resaltan muchas variables por lo que dicen los estudiantes: velocidad, distancia entre puertas, tiempo, inclinación. La relación más obvia para ellos es el aumento, incluso si no está tan claro qué aumenta y qué no. Las variables siguen constituyendo un revoltijo indistinto, en el que comenzamos a captar de una manera no tan clara rastros de encubrimiento. El lenguaje es el de todos los días, aún no científico, según la distinción de Vygotski (1985). También existe una confusión entre el valor de una cantidad (la distancia) y el valor de su incremento (23:50). En un cierto punto (24:39), un primer boceto de covariación, atrapado entre el momento en que un aumento constante corresponde a un aumento creciente de la velocidad (pero el lenguaje aplasta estas variaciones en las variaciones en los valores de las mismas cantidades). La covariación es más evidente entre el cambio de inclinación y el aumento de velocidad (25:00). Como resultado de una petición de la profesora (24:52), el lenguaje cotidiano de C es capaz de apoyar el discurso sobre las diferencias entre las diferencias sin tener que aplastar esto en los valores de las cantidades. En ECTJ estamos en el nivel 2 (Pre-coordinación de valores).

El artefacto video es lo que más influye en este episodio: las referencias son numerosas y obvias.

Confusión entre trayectoria y movimiento

27:00 Vosotros estáis atrapados con la pregunta: "¿Puedes encontrar una ecuación, una fórmula que describa el movimiento de la pelota?"

27:27 A1: Necesitamos encontrar la x, y la y; para el eje x algo que aumenta y para el eje y algo que disminuye.

27:46 I: ¿Qué es la línea decreciente?

27:55 A1: la línea rosa [en el applet es el color de la trayectoria de la bola] ... debe haber algo

28:17 I repite las palabras de A1: Necesitamos encontrar una *x* que crezca y una *y* que disminuya porque la línea rosa representa el movimiento de la pelota.

[A los estudiantes les resulta difícil encontrar las cantidades para poner en los dos ejes]

28:42 I: ¿Cuál es el algo, las variables que nos ayudan a describir el movimiento?

Voces diversas: tiempo y espacio; alguien dice: la inclinación

29:04 I: Mantengamos la inclinación fija; Más adelante veremos qué pasa variándola.

29:38 I: ¿Qué elementos debemos considerar para poder describir el movimiento?

29: 47 I: A1 dice tiempo y espacio.

30:00 I: algo que aumenta y algo que disminuye.

30: 05 E1: creo que su idea está mal:

30:08 I: ¡según E1, su idea está mal!

30:10 E1: ¡sí, ambos aumentan!

30:15 I: ¡según E1, ambos aumentan!

30:20 B1: la línea rosa es el plano en el que corre la bola,

30:30 I: la línea rosa es el plano en el que corre la bola, pero ¿cómo podría describirse el movimiento?

Una confusión típica entre la trayectoria y el movimiento de un cuerpo es evidente aquí, bien conocida en la literatura (Clement, 1985). Aquí es importante la intervención de la profesora, quien "refuerza" la discusión para evitar por ahora la superposición de la variable de inclinación y de tiempo (29:04), concentrando así a los estudiantes en las relaciones espacio – tiempo insiste en buscar dos variables que crezcan / disminuyan juntas, hasta que un alumno (E1) dice que las dos variables aumentan (30:10). El artefacto Geogebra es lo que más influye en este episodio: la referencia a la línea rosa se deriva de esto, así como la variación de la inclinación (ya presente, sin embargo, en el primer episodio). En ECTJ estamos en el nivel 3 (Coordinación en bruto de valores) hasta 27:55; a continuación, hacia el nivel 4 (Coordinación de valores).

Discontinuidad entre tres artefactos (Video-Geogebra-Tabla)

30:58 I: ¿Por qué ambos [tiempo y espacio] aumentan?

31.05 E1: cuando aumentas la longitud, la bola tarda más en hacerlo, entonces, si inclinas el plano, la bola es más rápida ...

31:11 I: no entendí

31:21 E1: según la inclinación del plano, aumenta el tiempo y ... toma menos tiempo ... la bola tarda menos en recorrer esa distancia ...

31:29 I: la pelota tarda menos tiempo en recorrer esa distancia.

31: 35 E1: la misma distancia, pero como el plano está más inclinado, la bola tiene más velocidad, es más rápida. [E1 con gestos imita el plano y el exceso de velocidad de la bola]

31:41 I: a la misma distancia ...

31: 45 E1: menor tiempo

31:48 yo: ¿y al mismo tiempo?

31:49 E1: mayor distancia.

...

32:27 C: la relación entre el espacio y el tiempo no aumentaba constantemente

32:42 I: ¿Qué aparece en el applet?

[La respuesta es que hay una tabla en la que el tiempo está en la primera columna, el espacio en la segunda, las primeras diferencias en el espacio en la tercera]

33:12 I: ¿Cómo leer la tabla?

33:20 más voces: basado en un cierto tiempo, la bola corre a través de un espacio determinado.

33:45 C: el espacio aumenta cada vez más; el tiempo es constante: 1, 2, 3

33:51 I: el espacio siempre aumenta como sucedió en el video: las puertas estaban más distantes porque el tiempo era el mismo y el espacio aumentó.

34:02 I: ¿Cómo escribo una relación entre este espacio y este tiempo?

[con preguntas oportunas, I indica a los alumnos a descartar que es una línea recta; el grupo E trabaja con Geogebra y encuentra que sale una parábola usando el comando cónico para 5 puntos, pero no pueden explicarlo]

37:00 B: si es una parábola, ¿hay algo en la segunda?

37:05 I repite las palabras de B.

37:10 A: en el video de arriba está escrito s: t^2

37:15 I escribe la fórmula del video en el tablero.

37:34 I: ¿entonces?

... [rumor]

38:10 B1: en el video había las sumas de todas las rutas y, por ejemplo, cuando s tenía 16, el tiempo era 4

38:15 I dibuja un boceto de plano inclinado en la pizarra.

38:26 B1: si contamos el tiempo, vemos que s es t^2: $4^2 = 16$

39:13 B1: en el video hacia el final había sumas de todas las diferentes piezas ... las dos primeras ... las tres primeras ... y las diferentes piezas se dividieron según el tiempo que tomaron ... por ejemplo, las dos primeras piezas tomaron dos como tiempo y valieron 4 juntas ... así que si uno mira esa división e indica el espacio como **y** y el tiempo como **x** ... el tiempo en ese caso valió 2 y el espacio 4 ... Entonces, como dice allí, el tiempo para el segundo hace espacio porque 2 para el segundo es igual a 4 ... entonces $y = x^2$

40:11 E1: es correcto, pero aquí es diferente si hacemos 2^2 no nos llega a nosotros ...

[el maestro repite lo que dijo B1 y acompaña las palabras que los ilustran en el dibujo del plano inclinado y finalmente escribe $y = x^2$]

41:15 I: Pero E1 dice "está bien" aunque ...

E1: pero no viene.

41:19 I. Es correcto, sin embargo, no es tan correcto según E1, porque en los ejemplos no vino de esta manera.

En esta parte, además de los dos artefactos, Video y Geogebra, aparece un tercer artefacto, la tabla escrita en la pizarra por la profesora, bajo el dictado de un grupo de estudiantes. La discusión, apoyada por las intervenciones oportunas de la profesora, hace que los procesos de los estudiantes evolucionen hacia una primera formulación de la ley del movimiento, es decir, $s = t^2$. Se alcanza a través de tres episodios, al final de los cuales, en un cuarto episodio breve pero importante, la ley es impugnada por un estudiante. En los cuatro episodios, los tres artefactos (indicados con V = video, G = Geogebra, T = tabla) están presentes en distintos momentos y se utilizan, a veces espontáneamente por los alumnos, a petición del profesor, para llevar a cabo investigaciones y verificaciones de tesis. Para explicar racionalmente el movimiento de la pelota (llamaremos a estos comportamientos de los estudiantes acciones epistémicas y semióticas[4]). Por lo tanto, un hilo de relaciones entre

[4] Los signos siempre están involucrados en las acciones epistémicas que vemos, en un sentido amplio de la palabra signo. Por eso prefiero hablar de acciones epistémicas y semióticas. Para una discusión sobre las relaciones entre los dos aspectos, vea los capítulos 9 y 11 de Bikner y Prediger (2014).

V, G, T, que va de una a otra y que generalmente son de discontinuidad, se crea a través de la discusión y las acciones epistémicas ([5]).

Es decir, el valor epistémico de las acciones que los estudiantes realizan con tales artefactos a menudo es inconsistente. Esta discontinuidad culmina en el cuarto episodio, en el que E1 (40:11) hace explícito un conflicto entre lo que se dijo anteriormente y los resultados obtenidos en G por su grupo (E).

En este episodio, según la ECTJ tenemos primero (hasta el 31:29) el nivel 4 (Coordinación de valores); entonces (hasta 33:20) el nivel 5 (Covariación continua por partes); al final (hasta las 33:51) un inicio de una covariación continua suave (nivel 6).

En lo que sigue usaremos dos tipos de notación, que indican dos formas opuestas en las que un artefacto X ingresa en los procesos de los estudiantes. Por un lado, se puede realizar una acción epistémica para investigar / descubrir qué sucede en una situación dada utilizando el artefacto, sin tener en cuenta ninguna hipótesis al respecto; vamos a escribir: X➔. Por otro lado, el artefacto se puede usar con un objetivo específico, por ejemplo, para probar una hipótesis; vamos a escribir: ➔X. De manera análoga, indicaremos con I➔ las intervenciones específicas de la profesora, mientras que lo indicaremos con I⇓ cuando la profesora repite (resuena) una oración pronunciada por un alumno para subrayar la importancia o la corrección, posiblemente incluso recurriendo a gestos.

El primer episodio va de 32:27 a 33:51. E1 (de 31:05 a 31:30) en una modalidad predominantemente G➔, y posteriormente (31: 41-31: 49) producido después de la intervención de la profesora (I➔). Aquí hay una primera forma de covariación (32:27), formulada exclusivamente con lenguaje natural, posiblemente junto con la producción de gestos icónicos o metafóricos ([6]).

En *el segundo episodio* (32: 27-33: 51), C primero describe la covariación (32:27) de manera diferente que antes, nuevamente en lenguaje natural. I (32:42) empuja a los estudiantes (I➔)

[5] *Acción epistémica*. El término fue introducido en las ciencias cognitivas por Kirsch & Maglio (1994) para designar "acciones que los humanos (u otros agentes) toman para alterar su entorno físico con la intención de recopilar información y facilitar la cognición". Las acciones epistémicas pueden descubrir información que está oculta, o reducir la memoria requerida en la computación mental, o reducir el número de pasos involucrados en el cálculo mental, o reducir la probabilidad de error en el cálculo mental. Para la enseñanza de las matemáticas, el término fue utilizado por Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, T. (2001), quienes a su vez lo derivaron de Pontecorvo & Girardet (1993), quienes las definieron como "acciones mentales por las cuales uno usa o construye conocimiento". Dreyfus & Kydron (2014), usar la noción de acción epistémica para definir los micro procesos de abstracción como Acciones en Contexto (AiC): esto constructo teórico central de AiC es un modelo teórico-metodológico, según el cual se describe y analiza el surgimiento de un nuevo constructo "por medio de tres acciones epistémicas observables: reconocer (R), construir con (B) y construir (C). Reconocer se refiere a que el alumno vea la relevancia de un conocimiento específico anterior para el problema en cuestión. Construir-con comprende la combinación de constructos reconocidos, para lograr un objetivo localizado, como la actualización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema. El modelo sugiere construir como la acción epistémica central de la abstracción matemática" (Dreyfus & Kydron, p.89 ss). Aquí usaremos este marco sin entrar en detalles por razones de espacio.

[6] En la clasificación de Mc Neill (1992) los gestos se definen como *icónicos*, si tienen una relación de similitud con el contenido semántico del discurso que lo acompaña y *metafóricos* si son similar a los gestos icónicos, pero el contenido semántico es una idea abstracta.

a usar G y subraya la tabla numérica contenida en ellos, invitándolos a leerla, es decir, a experimentar una modalidad T➔.

Las intervenciones de los estudiantes (33: 20-33: 45) explican lo que se informa en T con referencia al video visto (V➔), una referencia que se hace explícita en (33:51).

El tercer episodio (34: 02-33: 45) es decisivo. I pides a los alumnos (34:02: **I➔**) que escriban una fórmula que exprese la relación entre t y s en el movimiento de la pelota. Así evoca un cuarto artefacto: la fórmula (F) con sus varias representaciones (algebraica, cartesiana): ➔F. Una vez que se ha descartado la línea, para los estudiantes, dado su conocimiento, la parábola comparece, evocada primero por ellos como algo al cuadrado(37:00). La evocación se ve nuevamente reforzada por la referencia a V (37:10: V➔) y la acción de I (37:15: **I➔**). Aún con referencia al video, B1 es capaz de evocar la fórmula (38:26: V➔) y explicarla (39:13: V➔).

En *el cuarto episodio*, E1 ahonda en la fórmula de B1 basándose en su investigación en G (G➔).

Aquí surge un conflicto entre lo que se vio en V y las experiencias realizadas en G: lo indicaremos con V⟷G. Está subrayado por I (**I➔**) y se pasará en episodios posteriores.

En este episodio, según la ECTJ tenemos primero (hasta el 38:26) una covariación continua suave con detalle (nivel 6); (hasta 41:19) una covariación continua suave con mas detalle y más profunda (nivel 6).

Tabla 1: Datos escritos en la pizarra

t (sec)	1	2	3	4
s (cm)	2.13	6.51	19.15	36.64

Continuidad entre cuatro artefactos: Video-Geogebra-Tabla-Formula

[El grupo D mira el video nuevamente en el punto citado. Hay zumbido en el aula. El grupo B finalmente interviene]

43:00 B: Hemos hecho con Geogebra y el ángulo de 25º y tenemos estos resultados [I escribe en la pizarra: Tabla 1]

43:53 B: hicimos $19.15/3^2$ y es 2.13

44:04 B: tratamos de hacerlo con otros y siempre tenemos el mismo resultado [2.13]

44:12 I repite las palabras de B y escribe los cálculos en la pizarra.

44:47 I: ¿y qué?

44:50 B: siempre tienes un valor constante ... No creo que sea algo aleatorio.

. . .

45:25 I: ¿por qué dijiste "entonces esa es la fórmula escrita allí"?

[la fórmula, en el video, es $s : t^2$; hasta ahora el signo : tal vez ha sido posiblemente interpretado como un signo de puntuación. Ahora I escribe en la pizarra el signo / en lugar de : subrayando lo que sugiere B]

...

45:55 I: entonces, ¿qué podemos concluir?

46:04 B: que la relación entre el espacio recorrido y el tiempo hasta el segundo da una constante.

[I resume lo que se ha hecho hasta ahora; señala que en lugar de escribir y y x escribimos s para el espacio y t para el tiempo]

47:14 E2: en este caso podría ser $y = 2.13 \cdot x^2$, en este caso con 25°?, porque es en este caso que viene un valor constante de 2.13 ... El valor puede variar.

...

47: 45 I: ¿si el ángulo varía?

47:48 E2: el valor constante puede variar

[I sugiere probar con diferentes valores de inclinación y los estudiantes intentan usar Geogebra]

...

48:20 B: [ininteligible] el número constante también depende del ángulo

48:28 I: Repito porque habla en voz baja; dijo: si cambiamos el ángulo de $28^{?}\circ$ [con los dedos índice y medio simula una ampliación de un ángulo], la constante cambia y se convierte en 2.36, pero siempre es 2.36.

48:45 E2: Podría ser $y = kx^2$, donde k es la constante que varía con la inclinación.

[I escribe la fórmula en la pizarra]

48:53 I: B1 dice que podría ser una cosa así, ¿donde k varía? ... [girando a E2]

49:00 E2: basado en inclinación

[I repite sus palabras]

49:12 E2: en consecuencia, el espacio varía.

[I repite sus palabras]

49:19 E2: cambiando todos los coeficientes

49:26 I: podría ser correcto

[invita a todos a consultar con Geogebra si la fórmula es correcta]

...

[en los últimos 10 minutos, los alumnos: comprueban la fórmula con varios ángulos y observan que k crece mientras el ángulo crece; observan que se puede encontrar k considerando el valor de s para $t = 1$, o dividiendo por 2 las segundas diferencias de s con la variación de t, segundas diferencias que asumen un valor constante igual a $2k$; el grupo C considera las parábolas de la gráfica $s = s(t)$ que se obtienen con dos valores de k vecinos: parecen superponerse, pero al usar el zoom se dan cuenta de que las curvas son distintas; lo describen diciendo que "la pelota siempre baja a la misma velocidad" y alguien señala que "tiene la misma tendencia"].

En esta parte tenemos la evolución positiva del conflicto V⟷G, que concluyó la parte anterior. Su superación tiene tres aspectos:

(i) el entretejido sinérgico (en el sentido descrito para el tercer ejemplo) entre G y V, y de estos a su vez con T, cuya introducción ha sido solicitada por I varias veces;

(ii) una comprensión más profunda de la covariación $s - t$ a través de la construcción de una nueva fórmula que surge de las acciones epistémicas y semióticas generadas por la sinergia V-G-T;

(iii) la generación (y comprensión) de una nueva covariación de segundo nivel más compleja, en la que también entra un parámetro, que depende de la inclinación del plano inclinado.

Esta parte tiene tres episodios.

En *el primer episodio* (43: 00-45: 25), un grupo describe el resultado de sus exploraciones de la tabla en G y explica cómo puede aparecer una constante en la fórmula, que en su lugar no se mostró en el video y que E1 había resaltado (43: 00-44: 04: G➔). Evidentemente, este resultado es el resultado de una investigación dirigida con G (➔G). En 44:50 el estudiante asume la no aleatoriedad del valor constante. En este punto (45:25) llega una nueva lectura de lo que apareció en V (➔V), subrayada por la reescritura con un nuevo signo de la fórmula del video.

En *el segundo episodio* (45: 55-49: 26) llegamos a la covariación descrita en (iii). Varios estudiantes encuentran que la constante depende del valor del ángulo de inclinación del plano (46: 04-47: 48). La propiedad se experimenta en G con diferentes valores del ángulo (➔G). La covariación de segundo nivel se explica en 48:28 y 48:45 con contribuciones de diferentes estudiantes. Se dan cuenta de que k es un parámetro (la constante cambia [con el ángulo], pero siempre es 2.36). Estas últimas intervenciones expresan la capacidad de los estudiantes para leer la fórmula $s = kt^2$ en un "nivel doble": en el primer nivel la covariación s, t; en el segundo nivel la covariación de (s,t) y k.

El tercer episodio contiene varios refinamientos del resultado anterior esencialmente debido a las re-lecturas de la fórmula F y a varias exploraciones en G, en las cuales tenemos ambos modalidades en ambos casos: G➔, ➔G, F➔, ➔F.

El progreso de las distintas modalidades en los episodios de continuidad y discontinuidad se resume en la Tabla 2.

En este episodio, según la ECTJ la covariación de segundo orden se aborda en cuatro pasos (I. 43:00; II: 43: 53-44: 50; III: 45: 25-46: 04; IV: 47: 14-47: 4) y se logró completamente en el tercer episodio (48: 20-48: 45).

Tabla 2: Continuidad y discontinuidad entre artefactos en los diversos episodios

Discontinuidad	G→	I→	T→	F→	V→	V ↔G
	2	5	1	1	3	1
Continuidad	G→	→G	→V	F→	→F	
	2	3	1	1	1	

4. Discusión

Donde llegamos

En este artículo, presentamos una introducción didáctica a la covariación en matemáticas. Este objetivo planteó inmediatamente cuatro tipos de problemas:

a) la conveniencia de un cuidadoso análisis epistemológico y cognitivo del concepto de covariación;

b) la necesidad de desarrollar situaciones didácticas (en el sentido de Brousseau) que permitan a los estudiantes desarrollar problemas de covariación, definidos de acuerdo con el estado analizado en *a)*;

c) la importancia de definir el papel de las tecnologías en estas situaciones;

d) la necesidad de contar con herramientas para observar los fenómenos didácticos que ocurren en clase con la propuesta de tales situaciones.

El artículo responde a estos cuatro puntos ilustrando las respuestas con un ejemplo, tanto por razones de espacio como para no sobrecargar el hilo del discurso.

Para a): la covariación es una idea que está presente en el pensamiento matemático moderno, el nacimiento del álgebra moderna y el pensamiento funcional relacionado con la revolución científica, un aspecto paralelo del cual es el análisis elemental del Cálculo, y específicamente del concepto de función. Como lo han demostrado varios estudios, este aspecto, con pocas excepciones, está apenas presente en los libros de texto de matemáticas, que dan una definición de función abstracta y estática, o en el mejor de los casos se refieren a la metáfora de entrada-salida de las máquinas. No es una coincidencia que este enfoque esté más presente en los textos que tratan sobre problemas físicos, biológicos, económicos, etc. en los que es necesario modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo. Así que preferimos considerar la covariación como una forma más amplia de pensamiento, razonamiento covariante, que considera los objetos matemáticos considerando y buscando sus relaciones mutuas.

Para b). A diferencia de otros tópicos, el razonamiento covariante no se considera aquí como limitado a la introducción de funciones. Como se señala en a), tiene un valor epistemológico y cognitivo mucho más amplio: su contraparte didáctica está constituida por la forma covariante que se esconde detrás de la formulación abierta de los problemas, que contrasta la forma estándar generalmente presente en los libros de texto ("muestra que" en lugar de "explora"). La referencia a los objetos multiplicativos de Piaget y Lawvere ilustró los significados cognitivos y epistemológicos de esta elección didáctica, que reestructura las situaciones didácticas para poner en juego el razonamiento covariante en general, incluido, por supuesto, un enfoque no estático de las funciones conjunto.

Para c): tratar con la covariación en un entorno de papel y lápiz es muy abstracto y puede ser difícil de entender: por ejemplo, las barreras cognitivas pueden atribuirse a lo que algunas personas llaman confusión entre vías y trayectorias en el caso de que se consideran cronogramas (pero esto también puede aparecer en otras situaciones). La tesis del artículo es que la covariación se puede abordar con cierto éxito desde los primeros años de la escuela utilizando herramientas tecnológicas. De este modo se ha introducido la covariación instrumentada. De hecho, es posible concebir situaciones educativas en las que el razonamiento covariante se produce mediante una mediación adecuada de herramientas tecnológicas en las que se explota su potencial semiótico para producir una forma de covariación instrumentada.

Para d). Los diversos ejemplos ilustran la complejidad de los fenómenos de enseñanza / aprendizaje relacionados con la covariación instrumentada. No solo las herramientas tecnológicas desempeñan un papel esencial en esto, sino todos los recursos semióticos utilizados: desde el discurso verbal hasta inscripciones (esbozos, fórmulas), gestos, etc. Hemos visto cómo es la competencia entrelazada, a veces conflictiva, a veces sinérgica, de todos estos recursos, la que estimula y apoya los procesos de aprendizaje de los estudiantes. También hemos visto que el papel del profesor es crucial para estimular, apoyar y guiar estos procesos. En otros trabajos, he introducido una herramienta de análisis semiótico adecuada para leer la estructura y dinámica de este complejo entrelazamiento de recursos semióticos presentes en el aula: el haz semiótico ("semiotic bundle" en inglés: Arzarello, 2006). Esto amplía la noción del sistema semiótico clásico para sistemas de signos como gestos e inscripciones, todos presentes en los procesos observados en el aula, como lo ilustra abundantemente la literatura. El haz semiótico es una estructura dinámica que integra todos estos recursos semióticos en un solo todo, considerando tanto las relaciones mutuas entre ellos como su evolución en el tiempo. En este sentido, es una generalización del estudio por parte del sistema de gestos y discursos de McNeill (1992) y otros, porque por un lado integra en el modelo no solo el habla y los gestos, sino también las inscripciones (de fórmulas a las gráficas) en las que se basa el pensamiento matemático. Por otro lado, presenta un modelo que evoluciona con el tiempo: debido a su estructura rica, el modelo de haz semiótico permite capturar la dinámica compleja del pensamiento matemático en variables observables cuando ocurren en una situación de interacción, y así hacerlas accesibles a la investigación científica. Naturalmente, para lograr esto, también es necesario filmar con varias cámaras lo que sucede en las interacciones en clase entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores, mientras se mantiene un registro de sus producciones escritas. En el análisis final de estos documentos, también utilizamos el modelo de microgénesis de un problema adaptado de las investigaciones de Saada–Robert (1989). Desafortunadamente, el espacio permitido no nos permite ilustrar este aspecto aquí.

A donde nos gustaría llegar

Hay diferentes problemas que deja abierta esta investigación. Por un lado, necesitamos una mayor colección de datos sobre el trabajo en el aula, que se centre en la introducción del razonamiento covariante para proporcionar más información sobre la dinámica de su aprendizaje, especialmente sobre las dificultades de los estudiantes, y posiblemente en ingeniería didáctica apropiada para superarlos. Por otro lado, es importante desarrollar una profundización cognitiva y epistemológica de la noción de covariación: por ejemplo, las ideas de Piaget y Lawvere sobre los objetos multiplicativos deben estudiarse en relación con los procesos de resolución específicos de problemas abiertos y los fenómenos de la microgénesis de la representación de un problema, discutidos por Saada–Robert (**1989**).

Reconocimiento. Agradezco al Dr. Eduardo Basurto y a todo el equipo del XV CIAEM por el paciente trabajo de revisar mi pobre español, tanto por la presentación durante la conferencia como por la preparación de este texto.

Referencias y bibliografía

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

Arzarello F., (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. Especial, 267–299.

Arzarello F., (2008). *Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories.* 10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture (Editor: M. Niss). IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Heidelberg: Springer.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* The Netherlands. (**http://people.umass.edu/clement/pdf/Misconceptions%20in%20Graphing.pdf**)

Dreyfus, T. y Kydron. I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Editors). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* Heidelberg: Springer. Cap. 6, pp. 85-96.

Fibonacci (2012) Inquiry in Mathematics Education, (**http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html**).

Galilei, G. (1615), Lettera a Madama Cristina di Lorena Granduchessa di Toscana. In: *Opere, Edizione Nazionale a cura di Antonio Favaro, Giunti-Barbera, Firenze* 1968, vol. V, pp. 309-348. (**https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image**)

Galilei, G. (1638), Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Leyden: Ludovico Elzeviro. (**https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image**)

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education. 32*, 195-222.

Kirsch, D., Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive Science 18*, 513-549.

Lagrange, J.L. (1808). Traité de la résoluition des équations numériques de tous les degrés. Nouvelle éditiona revue et augmentée par l'auteur. Paris: Coursier.

Lawvere, F.W. & Shanuel, S.H. (1991). *Conceptual Mathematics,* Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'epistémologie génétique*. Tome I: La pensée mathématique. Presses universitaires de France.

Plano inclinado. Vídeo del Museo Galilei (Florencia) https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html

Pontecorvo and Girardet (1993): Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction*, 11, 365-395.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. *Psychologie française, 34*(2-3), 193-206.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S.B. & Coulombe, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* - North America Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

Vygotsky L.S. (1985). *Thought and Language*. Second revised and expanded edition, edited and translated by E. Hanfmann, G. Vakar, and A. Kozulin. Cambridge, MA: MIT Press.

Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes[1]

Salvador Llinares

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se articula a través de diferentes tareas profesionales que ponen de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta situación introduce la idea de competencia docente del profesor entendida como el uso pertinente del conocimiento en el desarrollo de estas tareas profesionales. En este ámbito, la competencia docente "mirar de manera profesional" la enseñanza de las matemáticas se entiende como el proceso de interpretar las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas para justificar las decisiones de acción según los objetivos de aprendizaje planteados. Esta perspectiva deriva desafíos para los formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, competencia docente, conocimiento de matemáticas para enseñar, formación de profesores de matemáticas.

Abstract[2]

Mathematics teaching is articulated through different professional tasks that highlight the influence of the context on how Mathematics teachers use the knowledge of Mathematics and Mathematics teaching. This situation introduces the idea of teacher pedagogical competence understood as the relevant use of knowledge in the development of these professional tasks. In this area, the teaching competence needed "to look professionally" at the teaching of Mathematics is understood as the process of interpreting the teaching situations in the learning of Mathematics to justify action decisions according to the learning objectives that have been set. This perspective presents challenges for Mathematics teacher educators.

Keywords: Mathematics teaching, teacher proficiency, Mathematics Knowledge for Teaching, Mathematics teacher education.

1. La enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas

Desde hace algunos años se insiste en la necesidad de que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la forma de pensar matemáticamente de los niños para ayudarles

S. Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia plenaria dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 1 de junio de 2019 y aceptado el 14 de julio de 2019.

en su aprendizaje de las matemáticas (Even y Tirosh, 2008). Ayudar a los estudiantes a razonar matemáticamente implica que los profesores deben elegir tareas matemáticamente relevantes para sus estudiantes e identificar oportunidades durante la enseñanza para que los estudiantes se impliquen en procesos matemáticos como particularizar y generalizar, conjeturar, argumentar/probar y comunicar. Desde esta perspectiva, la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para conseguir los objetivos de aprendizaje pretendidos, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1). Este sistema de actividades que articulan la práctica de enseñar matemáticas se puede concretar en actividades particulares. Por ejemplo, la selección o diseño de tareas matemáticamente relevantes implica la necesidad de anticipar respuestas probables de los estudiantes a dichas tareas. La gestión de las discusiones matemáticas en el aula implica la posibilidad de seleccionar estudiantes particulares para presentar sus respuestas e ideas durante la puesta en común, secuenciando con un propósito explícito el orden en el que los estudiantes se les da la oportunidad de discutir sus resoluciones y reconocer la posibilidad de hacer conexiones entre las respuestas de los diferentes estudiantes y entre estas y las ideas matemáticas clave que son el objetivo de la lección (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008).

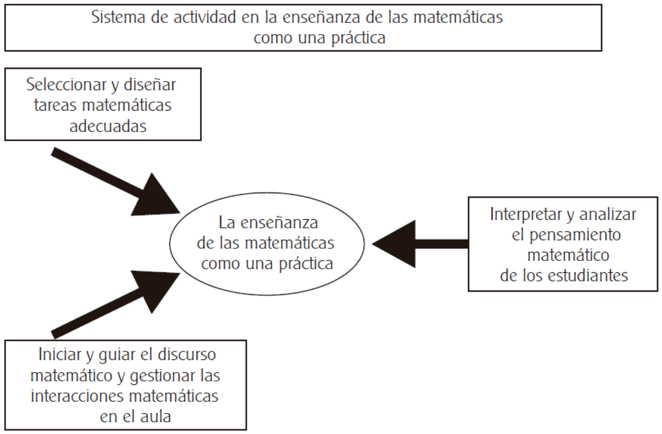


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica en Llinares, Valls y Roig (2008 p. 34)

Estas actividades pueden contextualizarse desde los momentos de la planificación, hasta momentos imprevistos durante la enseñanza. Entre los primeros, están los momentos en los que el profesor tiene que pensar cómo secuenciar actividades con diferente demanda cognitiva teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos en su clase. Entre las segundas, podemos encontrar el aprovechamiento de situaciones imprevistas durante el desarrollo de la lección que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, reconocer alguna cuestión planteada por los estudiantes y generada durante las discusiones matemáticas en el aula a partir de la cual el profesor puede decidir una determinada dirección de la clase para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

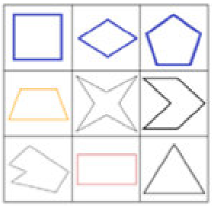
Esta variedad amplia de situaciones en las que los profesores deben responder ha puesto de manifiesto la relevancia del *conocimiento de matemáticas para la enseñanza* (Ball & Bass, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis, & Renert 2013; Rowland, et al. 2009). La falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes, para reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante el desarrollo de la lección, para identificar aspectos relevantes del pensamiento matemático de sus estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula.

Diferentes estudios han estado caracterizando los dominios de conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y que resultan relevantes para la realización de estas actividades (Davis & Renert, 2013; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, Pino-Fan, 2019). Una de las características que han revelado estos estudios es la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas y cómo es usado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de las matemáticas. Relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor. Por ejemplo, el reconocimiento por parte del profesor de oportunidades durante la enseñanza aprovechándolas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes es una manifestación de la manera en la que el profesor usa diferentes dominios de conocimiento para realizar inferencias basadas en las evidencias para tomar decisiones de enseñanza (Stockero, van Zoest, 2013; van Zoest, Stockero, Leatham, Peterson Atanga y Ochieng, 2017). De esta manera, apoyar la enseñanza de las matemáticas en el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculado a la competencia del profesor para realizar inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En este sentido, para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, los profesores deben diseñar, adaptar o seleccionar tareas matemáticas relevantes e interpretar lo que dicen y hacen sus estudiantes al resolverlas, para poder decidir cómo continuar la enseñanza. Estas actividades (prácticas profesionales) – diseñar/adaptar/seleccionar, interpretar y tomar decisiones requieren conocimiento especializado. En particular en relación con los estudiantes como aprendices, sobre el currículo y sobre estrategias instruccionales (Even y Tirosh, 2008).

2. Competencia docente: uso del conocimiento para resolver actividades en la enseñanza

La especificidad del conocimiento del profesor en la realización de las actividades vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas conlleva el reconocimiento del papel de diferentes dominios de conocimiento (Llinares, 2013-a, 2013-b). Por ejemplo, un contenido curricular en la educación primaria son las figuras geométricas y los polígonos. Este contenido define como objetivo desarrollar en los estudiantes formas de razonar con las figuras geométricas y sus atributos. Este objetivo implica ayudar a los estudiantes a comprender los procesos de clasificación de las figuras geométricas que se apoyan en el reconocimiento de atributos comunes a grupos de figuras. En este contexto ante una tarea como la que aparece en la Figura 2, cuando el profesor anticipa posibles respuestas de los estudiantes para justificar su introducción en la lección debe movilizar conocimiento desde diferentes dominios.

De entre todas estas figuras hay una que no corresponde a este grupo, ¿Por qué?



1a-cuadrado; 1b-rombo; 1c-pentágono regular

2a- trapecio isósceles; 2b- octógono cóncavo simétrico; 2c-hexágono cóncavo simétrico

3a- hexágono no simétrico cóncavo; 3b-rectángulo; 3c- triángulo equilátero

Figura 2. Actividad de reconocer semejanzas y diferencias entre figuras geométricas. (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2018)

La selección de esta tarea (Figura 2) refleja el conocimiento del objetivo curricular (aprender a identificar y razonar con los atributos de las figuras). La tarea implica reconocer un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite agruparlas en relación con otras, y poder justificar por qué una figura no tiene el atributo identificado. Además, la tarea tiene en cuenta que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar una comprensión amplia sobre las figuras geométricas si tienen la posibilidad de analizar múltiples ejemplos de figuras y discutir sobre sus semejanzas y diferencias. Desde este punto vista, resulta clave introducir ejemplos de figuras que cumplan ciertos requisitos junto con figuras que no los cumplan. Esta tarea refleja aspectos del currículo (tipo de figuras y atributos) y de los procesos cognitivos que se tiene que desarrollar en los estudiantes (reconocer atributos, y semejanzas y diferencias entre las figuras). En este sentido, preguntas que pueden ayudar a movilizar el conocimiento del profesor sobre estos aspectos son

- ¿las tareas previstas en el plan de la lección presentan variedad de ejemplos y contra-ejemplos?

La tarea de la figura 2 tiene como objetivo que los niños/as reconozcan atributos de las figuras geométricas y que sean capaces de establecer listas de estos atributos vinculados a diferentes figuras para poder establecer diferencias entre las figuras (regularidad, cóncavo /convexo, numero de lados, simetría, paralelismo, diagonales, etc.). En esta tarea, los atributos que permiten diferenciar una figura de las otras pueden ser (i) la simetría que permite diferenciar hexágono cóncavo que no tiene ejes de simetría del resto de figuras, (ii) el tener más de un ángulo mayor de 180º, que permite diferenciar el octógono cóncavo (la estrella) del resto de las figuras, y (iii) no tener diagonales, que permite diferenciar al triángulo equilátero del resto de las figuras.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre los estudiantes y el aprendizaje matemático, el profesor debería reconocer que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de pensar en diferentes aproximaciones a la resolución de las tareas pueden generarse diferentes soluciones. En este tipo de situaciones los profesores deben anticipar posibles respuestas de los estudiantes, aunque algunas veces se tiene que asumir que las respuestas de los estudiantes pueden ser imprevisibles. Es, en este contexto, en el que la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden, además del conocimiento reunido por las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, en relación con la tarea anterior (Figura 2), una referencia puede ser las características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico proporcionada por el modelo de van Hiele relativos a la capacidad de reconocer atributos de las figuras (Figura 3). Esta situación genera la complementariedad entre los procesos de transferencia del conocimiento (de la teoría a la práctica) y la generación procesos de desarrollo profesional del profesor (de la práctica a la teoría). Durante muchos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado proporcionando información sobre características de cómo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y desarrollan procesos matemáticos. Esta información es la que los profesores pueden usar para realizar inferencias sobre qué y cómo los estudiantes están aprendiendo desde lo que los estudiantes dicen o hacen cuando resuelven problemas y justificar, como consecuencia, las direcciones de la enseñanza generadas.

NIVEL	RECONOCER
1. Los estudiantes reconocen las figuras **como un todo**.	• Asocian las figuras a objetos conocidos. "*Esta se parece a un reloj de arena*". • Hacen uso de artículos demostrativos para indicar las diferencias de las figuras. Usan los demostrativos "eso" o "esto" para indicar las diferencias de las figuras. • Tienen dificultades para reconocer los atributos de las figuras. • Usan términos perceptuales para nombrar algunos atributos aunque estén descontextualizados (no conocen los términos o no los usan adecuadamente)
2. Los estudiantes escriben **las partes y los atributos** de las figuras.	• Los estudiantes reconocen de manera progresiva los atributos de las figuras: Figuras cerradas/abiertas. Lados rectos/curvos. Lados no-cruzados/cruzados. Aunque inicialmente pueden tener dificultades en reconocer algunos atributos. (Cóncavo/convexo, Número de lados elevado, Altura triángulos, ...) finalmente los reconocen de manera sistemática. • Empiezan a incorporar los nombres de las figuras para diferenciarlas (rombo, cuadrado, triángulo rectángulo, cuadriláteros, ... • Finalmente, reconocen os atributos de las figuras, y los usan para diferenciarlas entre sí. – Diagonales (tamaño, perpendicularidad). – Ejes de simetría. – Paralelismo, perpendicularidad de los aldos (ángulos rectos). • Usan un vocabulario adecuado, incorporando los términos adecuados de los atributos para explicar las diferencias entre las figuras (figuras cerradas/abiertas, lados curvos/rectos, triángulos rectángulos/acutángulos/obtusángulos, ...).

Figura 3. Características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en relación con la actividad de Reconocer (Bernabéu, Moreno, y Llinares, 2018, Pag. 63)

En relación con el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales, el profesor puede ayudar a los estudiantes a realizar comparaciones y conexiones. Por ejemplo, en la tarea de la Figura 2 indicando a los estudiantes que generen listas de atributos que cumplan las diferentes figuras y comparen las diferencias y semejanzas entre ellas. Facilitar la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de nuevas ideas. Otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación con el currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación con el aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas.

3. Desarrollo de competencias docentes para aprender una profesión

La identificación de diferentes tareas profesionales pone de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. A través de esta identificación hemos introducido la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las actividades profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. La idea de competencia docente como un proceso basado en el conocimiento lo hemos caracterizado mediante un ejemplo vinculado a la elección por parte del profesor de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva, que nos ha permitido ejemplificar los contextos de uso de diferentes dominios de conocimiento. Esta caracterización de la enseñanza de las matemáticas como una práctica en la que se movilizan diferentes dominios de conocimiento (competencia docente) tiene reflejos en las propuestas de formación de profesores (Llinares, 2012).

En particular, en propuestas de formación de profesores que inciden en maximizar la relación entre la teoría y la práctica en contextos que favorezcan el uso del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas (Fernández, Callejo & Márquez, 2014; Oonk, Verloop, Gravemeijer, 2015), proporcionando a los estudiantes para profesor oportunidades de analizar ejemplos de la práctica de enseñar matemáticas como un contexto para el desarrollo de competencias docentes. Uno de los objetivos en esta aproximación a la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar un discurso profesional vinculado a la práctica (Ivars, Fernández y Llinares, & Choy, 2018). Es decir, favorecer el desarrollo de argumentos prácticos como una elaboración formal de formas de razonar sobre la práctica. En el desarrollo de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor se pretende que estos establezcan razones de sus decisiones vinculando las evidencias proporcionadas por los registros de la práctica con principios más generales procedentes de la teoría (Fenstermacher y Richardson, 1993; Roig, Llinares, & Penalva, 2011).

En este contexto se generan cuestiones relativas a cómo apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza (Llinares, 2013-a, 2015; Seibert y Groenwald, 2013). Asi, "mirar de manera estructurada" las situaciones de enseñanza para generar información sobre lo que está sucediendo y proponer nuevas tareas se considera un proceso basado en el conocimiento (Mason, 2002; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Desde la perspectiva de la formación de profesores se plantea la necesidad de:

* comprender el desarrollo de esta competencia, e

* identificar contextos de aprendizaje que apoyen dicho desarrollo.

Estos dos aspectos generan desafíos a los formadores de profesores en dos ámbitos:

* en cómo conceptualizar modelos de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Sánchez-Matamoros, Moreno, Perez-Tyteca & Callejo, 2018) y

* en generar maneras de pensar sobre el diseño de intervenciones en los programas de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2016; Llinares, Valls, &, Roig, 2008).

Una línea de actuación que intenta aportar información a estas cuestiones enfatiza el uso de diferentes tipos de *registros de la práctica* para crear los contextos de desarrollo de la competencia docente. Un registro de la práctica puede ser un video de una lección en una clase, las respuestas escritas de los estudiantes a uno o varios problemas, una planificación de una lección o grupos de planificaciones de una lección. A partir de estos registros de la práctica es posible generar tareas para los estudiantes para profesor en el sentido de ayudarles a estructurar su mirada: qué aspectos mirar del registro de la práctica, que conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc. En el apéndice de este texto se muestra un ejemplo de este tipo de tareas en un programa de formación de maestros (Educación Primaria).

Las tareas diseñadas mantienen una estructura similar. En primer lugar, se contextualiza el registro de la práctica y luego se introducen las evidencias. En este ejemplo, el texto escrito de la interacción entre una maestra y un alumno motivada por la resolución de una actividad dirigida a desarrollar la comprensión de los números de tres cifras. Finalmente, se presentan una serie de cuestiones para el estudiante para profesor para organizar su aproximación al análisis de la situación y ayudarle a generar un argumento práctico sobre la situación. Esta estructura del diseño de las tareas en el programa de formación permite tener la oportunidad de desarrollar diferentes aspectos de lo que constituye la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) concreta estos aspectos en: (i) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y (iv) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

La secuencia de este tipo de actividades en el programa de formación (Figura, 4) crea el contexto para favorecer el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la acción sobre la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para profesor (Ivars et al., 2018). El desarrollo de este discurso profesional es el que puede evidenciar la relación entre (i) identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, (ii) usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las evidencias proporcionadas, y (iii) realizar conexiones entre los sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Van Es y Sherin 2002).

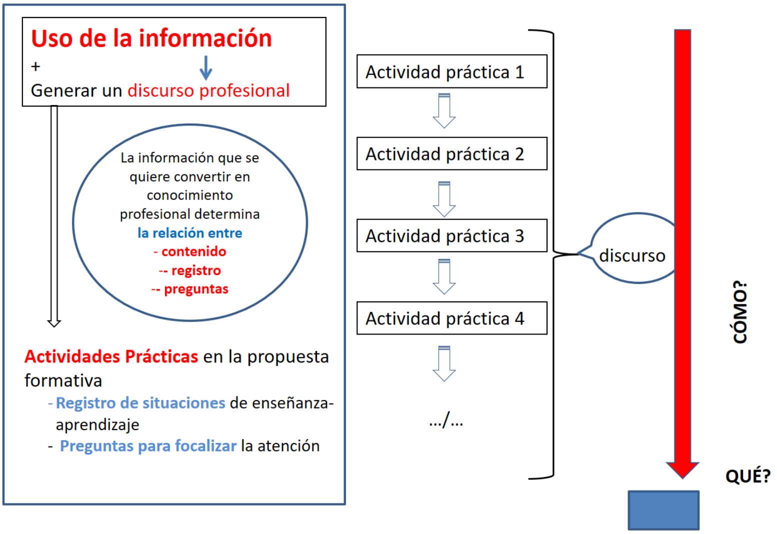


Figura 4. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente "mirar profesionalmente" (Ivars, Buforn, y Llinares, 2017; p. 77).

4. Consideraciones finales: Desafíos en aprender la práctica de enseñar matemáticas

Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, reconocer que el proceso de llegar a ser profesor significa aprender una práctica basada en el conocimiento, genera desafíos para los formadores de profesores. En primer lugar, por la necesidad de identificar sistemas de actividad que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Lampert, 2001). La descomposición de la práctica en sus aspectos constituyentes permite a los estudiantes para profesor tener la oportunidad de estudiar componentes separados pero relevantes de la práctica (Figura 1). En segundo lugar, por la posibilidad de asumir diferentes representaciones de la práctica de enseñar que puedan ayudar a determinar qué tipo de registros de la práctica y qué tipo de actividades con ellos deben insertarse en los programas de formación *(core practices)* de manera que los estudiantes para profesor puedan aprenderlas (Grossman, 2018). En este aprendizaje resulta relevante la manera en la que los estudiantes para profesor se apropian de instrumentos conceptuales para guiar sus decisiones sobre la enseñanza (Ivars, Buforn y Llinares, 2016). En tercer lugar, la necesidad de hacer explícito cómo los formadores de profesores conceptualizan el desarrollo de las competencias docentes (Sánchez-Matamoros et al, 2018). Los diferentes modelos a través de los cuales los formadores caracterizan el aprendizaje de los estudiantes para profesor permiten justificar las decisiones sobre cómo organizar los entornos de aprendizaje en el programa de formación.

Las ideas y principios que ayudan a dar respuesta a estos desafíos (identificar sistemas de actividad relevantes, determinar diferentes registros de la práctica, y el modelo de desarrollo de las competencias adoptado) se están considerando como referentes para articular los programas de formación reconociendo la dificultad de aprender la práctica de enseñar matemáticas.

La posibilidad de descomponer la práctica de enseñar matemáticas en actividades relevantes puede verse como una simplificación de la práctica, pero permite a los formadores de profesores generar entornos de aprendizaje en el programa de formación centrados sobre aspectos específicos sin perder de vista la mayor complejidad que se genera en situaciones reales de clase. Por ejemplo, el poder analizar aspectos particulares de la interacción entre un alumno y su maestra (ver un ejemplo en el anexo) puede ayudar a los estudiantes para maestro a detenerse e interpretar aspectos particulares de la interacción que sería más complicado en una situación de clase real. En el desarrollo de este tipo de actividades de análisis de registros de la práctica los estudiantes para profesor pueden empezar a identificar aspectos relevantes, nombrarlos de manera que facilite la comunicación con otros y a interpretarlos. En este proceso resulta clave los instrumentos conceptuales que el formador de profesores puede ponerle a su alcance de manera que puedan ser usados para identificar, nombrar e interpretar los aspectos de la práctica que centran su atención. Estos instrumentos conceptuales, como esquemas para analizar la interacción en el aula o trayectorias de aprendizaje de las nociones matemáticas, proporcionan a los estudiantes para profesor el lenguaje para describir e interpretar los aspectos de la práctica y formas de ver y comprender la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2015).

Finalmente se puede indicar que, la identificación de desafíos en la formación de profesores de matemáticas al adoptar la perspectiva de que llegar a ser profesor implica aprender una práctica, se apoya en el trabajo, reflexión sobre la práctica e investigación de los formadores de profesores en sus intentos de mejorar su propia práctica.

Reconocimiento. La investigación mencionada en este trabajo ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad –MINECO - a través de la Agencia Estatal de Investigación- AEI, España mediante el proyecto EDU2017-87411-R; y de la Generalitat Valenciana- GVA- a través del grupo de Excelencia PROMETEO2017/135.

Referencias y bibliografía

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83–104). Westport: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Bernabéu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). ¿Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica? En Roig-Vila, R. (ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza superior.* Barcelona: Octaedro.

Davis, B. & Renert M. (2013). *The Math Teachers Know. Profound Understanding of Emergent Mathematics*. London: Routledge.

Even, R. y Tirosh, D. (2008). Teacher Knowledge and understanding of students' mathematical learning and thinking. En L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education. 2nd edition* (p. 202-222). London: Routledge.

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división medida. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 407-424.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Fenstermacher, G. & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies, 25*(2), 101-114.

Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Cambridge, MA: Harvard Education Press.

Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente. *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (ed). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (p. 65-88). Caracas: CIES.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New York: Yale University Press

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62.

Llinares, S. (2013-a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, Curitiba, 50,* 117-133

Llinares, S. (2013-b). Professional noticing: A component of Mathematics Teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas". Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B. D'Amore & M.I. Fandiño (Comp.), *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Bogotá: Ediciones Universidad de la Sabana

Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. En G.A. Perafan, E. Badillo, & A. Aduriz (eds.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Bogotá: Editorial Aula de Humanidades.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. & Groenwald, C. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández & M.T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Llinares, S., Valls, J. &, Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 31-54

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Oonk, W.; Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 559-598.

Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet. Londres: SAGE

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228.

Scheiner, Th., Montes, M., Godino, J.D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2018). What makes mathematics Teachers Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics, 17*(1), 153-172.

Seibert, L.G., Groenwald, Cl. (2013). Observar com Sentido: una competência importante na vida professional do professor de Matemática. *Acta Scientiae, 15*(1), 133-152.

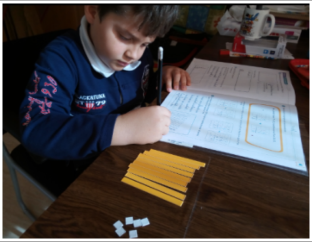
Stein, M.K., Engle, R.A.; Smith, M.S.; Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Educators, 16(2)*, 125–147.

Van Zoest, L., Stockero, Sh., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in Whole-Class Discussion. *Mathematical Thinking and Learning, 19(1)*, 33-54.

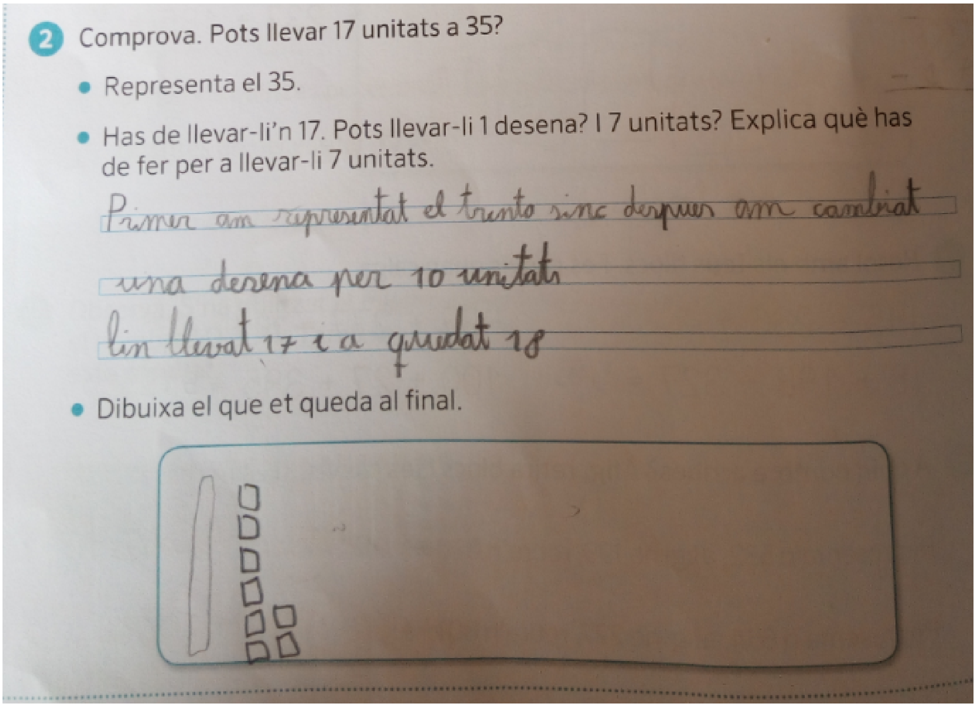
Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions.*Journal of Information Technology for Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Apéndice- El caso de Mikel y el significado de los números de tres cifras

Mikel tiene 7 años y 7 meses. Está en 2º Educación primaria. Estamos en enero. Texto: *Taller de Matemàtiques Manipulatives. Matemàtiques 2º de Primaria.* Edt. SM-arrels	

Contexto: Mikel está en el tema de la resta llevando con números de dos cifras. Él usa bloques multibase en cartulina (los lleva en una bolsita a clase) para realizar las actividades. Representa los números con los bloques, dibuja los bloques en el cuaderno/libro y escribe los números –símbolos- que representan las cantidades que tiene con los bloques multibase.

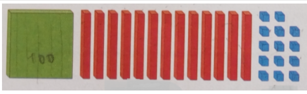
Lo que sigue es una de las actividades que ha realizado en su libro unos días antes[3]:



Unos días después se plantea la siguiente tarea que tiene

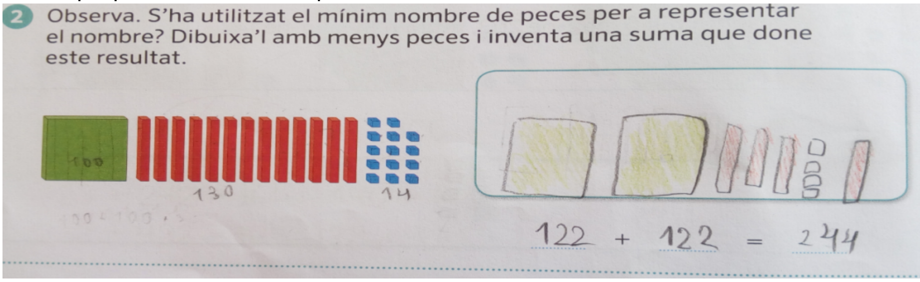
La tarea

[1] El idioma del texto usado y las respuestas de Mikel es el valenciano, lengua vernácula del contexto de donde procede el registro de la práctica

Observa, s'ha utilitzat el mínim nombre de peces per a representar el nombre? *Dibuixa'l amb menys peces i inventa una suma que done este resultat.*	

La respuesta de Mikel y la interacción con la maestra

Mikel proporciona como respuesta 122 +122



La maestra al ver la respuesta de Mikel, comprueba que está bien, pero le gustaría averiguar cómo está pensando y qué **comprensión tiene de los números de tres cifras y de la relación entre las diferentes unidades**. Para ello le pide a ver si puede darle otra solución

Maestra: *¿puedes encontrar otros números que sumados den 244?*

Mikel: *Sí.* [Piensa un momento, levanta una mano con sus dedos extendidos, y escribe]

113 + 131

Maestra: *¿Cómo lo sabes?*

Mikel: *Porque, tres y uno son cuatro* (señalando el 4 de las unidades). *Uno y tres son cuatro* (señalando el 4 de las decenas), *y uno y uno son dos* (señalando el dos de las centenas).

Maestra: *¿puedes encontrar otros números?*

Mikel: [Piensa un momento]. *Sí,* (y escribe)

121 + 123

Maestra: *Muy bien Mikel!*

Aunque Mikel ha resuelto bien las tres tareas, la maestra se da cuenta de que ella no tiene evidencias de la comprensión de Mikel de las relaciones entre las diferentes unidades en el número de tres cifras, y por tanto de su comprensión del número. Es decir, ella cree que la resolución correcta de la tarea del libro de texto y de las tareas adicionales que le había pedido, no le dan información sobre la comprensión de Mikel de los números de tres cifras que es el objetivo de la tarea. Por ello, le plantea la siguiente tarea

Maestra: *Bien Mikel, vamos a hacer otro problema igual. ¿Puedes encontrar dos números que sumados den 210?*

Mikel se pone a pensar un rato más largo que en las actividades anteriores. Aunque tiene los bloques multibase encima de la mesa, no los utiliza. Después de un rato escribe lo siguiente, pero dudando

15 + 15 = 210

Maestra: *¿cómo lo has hecho?*

Mikel: *Pues, ..., como cinco y cinco son diez (señalando al 10 del número), y uno y uno son dos (señalando al 2).*

[Mikel mira dudando lo que ha escrito]

Maestra: *¿Estás seguro?*

Mikel: *No.*

CUESTIONES

a) **Sobre la tarea. Características**

¿Qué elementos matemáticos deben usarse para resolver la actividad? Tras la respuesta de Mikel, la maestra le pide que encuentre la suma de otros dos números ¿qué pretendía conseguir la maestra? ¿Por qué finalmente le plantea una tarea similar pero cambiando el número a 210? ¿Cuál era el objetivo de esta nueva tarea?

b) **Sobre la comprensión de Mikel**

¿Qué elemento matemático debe mejorar en su comprensión? ¿Por qué la tarea del libro de texto no era suficiente para determinar la comprensión de Mikel de los números de tres cifras?

c)Sobre lo que hacer a continuación

¿Cómo ayudarías a Mikel? ¿Qué tarea (y qué números usarías) para ello?

Lo que sigue es una actividad que propone el libro de texto. Diseña una actividad anterior y una posterior a la dada que podrías utilizar para apoyar a Mikel en la comprensión de los números de tres cifras. Justifica tu decisión en función del elemento matemático que debe consolidar y los números que usas en las tareas.

Com lleves 4 unitats a una placa de 100? Comprova i explica pas a pas el procés seguit. Dibuixa el que queda al final.

Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective from Curriculum and Research[1]

J. Michael Shaughnessy

Summary

Five decades of research and curriculum development on the teaching and learning of statistics have produced many recommendations from both researchers and national organizations on the statistical education of our students. Within the last ten years work by both statisticians and statistics educators has focused on a collection of big ideas that are the most important concepts and processes to develop the statistical thinking of our students, our work force, and the lifelong statistical literacy of our citizens. In this paper I look back at the roots of big ideas in statistics education and identify what I believe are the two most important overarching ideas for the statistical education of our students as they progress from the elementary years into tertiary. The paper discusses research on student thinking about big ideas in statistics and presents recommendations for the future of teaching and research in statistics education.

Key Words: Statistics education, distribution, inference, variability, expectation, sampling, statistical investigation processes.

Resumen

Cinco décadas de investigación y desarrollo curricular sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística han producido muchas recomendaciones de investigadores y organizaciones nacionales sobre la educación estadística de nuestros estudiantes. En los últimos diez años, el trabajo de estadísticos y educadores en estadística se ha centrado en una colección de grandes ideas que son los conceptos y procesos más importantes para desarrollar el pensamiento estadístico de nuestros estudiantes, nuestra fuerza laboral y la alfabetización estadística de nuestros ciudadanos. En este artículo repaso las raíces de las grandes ideas en la educación estadística e identifico las que creo que son las dos más importantes para la educación estadística de nuestros estudiantes a medida que progresan desde los años de primaria hasta la educación superior. El documento analiza la investigación sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de grandes ideas en estadística y

---

J. M. Shaughnessy
Portland State University, USA
mikesh@pdx.edu

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 13 de junio de 2019 y aceptado el 28 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 44–58. Costa Rica

presenta recomendaciones para el futuro de la enseñanza y la investigación en educación estadística.

Palabras clave: Educación estadística, distribución, inferencia, variabilidad, expectativa, muestreo, procesos de investigación estadística.

1. Introduction

Curriculum and Practice

Prior to the 1960's, there was almost no statistics included in the school curricula of many nations of the world. In their review What is Statistics Education? Zeiffler, Garfield, and Fry (2018) point to early recommendations from the 1960's in which several curriculum projects in the UK recommended the inclusion of probability and statistics in schools for students ages 11 – 16. In 1967, the American Statistical Association (ASA) and the National Council of Teachers of Mathematics created the Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability in the U.S. and Canada. In the early 1970's the Joint Committee spearheaded the publication of some of the first materials for teaching statistics in schools, such as *Statistics: A Guide to the Unknown* (Tanur, Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1972), and *Statistics by Example* (Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1973). To this day the Joint Committee continues to sponsor and promote statistics education and the professional development of teachers with curriculum materials such as *The Quantitative Literacy Project* (Ganadesikan et. al., 1995) and recommendations for the teaching and learning of statistics that appeared in the GAISE documents, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin, Kader, Mewborne, Moreno, Peck, Perry, & Schaeffer, 2007).

Research

Early attempts to include statistics in the education of school age students prompted research into the teaching and learning of statistics, which began in the 1970's (particularly in the UK, Germany, Israel, and the U.S. For details, see Shaughnessy, 1992). This growing international interest in teaching and research in statistics education eventually gave birth to the *First International Conference on Teaching Statistics* in Sheffield, England in 1982, ICOTS I. Since then an ICOTS has convened every four years. ICOTS X was held in Hiroshima in 2018, and ICOTS XI will take place in Rosario, Argentina in 2022, after which an ICOTS conference will have been held on every continent and in 11 different countries.

This paper presents a retrospective analysis of the development of the most important ideas in statistics education from two different viewpoints: First from the perspective of curriculum recommendations and then from a research lens.

Curriculum Documents 1: NCTM Standards for Statistics Education of K-12 Students

Starting with the *Agenda for Action* document (NCTM, 1980), through the *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) and subsequently with *Principles and Standards for School Mathematics* (PSSM) (NCTM, 2000), the National Council of Teachers of Mathematics has long advocated for teaching statistics in Grades

K–12 in the United States and Canada. The 1989 standards were NCTM's first foray into establishing goals in statistics for school mathematics. In 1989, NCTM made the following recommendations:

For grades K – 4:

- Formulate and solve problems that involve collecting, describing and analyzing data
- Construct, read and interpret displays of data
- Explore concepts of chance

For grades 5 – 8:

- Systematically collect, organize and describe data
- Construct, read and interpret tables, charts, and graphs
- Make inferences and convincing arguments, and evaluate the arguments of others based on data analysis
- Develop an appreciation for statistical methods as powerful means for decision making

For grades 9 – 12:

- Construct and draw inferences from charts, tables and graphs that summarize data from real world situations
- Use curve fitting to predict data
- Understand and apply measures of central tendency, variability, and correlation
- Understand sampling and recognize its role in statistical claims
- Design a statistical experiment to study a problem
- Analyze the effects of data transformations on measure of center and variability
- Test hypotheses using appropriate statistics

The 1989 standards recommended starting with data analysis in grades K–8, but took quite a jump in depth and abstraction in the grades 9–12 recommendations by including statistical design, mathematical transformations of parameters, and hypothesis testing. The 1989 standards are predominantly a list of content, concepts and procedures that students should know and be able to do, though the process of making inferences was included for grades 5–12. Ten years later in *Principles and Standards for School Mathematics* (*PSSM*), NCTM's standards for statistics were organized under four broad processes in grade bands K–2, 3–5, 6–8, and 9–12. PSSM recommended that instructional programs PreK-12 should enable all students to:

- Formulate questions that can be addressed with data and collect, organize and display relevant data to answer them
- Select and use appropriate statistical methods to analyze data
- Develop and evaluate inferences and predictions based on data
- Understand and apply basic concepts of probability

These four broad processes remain the same throughout all four grade bands in PSSM, but grow in depth throughout the grades. For example, the trajectory for *Developing and evaluating inferences and predictions based on data* across the grades progresses through the grade bands:

PreK–2.	Discuss events related to students' experiences as likely or unlikely
Grades 3–5.	Propose and justify conclusions and predictions based on data and design studies to further investigate conclusions or predictions
Grades 6–8.	Use observations about differences between two or more samples to make conjectures about the populations from which the samples were taken. Make conjectures about possible relationships between two characteristics of a sample on the basis of scatterplots and approximate lines of fit.
Grades 9–12.	Use simulations to explore the variability of sample statistics from a known population and to construct sampling distributions. Understand how sample statistics reflect the values of population parameters and use sampling distributions as the basis of informal inference.

Notable in the PSSM standards when compared to the earlier NCTM standards is the growing emphasis on making and testing data-based conjectures and the introduction of the term "distribution".

Curriculum Documents 2: The Central Role of Variability—Recommendations from the American Statistical Association

During the 1980's statistics education in schools concentrated on measures of center and neglected the important role that variability plays in statistics. Mathematics curricula introduced statistics to students primarily through calculating modes, medians, and means. In his position paper on statistics content and pedagogy, president David Moore of the ASA (1997) emphasized the crucial role that variability plays in statistics education. Without variability, statistics would not even exist. The writings of Moore and others sounded a clarion call for mathematics education to rethink what the big ideas in statistics education really are. Subsequently statistics education researchers began to concentrate more on investigating students reasoning about variability. (E.g., Shaughnessy, Watson, Moritz & Reading, 1999; Melitou, 2002; Toruk & Watson, 2000; Watson, Kelly, Callingham & Shaughnessy, 2003; Watson & Kelly, 2004; Reading & Shaughnessy, 2004). The GAISE documents (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin et al, 2007) appropriately pointed to the central role of variability in its four-step statistical investigation process (Figure 1)

I. Identify a Statistical Question—*Anticipate Variability*
Formulate questions that can be answered with data
II. Collect Data—*Acknowledge Variability*
Design for differences and plan to collect appropriate data
III. Analyze Data—*Account for Variability by Using Distributions*
Select appropriate graphical and numerical methods to analyze the data
IV. Interpret Results—*Allow for Variability as you look beyond the data*
Interpret the analysis and relate it back to the original question

Figure 1. The statistical investigation process

Like PSSM, the GAISE documents also emphasized statistical processes as the organizing principles for teaching statistics in K–12. GAISE describes three levels (A, B, and C) of sophistication and growth for each of the four components of the statistical investigation cycle. The three levels roughly correspond to recommendations for teaching statistics in grades K–4, 5–8 and 9–12 respectively.

Curriculum Documents 3: Recommendations from NCTM's *Essential Understandings of Statistics*

As the implementation of statistics has grown in school mathematics programs, many of our mathematics teachers have found themselves in the position of having to teach statistics concepts when they have little or no preparation in statistics themselves. In order to provide some professional development and assist middle and secondary school mathematics teachers in adding statistics to their teaching repertoire, the National Council of Teachers of Mathematics included statistics in their series *Essential Understandings* in school mathematics. The *Essential Understandings* books cover algebra, geometry, number and operation, proportional reasoning, mathematical reasoning and statistics. Both *Essential Understanding of Statistics Grades 6–8* (Kader & Jacobbe, 2013) and *Essential Understanding of Statistics Grade 9–12* (Peck, Gould, & Miller, 2013) identify some big ideas in statistics that all teachers should know and be able to teach at their respective grade levels. In the grade 6–8 book, Kader & Jacobbe identify four big ideas for teaching statistics to middle school students:

- Variability in Data and Distributions
- Comparing Distributions
- Associations between Two Variables
- Samples and Populations

The concept of a distribution plays a prominent role in all four of these recommendations if one considers that bivariate distributions of data form the basis for exploring associations between variables. In the grade 9–12 book, Peck et al identify the following essential themes that form the foundation of the big ideas in statistics:

1. Data consists of structure and variability
2. Distributions describe variability
3. Hypothesis tests answer the question, "Do I think this could have happened by chance?"
4. The way data are collected matters
5. Evaluating an estimator involves considering bias, precision, and sampling method

For Peck et al these five big organizational ideas are interrelated. Hypothesis testing is the basis for making decisions under uncertainty based on the limitations of the data provided. The data upon which statistical decisions are made are only as good as the care with which they are produced, so that attention to sources of bias and precision in estimating parameters such as measures of center and variation is critical.

2. The two BIGGEST ideas in statistics education

Suppose that you were asked to pick two ideas in statistics that you thought were the most important ones for our students to learn and our citizens to be competent in understanding. What would be your choice? The most important goal for statistics education is to enable our students and citizens to understand that decision-making under uncertainty is based upon samples of data. We rarely have access to complete information about an entire population under consideration when making statistical decisions or estimating the likelihood of events. Statistics does not rely on mathematical proof or deterministic reasoning using axioms. Rather, statistics involves making decisions based on data generated under conditions of uncertainty. Given that the *pre-eminent goal of statistics education is to understand decision making under uncertainty*, I claim that the two biggest ideas in statistics education are *distribution* and *inference*. These two ideas are the heart and soul of statistical decision making. I base this conclusion partly on the analysis above of the trajectory and development of curriculum recommendations throughout the history of statistics education, but also upon some recent research in statistics education that gives added support to the claim that *distribution* and *inference* are indeed the two biggest overarching ideas in statistics education.

Recommendations from Research: The big ideas in statistics

Beginning in the 1990's, researchers began to investigate students' understandings of big statistics concepts from a developmental perspective. Research on student understanding of concepts such as average and variability has proposed trajectories of student reasoning, levels of student understanding that become deeper over time. Furthermore, concepts such as expectation and variation are components of bigger ideas such as distribution and inference. Examples of reasoning trajectories from research on some big ideas in statistics are discussed below.

Expectation.

The term expectation encompasses research on measures of center such as mean, median, and mode as well as considerations of expected clumping in the data. Mokros & Russell (1995) proposed one of the first trajectories of students' understanding of average. Using interview tasks that involved "messy situations" from everyday familiar contexts with grades 4, 6, and 8 students Mokros & Russell identified five different ways that students think about average: Average as *mode* (mosts), average as *algorithm*, average as *reasonable*, average as *midpoint*, and average as *balance point*. Watson & Moritz (2000) interviewed about a hundred students in grades 3, 5, & 7 and found their conceptions of average moved from telling idiosyncratic stories about average to thinking of average as `mosts or middles', and eventually to understanding that an average is a representative for summarizing a data set. Reflecting on the research on students' conceptions of expectation, Konold & Pollatsek (2002) proposed that students' think of average in various ways: average as *typical value*, average as *fair share*, average as *data reducer*, or average as *signal amid noise*. It is clear from the research on students reasoning about expectation that students possess a rich collection of conceptions about expectation, which teachers can build upon. (For a more detailed discussion about research on students' conceptions of average, see for example Shaughnessy, 2007).

Variation.

Three developmental frameworks for students reasoning about variability have contributed to identifying a trajectory for students understanding of variability. (Langrall, Makar, Nilsson & Shaughnessy, 2017, p. 494, the NCTM *Compendium of Research in Mathematics Education*). Ben-Zvi (2004) noticed students begin by recognizing variability across various data values. Later students use variability to compare groups, then they are able to combine measures of spread and center in comparing groups, and eventually they consider variability as a construct that occurs both within and between distributions of data. Watson, Callingham, & Kelly (2007) describe a progression of student thinking that encompasses both expectation and variability. Reid & Reading (2008) describe a hierarchy of student reasoning about variation ranging from no consideration of variation, to recognition of variation within a group, to recognition of variation between groups that can lead to inference. In an analysis of the research on students' conceptions of variability, Shaughnessy (2007) outlined eight types of conceptions of variability that have been identified by research:

1. Variability in *particular values* in a data set

2. Variability as *change over time*

3. Variability as the *whole range* of a data set

4. Variability as the *likely range* of a sample

5. Variability as *distance from some fixed point*

6. Variability as *sum of residuals*

7. Variability as *covariation or association*

8. Variability as *distribution*

The first four types of variability in this list involve an exploratory data analysis perspective, while the last four types refer primarily to ways to measure variability. The terms variability and variation are sometimes used almost interchangeably, however some authors (e.g., Reading and Shaughnessy, 2004) prefer to use the term variability for the tendency for a characteristic to change, while the word variation is a measurement characteristic. The first four types refer to variability, while the last four involve some type of measurement of change. Research on type 4, variability as the *likely range of a sample*, has led to research about students' conceptions of sampling distributions. A closer look at some research tasks and student responses to the tasks may provide some insight into why distribution is one of the two biggest ideas in statistics education.

The Candy Sampling Task

> 100 candies, 20 yellow, 50 red, and 30 blue are put in a jar and mixed together. A student pulls 10 candies from the mixture, counts the number of reds, and writes that number on the board. Then the student puts the candies back in the bowl and mixes them all up again.
>
> Four more students also draw a sample of 10 candies, and write their number of reds on the board. What numbers would you predict for the number of reds in each of those five samples of 10 candies? Write your predictions in the spaces below.
>
> ________ ________ ________ ________ ________
>
> Why do you think those would be the numbers of reds in the five samples?

Fig 2. The candy sampling task.

This task and variations of it were given to hundreds of students in grades 4, 5, 6, 9, & 12 in Australia, New Zealand, and the United States (Shaughnessy, Watson, Moritz, & Reading, 1999). The task was used to determine what students perceived as the *likely range* of values that would occur in a repeated sampling scenario. Student responses fell into clusters that were deemed *narrow, wide, high, low*, and *reasonable*. For example, some students said they'd expect the results of the sample to be 6, 7, 5, 8, 9 reds because `there are a lot of reds in the jar.' This is typical of a *high* response as all the sample predictions are above the expected value of 5 red. High responses focused on `mosts', and ignored the proportion of reds in the mixture. In *low* responses like 3, 4 ,3, 5, 2 students felt that the other two colors would overwhelm red, so there would be fewer reds than might be expected. Students who predicted *wide*, like 1, 5, 7, 10, 2, did so because they claimed that `anything can happen.' On the other hand, some students predicted results like 5, 5, 6, 5, 6, or even 5, 5, 5, 5, 5 because `that's what is supposed to happen.' Such *narrow* predictions put too much weight on the theoretical probability of obtaining 5 red candies on any one pull, and neglected potential variability in repeated samples. Overall, some students attended to centers too much, some to variability too much, while other students did rely on both expectation and variation to predict a *reasonable* range of numbers of reds in the outcomes, such as 3, 7, 5, 6, 4. Research on tasks like the candy sampling task have led to research into students' conceptions about distributions, in particular their conceptions about sampling distributions. The candy sampling task also surfaces the tension that can arise between attending to expectation or attending to variability in data, especially when students are asked to make predictions for samples from a known population (Watson 2009; Watson & Kelly, 2004).

Distribution.

Comparisons across several hypothesized developmental frameworks for the concept of distribution are provided in Langrall et al (2017, p. 494). Each of these frameworks acknowledges that the concept of distribution encompasses multiple aspects such as shape, variability, and expectation, and that integration of all of these aspects is required for students to reason about and make inferences from distributions. Reading and Reid's framework (2006) for understanding distributions starts with students acknowledging a single parameter of a distribution (e.g., center), then several parameters, next integrating centers and spreads, and finally proceeding to a second cycle of reasoning which involves students' growth in making inferences from distributions. A framework for distributional thinking proposed by Noll & Shaughnessy (2012) was based on their research on students' conceptions of sampling distributions. According to Noll & Shaughnessy, students' development of the concept of distribution involves the gradual integration of shape, centers, and spread. Students first notice individual aspects of a distribution, then learn to make predictions for sampling distributions by relying on both expectation and variation. Noll & Shaughnessy propose that students' reasoning about sampling distributions progresses through levels from *additive* to *proportional* and finally to *distributional* reasoning. (See Figure 3).

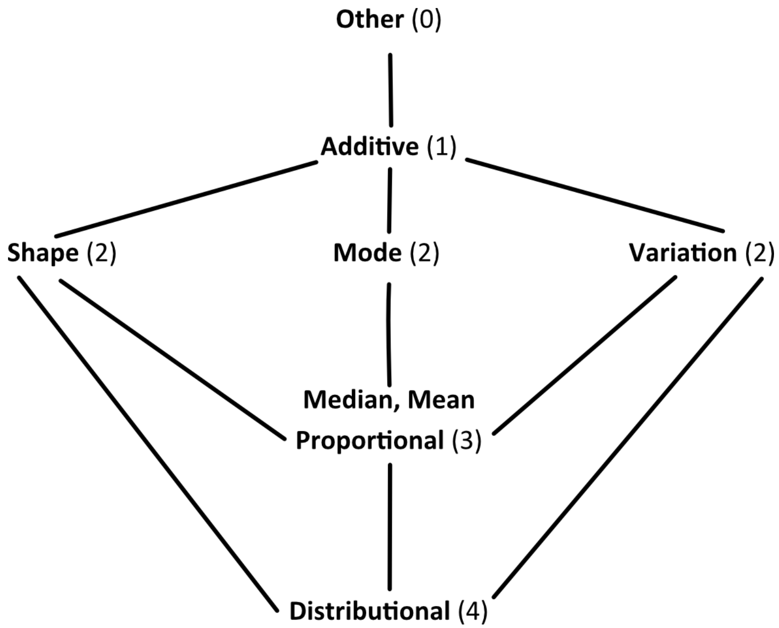


Fig 3. Lattice of student reasoning about sampling distributions.

The lattice in Figure 3 points first to a development of conceptions of expectation from `more' to `most' (mode) to `means and medians' (which involve proportional reasoning), and finally to reasoning about distributions in which students' thinking integrates the aspects of shape, expectation, and variation. Students' responses to tasks like the *Prediction Task* and the *Mystery Mixture* task (see below) led Noll & Shaughnessy to propose this developmental reasoning lattice for distributional thinking.

Working in small groups, students in a class pull samples of 10 candies from a jar that has 1000 candies. They pull 50 samples of ten. The jar has 250 yellow and 750 red candies in it. Each time they put the sample back and remix the jar.

Consider the number of reds in each handful. Where would you expect 95% of the handfuls of ten candies to be?

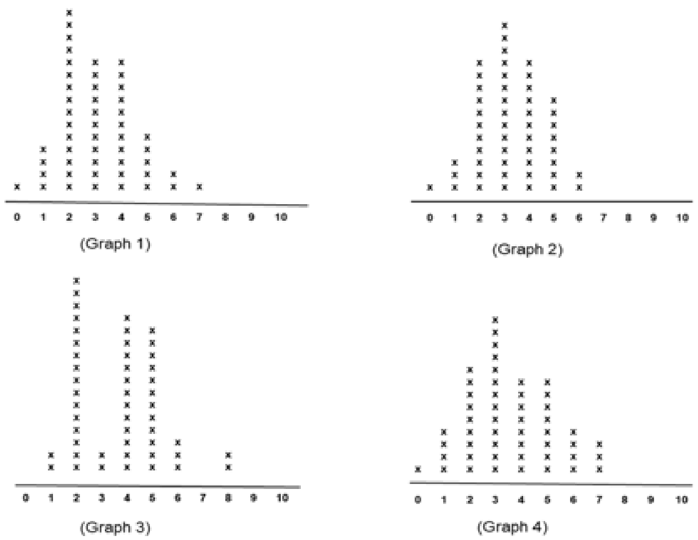
From __________ # reds To _______________# reds (Fill in the blank spaces).

Why do you think that?

Complete the frequency chart below to show what you think the numbers of reds in 50 trial handfuls might look like. (Note: students were provided labeled graph paper to plot their predicted sampling distribution).

Fig 4. The Prediction Task.

The four frequency graphs below came from a class in which four groups of students drew 50 samples of ten candies to estimate the proportion of reds in a mystery mixture of 1000 red and yellow candies in a large jar.



a) What do you think the mixture in the jar might be?

b) Explain why you think this.

Fig 5. The Mystery Mixture Task.

In the Prediction task students are told ahead of time the proportions of the colors in the parent population and then asked to predict what a sampling distribution for sample proportions will look like. As with the Candy Task, most students' responses fell into the categories *wide, narrow, and reasonable* for both their predicted range for the # of red in handfuls, and in the graphs that they constructed for 50 sample proportions.

However, in the Mystery Mixture task students are provided multiple sampling distributions from an unknown population and asked to use them to infer what the parent population is. Students who predicted 200-250 reds in the mystery mixture reasoned using a `mosts' point of view, and were heavily influenced by distributions 1 & 3 which have a mode of 2 reds in handfuls. Students who looked for `balance points' of the graphs reasoned proportionally and tended to predict around 300 reds in the mixture. Still other students noticed that the graphs tended to be skewed to the right, and they integrated shape with center and spread into their reasoning and inferred that the mixture probably contained more than 300, perhaps even 350 - 400 reds. In both the Prediction task and the Mystery Mixture task students had opportunities to focus solely on one of the aspects of the sampling distributions (shape, centers, variability) or to integrate them into their predictions and inferences.

Inference.

The Mystery Mixture task asks students to make an inference from several sampling distributions of a sample statistic. There is no formal hypothesis testing involved, students are simply asked what they believe the composition of the parent population is and why they believe it. Researchers and curriculum developers refer to this type of inference as `informal inference'. Informal inference has its roots in exploratory data analysis, often in the exploration of data that have been produced from simulations. Students can estimate likelihoods from samples of data without resorting to a test statistic or working with a probability distribution. Cobb (2007) argued that introductory statistics courses should start with inference early on prior to any hypothesis testing that resorts to theoretical distributions. Since the logic of formal statistical inference has always been a difficult stumbling block for students, educators have been experimenting with various approaches to introducing inference that could avoid some of the cognitive complexity and pitfalls in formal inference. Rossman (2008) promotes simulations via randomization tests as a transparent informal approach to statistical inference. Zeiffler, Garfield, Del Mas, & Reading, (2008) define informal statistical inference as students using informal statistical knowledge about observed samples to support inferences about unknown populations. Makar and Rubin (2018) point out that there is general agreement that the important characteristics of informal inference are: i) a claim is made that goes beyond the data at hand; ii) the data are used as evidence to support the claim; iii) the claim involves the articulation of uncertainty; iv) decisions or inferences are based upon aggregates in the data, variability, or shape, i.e., aspects of distributions of data; v) contextual knowledge plays a role in the analysis and inference. Inference is one of the two biggest ideas in statistics because students, even at a very young age, can begin to make inferences based on data that they have collected on a statistical question. The statistical investigation cycle outlined in the GAISE document—pose a question, collect data, analyze the data, make conclusions—is even more powerful for students when it includes making inferences in the analysis and conclusions phases.

3. Recommendations for future research and teaching on the big ideas in statistics

The future of research in statistics education

Many of the big conceptual ideas in statistics such as distribution, expectation, variation, and randomness identified above reside predominantly in the third stage of the GAISE statistical investigation cycle, analyzing the data. However, there are other important processes in the statistical investigation cycle, such as posing a statistical question, generating appropriate data to answer a statistical question and communicating the results and conclusions. These other statistical processes must also be included in the statistical education of our students and in the professional development of our classroom teachers. Unlike some big concepts such as expectation, variability, and distribution there has not been much research on developing students' ability to pose statistical questions or their ability to communicate and defend their data-based conclusions. The first and last phases of the GAISE statistical investigation cycle have not yet been adequately researched.

More research is needed to validate the developmental frameworks that have already been proposed for expectation, variation, and distribution. Meanwhile the next 'big idea' in research appears to be inference, in particular informal inference. A special issue of the *Statistics Education Research Journal* was dedicated to articles about informal inference, particularly within statistical modeling contexts (*SERJ* 16 (3), November 2017). Various definitions of informal inference have been proposed and some of the components of informal inference have been identified. However, a developmental framework for students' reasoning about inference analogous to those for variability and distribution does not yet exist. Case & Jacobbe (2018) report a framework for understanding students' difficulties when making inferences from simulations. However, much more research is needed about how inferential reasoning develops starting with young children and up through the grades in order to identify potential levels of student reasoning about inference.

The future of teaching statistics

Teaching is a social process; it involves countless interactions between students and their instructors. Any recommendations for teaching statistics must include considerations about the teacher as well as the students. Our teachers are on the front line of statistics education, and many of the teachers in our current work force still do not have sufficient experience with statistics. Most of them are mathematics teachers. As Cobb & Moore (1997) pointed out, mathematics and statistics are very different disciplines. Mathematics is grounded in certainty and deductive reasoning based on axioms and previously established results. Statistics on the other hand lives in the realm of uncertainty; statistical results are couched in terms of likelihoods, probabilities, or confidence intervals. Mathematics and statistics are epistemologically and philosophically different from one another. Our teachers need experiences themselves in carrying out statistical investigations—perhaps in conjunction with their students—they need to immerse themselves in thinking about and drawing conclusions from data. Teachers need to develop both their content knowledge and their pedagogical content knowledge of statistics. The NCTM *Essential Understandings* series in statistics provides content knowledge support for middle and secondary school teachers of statistics (Kader & Jacobbe, 2013; Peck, Gould & Miller, 2013). The ASA GAISE documents also provide support for developing teachers' pedagogical content knowledge in statistics. Both publications provide many examples of tasks that can be implemented in the classroom using the statistical investigation cycle.

As for our future teachers of statistics, the ASA recently developed and published The *Statistical Education of Teachers* (*SET*) which lays out recommendations for the statistical education of all perspective elementary, middle, and secondary teachers (Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Scheaffer, & Spangler, 2015). SET recommends both coursework and statistical modeling experiences for all teachers. Coursework for all teachers should begin with a data analytic approach. Additional recommendations for middle and secondary school teachers include coursework in statistical methods and statistical modeling. The ASA has taken a very futuristic view in the SET document, projecting that the need for statistics education will continue to grow throughout the world. Teachers will need to know much more about statistics and statistical thinking to prepare students and citizens for our data-intense world.

What does our walk through the history and research on the Big Ideas in statistics suggest for the teaching and learning of statistics for our students? We should START with the big ideas. Introduce the concept of a statistical question, one that requires data to be answered. Make sure that students understand the difference between mathematics and statistics; they are two different disciplines involving two different types of reasoning. Give students opportunities early on to make informal inferences about distributions of data. Ask students, "What do you notice? What do you wonder about?" Get students involved in generating sampling distributions from repeated samples from both known and unknown populations, making informal inferences from the samples they have obtained. First have students recognize and attend to important aspects of distributions such as shape, centers, and variability, later include ways of measuring expectation and variation. Use the research on developmental frameworks for expectation, variability and distribution to help guide instruction. Get students in the habit of posing their own statistical questions while using the statistical investigation cycle from GAISE. Make sure that attention to variability is foremost throughout the statistical investigation cycle. Most of all, empower students to be competent and confident with the big concepts and processes of statistics, and with the nature of statistical argumentation.

Referencias y bibliografía

Ben-Zvi, D. (2004) Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 42-63.

Case, C. & Jacobbe, T. (2018). *Statistics Education Research Journal, 17*(2), 9-29. Retrieved from **https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ17(2)_Case.pdf**

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course. A Ptolemaic curriculum? *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1), Article 1. Retrieved from **http://escholarship.org/uc/item/6hb3k0nz**

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly,104*(9), 801-823.

Franklin, C., Kader, G., Mewborne, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education.* Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C.A., Barbabliotti, A. E., Case, C. A., Kader, G. D., Scheaffer, R. L., & Spangler, D. A. (2015). *The Statistical Education of Teachers.*

Ganadesikan, M., Scheaffer, R. L., Landwehr, J. M., Watkins, A. E., Barbella, P. Kepner, J., Newman, C. M., Obremski, T. E., & Swift, J. (1995). *Quantitative Literacy Series.* New York: Pearson Learning (Dale Seymour Publications).

Kader, G. & Jacobbe, T. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 6-8.* Reston, VA: NCTM

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(4), 259-289.

Langrall, C. W., Makar, K., Nilsson, P., & Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education.* Reston, VA: NCTM.

Makar, K., & Rubin. A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Cham, Switzerland: Springer International.

Melitou, M. (2002). Conceptions of variation. A literature review. *Statisics Education Research Journal, 1*(1), 46-52.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistics Review, 65*(2), 123-165.

Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, R. F., Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1973). *Statistics by Example.* Reading, MA: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston*, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school Mathematics. Reston*, VA: NCTM.

Noll, J., & Shaughnessy J. M. (2012). Aspects of students' reasoning about variation in empirical sampling distributions. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 509-556.

Peck, R., Gould, R., & Miller, S. J. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 9-12.* Reston, VA: NCTM.

Reading C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 46-68.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Reid, J., & Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal, 7*(1), 40-59.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's point of view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York, NY: Macmillan.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M., Watson, J., Moritz, J. & Reading, C. (1999. April). School mathematics students' Acknowledgement of statistical variation: There's more to life than centers. Paper presented at the research pre-session of the 77th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, San Francisco, CA.

Tanur, J., Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1972). *Statistics: A Guide to the Unknown*. San Francisco, CA: Holden-Day.

Toruk, R., & Watson, J. M. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. Mathematics Education Research Journal. 9, 60-82.

Watson, J. M., (2009). The influence of variation and expectation on developing awareness of distribution. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 32-61.

Watson, J, M., & Kelly, B. A. (2004). Expectation versus variation: Students' decision making in a chance environment. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 4*, 371-396.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*, 11-50.

Watson, J. M., Callingham, R. A., & Kelly, B. A. (2007). Students appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 83 – 130.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A, & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school Students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(1), 1-29.

Zeiffler, A., Garfield, J., Del Mas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

Zeiffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What is statistics education? In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education*, 37-70.

Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales[1]

José María Chamoso

María José Cáceres

Resumen

Atendiendo al interés de vincular el aprendizaje de matemáticas a situaciones cotidianas, la creación de tareas matemáticas a partir de contextos reales puede ser un elemento formativo para futuros docentes e incluso convertirse en un eje de formación. En este trabajo se analizó una experiencia con futuros docentes de matemáticas en la que grupos de estudiantes crearon tareas, a partir de contextos reales, mediante un proceso basado en una Propuesta Inicial, discusión con los compañeros y, fruto de la reflexión sobre el propio trabajo, una Propuesta Final. El proceso desarrollado consiguió una alta motivación en los estudiantes ante las posibilidades que ofrecen los contextos reales para aprender matemáticas y unas tareas interesantes que, en diversos sentidos, mejoran las de los manuales escolares. Ello abre perspectivas de futuro como, por ejemplo, vertebrar la formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales.

Palabras clave: Educación Matemática, formación de docentes, creación de tareas, reflexión, contextos reales.

Abstract

Considering the interest of linking the mathematics learning to everyday situations, the mathematical tasks creation from real contexts can be a formative element for future teachers and even become the main focus of their training. In this paper an experience with future mathematics teachers was analyzed. In it, groups of students created tasks, from real contexts, through a process based on an Initial Proposal, discussion with classmates and, as result of reflection on own work, a Final Proposal. The developed process achieved a high motivation in the students from the possibilities that the real contexts offer to learn mathematics, they created some interesting tasks which improve those of the textbooks in diverse senses. This opens future perspectives such as, for example, set up the training of mathematics teachers based on the reflection on tasks creation in real contexts.

J. M. Chamoso
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca, España
jchamoso@usal.es

M. J. Cáceres
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca, España
majocac@usal.es

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por los autores en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

Recibido por los editores el 3 de junio de 2019 y aceptado el 19 de julio de 2019.

Key words: Mathematics Education, teacher training, tasks creation, reflection, real contexts.

1. Introducción

En las últimas décadas, las recomendaciones para el aprendizaje de matemáticas dan cada vez más relevancia a la conveniencia de vincular las matemáticas escolares con contextos reales (por ejemplo, MECD, 2015; NAEYC y NCTM, 2013; OCDE, 2013). Una forma de hacerlo es a partir de la creación de tareas, que exige creatividad y evita la consideración primordial de las habituales de los libros de texto que, en muchos casos, suelen ser rutinarias, académicas y alejadas del mundo real (por ejemplo, Niss, 2001; Villa-Ochoa, 2015).

Es reconocida la importancia de la tarea con la que el estudiante construye el aprendizaje matemático (Christiansen y Walther, 1986; Hiebert y Wearne, 1997; Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Diseñar tareas matemáticas requiere poseer Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Común del Contenido para utilizar correctamente los contenidos matemáticos, Conocimiento Especializado del Contenido para establecer los diversos procedimientos con los que podrán ser abordadas y Conocimiento del Horizonte Matemático para que estén vinculadas a la realidad) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (Conocimiento del Contenido y del Curriculum para decidir el nivel de enseñanza, Conocimiento del Contenido y Enseñanza para llevarlas al aula de manera adecuada, y Conocimiento del Contenido y Estudiantes para tener en cuenta las peculiaridades de los estudiantes; más detalle, modelo MKT de Hill, Ball y Schilling, 2008). Por ello, es recomendable trabajarlo desde la formación inicial de docentes (Malaspina, 2015).

Algunos estudios reflejaron que las tareas que los estudiantes crean suelen ser rutinarias, pero otros mostraron que pueden proponer tareas interesantes cuando se da posibilidad de hacerlo (Isik y Kar, 2012). Esa posibilidad puede facilitarse a partir de la reflexión que incluye, por ejemplo, la revisión del propio trabajo (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Chamoso y Cáceres, 2009). Un ejemplo de revisión del propio trabajo cuando estudiantes para maestro crearon tareas auténticas a partir de contextos reales se muestra en Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015).

Investigaciones recientes se han interesado por la clasificación de tareas matemáticas. Por ejemplo, el análisis de las tareas propuestas en libros de texto de Wijaya, Heuvel-Panhuizen y Doorman (2015) mostró que el 45% demandaban Procesos cognitivos (TIMSS, 2015) de Conocer y solo 21.2% de Razonar, y que, únicamente, un 10% consideraban un Contexto Real. En los trabajos del análisis de las tareas de libros de texto de López y Contreras (2014), referido a contenidos de geometría plana, y Guerrero, Carrillo y Contreras (2014), referido a ecuaciones lineales, la mayor parte se centraban en Aplicar y solo una de ellas era Abierta. En otro sentido, el estudio de Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez (2013), referido a las tareas seleccionadas por maestros de Primaria en el desarrollo de una unidad didáctica, más del 81% de ellas eran de Conocer y el 19% de Aplicar. Vicente, Dooren y Verschaffel (2008) mostraron que la mayor parte de los problemas que aparecían en los libros de texto de Primaria únicamente exigían Conocer. Referido al estudio de tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales durante su formación inicial, únicamente se conoce el trabajo de Chamoso y Cáceres (2018) donde los Procesos cognitivos que desarrollaban eran de Conocer (62%) y solo un 5% de Razonar; además, el 18% eran de respuesta Abierta.

2. Objetivo

En este trabajo se pretende caracterizar las tareas creadas, a partir de contextos reales, por estudiantes para maestro.

3. Metodología

Contexto y muestra

73 estudiantes para maestro (en adelante EpM; 3 hombres, 4%, y 70 mujeres, 96%) de 2º curso del Grado en Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica para Educación Infantil, de 6 créditos, curso 2017-18, distribuidos en 20 grupos de trabajo de 3-4 personas, participaron en el estudio. El grupo fue establecido según la organización del centro. Su media de edad fue de 19,7 años. Al principio de curso, ningún EpM había tenido formación previa en crear tareas para el aprendizaje matemático.

La asignatura es la única directamente relacionada con matemáticas que figura en el plan de estudios y su objetivo es desarrollar capacidades para la enseñanza de matemáticas en Educación Infantil. Se impartió en sesiones de dos horas a lo largo de 15 semanas, una sesión en la que el profesor trabajaba con todos los EpM (sesiones formativas) y otra en la que el profesor lo hacía con la mitad de los EpM (sesiones prácticas, con 10 grupos de trabajo en cada caso; una sesión semanal para los EpM y dos para el profesor). Toda la información sobre el desarrollo del curso figuraba en el campus virtual de la propia Universidad. La experiencia fue desarrollada por el profesor habitual de la asignatura.

Propuesta formativa

Los EpM debían desarrollar competencias, tanto matemáticas como profesionales, para enseñar matemáticas (Cáceres et al., 2010, adaptado de Hill et al., 2008). Para adquirir esas competencias, el curso se organizó con el objetivo de crear tareas para aprender matemáticas a partir de contextos reales. Con ese objetivo, las sesiones formativas abordaron aspectos como, por ejemplo, conocimiento de la matemática escolar y organización curricular, tratamiento de los contenidos y procesos matemáticos con un enfoque globalizado, metodologías de enseñanza para aprender matemáticas e instrumentos de evaluación, y materiales didácticos y tipos de tareas para aprender matemáticas.

Las sesiones prácticas se organizaron en torno al desarrollo de un proyecto donde los EpM, en grupos, debían crear tareas para aprender matemáticas. En concreto, este proyecto se desarrolló en 4 partes durante 12 semanas, cada una de las partes a partir de un contexto cercano a la realidad (1. Episodios, 2. Cuentos, 3. Materiales y 4. Ruta). Las demás sesiones consistieron en una sesión inicial explicativa y organizativa, y dos sesiones finales de valoración del trabajo realizado y evaluación. Cada una de las partes se desarrolló a lo largo de 3 semanas consecutivas con la siguiente estructura:

Sesión 1: Creación de tareas matemáticas (2 horas):

a. Formación (profesor, gran grupo, 45 minutos).

b. Creación de tareas para aprender matemáticas en el aula a partir de un contexto cercano a la realidad (Propuesta Inicial; grupos de trabajo, 60 minutos; entrega).

c. Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 15 minutos).

Sesión 2: Experimentación y evaluación de las tareas creadas (2 horas):

a. Experimentación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo: Cada grupo de trabajo propuso las tareas creadas, de la misma forma que se haría en un aula, a 3 grupos de trabajo que las resolvieron. A la vez, cada grupo resolvió las tareas creadas por otros 3 grupos (grupos de trabajo, 60 minutos).

b. Coevaluación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo por sus compañeros a partir de una rúbrica de valoración: Cada grupo de trabajo valoró, según los criterios establecidos para ello, las tareas en que había participado (grupos de trabajo, 20 minutos; entrega de la Coevaluación a cada grupo y al profesor).

c. Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 30 minutos).

d. Autoevaluación de cada grupo de su Propuesta Inicial y planteamiento de mejora (grupos de trabajo, 10 minutos; entrega de la Autoevaluación al profesor).

Sesión 3: Reflexión y revisión del propio trabajo (2 horas):

a. Elaboración de una Propuesta Final de tareas creadas a partir de la experimentación y valoración realizada (Propuesta Final; grupos de trabajo, 60 minutos; entrega).

b. Presentación pública de la Propuesta Final (grupos de trabajo en gran grupo, 50 minutos).

c. Reflexión final (profesor, gran grupo, 10 minutos).

Los EpM conocían, desde principio de curso, los criterios e instrumentos de valoración de las tareas creadas (teniendo principalmente en cuenta sus objetivos y conexión con el curriculum, adecuación al nivel de enseñanza, aspectos metodológicos y evaluación), así como la estructura que debía seguir la Propuesta Inicial y la Propuesta Final de cada parte del proyecto.

Datos

Los EpM crearon 696 tareas en su Propuesta Final. Dichas tareas abordaron, principalmente, contenidos de Numeración (31%), Medida (27%) y Geometría (25%) y, en menor proporción, Álgebra (8%) y Organización de la información y probabilidad (10%).

Algunos ejemplos de tareas creadas a partir de un episodio (Figura 1) y de un cuento tradicional (Figura 2) fueron:

EPISODIO	TAREAS CREADAS
Dos niños están jugando en su casa y la madre les pone zumo en dos vasos, uno más estrecho y largo que el otro, pero ambos de la misma capacidad: Niño: Yo quiero el vaso más largo porque tiene más. Mamá: Tienen lo mismo los dos. Niño (junta los vasos para ver que el zumo de un vaso está más alto que el del otro): ¡No, no es verdad! Este es más largo y tiene más. Mamá (coge un vaso igual que el otro y lo echa para que el niño vea que hay la misma cantidad y le dice): ¿Ves como hay lo mismo? Niño: Ahora sí hay lo mismo, antes no.	1. En recipientes de diferentes tamaños pero con la misma capacidad, se vierte el agua de unos en otros para comprobar que realmente tienen la misma capacidad haciendo preguntas a los niños en cada paso.
	2. Si dos niños beben agua de dos vasos iguales que estaban llenos y ahora uno tiene más agua que el otro, ¿quién ha bebido más agua? ¿Y si los vasos no fueran iguales?
	3. Buscar ejemplos en que algo tenga que ser antes y algo tenga que ser después.

Figura 1: Tareas creadas a partir de un episodio.

CUENTO	TAREAS CREADAS
	1. Dibuja los tres cerditos teniendo en cuenta su tamaño: Cerdito mayor, mediano y pequeño. Dibuja también el lobo.
	2. Sopla con todas tus fuerzas a una pelota pequeña, una de ping-pong, y otra más grande. ¿Cuál se desplaza más? ¿Por qué?
	3. Dibuja la casa de cada uno de los tres cerditos utilizando figuras geométricas. Dibuja también la casa en la que te gustaría vivir.
	4. ¿Cómo podrías hacer para que el lobo y los tres cerditos hagan las paces?

Figura 2: Tareas creadas a partir del cuento.

Análisis de datos

Las tareas creadas por los EpM se analizaron en tres sentidos:

a. Contexto (Wiest, 2001): *Puramente Matemático* (cuando únicamente tenía sentido en el aula), *Real* (cuando podría darse o imaginarse en el mundo real; incluía contexto *Fantástico* cuando simulaba un mundo imaginario).

b. Procesos cognitivos que activa su resolución (adaptado de TIMSS, 2015): *Conocer* (entendida como la capacidad de definir, reconocer o comprender nociones básicas), *Aplicar* (entendida como la capacidad de clasificar, comparar, ordenar o representar) y *Razonar* (entendida como la capacidad de transformar, relacionar o resolver problemas).

c. Apertura de la respuesta (Yeo, 2017): *Cerrada*, con una única posibilidad correcta y *Abierta*, con varias posibilidades correctas.

Las tres tareas creadas que se incluyen en la Figura 1, a partir de un Episodio, las tres se consideraron de Contexto *Real*; la tarea 1 desarrolla capacidades de *Razonar* y *Cerrada*, la 2 de *Conocer* cuando los vasos son iguales y *Razonar* si son diferentes, en ambos casos *Cerrada*, y la 3 de *Aplicar* y *Abierta*. Las de la Figura 2 se consideraron de Contexto *Fantástico*. Un ejemplo de tarea con Contexto *Puramente Matemático* fue: *"En un papel continuo con diferentes figuras geométricas con tamaños grande y pequeño, pediremos pintar con los dedos, de verde, las grandes y, de rojo, las pequeñas"*.

Fiabilidad

El análisis fue realizado por los autores de este trabajo de forma independiente y se obtuvo un acuerdo del 98% en Contextos, 90% en Procesos cognitivos, 97% en Apertura de la respuesta; coeficiente kappa de Cohen $> 0{,}80$. Los desacuerdos se resolvieron mediante consenso.

4. Resultados

En este trabajo, futuros docentes crearon tareas para el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo colaborativo, donde se implementaron unas Propuestas Iniciales que fueron valoradas por los compañeros y por ellos mismos en procesos de coevaluación y autoevaluación, y donde se produjo un proceso reflexivo que conllevó la revisión del propio trabajo. Esta forma de desarrollar competencias profesionales produjo alta motivación en los EpM, que trabajaron activamente en la construcción de tareas que, en cada parte del proyecto, consideraron los contenidos globalizados. En sus reflexiones, los EpM valoraron positivamente las oportunidades de implementación y evaluación de sus Propuestas Iniciales al permitirles descubrir aspectos que podrían mejorar como, por ejemplo, la precisión en la redacción de la tarea, la mejora en el dinamismo de su aplicación o la elección de recursos que podrían ser más apropiados para su desarrollo. Además, los EpM apreciaron la importancia del contexto utilizado para la creación de tareas (por ejemplo, *"las situaciones cotidianas pueden convertirse en oportunidades de aprendizaje matemático, donde se trabajan aspectos variados de las matemáticas y no solo contar, sumar y restar"*; Grupo G3)

Las tareas creadas por EpM en el marco de un proyecto centrado en contextos cercanos a la realidad se vincularon fundamentalmente a Contexto *Real* (70%, del que el 13% fue *Fantástico* en las tareas creadas en la Parte 3, Cuentos) y, en menor proporción, a *Puramente Matemático* (30%). Desarrollaban capacidades principalmente de *Aplicar* (57%) y, en menor medida, de *Conocer* (25%) y *Razonar* (18%). Fueron mayoritariamente de respuesta *Cerrada* (88%). Estos datos muestran la influencia del contexto en el que los futuros docentes crearon tareas.

El Contexto *Real* se utilizó en mayor porcentaje que el *Puramente Matemático* en todos los bloques de contenido, pero, en mayor medida, en las tareas relacionadas con Medida y Análisis de datos y probabilidad (más del 80%) y, en menor, en Numeración y Cálculo (58%). Por otro lado, la mayoría de tareas que desarrollaban capacidades de *Conocer* fueron de Geometría (53%) y, las de *Razonar*, de Numeración y Cálculo (30%), en lo que pudo haber tenido influencia la profundidad del conocimiento de los EpM de los respectivos bloques de contenido. Además, las de *Razonar* utilizaron igualmente Contextos *Puramente Matemático* y *Real*. Las tareas *Abiertas* fueron escasas en todos los bloques de contenido, pero los mayores porcentajes se alcanzaron en Geometría (18%) y Medida (17%). Esta diferencia en las características de las tareas relacionadas con los diversos bloques de contenido pudo deberse no sólo al dominio matemático de los EpM de cada uno de ellos sino también a su percepción del uso de los mismos en situaciones cotidianas.

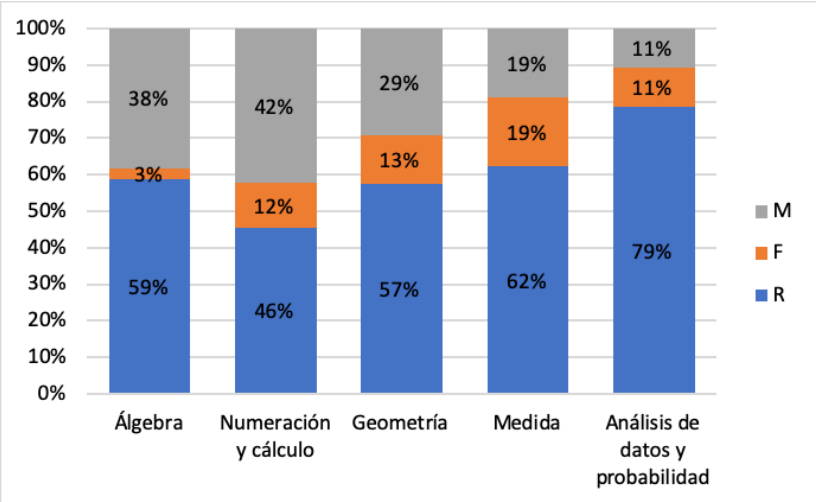


Figura 3: Porcentaje de tareas con contexto Real (R), Fantástico (F) y Puramente Matemático (M) en función del contenido trabajado.

La evolución de la creación de tareas por los EpM durante el desarrollo del proyecto atendiendo a los aspectos considerados permite observar que el porcentaje que utilizó un Contexto *Real* aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto del 47% a 84% (Figura 4), por lo que se entiende que la formación en el uso de contextos reales para aprender matemáticas fue asimilada por la mayoría de EpM aunque más investigación sobre ello sería necesaria. Esta evolución no se produjo en el desarrollo de Procesos cognitivos ya que el porcentaje de tareas de *Conocer* se mantuvo en un 27%, pero el de *Razonar* se redujo de un 28% a un 11%, aspecto en el que podría haber influido la escasa formación recibida en ese sentido, algo que podría ser considerado en una futura investigación. Por otro lado, atendiendo a la Apertura en la respuesta, un aspecto que los EpM están poco acostumbrados a considerar, las tareas *Abiertas* aumentaron del 5% al 18%, lo que significa que ese aspecto solo se desarrolló en algunos grupos de EpM.

Esta evolución general en la creación de tareas durante el desarrollo del proyecto no fue homogénea en todos los grupos de trabajo. Referido a Contexto*Real*, de los 20 grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al 75% ascendió de, inicialmente 3 a finalmente 16, mientras que los que utilizaron ese Contexto en menos del 25%, descendió de 5 a 0 (Figura 5). Ello muestra una evolución interesante. En concreto, llama la atención la evolución de los grupos G6, G8 y G16 que, inicialmente, propusieron el 0% de tareas con Contexto *Real*, porcentaje que aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto hasta llegar en la Parte 4 a, respectivamente, 100% (G6), 67% (G8) y 86% (G16). Por el contrario, el grupo G19, que inicialmente no propuso ninguna tarea en Contexto *Puramente Matemático*, lo

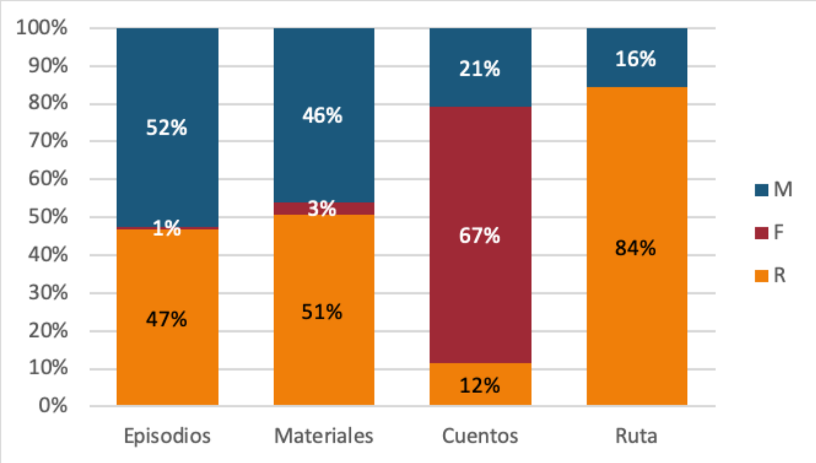


Figura 4: Evolución en el uso de contextos Real (R), Fantástico (F) y Puramente Matemático (M) en las tareas creadas en los proyectos Episodios, Materiales, Cuento y Ruta.

hizo en las demás partes hasta llegar al 100% en Parte 2, 67% en Parte 3 y 21% en Parte 4. Ello refleja una evolución diferente de cada grupo que podría considerarse en futura investigación. En el caso de los Procesos cognitivos, no se apreció evolución en ningún sentido en las diversas partes del desarrollo del proyecto. Referido a la Apertura de la respuesta, no se percibió una evolución destacable ya que, en las dos primeras partes del proyecto, el máximo porcentaje de tareas *Abierta* fue inferior a 50% y un único grupo, en cada caso, superó el 25%; en la tercera parte, todas las tareas fueron de respuesta *Cerrada* y, en la cuarta, 5 grupos superaron el 25%, uno de los cuales superó el 50%.

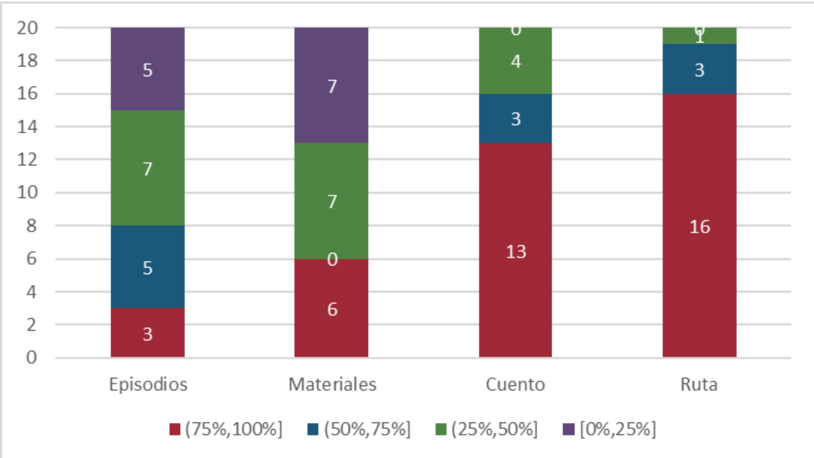


Figura 5: Distribución de grupos según el porcentaje de tareas propuestas con contexto puramente matemático en los cuatro proyectos Episodios, Materiales, Cuento y Ruta.

5. Conclusiones

Este trabajo presenta una forma innovadora de enseñanza mediante el desarrollo de un trabajo por futuros docentes en grupos colaborativos, su implementación y evaluación por los compañeros y por ellos mismos, y la reflexión y revisión del propio trabajo a partir del proceso seguido. Dada la gran aceptación por los EpM de esta forma de trabajo, quizás podría ser utilizada con otros objetivos para la formación inicial o desarrollo profesional de docentes.

En el proyecto de creación de tareas para el aprendizaje matemático desarrollado, una tarea típica creada tuvo Contexto *Real*, desarrollaba capacidades de *Aplicar* y era de respuesta *Cerrada*, características que las distinguen de las de libros de texto donde solo un 10% eran de Contexto *Real* (Wijaya et al., 2015), la mayoría desarrollaba capacidades de *Conocer* (Guerrero et al., 2014; López y Contreras, 2014; Vicente et al., 2008; Vicente et al., 2013) y eran de respuesta *Cerrada*. Sin embargo, los resultados son similares a los de Chamoso y Cáceres (2018) en cuanto a la Apertura de la respuesta, aunque más ricas en cuanto a los Procesos cognitivos. Esto nos hace pensar que la forma de trabajo y el situarse en contextos próximos a la realidad puede enriquecer las tareas que los EpM crean teniendo en cuenta las que sugieren los libros de texto, quizás por la influencia de un contexto que puede ser más cercano a los estudiantes.

Se aprecia una evolución en el Contexto *Real* de propuesta de tareas creadas por los EpM, así como capacidad para proponer tareas *Abiertas*, si bien los grupos de trabajo se comportaron de forma heterogénea. Esta evolución no parece igual en los Procesos cognitivos que activan su resolución, aspecto que quizás debería ser considerado con más profundidad en la formación inicial de docentes.

Una limitación de este trabajo es que, en la creación de tareas, no se considera el proceso formativo para la reconsideración y mejora de la Propuesta Inicial. Ello puede abrir futuras líneas de investigación para estudiar la influencia de ese aspecto de la creación de tareas en la Propuesta Final analizando, por ejemplo, las modificaciones que los EpM realizan en sus tareas creadas de su Propuesta Inicial a partir del proceso reflexivo desarrollado por la experimentación con iguales, la coevaluación y la autoevaluación.

Como perspectivas de futuro, se podría analizar el tratamiento de los contenidos en las tareas creadas por los EpM en los diversos contextos reales considerados a partir de, por ejemplo, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje propuestas por Clements y Sarama (2015). También se podrían analizar las resoluciones que los escolares hacen de las tareas creadas a partir de contextos reales, quizás a partir de los modelos de resolución de Blum y Leiss (2007) u OCDE (2013), y compararlas con resoluciones que se proponen habitualmente en el aula de matemáticas. Otra posibilidad sería comparar estos resultados con los obtenidos al analizar las tareas matemáticas creadas a partir de contextos reales por futuros docentes de matemáticas de otros niveles educativos atendiendo al Contexto utilizado, Procesos cognitivos y Apertura o Realismo de la respuesta. También se podrían analizar la revisión y mejora de las tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales atendiendo, por ejemplo, a los Procesos cognitivos.

En otro sentido, vertebrar la influencia de la propuesta de formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales también puede ser analizado como futura investigación. Además, esta forma de trabajo podría repetirse teniendo como eje el proyecto de creación de tareas, pero considerando otras partes diferentes del mismo que también partiesen de contextos cercanos a la realidad.

Agradecimientos

RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto 2017/00111/001 (463AC01, Universidad de Salamanca), Proyecto European Union. Erasmus (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (PGC2018-100758-B-I00).

Referencias y bibliografía

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education*, *26*(5), 1186-1195.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201- 210). Alicante: SEIEM.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 198-206.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 17*, 83-94.

Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC. (Obra original de 2009).

Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393-425.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The Analysis of the Problems Posed by the Pre-Service Teachers About Equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

López, M.E. y Contreras, L.C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Tutxla Gutiérrez, Chiapas, México. Mayo 2015.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

Niss, M. (2001). Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston & S. Carreira (eds.). *Modelling and Mathematics Education. International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 72-89). Chichester: Horwood Publishing.

MECD (2015). *Marco General de la evaluación de tercer curso de Educación Primaria*. Madrid: MECD. INEE.

OCDE (2013). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* Madrid: MECD. INEE.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

TIMSS (2015). *Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA*. Madrid: MECD.

Vicente, S., Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación, 20*(4), 391-406.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J.M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25*(4), 535-548.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16), 133-148. Disponible en **http://goo.gl/mleL6j**

Wiest, L. (2001). The role of fantasy contexts in word problems. *Mathematics Education Research Journal, 13*(2), 74–90.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 41-65.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175–191.

Visión desde Colombia del impacto de la matemática moderna y el papel del CIAEM[1]

Luis Carlos Arboleda

Resumen

Esta intervención dentro de la Mesa Plenaria sobre la historia del CIAEM se centrará en analizar el contexto social y político en el que se realiza la Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática (I CIAEM) de 1961 en Bogotá. Se examinan en particular los discursos inaugurales de las dos más importantes autoridades presentes en la reunión. Por parte del gobierno colombiano, el ministro de educación de Jaime Posada Díaz. Por parte de la comunidad académica, el célebre matemático Marshall Stone. Se mostrarán las diferencias de fondo en la manera como políticos y académicos se representaban la importancia de la conferencia en cuanto a fines, criterios y procedimientos para promover la reforma de la enseñanza de las matemáticas en el hemisferio.

Palabras clave: educación matemática, historia del CIAEM, matemáticas modernas, Marshall Stone, Jaime Posada Díaz.

Abstract[2]

This intervention within the Plenary Roundtable on the history of IACME will focus on analyzing the social and political context in which the First Inter-American Conference on Mathematics Education (IACME I) of 1961 was held in Bogotá. In particular, the inaugural speeches of the two most important authorities present at the meeting are examined: Jaime Posada Díaz, Colombian Minister of Education; and the esteemed mathematician Marshall Stone. Background differences will be shown in the way politicians and academics represented the importance of the Conference in terms of purposes, criteria and procedures to promote the reform of Mathematics Education in the hemisphere.

Keywords: Mathematics Education, IACME, modern Mathematics, Marshall Stone, Jaime Posada Díaz.

1. El discurso de Jaime Posada Díaz en la apertura de la Conferencia

El discurso de apertura de la Primera Conferencia Inter-Americana en Educación Matemática estuvo a cargo del Ministro de Educación Jaime Posada Díaz. La frase de inicio se

L. C. Arboleda
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a la participación del autor en una mesa redonda plenaria realizada en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 4 de junio de 2019 y aceptado el 18 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 70–75. Costa Rica

refiere al ambiente social y político de la época en el que se realiza la conferencia: "En América, estamos construyendo una nueva forma de vida y cultura. Hay muchas manifestaciones de lo que estamos haciendo que delinean claramente un nuevo mundo y una nueva época" (Fehr, 1962, p. 1).

Posada da cuenta de un contexto hemisférico nuevo, pleno de optimismo y confianza en el cambio social y cultural, y fuertemente impregnado por una ideología de modernidad y desarrollo. El discurso expresa en general el punto de vista dominante de la mayoría de los gobiernos americanos y, en particular, del gobierno de Alberto Lleras Camargo, del cual Posada hizo parte como ministro entre 1961 y 1962. Este gobierno fue uno de los más comprometidos de la región con la creación de la *Alianza para el Progreso* (APP). Colombia llegó a convertirse en la vitrina del programa en cuanto fue uno de los primeros países de América Latina en recibir ayuda económica por parte del Banco Mundial y del Fondo Monetario Internacional. De acuerdo con Rojas (2011), sus élites expresaban mejor que otras la vocación modernizante y de cambio de modelo económico representado en la APP.

Recordemos que Lleras Camargo fue el primer presidente liberal (1958-1962) del Frente Nacional, el pacto político con el cual los partidos liberal y conservador se hicieron el reparto hegemónico del ejercicio del poder del Estado entre 1958 y 1974. Después de más de un siglo de violencia partidista, el Frente Nacional se propuso transformar la cultura política del país y modernizar la economía colombiana. En lo personal, Lleras Camargo había acumulado un amplio liderazgo hemisférico como fundador y primer secretario de la Organización de Estados Americanos (OEA). Su talante pro-norteamericano, defensor de los principios de la libre empresa y enemigo declarado del comunismo y de la revolución cubana, lo convirtieron en el interlocutor más importante de los Estados Unidos en la región.

En tal condición, el gobierno de Lleras Camargo fue uno de los principales promotores del nuevo enfoque de cooperación inter-americana. Tanto en lo que se refiere al *Acta de Bogotá*, uno de los antecedentes más importantes en la constitución de la APP, como en la adopción de acciones y compromisos para el desarrollo del programa. Los gobiernos siguientes mantuvieron estos compromisos e implementaron las medidas contempladas en los documentos fundadores, encaminadas a promover el desarrollo económico y social. Varios destacados dirigentes latinoamericanos se consagraron a estas tareas.

Un caso notable es el de Posada, quien al finalizar el periodo de su ministerio, asumió el cargo de Embajador en Misión Especial de Colombia ante la APP en Washington hasta 1964. Luego, entre 1964 y 1966, dirigió la División de Educación, Ciencia y Cultura, de la OEA. Precisamente en el discurso inaugural de 1961 Posada se refiere a esta División como uno de los pilares de la organización, al estar encargada de expandir el programa inter-americano de la APP en las esferas cultural, científica y universitaria. Sugiere que una de sus funciones sea precisamente la realización permanente de conferencias como la de educación matemática, para lo cual formula la idea de conformar comisiones permanentes en matemáticas, física, química, biología y asuntos nucleares. Estas comisiones deberían permitirnos, dice Posada, adelantar a escala nacional y continental las transformaciones requeridas en "los métodos de enseñanza de la ciencia, utilizar los textos y tipos de laboratorios experimentales más recientes y apropiados, y mantenerse al tanto de los nuevos desarrollos" (Fehr, 1962, p. 2).

Volviendo al ambiente social y político en el cual se realiza la Conferencia, en el discurso de Posada se registran el *Acta de Bogotá* y la *Declaración de Punta del Este*, los dos documentos fundadores del programa de integración hemisférica. El Acta contiene las medidas que el Consejo de la OEA del 13 de septiembre de 1960 propuso como bases del programa decenal de la APP para el mejoramiento social y el desarrollo económico de la región (*The Avalon Project*, 1960). El programa será finalmente adoptado por todos los miembros de la OEA, excepto Cuba, en Punta del Este, Uruguay, el 17 de agosto de 1961. Al final de la *Declaración de Punta del Este* se fija el propósito reformista de las élites y gobiernos de la época de acuerdo con la ideología que lo inspiraba (*The Avalon Project,* 1961):

> La comunidad interamericana está comenzando una nueva era, [una era] en la cual los logros institucionales, legales, culturales y sociales se complementarán con acciones inmediatas y concretas para asegurar una vida mejor, en condiciones de libertad y democracia, para las generaciones presentes y futuras.

Como antes se mencionó, Posada empieza su discurso explicando el contexto de los acontecimientos políticos del último año que enmarcan y resaltan la importancia de la Conferencia de Bogotá. Al dirigirse a los organizadores, participantes, observadores y conferencistas invitados provenientes de veintitrés naciones de América Latina, Estados Unidos y Europa, Posada afirma que el inter-americanismo del *Acta de Bogotá* y la *Declaración de Punta del Este* no es un sueño infructuoso, sino que corresponde a "la determinación de brindar a las personas un mejor y más progresivo marco de seguridad para el ejercicio de su dignidad" (Fehr, 1962, p. 1).

Pero para concretar este gran propósito, continúa Posada, se requiere de la intervención de un fuerte programa intelectual de mejoramiento de la educación a todos los niveles. Como parecerá obvio a los presentes a la Conferencia, este programa comporta la expansión y transformación de los servicios universitarios, incentivos a la investigación, a las publicaciones, a la enseñanza, y el establecimiento de relaciones de cooperación entre los hombres de ciencia de América Latina y quienes adelantan su estudio de manera prodigiosa y creativa a nivel internacional. Estas son las acciones futuras que Posada espera que se desprendan de la Conferencia, la cual no podría reducirse a este solo encuentro. Para ello confía particularmente en el soporte que puedan dar a estas iniciativas los conferencistas invitados, a quienes se dirige por sus nombres: Profesores Schwartz, Choquet, Stone, Fehr, Bundgaard, Pauli, Cansado y Torres. Observemos que Posada deja de mencionar a otros invitados, en particular a Begle.

2. El discurso de Marshall Stone en respuesta a Posada

Marshall Stone dio respuesta al discurso de bienvenida de Posada en su calidad de Presidente desde 1959 de la *Comisión Internacional de Instrucción Matemática* (ICMI, por sus siglas en inglés). Fue de este organismo que partió la iniciativa de realizar la Primera Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática en Bogotá. Aparte de su bien ganada notoriedad científica, Stone llegaba a la ciudad – a la cual se refiere en su discurso de manera galante como la "Atenas de las Américas"-, precedido de la fama de un matemático de talla mundial comprometido con reformas de la enseñanza de las matemáticas, tanto en Estados Unidos y Europa, como en América Latina y África. Stone había trabajado intensamente en la promoción dentro de la Unión Internacional de Matemáticas (IMU) de una esfera propia de actividades en educación matemática.

Fue precisamente durante su Presidencia del IMU (1952-1954) que revivió la antigua comisión de educación matemática inicialmente creada a instancias de Felix Klein, Guido Castelnuovo y Jacques Hadamard en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1908, en Bolonia, y que a partir de 1952 se transformará en el actual ICMI. Stone consideraba que precisamente por la importancia del papel de las matemáticas en la sociedad era necesario ocuparse de las consideraciones técnicas sobre los métodos de su enseñanza (Parshall, pp. 19-20).

> Si juzgamos por los resultados nos resulta difícil no concluir que nuestros intentos de enseñar matemáticas como parte de un programa de masificación de la enseñanza han conducido, para decirlo sin rodeos, a un fracaso colosal, que evidencia nuestra ignorancia y conformidad con el arte de enseñar.

A finales de la década de 1950 el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas no solo era una preocupación central de la comunidad matemática, sino que los organismos económicos de los países industrializados empezaban a considerarla un asunto estratégico para el desarrollo. La expansión industrial y la superación del retardo tecnológico del mundo occidental imponían una transformación en los contenidos y métodos de la educación, así como en los limitados alcances de la formación. La Organización para la Cooperación Económica y el Desarrollo (OECD; OECE antes de 1963) había creado desde 1958 la Oficina de Personal Científico y Técnico precisamente con el propósito de hacer más eficiente la enseñanza de la ciencia y de las matemáticas. La reforma de la enseñanza empezaba pues, a ser reconocida como una condición de fondo de la modernización económica (Charlot, 1986).

Probablemente fue a través del discurso de Stone que los matemáticos y las autoridades colombianas tomaron conciencia de la realidad política de la reforma. Stone informó sobre las acciones que estaba emprendiendo la OCDE en esta dirección y que ya sabemos fueron adelantadas bajo la asesoría y coordinación del mismo Stone. En primer lugar, la convocatoria a una docena de expertos reunidos durante diez días en las cercanías de París en noviembre de 1959 para establecer los propósitos de un nuevo currículo para la enseñanza secundaria de las matemáticas en el *Coloquio de Royaumont*. Meses después, se realizó la reunión de Dubrovnik, Yugoeslavia, en donde una docena de expertos durante cuatro semanas establecieron el *Programa para las matemáticas modernas de la escuela secundaria*, que sería publicado en 1961, en París, con el nombre de *Mathématiques nouvelles* (Charlot, 1986).

Stone agrega otra línea de acciones de la OECD que consistía en fomentar en algunas instituciones europeas la enseñanza experimental de cursos inspirados en este programa

(Fehr, 1962). Se trataba concretamente del lanzamiento el año anterior (1960) en Dinamarca de un programa de escuelas de verano para profesores de matemáticas sobre la producción de materiales de base para la reforma. Estas experiencias fueron presentadas con gran detalle en la conferencia del profesor Svan Bundgaard representante de ese país en la Conferencia.

Por último, Stone plantea su recomendación, como presidente del ICMI, de que antes de la clausura de la Conferencia se acuerde una forma de cooperación permanente entre los países de la región, siguiendo el ejemplo de Argentina y Estados Unidos. Esta cooperación debería sustentarse en dos principios:

- los problemas de la educación matemática tienen un carácter universal no obstante las variaciones y matices producidos por las condiciones locales, y
- su solución demanda la más estrecha colaboración de los matemáticos y profesores de matemáticas a nivel internacional. (Fehr, 1962, p. 6):

En nombre del ICMI, órgano del IMU, Stone expresa su disposición para estimular esta nueva cooperación regional en educación matemática a través de las relaciones que la organización mantenía entonces con veintidós países en seis continentes. Efectivamente, la resolución final de la Conferencia acordó la creación de la *Comisión Inter-Americana en Educación Matemática* (CIAEM) de carácter permanente, con el propósito de promover acciones orientadas a elevar el nivel y la eficiencia de la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria y la universidad. (Fehr, 1962, p. 168). También se conformó un equipo de dirección *pro tempore* con delegados de países de América Latina y bajo la presidencia de Stone quien desempeñó este cargo hasta la Conferencia de Bahía Blanca de 1972.

En la historia del CIAEM preparada para conmemorar los 35 años de su existencia, Ruiz y Barrantes, en nombre de los educadores matemáticos de la región, subrayan el papel decisivo de Stone en la creación e impulso de la nueva organización (Barrantes & Ruiz, 1998, pp. 28-29). Su capacidad de trabajo, su autoridad científica, el liderazgo que ejercía en la comunidad matemática internacional, su relación con los organismos de fomento a la ciencia y la educación, explican el firme desarrollo del CIAEM en esta primera etapa. Pero ante todo se le reconoce a Stone su "gran aprecio por la región latinoamericana [...] que le permitió involucrarse tan decisivamente en la construcción y permanencia del CIAEM durante tantos años". (Barrantes & Ruiz, 1998, p. 29).

En su presentación de la obra de Barrantes y Ruiz, D'Ambrosio (1998) se expresa en este mismo sentido, destacando en su reconocimiento a los fundadores (Stone, Fehr y Santaló), el hecho de que hayan logrado crear,

> en una región de países económica y culturalmente tan diversos, y políticamente tan diferentes... un foro donde poder reunirnos a discutir nuestros problemas comunes, y trabajar en la búsqueda de un entendimiento común entre nosotros. Nuestras actividades tienen como objetivo proponer directrices y soluciones que sean útiles y factibles para todos nuestros países. (D'Ambrosio, 1998, p. i).

Anotemos que los ideales de Stone a los que se refieren Ruiz, Barrantes y D'Ambrosio, y que obraron tan decisivamente en la conformación de la comunidad de educación matemática en el CIAEM, no corresponden al contexto inter-Americano de la *Alianza para el Progreso*, sino más bien a la política de la *Buena vecindad* ("good neighbour") de Roosevelt.

Es pertinente recordar aquí algunas de las impresiones de Stone en su informe oficial sobre su visita en los años 1940 a Argentina y otros países del cono sur de América Latina, a partir de la cual se inició su larga colaboración científica con la región. Después de declarar que ha quedado fuertemente interesado en las relaciones culturales con América Latina recomienda a las autoridades que patrocinaron el viaje centrar la cooperación en donde se hacía más necesaria: el campo del desarrollo científico y tecnológico. Pero teniendo en cuenta que este desarrollo es imposible sin la investigación en ciencia fundamental y matemáticas. Luego pasa a expresar los ideales y valores que a su manera de ver debían orientar esta cooperación:

> Si se cree, como yo pienso, que las relaciones más sólidas entre las naciones resultarán de la asistencia mutua sin pensar en beneficios o en crear obligaciones permanentes, entonces se puede concluir que cualquier cosa que podamos hacer para promover la ciencia y la tecnología en América Latina contribuirá a largo plazo al bien de todos. Es sumamente importante [...] que todo lo que Estados Unidos se comprometa a hacer lo haga dentro del espíritu de ayuda, y en absoluto con la esperanza de influir en la política interna o externa de los países a los que prestamos asistencia. También es de la mayor importancia que cada paso que tomemos esté orientado a descubrir y cultivar la autosuficiencia en nuestros colegas latinoamericanos (Parshall, 1962, p. 8).

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. & Ruiz, A. (1998). *La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática.* Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Charlot, B. (1986). Histoire de la réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin de l'APMEP,* 352, 15-31.

D'Ambrosio, U. (1998). Presentación. En: Barrantes & Ruiz, 1998. *La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática.* Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Fehr, H. F. (ed.) (1962). *Mathematical Education in the Americas. A report of the First Inter-American Conference on Mathematical Education.* New York: Columbia University.

Parshall, K. H. (2009). Marshal Stone and the Internationalization of the American Mathematical Research Community. *Bulletin of the American Mathematical Society* (New series), 46(3): 459-482.

Rojas, D. (2011). Colombia como "vitrina" de la Alianza para el Progreso. En: *50 años de la Alianza para el Progreso en Colombia: Lecciones para el presente.* Relatoría del evento. 6-8. Bogotá: Universidad de Los Andes.

The Avalon Project *Act of Bogota*, September 13, 1960. Yale Law School. Recuperado el 10 de Abril de 2019 de: **http://avalon.law.yale.edu/20th_century/intam08.asp**

The Avalon Project *Declaration of Punta del Este*, August 17, 1961. Yale Law School. Recuperado el 10 de Abril de 2019 de: **http://avalon.law.yale.edu/20th_century/intam15.asp**

La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula[1]

Carlos Sánchez Fernández

Resumen

La sencillez es uno de los atributos que le dan realce a la argumentación matemática, pero a veces nuestra endeble cultura matemática no nos permite apreciar que un asunto matemático con apariencia sencilla esconde muchas alternativas no menos atractivas que el tema original. Nuestro interés es compartir experiencias en el uso de la historia de la matemática como herramienta didáctica para la elevación de la cultura matemática. Ilustramos nuestras ideas con el tratamiento de algunas propiedades aritméticas relacionadas con las irracionalidades enteras. A través de estos contenidos aparentemente sencillos, pero con diversas alternativas y generalizaciones, pretendemos mostrar, además, que las transformaciones de la práctica matemática han incidido en las prácticas argumentativas.

Palabras clave: argumentación matemática, uso de la Historia de la Matemática, irracionalidades enteras, números metálicos, números de Pisot-Vijayaraghavan.

Abstract[2]

Simplicity is one of the attributes that enhances mathematical argumentation, but sometimes our weak mathematical culture does not allow us to appreciate that a mathematical issue with a simple appearance hides many alternatives no less attractive than the original topic. Our interest is to share experiences in the use of the history of Mathematics as a didactic tool for the elevation of mathematical culture. We illustrate our ideas with the treatment of some arithmetic properties related to irrational algebraic integers. Through these seemingly simple contents, but with various alternatives and generalizations, we also want to show that the transformations of mathematical practice have influenced argumentation practices.

Keywords: mathematical argumentation, use of the History of Mathematics, algebraic integers, metallic means, Pisot-Vijayaraghavan numbers.

1. Acerca de la importancia de las prácticas matemáticas argumentativas

Según la experiencia acumulada hasta el momento, consideramos que deberíamos enfocar una atención prioritaria a lograr que los alumnos, con creciente independencia, aprendan

C. Sánchez
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 8 de junio de 2019 y aceptado el 23 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 76–86. Costa Rica

a razonar lógicamente y se acostumbren a usar criterios científicos a la hora de tomar decisiones. Uno de los medios primordiales para desarrollar este pensamiento científico es a través de las prácticas matemáticas argumentativas para explicar, esclarecer, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemática (ver p. e. el *19th ICMI Study* editado por Hanna & De Villiers, 2012) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos.

En general, el nivel universitario suele incluir demostraciones, aunque a veces son demasiado formales y pierden atractivo para los jóvenes; el nivel primario frecuentemente -es una pena que no sea siempre- prepara para iniciar las prácticas argumentativas, aprovechando la natural curiosidad de los niños expresada en los insistentes *¿por qué?*, ... pero en el nivel intermedio o secundario ¿qué ocurre? Pues que, con asiduidad, nos olvidamos del valor de la argumentación científica y, por una u otra justificante, no se adiestra convenientemente.

Asumimos que todos conocemos la existencia de diferentes "categorías" en las prácticas argumentativas, que van desde una argumentación informal heurística a una prueba formal totalmente rigurosa, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con toda la precisión lógica. En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones dignas, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas docentes correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática*. Y no solo la historia antigua, sino también la historia más reciente, incluidas las aplicaciones prácticas que casi siempre aparecen mucho después. Y esto debe hacerse siempre con adecuación a las circunstancias concretas, haciéndolas más accesibles y atractivas al estudiante en un nivel escolar dado. Un maestro con experiencia realiza *a priori* un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que lo *histórico*, *lo lógico* y *lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva.

Es necesario *atemperar* y *acondicionar* el discurso matemático en el salón de clase, de forma que las prácticas argumentativas sean atractivas y eficaces en cada nivel de enseñanza; para esto consideramos que también el recurso de la historia es un ingrediente eficaz. En su origen y desarrollo los hechos matemáticos pasan por diferentes etapas, en la clase no tenemos que reproducir todas estas fases que tienen relación con la actividad investigativa, pero a medida que el conocimiento del maestro sea más amplio y profundo la clase podrá ser más rica y atractiva. Esto favorece el cumplimiento de uno de los principales objetivos del maestro: *facilitar la comprensión del hecho matemático*.

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia nos provee de una cultura matemática sobre el teorema o proposición correspondiente que sobrepasa con creces el simple conocimiento de una sola de las pruebas –sobre todo si la única conocida es la más concisa y más formal-. Por ejemplo, en el texto de Dawson (2015) podemos encontrar razones contundentes para recomendar el conocimiento de diferentes demostraciones de una misma proposición, por muy simple que parezca su enunciado.

Nuestros argumentos sobre este asunto los hemos venido exponiendo en diferentes escenarios y los más recientes se pueden encontrar en Sánchez Fernández (2018) y en Sánchez Fernández & Valdés Castro (2016), aquí solo hemos hecho una breve síntesis de nuestras ideas, antes de pasar al núcleo central de este trabajo: el desarrollo de prácticas argumentativas en el estudio de las *irracionalidades enteras*. A diferencia y como complemento de los planteamientos expresados en nuestros artículos más recientes, aquí intentamos mostrar cómo el proceso combinado del desarrollo del conocimiento científico, dado por *generalización* y por *especialización*, viene acompañado históricamente de una *diversificación* de las prácticas argumentativas, sobre todo a partir de la introducción de la rama conocida como *Matemática Experimental*. Estas ideas centrales se ilustran a través del tratamiento del tema de los números irracionales, asunto que aparece en casi todos los currículos de enseñanza secundaria y es retomado posteriormente en el nivel universitario. Un tema que cuándo se le comprende bien transparenta simpleza e importancia, tanto en el plano didáctico, como en el plano lógico e histórico. Por supuesto, la simpleza y la importancia son atributos muy relativos que dependen del tiempo y del estado de otros ingredientes de la cognición.

Con este objetivo, presentamos las prácticas argumentativas asociadas a tres niveles cognitivos de uno de los tipos más simples de irracionalidades numéricas: las *irracionalidades enteras*. Un primer nivel incluye las irracionalidades obtenidas en la resolución de problemas que conllevan a ecuaciones algebraicas del tipo más simple $x^n - p = 0$, donde p es un número primo; un segundo nivel, más general, de ecuaciones con coeficientes enteros dadas por un polinomio mónico del tipo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ con primer coeficiente } a_n = 1.$$

En este nivel aparecen los llamados *números metálicos* asociados a polinomios cuadráticos y los números plásticos soluciones de ecuaciones cúbicas, con atractivas propiedades de argumentación simple; en el siguiente y último nivel que trataremos, encontramos a los denominados *números de Pisot-Vijayaraghavan* una clase muy especial de enteros irracionales con unas propiedades topológicas y analíticas más abstractas y por tanto, que necesitan competencias argumentativas más sofisticadas, especialmente del uso del experimento matemático auxiliado por computadoras. La primera parte, que abarca los dos primeros niveles, puede ser motivadora para maestros de secundaria y enseñanza preuniversitaria, mientras que la segunda sirve como motivación para la introducción de temas muy fértiles de álgebra, topología y análisis, asociados al nivel universitario.

2. Las "inexpresables" raíces de los polinomios irreducibles con coeficientes enteros

¿Hay algo más sencillo que resolver ecuaciones como $x^n - p = 0$, donde p es un número entero? En el caso que el entero p sea una potencia enésima de otro entero es sumamente fácil encontrar al menos una raíz. Pero, ¿si p no es una potencia enésima? Aparentemente sigue siendo simple, basta tomar las raíces enésimas del número p, lo que puede reducirse al conocimiento de las raíces enésimas de la unidad. Temprano en la enseñanza secundaria aprendemos que este problema casi nunca tiene una solución racional, es decir, no es un *número expresable* como cociente de dos números enteros. Más adelante comprendemos que este problema sencillo está relacionado con la misma esencia de unos *números inexpresables* que, con aparente desestimación, se acostumbra a llamarles a unos "números irracionales" y a otros, "números complejos".

¿Cómo podemos trasmitir la importancia matemática de estos números inexpresables? ¿Cómo podemos mostrar su riqueza cognitiva sin lastrar su sencillez originaria? ¿Qué debemos revelar en cada nivel educacional? Estas interrogantes y muchas otras se pueden responder mejor con el conocimiento de su historia y de sus diferentes propiedades.

En un principio número y magnitud estaban ineludiblemente ligados. Se suele decir que fue en la Grecia Clásica donde se "descubrieron" los números inexpresables asociados a las magnitudes inconmensurables. Pero mucho antes, los babilonios "inventaron" métodos para representar con cierta precisión las *magnitudes inexpresables* con números enteros o fraccionarios.

Por ejemplo, los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas usando sucesiones recurrentes con números fraccionarios que pueden considerarse pasos heurísticos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla, datada en un momento cercano al 1800 a.C., que se conserva en la Universidad de Yale, aparece la aproximación en fracciones sexagesimales para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario que con la notación actual es:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,41421296296.$$

Muy cercana al valor aproximado que hoy conocemos en representación decimal

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237.$$

También en Egipto, la India y en China se han encontrado documentos antiquísimos que atestiguan el interés originario de dar un valor aproximado a esos "números inexpresables" de manera racional, aunque ¿no es *completamente racional* buscar una medida aproximada? En muchas culturas antiguas y medievales ese era un procedimiento natural. Pero hoy nos aferramos a desarrollar el origen histórico de los números irracionales mencionando solo la idea del valor exacto inexpresable como cociente de enteros, enfoque que nos llega desde la Hélade Clásica. Por supuesto, esta idea no es descabellada y también podemos utilizarla aderezándola con el condimento histórico. Veamos.

Al parecer fue el pitagórico Teodoro de Cirene (siglo V a. C.), maestro de Platón, uno de los primeros en plantear una argumentación para el estudio de números inexpresables que será recogida en los *Elementos* de Euclides. En particular, con sus conocimientos de geometría demostró que *los lados de los cuadrados cuya área era un número primo eran inconmensurables con el lado del cuadrado de área unidad*. Otro alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17} + \sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1 + \sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios con coeficientes enteros: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio irreducible de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de un polinomio de cuarto grado y no menos, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio con coeficientes enteros de sexto grado como mínimo.

Platón en su diálogo "Teeteto" glorifica uno de los argumentos más socorridos para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2:

> **Demostración** (en su esencia presentada por Platón). Si $\sqrt{2}$ fuese racional representable en la forma $\sqrt{2} = m/n$ con $(m, n) = 1$, se cumpliría $m^2 = 2n^2$, luego m sería par $m = 2k$ y de ahí se obtendría que $2k^2 = n^2$ y n también sería par, contradiciendo la suposición de que m y n no tenían factores comunes.

Desde entonces acá han proliferado las pruebas de la irracionalidad de las raíces de números que no son potencia de números primos. En el caso de la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, podemos clasificar los tipos de prueba en cinco clases:

1. Las que como la prueba de Teeteto suponen la representación irreducible como fracción y deducen que esta fracción irreducible es reducible, llegando a una contradicción;

2. Las pruebas basadas en el método de descenso infinito popularizado por el abogado francés Pierre de Fermat en la primera mitad del siglo XVII. Con este método se supone la expresión racional y a diferencia de la prueba según Teeteto, en la argumentación no se contradice tal expresión sino que se prueba la existencia de otra expresión de valor racional menor, proceso que puede continuarse indefinidamente, lo cual es absurdo porque en todo conjunto de números enteros positivos hay un elemento mínimo;

3. Las pruebas visuales sobre la imposibilidad geométrica de encontrar dos cuadrados de lados enteros, tales que el área del mayor duplique el área del menor;

4. Pruebas con argumentos puramente aritméticos, por ejemplo, uno de los argumentos más utilizados se refiere a la expresión de los números en un sistema de base 3, en lugar de la base 10 ordinaria; entonces en tal sistema triádico $\{0, 1, 2\}$, los cuadrados terminan en 0 o en 1, por tanto, no pueden ser iguales al doble de un número cuadrado perfecto;

5. Pruebas que conjugan dos o más de estos procedimientos.

Nos parece conveniente que en el aula de secundaria se manejen varios tipos de argumentación. Por ejemplo, después de hacer referencia al origen del problema y relatar alguna de las anécdotas se puede plantear la prueba como la cuenta Platón, subrayar el basamento en la lógica bivalente para llegar a contradicción. Preguntar si será posible alguna otra prueba que no use el mismo argumento, dejar pensar y al rato, si no hay propuestas, introducir otro argumento, por ejemplo, hacer uso de que el numerador es mayor que el denominador, sea $n = m + p$ para $p > 0$, elevar al cuadrado $m^2 + 2mp + p^2 = n^2 = 2m^2$ e inferir que $m > p$. Consecuentemente, y razonando análogamente, para algún entero positivo $a > 0$, $m = p + a$ y $n = 2p + a$, luego $(2p + a)^2 = 2(p + a)^2 \to a^2 = 2p^2$ y el proceso puede repetirse indefinidamente: $n > m > a > p > \dots$ lo que es un absurdo pues todo conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Seguidamente se puede buscar una interpretación geométrica de esta prueba: si existen dos cuadrados uno teniendo el doble de área que el otro, entonces siempre existe otro par de cuadrados más pequeños con la misma propiedad. En el capítulo 4 del clásico texto de Hardy & Wrigth (1938) se encuentran varias demostraciones y exquisitos comentarios históricos.

El problema enseguida se puede generalizar a la determinación de la no racionalidad de otras raíces cuadradas como $\sqrt{3} \approx 1,73205\,08075$, $\sqrt{5} \approx 2,23606\,79775$ aproximadas por las fracciones $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ -usada por Arquímedes- y $\frac{682}{305} < \sqrt{5} < \frac{161}{72}$, asociadas a mediciones en triángulos, pentágonos, hexágonos y otras figuras geométricas, tienen también una historia adjunta muy fructífera. Fértiles son, además, las historias asociadas a raíces cúbicas como $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992\,10499\ldots$ vinculada con el famoso problema de la duplicación del cubo. Como se narra en muchos textos de Historia de la Matemática en la búsqueda de una solución a este problema, Hipócrates de Quíos probó que era equivalente al problema de hallar dos medias proporcionales entre dos magnitudes x y $2x$. Es decir, encontrar dos segmentos de longitud m y n tales que $\frac{x}{m} = \frac{m}{n} = \frac{n}{2x}$. Tratando de resolver este otro problema fueron introducidas las curvas cónicas por Menecmo de Atenas. La solución se daba por intersección de dos parábolas o por la intersección de una parábola y una hipérbola. Más tarde, se inventaron otras curvas como la concoide y la cisoide con el fin de resolver este problema. Todas estas historias pueden matizar una clase de riqueza cultural y donde además se utilicen diferentes prácticas argumentativas tanto de carácter aritmético (las proporciones) como geométrico (cónicas de segundo grado y curvas de grado superior). La referencia más actual y relativamente simple que conocemos con argumentación general de la irracionalidad de raíces cuadradas es Lord (2018).

De las sencillas raíces cuadradas se puede pasar a otros números aparentemente más complicados, pero que son muy atractivos, como $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como el *número de oro*, raíz positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Paso a paso, sin saltos cognitivos, se amplía el campo numérico y el tipo de argumentación; se puede proceder por analogía, por generalización, por adaptación y por sustitución de los argumentos que no sean aplicables en el nuevo campo. De tal forma, con naturalidad, se pasa al tratamiento de problemas más generales con polinomios de coeficientes enteros.

3. Paseo por el universo de los irracionales enteros

Decimos que α es un *entero algebraico* si cumple $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$, para ciertos b_i todos enteros. Obsérvese que en esta definición se exige que el polinomio sea *mónico*, es decir, el coeficiente principal $b_n = 1$. Por supuesto, los números enteros son enteros algebraicos, pues son solución de la ecuación $x - n = 0$, y son los únicos números racionales que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes enteros, por ello se llaman *racionales enteros*, los demás se suelen llamar *irracionales enteros*, denominación por cierto aparentemente contradictoria si nos mantenemos con la mentalidad de la aritmética clásica. Reafirmemos que un aporte significativo de la introducción en el siglo XIX de estos nuevos tipos de números es precisamente el fomento de un cambio radical de la mentalidad dogmática aferrada a los clásicos campos numéricos, donde se cumplen siempre propiedades como la representación única en factores primos o la no existencia de divisores de cero, que en algunas de estas nuevas estructuras numéricas no se conservan.

Consideramos que el tratamiento de estos hechos históricos adaptándolos al contexto escolar tiene un valor didáctico incuestionable. El maestro interesado tiene mucha literatura a su disposición, en particular, recomendamos el segundo capítulo sobre *Arquitectura Aritmética* de nuestra biografía de uno de los responsables en difundir las bondades de tales números algebraicos, el alemán Richard Dedekind (Sánchez Fernández & González Ricardo, 2015, especialmente pp. 81-93). Con la obra de Dedekind se considera que el concepto de número real se separa definitivamente del concepto de magnitud física como se venía haciendo, con razón, desde la antigüedad clásica.

Es sencillo probar que los enteros algebraicos o son racionales enteros o irracionales enteros, es decir, no pueden ser racionales fraccionarios como $\frac{2}{3}$ o $-\frac{7}{5}$. Para argumentar esto, basta suponer $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$ para $\alpha = \frac{p}{q}$, sustituir en la ecuación y llegar a que el denominador q solo puede ser 1 y el numerador debe ser un entero divisor del término independiente b_0. A este resultado tan sencillo se suele llamar *Teorema de la raíz racional* o se asocia al *Lema de Gauss* para la factorización de polinomios, aunque muchos otros matemáticos lo usaron anteriormente sin formalizar su idea.

Los enteros algebraicos cumplen propiedades interesantes, como es que son estables por adición y multiplicación, por tanto, toda potencia entera de tales números es también un entero algebraico . Existen muchos ejemplos atractivos y simples de irracionalidades enteras que pueden estudiarse en el aula de secundaria, no solo raíces elementales de números libres de potencias. Por ejemplo todos los *números metálicos* definidos como la raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$, donde N es un entero no negativo y que son determinados por la fórmula: $\delta_N = \frac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$. Para $N = 1$ obtenemos el número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$. Cuando $N = 2$, $\delta_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142135624$ *número de plata*. Para $N = 3$, $\delta_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,3027756377$ es conocido como *número de bronce*. Si $N = 4$ obtenemos $\delta_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,2360679775$ llamado *número de cobre*. Todos los números metálicos se pueden aproximar por cocientes racionales formados por términos consecutivos de *sucesiones de Fibonacci*. Así, por ejemplo, si definimos la sucesión de Fibonacci por recurrencia: $F(1) = F(2) = 1$ y $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$, se prueba que $\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$ y, generalizando, se toma la sucesión recurrente $G(n)$ definida por: $G(n+1) = kG(n) + G(n-1)$ para $n > 1$, $G(1) = G(2) = 1$, que para cada $k > 1$, genera a uno de los miembros de la familia de números metálicos como límite del cociente $\frac{G_{n+1}}{G_n}$. Si no se ha introducido aún el concepto límite, se puede argumentar a través de una práctica computacional sencilla dada la fórmula de recurrencia correspondiente. Esta no es una argumentación formal, pero si se hace con cuidado resulta muy convincente y a los estudiantes de nivel secundario les satisface más que una demostración rigurosa -estas y otras curiosidades de los números metálicos aparecen en Sánchez Fernández & Roldán Inguanzo, 2012, pp. 58-64.

En otra dirección de generalización por analogía, se puede introducir la ecuación cúbica: $x^3 - Nx - 1 = 0$ la cual determina una familia de irracionales enteros conocidos como *números plásticos* pl_N y en el caso $N = 1$ su valor puede expresarse por la fórmula encontrada en el siglo XVI para la solución de la ecuación cúbica:

$$pl_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,3247179572.$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje benedictino holandés Hans van der Laan en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Con esta *proporción plástica* diseñó la abadía de San Benito en Holanda. Posteriormente el número plástico pl_1 fue estudiado con mayor profundidad por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935), quién definió una sucesión de números enteros cuyos cocientes aproximan a este número plástico. La sucesión de Padovan se define de forma análoga a la sucesión de Fibonacci por medio de una relación de recurrencia

$$A(n+1) = A(n-1) + A(n-2), \text{ para } n > 2 \text{ y } A(1) = A(2) = A(3) = 1.$$

Entonces el cociente $\frac{A_{n+1}}{A_n} \to pl_1 \approx 1,324718$. Por supuesto, mientras mayor sea n, la aproximación del entero irracional por fracciones racionales es más precisa. La argumentación al igual que antes con los números metálicos se puede hacer *experimentalmente* con el uso de los medios de computación electrónica.

En la literatura especializada se puede encontrar familias de números irracionales enteros con una fértil y atractiva historia. Por ejemplo, familias de números plásticos (Spinadel & Buitrago, 2009) con múltiples usos en diseño, arquitectura y en el estudio de cuasicristales. Una de las clases de enteros irracionales que más nos sorprende por sus múltiples aplicaciones a dominios de la ciencia tan disímiles, es la clase más amplia consistente de los números de Pisot-Vijayaraghavan (Bertin et al., 1992).

Hace precisamente un siglo, en 1919, el matemático inglés G. H. Hardy encontró que la clase de los posteriormente denominados *números de Pisot* era efectiva para la solución de problemas de aproximaciones numéricas (Hardy, 1919). Posteriormente el indio Tirukkannapuram Vijayaraghavan, alumno de Hardy, extendió estos resultados (Vijayaraghavan, 1931). Aproximadamente, por la misma época el joven francés Charles Pisot, graduado de la Escuela Normal Superior de París, en su tesis de doctorado (1938) hizo un estudio muy amplio de tales números encontrándoles aplicación en el análisis armónico. Desde entonces en la literatura occidental se les llama números de Pisot y pocas veces números de Pisot-Vijarayaraghavan, por simplificación histórica y retórica, aunque es justo si consideramos que fue Charles Pisot quién les encontró las principales propiedades, los hizo visibles en la literatura científica y fundó un seminario en París con un grupo de discípulos.

Esta clase sorprendente de números irracionales enteros, gracias a los adelantos tecnológicos de las ciencias de la computación, se ha convertido en un modelo ideal para interpretar las características de la estructura ordenada, pero aperiódica de los cuasicristales, rompiendo un paradigma clásico de la cristalografía -un lector curioso puede encontrar agradable la historia matemática de los cuasicristales como es narrada por el brillante matemático ruso Vladimir Igorevich Arnold y que aparece traducida al inglés en Arnold (1990).

Comentemos algunas características de los *números de Pisot* que no hemos encontrado en ningún texto de enseñanza secundaria o universitaria, las cuales nos parecen muy atractivas y además sabemos que son muy útiles para comprender mejor ciertos conceptos de álgebra abstracta y argumentar su importancia dadas sus aplicaciones a problemas ligados a la cristalografía. Ante todo, definamos qué entendemos por *números de Pisot*: son los enteros algebraicos $p > 1$ cuyo polinomio mínimo irreducible no tiene otra raíz (real o compleja) que sea de módulo mayor o igual a 1, es decir, si llamamos *conjugados* de p a todas las otras raíces de su polinomio mínimo, entonces $p > 1$ es un número de Pisot si sus conjugados son todos de módulo estrictamente menor que la unidad. Por ejemplo, si p es un irracional cuadrático tiene un único conjugado irracional entero p' y el par de raíces reales puede ser de solo dos formas:

Caso 1. $(p = a + \sqrt{D} > 1,\ p' = |a - \sqrt{D}| < 1)$ o

Caso 2. $(p = (a + \sqrt{D})/2 > 1,\ p' = |a - \sqrt{D}|/2 < 1)$

Ejemplos de números de Pisot p son el número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el segundo caso, mientras que el número de plata $1 + \sqrt{2}$ y el número de cobre $2 + \sqrt{5}$ son ejemplos del primer caso. El número plástico pl_1 es un ejemplo de irracional cúbico y sus dos conjugados algebraicos son los respectivos complejos conjugados uno del otro como ocurre con todas las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales. Todas estas aseveraciones pueden argumentarse basándose en propiedades simples del álgebra de los polinomios. Se conoce que pl_1 es el mínimo número de Pisot-Vijayaraghavan, es decir entre 0 y $pl_1 \approx 1{,}3247$ no existe otro número de Pisot, pero esta propiedad no es fácil de argumentar.

Fácil de argumentar es la propiedad que Hardy encontró, sobre la aproximación de números enteros mediante las potencias enteras de un número de Pisot p^n, potencias todas que son también números de Pisot. Como todos sus conjugados tienen módulo menor que la unidad al elevarlos a la potencia $n-$ésima se hacen cada vez más y más pequeños. Además, la suma de todas las potencias de las raíces del polinomio mínimo asociado es un entero, por tanto, se acercan a un determinado número entero y con velocidad exponencial.

Los estudiantes secundarios pueden muy bien apreciar el atractivo computacional de esta propiedad y en particular pueden comprobarla (no demostrarla) tomando las potencias de los números metálicos o plásticos. Podemos observar mejor esta propiedad al hacer una tabla (ver Tabla 1):

Tabla 1. Parte fraccionaria con seis cifras exactas de algunas potencias del número de oro

Potencia	Valor de $\{\Phi^n\}$
10	0,991 869 ...
11	0.005 025...
20	0,999 953...
21	0,003 614...
30	0,999 999...
31	0,000 000...

Se observa en la Tabla 1 que la parte fraccionaria de las potencias impares tiende a cero y que la parte fraccionaria de las potencias pares tiende a uno, por tanto, se subraya que estas potencias se aproximan cada vez más y mejor a números enteros. Algo similar ocurre con todos los números irracionales enteros de Pisot como se puede argumentar refiriéndose a las *identidades de Newton* -que fueron usadas en 1629 por el francés Albert Girard, casi 40 años antes que Newton en 1666- (ver p. e. Mead, 1992).

El conjunto de los números de Pisot, denotado por la letra S, posee una serie de propiedades topológicas que lo hacen atractivo para aplicaciones en diferentes campos del análisis. Por ejemplo, es cerrado en la topología natural de los números reales, encierra a todos sus puntos de acumulación, el más pequeño de estos puntos de acumulación es precisamente el número de oro y entre el número de oro y el número plástico -que es el más pequeño de todos los números de Pisot- existen solo otros 10 números que, evidentemente, son aislados en la topología natural. Las pruebas de estas propiedades necesitan de un conocimiento superior de cuestiones del algebra de los polinomios, análisis y geometría de la recta real y el plano complejo, por supuesto, sale de los límites de este trabajo, aunque lo mencionamos para lectores curiosos que deseen profundizar y adaptarlos para usarlos en sus clases de nivel universitario. El texto de los discípulos de Pisot, escrito después de la muerte de su maestro (Bertin et al,, cuyo capítulo 3 se dedica a los números de Pisot-.

Como hemos querido mostrar las prácticas matemáticas han cambiado en el decurso del tiempo y con estas han evolucionado las prácticas argumentativas y, en general, las prácticas docentes. Con el uso actual de las técnicas introducidas en la llamada *Matemática Experimental* podemos argumentar de manera informal y convencer de la validez de muchos resultados de apariencia complicada, pero fácilmente representables por ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y manejables con sencillos algoritmos al alcance de los jóvenes estudiantes (recomendamos profundizar en estas ideas con el texto de Bailey & Borwein, 2008)

Es perceptible que muchas de las propiedades de los números irracionales salen de los objetivos de la enseñanza secundaria, sin embargo, existen multitud de otras propiedades simples de los números irracionales enteros como hemos visto más arriba. ¿Pero qué les sucede a muchos maestros de nivel secundario que discriminan estos números y prefieren etiquetarlos como “difíciles”, solo porque son *irracionales*? ¿Por qué los profesores de Álgebra Superior en sus cursos sobre polinomios no introducen los polinomios de Pisot asociados a los irracionales enteros de Pisot? ¿No creen ustedes que cuándo se conoce bien su origen y desarrollo lógico-histórico, vislumbramos que su fertilidad nos puede ayudar en la elevación de la cultura matemática de nuestros alumnos y formarlos mejor como ciudadanos útiles?

Referencias y bibliografía

Arnold, V. I. (1990). *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*, Eric J. F. Primrose translator, Dordrecht. Ed. Birkhauser.

Bertin, M. J. et al. (1992). *Pisot and Salem Numbers*. Basel. Springer Verlag.

Bailey, D. & Borwein, J. (2008). *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21st. Century*. Second Ed. Boca Raton, FL.CRC Press Taylor & Francis.

Borwein, P. (2002). *Computational Excursions in Analysis and Number Theory*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag. Cap. 3.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht. Ed. Birkhauser.

Hanna, G. & Villiers, M. de (Eds.) (2012) *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht. Springer-Verlag.

Hardy, G. H. (1919). A problem of diophantine approximation. *Journal Indian Math. Society* 11: 205–243

Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1938). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. En su 70 aniversario (2008) apareció una 6ta. ed. complementada por Andrew Wiles et al.

Lord, N. (2018). Another proof of the irrationality of square roots. Descargado de **https://doi.org/10.1017/mag.2018.124** en enero de 2019.

Mead, D.G. (1992). Newton's Identities. *The American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America) 99 (8), 749–751

Sánchez Fernández, C. (2018). ¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 13, n°17, 17-34.

Sánchez Fernández, C. & González Ricardo, L. G. (2015). *Dedekind. El arquitecto de los números.* Madrid. Ed. Nivola.

Sánchez Fernández, C. & Roldán Inguanzo, R. (2012). *Paseo por el universo de los números.* La Habana. Ed. Academia.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Ed. Matemática*, n° 46, 09-32.

Spinadel, V. W. de & Buitrago, A. R. (2009). Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 13, N2, 163-175.

Vijayaraghavan, T. (1931). On the fractional part of the powers of a number. *Proceedings Cambridge Philosophical Society* 37, 349-357.

Textos escolares desde una visión crítica de la Matemática[1]

Nelly León Gómez

Resumen

Se inicia la disertación con una visión general del sistema educativo venezolano y del proceso de transformación curricular del nivel de Educación Media en Venezuela. Luego, se hace referencia a los libros de Matemática de la Colección Bicentenario (CB), editados por el Ministerio del Poder Popular para la Educación en el marco de dicha reforma con carácter de textos escolares, concebidos bajo una aproximación crítica y realista de la Educación Matemática. Se presentan y discuten los resultados más relevantes de un estudio valorativo de dichos textos, realizado por León y Vicent (2015) siguiendo el modelo de Monterrubio y Ortega (2009), entre los que destacan como elementos positivos el lenguaje natural accesible al alumno, la contextualización de la matemática y la promoción de valores y, como aspectos negativos, desarrollo incompleto de los temas matemáticos, limitaciones en la formalidad y el lenguaje matemático y, sobre todo, la intencionalidad política de los textos.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, Matemática Realista, textos escolares, Colección Bicentenario.

Abstract[2]

The document begins with an overview of the Venezuelan education system and the process of curricular transformation at the secondary level. Then, reference is made to the Mathematics books of the Bicentennial Collection (CB), edited by the Ministry of Popular Power for Education within the framework of such reform as school textbooks, conceived under a critical and realistic approach to Mathematics Education. The most relevant results of an evaluative study of these textbooks, carried out by León and Vicent (2015) are presented and discussed following the model of Monterrubio and Ortega (2009), among which stand out as positive elements the natural language accessible to the student, the contextualization of Mathematics and the promotion of values and, as negative aspects, incomplete development of mathematical themes, limitations in formality and mathematical language and, above all, the political intentionality of textbooks.

N. León
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela
nellyleong@hotmail.com

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 9 de junio de 2019 y aceptado el 15 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 87–100. Costa Rica

Keywords: Critical Mathematics Education, Realistic Mathematics, school textbooks, Bicentennial Collection.

1. Introducción

La aprobación en el año 1999 de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (CRBV) significó el punto de partida del proceso de cambios que derivaron en una nueva concepción educativa, en ella expresada, y que condujo al establecimiento de lo que se conoce como Educación Bolivariana. Esta se sustenta en la corriente de la pedagogía crítica como medio de generar conciencia hacia una nueva forma de comprender los conflictos sociales, los instrumentos de dominación e ideologización y de la devastadora relación hombre-ambiente (Mora, 2005). Obviamente, los cambios implícitos son de gran envergadura y chocan con los esquemas establecidos durante largo tiempo.

Para el año 2007, se propone el Currículo Nacional Bolivariano (CNB) como una guía en la que se establecen los objetivos formativos y los medios de acción para lograrlos (MPPE, 2007), en atención al tipo de sociedad que se prefigura en la CRBV y del ser humano que ésta dibuja: crítico, democrático, con conciencia social y ambiental, entre otras características.

Han sido muchos los vaivenes por los que ha pasado la implementación de este currículo debido a las cambiantes normativas educativas y al rechazo derivado de confrontaciones políticas ineludibles. Para el año 2014, como producto de una amplia consulta a nivel nacional, se da inicio al proceso de cambio curricular del nivel de Educación Media General y al año siguiente se presenta el Plan de Estudios correspondiente, visto más como un documento orientador de la aproximación curricular que se desea desplegar, en el entendido de que es el propio docente quien hace el currículo (MPPE, 2015, 2017).

Tales orientaciones curriculares ya venían reflejadas en los libros de textos de la denominada Colección Bicentenario, que han acompañado dicha transformación como recurso didáctico con un enfoque realista y transdisciplinar y acorde a los principios de la Teoría Crítica de la Educación, según los señalamientos de sus autores.

En una sociedad tan polarizada políticamente como la de Venezuela, estos textos han sido alabados por un sector de la comunidad nacional y ferozmente atacados por otro, por diversas razones entre las que sobresalen una supuesta intención ideologizante y un tratamiento inadecuado e incompleto de los contenidos de las diversas áreas de conocimiento para los que han sido editados, entre ellas la Matemática (Andonegui, en entrevista a Pérez Terán, 2014).

Ante esta situación, desde el Núcleo de Investigación de Educación Matemática (NIEMAT) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL-IPM), hicimos una investigación con el propósito de hacer una valoración de los textos de Matemática de Educación Media de dicha colección y proponer a los autores algunas ideas y sugerencias a tomar en cuenta en futuras ediciones de los mismos (León y Vicent, 2015a).

La investigación se enfocó desde una perspectiva fenomenológica centrada en los puntos de vista de la muestra (12 profesores de Matemática seleccionados según el criterio de ser profesores de la especialidad de Matemática de la UPEL-IPM o profesores de Educación Media con formación a nivel de postgrado en el área y que han mantenido vinculación con el Departamento de Matemática y el NIEMAT). En la distribución de estos especialistas se trató que por cada grado escolar hubiese por lo menos dos revisores del libro correspondiente. En este reporte se identifican como Rij, donde i representa el año del texto revisado y j el número asignado al revisor para ese año: R12 corresponde al segundo revisor del libro de primer año).

Dado que se buscó hacer juicios de valor, se consultó distintos modelos y trabajos sobre evaluación de libros de textos escolares (Andonegui, 2015; Beyer, 2004; Miguez, 2004; Pinto y González, 2013; Ramírez, 2002 y 2012 y Monterrubio y Ortega, 2009), escogiéndose el modelo expuesto por los dos últimos autores, adaptando las categorías previas a las particularidades de la CB, según se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías de análisis y sus dimensiones.

CATEGORÍA	DIMENSIÓN
CONTENIDOS	Presencia y Ubicación Ajuste al programa Organización y secuenciación Desarrollo teórico de los temas Razonamiento matemático Errores
CONEXIONES	Intra-matemática Extra-matemática Extra-matemática Con temas transversales
ACTIVIDADES	Actividades desarrollada Actividades propuestas
ASPECTOS METODOLÓGICOS	Esquema metodológico Aspectos vinculados a lo metodológico Ejercicios y Problemas Evaluación
LENGUAJE	Lenguaje matemático Lenguaje habitual
MOTIVACIÓN	Hacia las experiencias y el crecimiento personal Didáctica

A partir de estas categorías previas se elaboró un cuestionario con preguntas abiertas. Todas las respuestas fueron organizadas en un formato donde se transcribió textualmente los testimonios de los profesores para cada ítem en función de facilitar el análisis y la reflexión sobre sus planteamientos, tratando de interpretar a partir de sus testimonios su percepción respecto a dichos textos, destacando los alcances, limitaciones, aciertos, desviaciones, errores, entre otros aspectos, para su uso por los estudiantes y los profesores como texto oficial en el aprendizaje de los temas matemáticos (León y Vicent, 2015a)

Más adelante se presentan los resultados más destacados en relación a las categorías: Contextualización de la Matemática, Desarrollo de los Contenidos Matemáticos y a la categoría emergente Matemática e Ideologización en los textos de Matemática de la CB.

2. La matemática en el Diseño Curricular Bolivariano (DCB)

La Matemática, como área de formación en el DCB, atiende a los principios de la filosofía de la Educación Crítica (Skovsmosse, 1999; Skovsmosse y Valero, 2001; Mora, 2005; Becerra (2005) y al Enfoque Realista (Freudenthal, 1991). sEn tal sentido, contrario a la visión predominante como ciencia netamente formalista, abstracta y deductiva de esta ciencia, en la acción de enseñar y aprender se busca aproximarla a otra que propenda a la formación de ciudadanos que desplieguen una participación democrática y comprometida en procesos de transformación social positivos en lo individual y lo comunitario y que apunten a la conservación del planeta para las futuras generaciones (Skovsmose, 1999); es decir, una visión humanista, culturalmente situada y necesaria para la sostenibilidad de la vida presente y futura del hombre (MPPE, 2007).

La educación matemática bajo una perspectiva crítica sustenta "la participación social, la comunicación horizontal entre los diferentes actores, ... la humanización de los procesos educativos, la contextualización del proceso educativo y la transformación de la realidad social" (Ramírez, 2008, p. 109).Así emerge la relación educación matemática-democracia, expresada en el dialogo continuo entre profesores y estudiantes que conlleva a la atribución de sentido y a la comprensión individual y colectiva a través de la negociación de significados y el respeto de normas y formas de actuación (Sierpinska, 1998). El respeto por el otro, por sus opiniones y sus diferencias consolida el pleno desarrollo de la persona, a la vez que lo dota de herramientas para pensar, comprender y razonar libremente, llevándolo a ver la Matemática como una materia significativa y con amplias aplicaciones en el devenir de la sociedad (Skovsmose, 2011). Esta biyección entre educación matemática y democracia trasciende hacia una formación en la que se es capaz de cuestionar lo que se enseña, lo que se lee, de relacionar hechos y situaciones reales, de buscar nuevas ideas a partir de lo aprendido. De allí la pertinencia de estimular en los jóvenes la criticidad de lo que se expone, desde el mismo objeto matemático hasta la forma de matematizar situaciones del contexto (Serrano, 2016).

Dentro de los fines de la educación en Venezuela, establecidos en la Ley Orgánica de Educación (LOE), está "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". (LOE, 2009, pp. 19-20). Cotidianidad y experiencia que le imprimen sentido a los conocimientos de la disciplina, al separarla del "paradigma del ejercicio" (Skovsmose, 2000) que pone énfasis en ejercicios rutinarios y descontextualizados carentes de sentido más allá del aula. Igualmente se busca separar la enseñanza de la Matemática de la corriente estructuralista enclaustrada a partir de la reforma de la Matemática Moderna, según la cual se privilegian los aspectos formales y abstractos de la disciplina; por el contrario, se aboga por el uso de métodos inductivos y de reconstrucción de conceptos en situaciones contextualizadas y mediante el trabajo cooperativo (MPPE, 2015).

Es recurrente en el discurso de la transformación curricular de Educación Media el presentar los temas matemáticos unidos al contexto y a las vivencias de los estudiantes y al mundo extra-matemático en general. La corriente de la Matemática Realista de Hans Freudenthal ha hecho interesantes aportes en este sentido. Se propone partir de la realidad, buscar modelos y esquemas que permitan profundizar en el conocimiento de la misma y aprender la Matemática en contextos de aplicación.

En este marco conceptual se organiza el currículo atendiendo entre otros a los siguientes elementos: temas generadores, tejido temático y referentes teórico-prácticos. Los temas generadores se refieren a cuestiones macro que propician aprendizajes integrados y contextualizados. El tejido temático está constituido por un mapa de posibles aspectos interdisciplinares factibles de ser considerados en el abordaje de los temas disciplinares de cada área. Los referentes teóricos prácticos engloban los conocimientos propios del área (leyes, teorías, conceptos, teoremas, lenguaje, reglas, modelos, entre otros) (MPPE, 2015).

De los temas generadores emergen aprendizajes con sentido y pertinencia con respecto a los considerados temas indispensables y los enlaza a los referentes teórico-prácticos a través del tejido temático (MPPE, 2015), con el que se busca la integración interdisciplinar a través de la Matemática. Veamos esto con algunos ejemplos correspondientes a las Unidades de Aprendizaje 1 y 3 de cuarto año de Educación Media:

Tabla 2. Ejemplo de organización de unidades de aprendizaje en torno a temas generadores, tejido temático y referentes teórico-práctico.

UA	Tema generador-Tejido temático	Referentes teórico-práctico
1	**Análisis de factores de riesgo en la comunidad** Situaciones que aumentan las probabilidades de afectación de la salud. Determinación de los resultados posibles y probabilidades en cuanto a factores de riesgos. Tratamientos de fenómenos sociales y naturales. Ley de Gestión Integral de Riesgos Socionaturales y Tecnológicos (2009). Toma de decisiones en función de estudios estadísticos.	Estadística: análisis descriptivo univariante. Distribución de probabilidades. Distribución binomial. Series de tiempo. Números índices.
3	**Sistemas económicos y sociales en el mundo** Crecimiento de la población mundial y la generación de riqueza vs satisfacción de necesidades. Indicadores económicos vs solución de problemas sociales en el planeta. Índice de desarrollo humano. Las desigualdades y desequilibrios en el mundo. Capitalismo, socialismo. Variación de los salarios mínimos en los últimos cinco años en la República Bolivariana de Venezuela.	Gráficos. Proporción, fracción, porcentaje. Mapas. Índices. Lectura de índices. Variaciones interanuales. Proyecciones. Funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

En los textos de la Colección Bicentenario encontraremos la misma organización de los contenidos, como veremos más adelante.

3. Los textos de Matemática de la Colección Bicentenario

Partimos de considerar el papel de los libros de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje al actuar como una importante guía para el docente en la planificación y puesta en escena de las unidades didácticas o lecciones de matemática en el aula (Cabero, Duerto y Romero, 2002; López, 2007). Los libros de texto direccionan la selección y secuenciación de contenidos matemáticos a la par que muestran la visión de la Matemática que tiene el autor y su posición filosófica, pedagógica y didáctica (Gascón, 2001), por lo que estipulan el tipo de enseñanza que asume el profesor (Parcerisa, 1996). Más aún, como señala Schubring (1987), éstos determinan en la práctica la enseñanza de la Matemática por encima de cualquier disposición institucional al respecto. Por eso, debido al poder del libro de texto como soporte del conocimiento y modelador de procesos de enseñanza, cabe preguntarse si es siempre apropiado el contenido que aparece en este recurso didáctico y la forma como es presentado al lector. Autores como Ramírez (2012) llaman la atención sobre las limitaciones didácticas, los sesgos ideológicos y los intereses comerciales latentes en dichos textos; mientras que para Torres (1991), citado por Duarte y Bustamante (2013), los libros de texto llegan a actuar como filtros de conocimientos según los intereses formativos de los grupos de poder en un momento socio-histórico determinado.

Precisamente, en el contexto socio-político actual de Venezuela nace la Colección Bicentenario como un programa del gobierno nacional que acompaña la implementación del Currículo Nacional Bolivariano. Consiste en una serie de textos de las diferentes áreas del conocimiento, entre ellas la Matemática, que abarca todos los años escolares de los niveles de Educación Primaria (1° a 6° grado) y de Educación Media General (1° a 5° año), de distribución gratuita en el ámbito nacional en escuelas y liceos públicos del país y con un carácter de textos guía para ambos grupos de actores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática: estudiantes y docentes (León y Vicent, 2015a). En esta oportunidad sólo nos referiremos a los libros de Matemática para Educación Media General. Éstos fueron elaborados por un grupo de profesores y egresados de la UPEL que además forman parte del Grupo de Investigación de Educación Matemática (GIDEM). Este grupo "defiende una matemática inclusiva, al servicio de la humanidad, que nos sirva para entender el universo, que acabe con su monopolio ideologizante, que nos sea útil para la emancipación, para la transformación" (Fondo Editorial del IPASME, citado por Aguirre, 2014, p. 59), principios de la Educación Matemática Crítica que, como veremos, quedan reflejados en dichos textos.

La estructura de los textos de Matemática dista mucho de la de los libros tradicionales. En estos últimos aparece en el índice la secuenciación detallada de los contenidos contemplados en programas anteriores. En general, estos textos plantean la siguiente metodología de trabajo: 1) Desarrollo de conceptos y planteamiento de ejercicios resueltos; 2) Propuesta de actividades para desarrollar habilidades de razonamiento, modelación, análisis, interpretación y argumentación 3) Actividades que muestran la matemática en su vinculación con otras ciencias y 4) Solución de problemas. (Álvarez y otros, 2012). Por su parte, en el índice de los libros de la CB aparecen los nombres de las unidades (que no necesariamente coinciden con las planteadas en el CNB) asociados a temas generadores, acompañados de los temas matemáticos que se desarrollarán. El esquema de las unidades es el siguiente: se inicia con el tema generador de aprendizajes y enseñanza, se sigue con trabajo investigativo extradisciplinario; análisis; formalización conceptual; desarrollo de actividades dentro y fuera de las disciplinas; trabajo intramatemático (conceptualización y formalización), y se cierra con trabajo de consolidación, ejercitación, ejemplificación y ampliación (Duarte y Bustamante, 2013).

En los mensajes dirigidos tanto a los estudiantes como a los representantes y los docentes, los libros se presentan como *instrumento para la liberación* donde los contenidos matemáticos se desarrollan partiendo de un tema generador vinculado a la realidad venezolana. En los textos, la Educación Matemática se guía bajo ciertas premisas como la contextualización real de la Matemática, no una pseudo-contextualización; el aprendizaje de la Matemática como posibilidad de generación de valores en consonancia con la formación de una ciudadanía crítica y una sociedad verdaderamente democrática; y el aprendizaje de la disciplina mediante actividades de investigación, no solo en el ambiente tradicional del aula sino también en espacios alternos donde se desarrolla la vida cotidiana del estudiante. (MPPE, **2012a**, **b**, **c**, **d**, **e**)

4. Impacto de la Colección Bicentenario en la sociedad venezolana

Como reacción inmediata a la aparición de los textos de la CB, producto de las confrontaciones políticas en el país, se generaron dos matrices de opinión completamente opuestas entre aquellos que los aceptan a ciegas y los que los rechazan a priori, con pocos matices entre ellos. Por un lado se les califica como *textos para la liberación* o *vanguardia de la educación revolucionaria;* mientras que por el otro se les asigna epítetos como *textos de la discordia* o *libros para perpetuar la pobreza.*

Aparte de la diatriba política también se ha generado una discusión más académica en torno a este recurso didáctico. Martín Andonegui, destacado educador matemático de la UPEL, en entrevista a Pérez Terán (2014), apunta algunos elementos referidos a: 1) *contenido matemático*: se reflejan algunos aciertos en el abordaje contextualizado, pero también fallas de profundización y de dar significado matemático a los contenidos; 2) *procesos cognitivos*: no se establecen de forma adecuada los parámetros psicológicos de aprendizaje sobre la zona de desarrollo próximo, ya que no se enfrenta al niño a problemas de mayor complejidad matemática; 3) *variables afectivas y de tipo sociocultural*: se ven reflejadas en los textos a través de las lecturas e ilustraciones y en problemas que se adecuan a las realidades del país mediante la inclusión.

Sumamos a esto la diatriba sobre si dichos libros deben considerarse como libros de texto de uso obligatorio, o libros de consulta o complementarios de empleo discrecional o en conjunto con otros textos comerciales (León y Vicent, **2015a** y **b**).

5. Revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario: un estudio necesario

A partir del análisis de las diversas categorías preestablecidas en esta investigación para la valoración de los textos de Matemática de la Colección Bicentenario y de los aportes de todos aquellos que participaron en este estudio, se presenta a continuación la percepción general sobre los textos con sus aciertos y desaciertos. Esta visión general la resumimos en tres renglones: conexiones (una valoración positiva), desarrollo de los contenidos matemáticos (una valoración no tan favorable) y elementos políticos-ideologización (una valoración negativa) (León y Vicent, 2015a y b).

Conexiones

Una de las intencionalidades declaradas en la CB es ofrecer a los estudiantes una matemática con un enfoque transdisciplinar y en estrecha vinculación con el contexto, sus vivencias e intereses. Esto nos ha motivado a pulsar la opinión de los revisores de los textos, guiándonos por tres dimensiones concretadas en las posibilidades de conexión intra y extra matemática que se generan a partir de la forma como son tratados los diversos temas, y la vinculación de éstos con temas transversales como lenguaje, ambiente, trabajo, valores y tecnología.

Este parece ser el elemento que caracteriza a los textos objeto de estudio y de alguna manera marca distancia con libros de editoriales comerciales que se distribuyen en Venezuela. Nada más al tomar uno de los libros de la CB, ver su carátula y observar el título, el lector se percatará que está ante un libro de Matemática diferente. Las opiniones de los revisores sobre las cuestiones tratadas en esta sección del trabajo son bastante favorables.

En algunas lecciones se observa la intención de establecer cierta relación entre conceptos matemáticos; no obstante, varios revisores coinciden en señalar que en estos libros se presentan muchas ocasiones para establecer este tipo de conexión, pero que éstas no se aprovechan debidamente, y con el ánimo de darle mayor cohesión a los tópicos matemáticos se recomienda a los autores que en futuras ediciones de los textos se profundice en ese tipo de conexión intra-matemática, con la finalidad que los estudiantes se percaten de que los conceptos que estudian en esta materia no son parcelas aisladas, sino un entramado de ideas que se soportan entre ellas para darle solidez al "edificio matemático".

Para los revisores, la incorporación de reseñas biográficas de destacados matemáticos que han hecho aportes significativos a los tópicos que se estudian permite que los estudiantes adviertan que la Matemática es una construcción del hombre; que todos los objetos matemáticos son productos de la mente humana, que se han generado en determinadas circunstancias sociales, contextuales e históricas. Igualmente las semblanzas a personajes que han contribuido con la Educación Matemática en Venezuela es motivo de regocijo.

Hay otro tipo de reseñas de personas o hechos históricos no vinculados directamente a la Matemática o a la Educación Matemática que aportan a la cultura general y a la formación integral de los educandos, a la vez que pueden incentivar el gusto por la lectura (R43, R12, R22). No obstante, algunos revisores piensan que estas reseñas pueden convertirse en elementos distractores y desviar el verdadero propósito de los libros; mientras que para otros estarían bien siempre que, de alguna manera, se vinculen a la temática tratada y no se abuse de ellas (R31, R52).

Los revisores perciben claramente que hay relación con otras disciplinas como Química, Economía, Geografía, Física; con algún oficio como la pesca y la construcción; o con situaciones del contexto y de la vida diaria a las cuales se van hilvanando los conceptos matemáticos. Esto se visualiza con más claridad en los primeros niveles, pero a medida que la complejidad del contenido se hace mayor esta contextualización se vuelve menos palpable a pesar de seguir sustentando el desarrollo matemático sobre una situación contextual de partida (R51). Se aboga por la incorporación de lecturas sobre la historia de la Matemática que permita a los estudiantes conocer el proceso de creación de los conceptos que están estudiando, pues, "Cuando se trata del rigor y la formalidad matemática, se debe apegar a la verdadera historia de la Matemática, según el tema a tratar" (R42).

Otras lecturas se relacionan a consideraciones extra-matemática inmersas dentro de lo que podríamos llamar la fenomenología didáctica del tópico matemático de interés. Estas lecturas permiten abordar temas transversales como lengua, ambiente, trabajo, valores y tecnología. Con el eje trabajo hay conexión pero podría insistirse más (R42). Hay interés por crear consciencia sobre la preservación del ambiente (R42, R12).

Algunos revisores cuestionan algunas actividades extra-matemática, sobre todo el peso que éstas tienen en algunas lecciones en comparación con el contenido matemático propiamente dicho. También cuestionan el carácter temporal de algunas de ellas, "por lo que pueden quedar obsoletas a poco caminar, o carecer de relevancia con sólo pasar algunos años" (R51). Para evitar que los textos se desactualicen rápidamente, los revisores sugieren presentar situaciones más estables en el tiempo. Un claro ejemplo de esta cuestión son las actividades enunciadas en el contexto de la economía nacional, referidas a costos de productos y servicios o al salario mínimo, que claramente quedaron desvirtuados en la realidad hiperinflacionaria que actualmente reina en el país.

Por otro lado, las lecturas van acompañadas de una profusión de ilustraciones cuyo uso en los textos hemos querido analizar desde dos ángulos que se complementan: como elemento motivador y como coadyuvante a la contextualización. Con excepción de un revisor, hay acuerdo sobre la pertinencia en el uso de las ilustraciones pues potencian el alcance de los textos en términos de ubicar el conocimiento matemático en el contexto, se aprovecha el impacto visual que hace que el mensaje llegue con más facilidad a los lectores (sobre todo en aquellos que tienen un estilo de aprendizaje marcadamente visual), y en ese mismo sentido se convierten en vectores hacia la motivación del estudiante a la vez que los invita "al diálogo sobre lo que se reseña en las mismas" (R43). En el ánimo de mejorar los textos y hacer un uso más provechoso del espacio en cuanto al desarrollo matemático en sí, se recomienda a los editores revisar el tamaño de algunas de las ilustraciones. Algunos opinan que no hace falta exagerar en cuanto al tamaño y la cantidad de ellas pues el mensaje igualmente se logra siendo más ponderados en su uso.

Contenidos

Todos los libros de Matemática de la CB siguen la misma estructura: un título que hace una referencia general a la contextualización de la mayoría de las lecciones consideradas en ellos; dos mensajes: uno dirigido a los estudiantes y otro a los profesores y las familias; un índice en el que aparece un listado de temas identificados con un título que hace referencia a una situación contextualizada, resaltada en un tamaño de letra grande en comparación con el del contenido matemático (R41).

En los mensajes ya referidos se leen unos "propósitos macros" (R12) sobre la intencionalidad que se persigue con el estudio de la Matemática; además, "Hay un planteamiento que es el desarrollo de la capacidad investigativa del estudiante" (R51). No obstante, los objetivos que se espera lograr y las competencias que deben alcanzar los estudiantes en términos del aprendizaje de las diferentes temáticas en cada año escolar no son enunciados explícitamente.

Detengámonos ahora en la organización y secuenciación de los contenidos. Los revisores llaman la atención de que los contenidos no mantienen una secuenciación del todo apropiada, los temas se desarrollan parcialmente dejando vacíos que pueden generar confusión en los estudiantes (R11, R22), por lo que se requiere que se incluyan desarrollos explicativos que garanticen la secuencia lógico-matemática (R51). Se evidencia la falta de coherencia interna con los temas, pues "no se profundizan hasta finalizarlos, sino que se cortan y luego se retoman" (R21).

Igualmente se señala que los contenidos no están secuenciados en su totalidad atendiendo al nivel de complejidad. Además, en la estructura del libro, cada tema es tratado más que todo en conexión con la situación generadora que se presenta al introducir cada lección; en tal sentido "tratan de `fundamentarlo' en hechos propios del entorno" (R32), en menoscabo de la interconexión entre ellos desde la matemática misma (R22, R42).

Casi unánimemente los revisores concuerdan en que se hace énfasis principalmente en las representaciones, un poco menos en los significados y, definitivamente, insuficiente abordaje conceptual, lo cual genera preocupación entre los evaluadores.

Igualmente hay acuerdos en cuanto a la claridad que se evidencia en la exposición de los temas, haciéndolos manejables y claros para el nivel cognitivo de los estudiantes. Pero, ésta no es una opinión unánime. R51, refiriéndose al libro de 5° año, considera que las exposiciones matemáticamente son claras "pero se requiere una buena base tanto en conocimiento como en madurez matemática para su aprendizaje efectivo mediante este texto". Desde otra óptica, R23 argumenta que en el ánimo de contextualizar los contenidos se cae en situaciones extra-matemáticas que desvirtúan la presentación de algunos de ellos. Sólo los revisores del libro de 5° año consideran que el nivel de complejidad, el rigor y la formalidad matemática están más allá de ese nivel educativo. Para los grados inferiores, la mayoría coincide en que los temas se presentan con un grado de complejidad acorde con el nivel cognitivo del grupo al cual van dirigidos; no así en lo que toca al rigor y a la formalidad.

Ahora bien, en concordancia con los principios de la didáctica centrada en procesos, como lo estipula la Ley Orgánica de Educación (2009) en su artículo 14, se plantea una duda acerca de si se procura una enseñanza que promueva el desarrollo de los procesos de pensamiento y su uso consciente por el estudiantado. El revisor R43 afirma que el texto promueve no sólo el razonamiento inductivo y deductivo, sino también el relacional y el crítico. Igualmente R12, sostiene que, al comulgar con una visión crítica de la educación Matemática, la CB en su conjunto fomenta este tipo de pensamiento que, de alguna manera, lleva implícito el pensamiento relacional y el razonamiento inductivo; pero no así el pensamiento deductivo que es inherente a la producción del conocimiento matemático a través de la argumentación lógica. Ateniéndose a los alcances de la pregunta planteada, la mayoría de los revisores reconocen que la forma como se presentan los contenidos, a partir de una situación motivadora de la que se deriva un problema o un ejercicio específico, favorece el razonamiento inductivo, habiendo poco espacio para el deductivo. Además, al plantear situaciones del contexto del estudiante o más generales para que sean matematizadas, pudiera traducirse, en opinión de la mayoría, como un intento por consolidar el pensamiento flexible, reversible y divergente, "aunque a veces se cae en la imposición" (R51), al tratar estos conceptos o sus propiedades que no son fáciles de visualizar o derivar de manera inductiva. En los libros hay oportunidades que podrían aprovecharse mejor en el intento de favorecer estos tipos de pensamiento.

En general, hay cierto descuido en la formalidad matemática, en el lenguaje matemático y en la simbología, problemas en el abordaje de los contenidos matemáticos, desarrollos incompletos, saltos en la presentación de los conceptos, secuenciación algunas veces no apropiada, ausencia de modelos de resolución de problemas, presencia insuficiente de problemas y ejercicios propuestos y resueltos, poca diversidad en las actividades propuestas que puedan servir para la evaluación, en particular la auto-evaluación.

Elementos políticos - ideologización

Otro cuestionamiento tiene que ver con la "intencionalidad política" que perciben algunos revisores, lo cual se refleja en testimonios como los siguientes: "Sí hay vinculación. Sin embargo, hay que tener cuidado con su presentación, pues se observan claramente `elementos políticos´ que pueden, según el lector, desvirtuar el mensaje" (R23); "Hay, sin embargo, planteamientos que pueden producir rechazo en el estudiante y en el grupo familiar. Son aquellos de contingencia política donde podría presentarse una vinculación forzosa o problemas políticos filosóficos" (R51); En el libro de 5° año, "A raíz de un problema de programación matemática se recomienda `estudiar´ y discutir, entre otros, los escritos de Marx, Istvan Meszaros y Luis `Ludovico´ Silva. ¿A qué viene esta sugerencia?" (R52); "Es notorio que, tal como se señala en el mensaje a los estudiantes, el texto persigue una formación crítica a través del estudio de la Matemática, pero esto quiere lograrse en muchos casos realzando la acción del gobierno y rechazando lo que se opone a su filosofía y a su pensamiento, lo que deriva en algunos matices de intolerancia" (R12); "... esto quiere lograrse con un sesgo político que incline la balanza hacia una nueva forma de ideología, que condena todo aquello que se opone" (R32). Estos comentarios recogen una crítica al elemento político partidista que pudiera desplegarse en los textos y sin el cual los mismos podrían llegar a tener una mayor aceptación entre los usuarios de este importante recurso educativo pensado para todos los venezolanos que cursan el nivel de Educación Media.

En fin, en opinión de los revisores se destacan los esfuerzos sostenidos por mostrar los logros de una gestión de gobierno (aun cuando para algunos ya hay evidencias de que no se han cumplido); el énfasis en lo político-ideológico, la intencionalidad de anular la pluralidad de ideas y la disensión, desde lo político partidista; el intento de constituirse en libro único, rechazado por los docentes de Educación Media quienes ven la necesidad y la pertinencia de usarlos conjuntamente con otros textos de Matemática de editoriales comerciales que permitan variaciones en la didáctica, rellenar lagunas conceptuales y la ejercitación.

6. Reflexiones finales

Concebida bajo las premisas de la Educación Matemática Crítica, la Colección Bicentenario ha sido presentada como una serie de libros con una aproximación didáctica y pedagógica que conlleva la intencionalidad de lograr una formación matemática *participativa, colaborativa, activa, productiva, inter e intra cultural, intra e inter disciplinaria*, pero además "liberadora, emancipadora, revolucionaria, comunitaria, antiimperialista". (Miguez y Duarte, 2014, p. 76)

Como hemos visto en los resultados de la valoración de dichos textos, los calificativos destacados en cursivas hacen de estos libros un recurso propicio para una enseñanza-aprendizaje de la matemática contextualizada, democrática, más humanizada y afectiva, modeladora de valores, ambientalista. Recurso que debe complementarse con la consulta de otros libros de matemática escolar para complementar el abordaje disciplinar sobre el cual se han detectado muchas fallas, limitaciones y errores.

Son los últimos calificativos los que generan polémica, pues develan la direccionalidad hacia una ideologización acorde con el modelo económico y social que se viene construyendo o imponiendo, según se vea, en el país. Como reflexiones de cierre nos preguntamos ¿Por qué es esto tan cuestionable?, ¿Debe la educación ser aséptica en este sentido?, ¿No ha habido siempre mecanismos de ideologización a través de la Educación Matemática y en particular en los libros de texto de la disciplina?, y si es así ¿Por qué no ha habido con anterioridad un rechazo tan marcado como ahora?

Wladimir Serrano, coordinador de la CB en Matemática, en entrevista concedida a Barrios (s/f), afirma que "Marcamos una diferencia sustancial con el enfoque que caracterizaba la educación matemática en los libros de las grandes casas comerciales y que hoy siguen publicando con todo el aparato ideológico", y complementa esto destacando que "en estudios que han realizado a textos publicados por editoriales transnacionales, de 20 imágenes que se presentan, en 19 aparecen hombres, y solo en una, una mujer. El sexo femenino es presentado realizando actividades que lo dejan en minusvalía frente al hombre, y su fenotipo obedece a patrones eurocéntricos". Los autores de este reporte de investigación nos cuestionamos, ¿No lleva esto implícito una profunda carga ideológica, pero que la hemos tomado de una manera natural acorde al orden establecido? En la misma entrevista, Norberto Reaño, uno de los autores de los libros, se pregunta "¿Qué tiene de malo que señalemos un Café Venezuela o un Chocolate Cimarrón, o enseñemos fracciones con las pastillas del CDI? ¿Qué tiene de malo que aparezca el Satélite Simón Bolívar o Miranda? En los libros de sellos privadas reseñan a un transbordador que dice USA o NASA y me parece bien porque habla de avance tecnológico". Quizás aquí esté el punto de quiebre, pues parece ser que lo que más se cuestiona no es que los textos estén contextualizados en la realidad venezolana, sino que, en opinión de algunos revisores, con la cual concuerdan los detractores de la CB, "promocionan descaradamente la acción del gobierno"(R21) e "intentan anular la pluralidad de ideas buscando pasar de la ideología predominante hasta ahora a una nueva forma de ideologización, rechazada por un grueso de la población"(R32). Al respecto queda mucho por discutir…

Referencias y bibliografía

Andonegui, M. (2015). Los libros de texto de Matemática. El caso de la Colección Bicentenario. Ponencia presentada en la X Jornada Centro Occidental de Educación Matemática. Barquisimeto: UPEL-IPB, Departamento de Matemática

Aguirre, M. (2014). *Libros para perpetrar la pobreza*. Foro Cerpe, Serie EDUCALIDAD, Cuaderno nº 1. Caracas.

Barrios, A, (s/f). Coordinador de la Colección Bicentenario: "Estos textos escolares explican y eso es terriblemente revolucionario". Entrevista a Wladimir Serrano y Noeberto Reaño para Agencia Venezolana de Noticias. Disponible en **https://www.noticias24.com/venezuela/noticia/196300/coordinador-de...**

Becerra, R. (2005). *La Educación Matemática Crítica. Orígenes y Perspectivas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.). 165-203. Bolívia: Editorial Campo Iris.

Beyer, W. (2004). *Algunos antecedentes de los libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1969: descripción de las aritméticas de Romero y Serrano de Landáez y de algunos catálogos*. En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 13-32- Caracas: UNA

Cabero, J.; Duarte, A. y Romero, R. (2002, Junio 9). Los Libros de Texto y sus Potencialidades para el Aprendizaje. [Documento en línea]. Disponible: **http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/public5.htm** [Consulta: 2018, Octubre 17].

Duarte, A. y Bustamante, k. (2013). Colección Bicentenario: una mirada desde los libros de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 23-30.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (2), 129-159.

León, N. y Vicent, R. (2015a). *Valoración de los textos de matemática de educación media de la colección bicentenario desde la perspectiva de docentes y estudiantes de la especialidad.* Informe de Investigación presentado a la Subdirección e Investigación y Postgrado de la UPEL-IPM. Maturín: Autor.

León, N. y Vicent, R. (2015). *Aportes para la revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario.* Conferencia presentada en el IX Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto: Venezuela.

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5929 (Extraordinario), 15 de agosto de 2009.

López, A. (2007). Libros de texto y profesionalidad docente. *Revista Adide* nº 6

Miguez, A. (2004). *Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en los libros de texto de Matemática*. En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 67-78- Caracas: UNA.

Miguez, A. y Duarte, A. (2014). Análisis del tratamiento de la aritmética en los libros de matemática de la Colección Bicentenario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 73-81.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). *Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana: Liceos Bolivarianos: Currículo*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012a). *Matemática para la vida: 1er año*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012b). *Conciencia Matemática: 2do año*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012c). *La Matemática de la Belleza: 3er año*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012d). *Naturaleza Matemática: 4to año*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012e). *La Matemática y el vivir bien: 5to año*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2015). *Plan de estudios de la Educación Media*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2017). *Plan de estudios de la Educación Media*. Caracas: Autor.

Monterrubio, M. y Ortega, T. (2009). *Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones*. [Documento en Línea] Ponencia presentada en el 13 SEIEM. Disponible: **http://www.revistaeducacion.educacion.es/doi/358_087.pdf** [Consulta: 2014, noviembre 20]

Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica y Educación Crítica de las Matemáticas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.) 17-164. Editorial Campo Iris: Bolívia.

Parcerisa, A. (1996). *Materiales Curriculares: como elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Graó.

Pérez Terán, D. (2014, junio 30). Análisis de los textos bicentenario: Matemáticas con defectos de exigencia y razonamiento [Entrevista a Prof. Martín Andonegui]. *El Impulso*. Disponible: **http://elimpulso.com/articulo/matematicas-con-defectos-de-exigencia-y-razonamiento** [Consulta: 2015, junio 11]

Pinto, E. y González, F. (2013). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Las ecuaciones lineales en los libros de texto de matemáticas para Educación Básica en Venezuela. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 177-201.

Ramírez, R. (2008). La pedagogía crítica: una manera ética de generar procesos educativos. *Folios*, Segunda Época, N° 28, 108-119.

Ramírez, T. (2002). El Texto Escolar como Objeto de Reflexión e Investigación. *Docencia Universitaria*, Vol. III, Nº 1, 101-124.

Ramírez, T. (2012). *El texto escolar en Venezuela. Políticas Públicas y Representaciones Sociales*. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Serrano, W. (2016). *La educación crítica de la Matemática en el contexto de la sociedad venezolana: hacia su filosofía y praxis.* Caracas:GIDEM

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica* (2da Ed.) (P. Valero, Trad.). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3-26.

Skovsmose, O. (2011). *Educação Matemática Crítica a questão da Democracia* (6ta edición). Campiñas: Papirus.

Skovsmose, O. y Valero, P (2001). Breaking Political neutrality: The critical engagemnete of Mathematics Education With Democracy. Disponible en **http://www.learning.aau.dk/download/Medarbejdere/Paola-Valero/Breaking_Political_Neutrality.pdf.**

Sierpinska, A. (1998). *Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism*. In H.Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysinghistorical textbook. Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*.7 (3), 41-51.

¿Por qué a la didáctica, la epistemología, la informática y a las habilidades matemáticas, les cuesta tanto ingresar a una clase de Matemática?[1]

Fidel Oteiza Morra

"Nadie le enseña nada a nadie, todos aprendemos en interacción con el mundo".
Paulo Freire

Resumen

La didáctica es el corazón de la educación matemática y una tarea preferente de educadores e investigadores en todo el mundo; la epistemología es el conocimiento acerca de la naturaleza del conocimiento matemático; las tecnologías digitales son la sustancia con la que se construye el espacio simbólico en el que viven y vivirán los que son nuestros alumnos hoy y las habilidades matemáticas son el foco de las reformas curriculares de la disciplina en los últimos decenios. La escuela, y en ella la clase de matemática, se resiste. Prevalece la enseñanza por sobre el aprendizaje, la exposición de parte de un adulto por sobre el hacer matemático de los alumnos, el acento en los contenidos y algoritmos por sobre las habilidades propias del hacer matemático. En esta oportunidad se buscan *supuestos y creencias* que podrían servir de base a la discrepancia entre lo que se espera suceda en la clase de matemática y lo que en ella se observa realmente. El análisis busca comprender cuáles son las fuerzas que entorpecen o inhiben la necesaria evolución de la escuela y del sistema escolar.

Palabras clave: didáctica, epistemología, tecnologías digitales, habilidades matemáticas, creencias, formación inicial docente, supuestos que sustentan la organización escolar.

Abstract[2]

The approach to teaching is the heart of Mathematical Education and a preferred task of educators and researchers around the world. Epistemology is knowledge about the nature of mathematical knowledge. Digital technologies are the substance with which the symbolic space in which our students live and will live today is built. Mathematical skills are the

F. Oteiza
Ex-presidente CIAEM
Chile
fidel.oteiza@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 18 de junio de 2019 y aceptado el 3 de agosto de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 101–116. Costa Rica

focus of the curricular reforms of the discipline in recent decades. The school, and in it the Mathematics classroom, resists. Teaching prevails over learning. Adult presentations are more common than students doing Mathematics. There is an emphasis on content and algorithms over the abilities needed for mathematical work. Here we look for the assumptions and beliefs that could serve as a basis for the discrepancy between what is expected to happen in the Mathematics classroom and what is actually observed in it. The analysis seeks to understand what are the forces that hinder or inhibit the necessary evolution of the school and the school system.

Keywords: teaching, epistemology, digital technologies, mathematical skills, beliefs, initial teacher education, assumptions that support the school organization.

1. Las motivaciones, las preguntas

"La preguntas, una vez formuladas, buscan activamente su respuesta".
Gregory Bateson, 1972

¿Qué explica la prevalencia hegemónica de la clase eminentemente expositiva en nuestras escuelas, institutos y universidades[3]?

¿Qué hace que lo que ve un matemático, una matemática, cuando reconocen la estética de un razonamiento o la belleza de una fórmula o lo que hacen cuando enfrentan un problema nuevo, no sea parte de la experiencia de niños y jóvenes en la clase de matemática?

¿Quién, en nuestras escuelas, está en condiciones de acompañar a niños, niñas y jóvenes en la comprensión acerca de lo que hace su teléfono? Más aún, ¿En la comprensión de las noticias[4]?

Y, si aceptamos que aprender a pescar es más poderoso que recibir de regalo un pescado, ¿Por qué se requiere de investigaciones, documentos, congresos y reformas para que las habilidades para hacer matemática sean consideradas en la clase de matemática?

¿Por qué le es tan difícil a la didáctica de la matemática, el pensar acerca del pensar, a las tecnologías de la información y comunicaciones, a las habilidades para hacer matemática y a la vida misma, ingresar a una clase de matemática?

Y, para buscar posibles respuestas a estas preguntas y poner un foco a lo que sigue, nos concentremos en la pregunta: ¿Cuáles son los *supuestos, las creencias y las convicciones* en maestros, directivos docentes, investigadores y ejecutivos de nuestros gobiernos, que podrían explicar la situación antes descrita?

[3] Las clases de matemática, en las palabras de Roberto Araya, -luego de analizar cientos de videos de clases recopilados en Chile-: "predecibles y sin participación de los alumnos", "El profesor explica ejercicios en la pizarra, los alumnos escuchan. (...) casi no hay uso de textos ni de tecnología".

[4] En la prensa: "El aterrizaje de *algoritmos inversionistas* que podrían transformar la industria" El Mercurio, 24 de febrero, 2019.

2. Un argumento y por qué buscar las creencias

El modelo de escuela que prevalece en la actualidad tiene un norte diferente al que señalan las reformas educacionales de los últimos decenios, es, además, un modelo saturado –en el sentido que da la teoría de innovaciones: pequeñas mejoras son muy difíciles y costosas- y, en torno a ese modelo se ha instalado una enorme maquinaria que incluye ministerios de educación, universidades, formación de docentes, investigación, diseño de los currículos nacionales y toda una política educativa que se centra en la evaluación y la supervisión de resultados y de los aspectos formales del sistema. Esa estructura y la política educativa descansan en supuestos y creencias sobre lo que es educación, lo que es educar, aprender, enseñar; así como acerca de cuáles son los objetivos de aprendizaje válidos y qué es evaluar, esa política –y naturalmente toda esa estructura-, refuerza, cristaliza el modelo y lo hace inamovible.

En particular, la actual política de evaluación y de supervisión –que favorece la "selección por sobre el cultivo de talentos"- tiende a congelar el sistema impidiendo su necesaria evolución.

El tramado, la compleja gama de factores que son causa y, a la vez, efectos de estas estructuras se fundamentan en *supuestos, creencias y costumbres* –la mayor parte implícitas y no conscientes- entre los cuales podíamos encontrar causales o –al menos- variables sobre las cuales se podría actuar. Se propone, en esta oportunidad buscar y enunciar esas creencias.

Lo que sigue no es una diatriba contra la escuela. Somos hijos de la escuela que es parte del esfuerzo de la humanidad por ser más humana y crecer. En el mundo y en particular en nuestra América, nuestras naciones son hijas y madres de la escuela. Existen, siempre han existido, maestros y maestras notables, escuelas y experiencias ejemplares. Tampoco buscamos negar la acción de innovadores ni de innovaciones extremadamente valiosas. Antes bien esas realizaciones señeras nos alientan a abrirles caminos que puedan extender su inspiración a muchos, a la mayoría que no recibe ese efecto benéfico. No es que la educación sea mala, es que sus propios resultados muestran lo que puede cambiar.

3. A la búsqueda de supuestos y creencias

La didáctica de la matemática no puede asistir a la clase de matemática

Esta gran ausente deja fuera el sentido de hacer matemática. Deja fuera de la sala lo que sabemos acerca de cómo facilitar los aprendizajes en matemática.

Si tomamos una foto de una sala de clases y la hacemos circular por el mundo comparándola con otras salas de clases, la homogeneidad será patente. El rol de los actores está definido y es también uniforme. En la foto – mirando desde el frente, dónde está el o la docente- los bancos sólo dejan ver caras y manos. Caras que esperamos muestren atención y manos que anoten las lecciones del o la profesora. La sala de clases más frecuente, con sus bancos, al cortar la figura, oculta el cuerpo. ¿Educación integral? El contraste entre lo que podemos observar en la mayoría de las salas de clases y el ideal de Fröebel es notable. En efecto, el educador alemán propiciaba la actuación del que aprende, la emisión, por sobre la mera recepción[5].

¿Cuántas decisiones toma un alumno durante una clase?, ¿Cuántas de las interacciones entre personas que se dan en la sala fueron iniciadas por un alumno? Digamos lo que queramos, pero tenemos que aceptar que los estudiantes llegan a la sala a esperar que el docente actúe y les diga lo que hay que hacer. Estamos afirmando que el esquema que usamos para gestionar la enseñanza conduce, casi necesariamente, a una situación en la que el estudiante es receptor pasivo.

Posibles creencias. "Aprendemos cuando incorporamos información", "nuestros alumnos aprenden cuando escuchan, leen, cuando atienden". En oposición a lo que enseña la psicología: aprendemos más, con efectos más duraderos y con la capacidad para aplicar lo aprendido, cuando "emitimos". Es más poderosa la emisión que la recepción. Y, la sala de clases habitual está construida para que los y las alumnas reciban las instrucciones de sus maestros y maestras. En consecuencia, se pone toda la atención en lo que los estudiantes recibirán, lo que escucharán, verán o leerán. Quedan fuera lo que dirán, escribirán, argumentarán, resolverán, graficarán, expondrán y todo verbo de acción.

El físico Richard Feynman, Premio Nobel 1965, lo expresó de este modo: "Lo que no puedo crear, no lo entiendo"[6]. Cambiar la polaridad, de la *recepción a la emisión*, aceptando que "aprendemos más y de mejor manera cuando emitimos, que cuando recibimos", podría ser el mayor factor de innovación en la institución escolar. La emisión, la construcción, la creación apelan a un espacio que facilite la producción, a un taller, más que a la sala de clases, un dispositivo, este último, diseñado para atender, escuchar, poner la vista al frente, en resumen, ¡para recibir!

La misma creencia, aprendemos cuando recibimos, orienta los programas de formación inicial docentes. En efecto, en general, se forma "preceptores" en un área del conocimiento. Profesionales que puedan exponer, explicar un saber. La didáctica, dice la experiencia, no es un eje en la formación inicial docente. Se da mucho espacio a temas generales, pensando en un intelectual expositor más que en creadores y creadoras de espacios de aprendizaje. *Crear espacios* es tema de diseño. ¿Se forma en diseño a los futuros y futuras docentes?

Estas creencias también están detrás de las razones por las que las habilidades matemáticas no son parte de las prácticas en la sala. En efecto, resolver, representar, modelar, argumentar, son verbos de acción, de emisión, no de recepción.

La metáfora de formación inicial prevalente se opone a la de una persona con fuerte y pensada formación matemática, con un dominio amplio de la didáctica y con capacidad de diseño. ¿Por qué diseño? Porque si se busca poner el foco en la emisión, más que docentes que en la explicación, se buscaría profesionales con las capacidades necesarias para crear y proponer espacios en los que se exprese o se pueda experimentar con la matemática que se espera los alumnos aprendan. En esta visión, un educador es un creador de situaciones y espacios de aprendizaje, en esta visión se requiere capacidad de diseño.

---

[5] Para un análisis del pensamiento de Fröebel, ver Helmut Heiland (1993).

[6] Citado en: sitio: **http://www.frasesypensamientos.com.ar/autor/richard-phillips-feynman.html**

Si, regresando a Paulo Freire citado al comienzo, "*Nadie le enseña nada a nadie*", ¿Qué hace un educador?, ¿enseñar? Sería negar la negación de Freire. La respuesta está en la segunda afirmación del educador brasileño, "*todos aprendemos en interacción con el mundo*". Nos corresponde "diseñar el mundo" para facilitar el aprendizaje. Crear las condiciones para que esas interacciones con el mundo le den a niños, niñas y jóvenes la oportunidad de hacer matemática. Diseñar los espacios para que en estos se dé la matemática que consideramos valiosa para ellos.

Esto es nuevo, al menos diferente a lo observable en escuelas de formación inicial, se requiere aprender acerca de la capacidad de diseño. Si se desea apartarse de un modelo de enseñanza centrado en la exposición hecha por el que enseña, es indispensable desarrollar la capacidad de expresar, en el espacio que se propone al estudiante, la matemática que se espera que aprenda. Mientras el conocimiento esté confinado a la cabeza del docente, casi el único, por lo menos el más usado de los vehículos de expresión, es la exposición. A la inversa si se espera que un profesional pueda generar espacios en los que sus estudiantes aprendan, éste, el profesor de matemática deberá desarrollar capacidades de diseño. Esta es una capacidad de orden superior que requiere de una formación bien específica, mucha práctica y de mucho feedback en el proceso. Se puede tomar como referencia la formación de arquitectos o diseñadores. Esto se logra creando soluciones y sometiendo las soluciones a la crítica de pares y especialistas. Entre otras cosas, supone una forma de evaluación muy diferente a la que apelan las clases expositivas.

La epistemología está ausente de la clase de matemática

Los fundamentos de la matemática, su historia y su epistemología no forman parte de la mayoría de los programas de formación docentes.

De la mano con la epistemología, se queda fuera la historia del conocimiento matemático, quienes lo crearon, cuándo lo hicieron y en respuesta a qué lo hicieron. Aquello que le otorga sentido a un aprendizaje en la disciplina.

Gregory Bateson (1972) afirma que es imposible que alguien carezca de una epistemología. Lo que es poco frecuente, es que se haya hecho consciente la propia concepción epistemológica.

La manera en que usualmente se enseña la matemática tiende a formar en el estudiante una profunda confianza en el conocimiento matemático. Esto es, una concepción epistemológica acrítica que le impide comprender que, en torno al conocimiento matemático, a lo que es la matemática y lo que es hacer matemática, existe una controversia permanente muy bien expresada por Davis y Hersh (1981) -en su clásico "The Mathematical Experience"- también en Steen (1990).

El conocimiento es tan seguro, firme y permanente como el suelo que pisamos. Sentimos que nuestros pasos los damos sobre terreno sólido y seguro hasta que sabemos que gira, que oscila como un trompo, que se traslada en torno al Sol, que vibra, que se desplaza a gran velocidad siguiendo al Sol, y que éste se dirige hacia algunas estrellas que se alejan, en una galaxia que también se mueve, en un espacio cuyos límites no conocemos.

Nuestro sistema cognoscitivo y el conocimiento también lo sentimos seguro hasta que comenzamos a indagar con el mismo sistema acerca del cual indagamos sobre su naturaleza.

La epistemología es más básica que cualquier otra teoría particular, y se ocupa de las reglas que gobiernan el funcionamiento de la cognición humana. Bateson se refiere a la epistemología como el pensamiento que procura establecer de qué manera los organismos conocen, piensan y deciden.

En definitiva, todos los seres humanos desarrollamos una concepción específica, acerca de cómo pensamos, que suele no consciente. Esta concepción, generalmente implícita, juega un rol y una influencia fundamental en las acciones y procesos desarrollados por el sujeto que media el aprendizaje de otro. También es nuestra limitante, en las palabras de Bateson, citado por Lagos Garay (2004).

> . ... nosotros (seres humanos del siglo XX) no sabemos reflexionar sobre los fundamentos de nuestros propios pensamientos. Al pensar lineal y representacionalmente respecto de nuestra relación con el mundo, castramos y reducimos nuestra propia observación sobre el mundo que observamos, y –así pensando– construimos ese mundo. Nuestros modos lineales de reflexión cierran muchos (otros) modos de establecer relaciones entre múltiples procesos fragmentados que sin embargo sí están y pueden ser "conectados" de algún modo. Nuestro modo lineal de reflexión nos impone una sola relación posible, dejándonos ciegos así al inmenso arco de otras relaciones construibles y a descubrir. Bateson buscará siempre poner en evidencia esos otros arcos relacionales. Esas son sus "pautas (*patterns*) que conectan". Ese es el cambio cultural. Aprender a ver de un modo diferente. (19).

Posibles creencias. "La epistemología es materia de filósofos". "Hay que saber matemática para intentar la epistemología". "Para enseñar matemáticas basta con saber matemáticas". "Saber matemática es ser capaz de resolver los problemas que nos pone la escuela".

Creencias alejadas del pensamiento Bateson. Adicionalmente, dejan fuera la metacognición, el pensar sobre el conocer y, naturalmente, oculta el tejido, lo que sustenta y conecta las ramas de la matemática y la matemática con todas las áreas del conocer y del hacer.

Estas creencias dejan fuera las habilidades que caracterizan a quien hace matemática, disponer de las herramientas para enfrentar todo tipo de problemas matemáticos; distinguir, por ejemplo, lo que es de lo que no es matemática. Difícil acercarse a las habilidades matemáticas sin conocer la naturaleza del hacer matemático.

¿Qué formación reciben los docentes en matemática? ¿Cuál es la experiencia matemática de los futuros docentes? Se trata de una vieja cuestión. Una visita a la obra de Fëlix Klein puede ser inspiradora. En una conferencia en el ICMI, en México, Jeremy Kilpatrick lo hizo notar. En la introducción al primer tomo de los tres que publicó Klein, en la edición en inglés de 2016, se lee:

> Impresos durante un siglo, los textos de Klein han sido usados en incontables cursos para docentes, tanto en formación como en ejercicio. Son un ejemplo excelente de lo que hoy se denomina "conocimiento matemático para la enseñanza[7]. (...) ningún matemático ha tenido

[7] "Mathematical knowledge for teaching" en el original.

> una mayor influencia en educación matemática, como campo de estudio y como práctica[8] (Kilpatrick, p. 2016).

La obra citada, el primer tomo data de 1908 y el tercero de veinte años después, fue escrita para la formación inicial docente. El enfoque se expresa en el título: "Matemática elemental desde un punto de vista superior". El conjunto impresiona por lo contundente, lo cercano a los temas en desarrollo en la época que fue escrito, las discusiones epistemológicas y la inclusión de la historia de la matemática como parte de la formación matemática de los futuros docentes.

Un invitado más reciente también se queda fuera, las tecnologías digitales

La educación tiene un objetivo explícito, preparar a las futuras generaciones para el mundo en que les corresponderá actuar. ¿Alguna duda que en el que le corresponde a la generación que está hoy en la escuela les tocará actuar en un espacio de abstracción creciente construido con tecnologías digitales?

La clase de matemática es una de las que menos uso hace de las tecnologías de la información. Y esto, teniendo en cuenta que las tecnologías digitales y la matemática están íntima e inseparablemente relacionadas. Y, que los profesores de matemática –por su conocimiento de la disciplina que les es propia- son los más cercanos a esas tecnologías, tal vez los únicos que podrían llevar ciencias de la computación a la escuela.

Han pasado 74 años desde la creación de los primeros computadores; 57 desde el primer computador personal ofrecido en el mercado, el Olivetti "Programma 101", -el que usó la NASA en su programa que llevó al hombre a la Luna-. Han trascurrido 51 años desde el primer encuentro nacional en los EE.UU. para tratar el uso del computador en la enseñanza, 42 desde la aparición del Apple II y 50 años de la creación de ARPANET, origen de Internet. En Chile, Enlaces[9] nació hace 26 años.

La sala de clases ha cambiado muy poco en ese tiempo. ¿Es refractaria la escuela a las tecnologías digitales? Desde varios puntos de vista, las tecnologías digitales son disfuncionales a la escuela. Basta con considerar la estructura de una sala de clases y compararla con un "puesto de trabajo" con computador conectado a la Web, para comprender que apuntan en direcciones muy diferentes. La sala "pide", facilita la acción de escuchar y poner atención a alguien que se presentará al frente, disponiendo, deseablemente, de un dispositivo para anotar. El puesto de trabajo invita a la acción, a producir, a conectarse con otros y con los productos de otros. El computador es una máquina de producción, de búsqueda y de comunicación con los demás. Le obedece a quién la usa, a la inversa de obedecer a quién diserta en una sala.

Posibles creencias. "Los niños, niñas y jóvenes ya saben computación desde antes de entrar a la escuela". Nosotros, los adultos, por lo tanto, los docentes y administradores de todo el sistema, los admiramos, los tememos o ambas cosas a la vez. ¿Alguna consecuencia? Si no les enseñamos, no los preparamos para lo que están viviendo y menos a lo que

---

8 Traducción del autor.

9 Proyecto nacional para la incorporación de las tecnologías digitales en el sistema educativo.

experimentarán en el futuro. Así, paradojalmente, la escuela que declara ser la institución que prepara a las nuevas generaciones para su ingreso a la vida activa en la sociedad, no se hace cargo del factor más determinante de ésta en la actualidad. Esta creencia, y su consecuencia, "hacerse a un lado" de la responsabilidad de educar esa dimensión del saber y del saber hacer, aplicada al idioma nativo debiera conducir a que ningún niño o niña nacida en un ambiente de habla, por ejemplo, español, requiera de formación en su lengua nativa. Esto lo podemos aplicar, naturalmente, los nativos en francés, inglés o chino mandarín. ¡Es impresionante! La escuela no se hace cargo del saber y del saber hacer que más necesitarán los estudiantes de hoy al ingresar a su vida como ciudadanos activos. Los niños, las niñas y los jóvenes no saben informática, sólo saben usarla y necesitan aprender para poder ingresar en forma activa a la vida que les corresponde.

"Hay que alfabetizar a los nuevos profesores". Esta creencia es la que se manifiesta cuando las escuelas de educación –tímidamente- al comparar la medida con el impresionante impacto de esas tecnologías, agregan a sus currículos de formación inicial una componente de *alfabetización digital*. ¿Cómo decirlo? Estamos preparando el futuro de nuestros hijos poniéndolos al cuidado de personas... ¡recientemente alfabetizadas! ¿Una escuela contrata a quién conoce el ABC del campo qué más impactará las vidas de los jóvenes de hoy, para que se hagan responsables de su formación? ¡No! Se requiere de docentes que conozcan las tecnologías desde sus fundamentos. No es aprender a usar, es saber acerca de ciencias de la computación, lo que requiere alguien preparado o preparada para orientar, proveer de fundamentos y hacer crecer esos aprendizajes espontáneos, casuísticos, llenos de vacíos que admiramos tanto en los niños y niñas de hoy. Saben balbucear en el campo digital. Los que pasan de ese estadio incipiente de dominio de las tecnologías a uno superior, los que aprenden lo que hay dentro de los dispositivos digitales, los que "abren el capot" y aprenden lo que hay dentro, son los que están cambiando el mundo. Estamos dejando fuera a todos los demás.

"Basta con aprender cómo utilizar las tecnologías digitales en la enseñanza". Esta es la creencia entre los que estudian, investigan o crean desarrollos en la aplicación sistemática de las tecnologías digitales en la educación. Los especialistas en el tema en universidades y escuelas de educación. La creencia es que basta un conocimiento sobre las aplicaciones y de los dispositivos desarrollados en el campo para investigar, hacer desarrollos o teorizar acerca de las tecnologías digitales y la enseñanza y el aprendizaje (Las TIC's). En particular a los y las que lo hacen en las aplicaciones destinadas al aprendizaje de la matemática. ¡Totalmente en desacuerdo! Para responder a los desafíos que esas tecnologías hacen a todos, se requiere de un campo de conocimiento más fuerte que el que actualmente se da a los futuros docentes. Es un campo que exige a los que trabajen en él adentrarse en las ciencias de la computación y las comunicaciones con una profundidad y con una formación que permita y aliente la producción de sistemas y de aprendizaje acerca del impacto de esos sistemas. La expresión "TIC" no es suficiente, es más, tiende a minimizar lo que debiera ser su contenido. Por ahora prefiero hablar de tecnologías digitales y comunicaciones en el aprendizaje o en la educación.

"La matemática que requiere un ciudadano de hoy es la misma que requería un egresado de la escuela antes del desarrollo de las tecnologías digitales". ¡Desastre! Por ejemplo, ¡seguimos haciendo crueldades y expulsando jóvenes de la escuela con problemas de fracciones que nadie usa! Muchos de los problemas que enseñamos en que intervienen fracciones sólo se usan en la escuela. ¿Cómo enseñar una introducción al cálculo si todos los alumnos tienen acceso –mediante sus teléfonos- a una aplicación que tiene resuelta la parte mecánica de los procesos de cálculo de límite, derivadas e integrales? Es más, no sólo hace los cálculos si se lo pide lo hace paso a paso, si se lo desea muestra una enormidad de problemas relacionados con el cálculo que solicita el usuario. Crear soluciones en el campo de las aplicaciones educacionales de la informática requiere de especialistas con conocimiento profundo de la matemática y de las ciencias de la computación. Wolfram, (2014), afirma que, a la luz de las tecnologías digitales actualmente disponibles, el 80% de los currículos de matemática son cuestionables.

"Es cuestión de técnicos, -y aún peor- de tecnólogos". Una creencia arraigada en quienes dirigen instituciones educacionales y, naturalmente, docentes y directivos docentes. ¡Nefasta creencia! Nos deja fuera del conocimiento que lidera los cambios en la sociedad. El año 1985 pedí audiencia con el director de la Oficina Regional de la UNESCO con el propósito de proponerle una política regional para la incorporación de las tecnologías digitales y las comunicaciones en los sistemas educativos de la Región. Me mandó a hablar con el técnico que mantenía la red telefónica y los computadores personales de los investigadores. Es un "tema de técnicos" no un poderoso agente creador de cultura. Y, naturalmente, el saber de las ciencias de la computación sigue ajeno a la formación de los docentes y de los currículos nacionales.

Y, claro, también se nos quedan fuera las habilidades matemáticas y la vida misma

"Junto con su bicicleta –que amarra a un caño al ingresar a la escuela- el niño amarra sus anhelos, su fantasía, sus amores, su vida, para asistir a clases y luego recuperar todo eso al desatar su bici y regresar a casa, a su vida".
Nadja Antonijevic[10]

Los currículos matemáticos nacionales (Ruiz, 2018) ponen un cuidado especial en relevar las habilidades matemáticas que se espera demuestren los estudiantes, se las expresa en formas algo diversas, pero casi todas esas expresiones llevan a resolución de problemas, argumentación, comunicación, representación o la capacidad para usar diferentes registros o formas para expresar ideas y procedimientos matemáticos y la habilidad o habilidades implicadas por el modelamiento.

Y no son sólo los investigadores o gestores de los currículos, también desde la escuela, desde las prácticas se levanta la misma pregunta: "*¿Cómo promover cooperativamente el desarrollo del pensamiento y de las habilidades de orden superior?*" En el contexto de un

[10] Psicóloga, la misma que acuñó la expresión "*Selección, versus cultivo de talentos*" al comentar mi conferencia inaugural de las quintas Jornadas Nacionales de Educación Matemática en 1995 en la Universidad de Santiago de Chile y me puso en contacto con los trabajos de Bateson. Una oportunidad para hacer este reconocimiento.

cuestionamiento aún más general. "*¿Cómo transformar la vieja idea de escuela hacia una entidad educativa que pretende un cambio sustancial en la experiencia del aprendizaje?*" (Figueroa-Ruiz, 2019, pp. 178 -179).

Ha sido difícil que las prácticas escolares reflejen esta política. Las pruebas estandarizadas, en su forma de pruebas de selección o nacionales, han sido señaladas como una barrera para la incorporación de las habilidades en la enseñanza de la matemática. ¿Qué supuestos o creencias pueden también estar entre las causas de esta ausencia?

Posibles creencias: las habilidades matemáticas son un resultado, un efecto del aprender matemática, en consecuencia, basta con enseñar matemática, con "pasar la materia".

El sentido y las razones de porqué aprendemos son de los factores más determinantes de lo que sucederá con un aprendizaje. Y, el sentido lo da la conexión con la vida, con los afectos, con los amores. Pasión, es la que caracteriza a los y las educadoras que todos recordamos. Que recordamos por lo que nos significaron. El momento que tomamos contacto con algo nuevo, el sentido y las razones para aprender son cruciales. Regresando el anónimo chino, "Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo".

La matemática es abstracta y es crucial que el que la aprende, aprenda en la abstracción. "The pattern that connects" dice Bateson. Eso es lo que descubre el que "hace matemática". Ese patrón detrás de otras realidades se le oculta al que aprende "de memoria". Del que aprende "para la prueba".

Las conexiones, las emociones, la historia, aquello que le da al conocimiento matemático su sentido, que lo ancla en nuestra memoria con sus raíces, su historia, que nos muestra sus consecuencias y, por lo tanto, lo conecta con la vida, no es un resultado espontáneo de aprender matemática. Es consecuencia de una experiencia matemática rica conectada con la cultura en la que esa matemática fue y es creada. Vale la pena que los formadores de maestros en matemática conozcan y deseablemente apliquen la enseñanza señera de Félix Klein.

¿Cuáles son las condiciones para que el lugar y la situación que la escuela ofrece a sus estudiantes sea un espacio en el que se pueda experimentar la sorpresa, la búsqueda, la libertad para explorar y equivocarse, para regresar sobre sus pasos, para, en definitiva, poner a prueba sus propias ideas…el espacio y las condiciones que Fröebel soñó como kindergarten?

4. En síntesis, ¿hacia dónde? ¿Cuál es el mensaje?

Vivimos un momento en la historia de la humanidad en la que el sueño de la biblioteca de Alejandría se hace realidad en casi todas partes y está al alcance de cada vez más personas. Ampliándose el acceso tanto en la vertical, desde muy pequeños a muy viejos, como en la horizontal, desde los que tienen amplio acceso a los bienes de la sociedad y la cultura, a los que están lejos de esos bienes. Este acceso, por sí sólo, es un desafío importante a la labor y al mismo sentido de la escuela, de la clase de matemática y de la profesión docente.

La disponibilidad de los recursos hace pensar lo que Travers y Lavanderos (2015) apuntan como una tendencia *que desplaza la educación hacia el aprendizaje* y a las universidades y centros de educación superior a transitar desde el campus a la certificación.

El impacto de estas transformaciones no se ha hecho esperar, existen los que responden desde dentro de las paredes del sistema educativo. Finlandia se aparta del concepto de asignatura, por lo menos en los últimos niveles, propone un currículo con base en proyectos. La prensa también muestra lo resistida que ha sido esta medida por parte de docentes y apoderados. Varias escuelas jesuitas de España hicieron noticia hace un semestre al hacer lo mismo. Es más, modificaron el concepto de grupo-curso, hasta derribando los muros de sus salas de clase para disponer de espacios amplios que acogieran grupos de carácter variable, definidos en función de los proyectos abordados.

En una experiencia aún más disruptiva a la vez que inspiradora, el físico indio Sugata Mitra, trabajando simultáneamente en India y en Inglaterra, abrió un espacio al auto aprendizaje. Con base en su experiencia: "Una ventana en el muro" (Hole in the Wall o HIW. El Agujero en la Pared por sus siglas en inglés) que le valió un reconocimiento internacional, propone y está siendo puesto en práctica en nueve países, una escuela que se basa en la curiosidad de los niños, el acceso a la "nueva Biblioteca de Alejandría", la capacidad que tiene un conjunto de mentes para transformar en conocimiento la información y la participación de los adultos –incluidos los abuelos y abuelas jubiladas o no, pero en su casa- en unas pocas funciones: la primera, *hacer buenas preguntas*, la segunda –muy difícil para un docente- *no responderlas*, la tercera, -Sugata Mitra es muy original-: *admirar* lo que sus alumnos entregan como resultado de sus búsquedas. En la actualidad trabaja en un proyecto para tener una "Escuela en la Nube". La experiencia hace pensar: *Grupos de niños, con acceso a la Internet, pueden aprender casi cualquier cosa por ellos mismos*. Una inspiración para los que crean currículos, los criterios para seleccionar un tema, conocimiento o saber hacer para incluirlo en un currículo. Propone tres filtros: ¿Cómo contribuye –*el tema o conocimiento- en la felicidad?, ¿cómo lo hace en lasalud?* Y, por último, *¿cómo contribuye en la productividad?* Si nuestra preocupación es la pertinencia de un objetivo educativo, he aquí criterios para poner a prueba la pertinencia de un objetivo educacional (Mitra, 2015).

Las experiencias citadas, cuestionan los supuestos que sustentan los conceptos prevalentes de calidad y equidad en la educación. ¿De qué modo? Para Pasi Sahlberg, en Finlandia, la evaluación -la definición operativa de calidad- queda en manos de los docentes, afirma que el modo de supervisión y de evaluación que usan los países más desarrollados, seguido por una mayoría de otros países, modo que tiene en su núcleo pruebas estandarizadas centralmente creadas y administradas, destruye la confianza en los docentes (Sahlberg, 2011 p. 125). Finlandia apuesta por potenciar a sus docentes y a pruebas estandarizadas muestrales que sirven de referencia. Se cambia el supuesto, de desconfianza en los actores a la confianza en sus capacidades y formación. Y, ¿los supuestos tras la noción de equidad? La existencia de un currículo nacional único se sustenta en la convicción que es la forma de ofrecer igualdad de oportunidades. La Escuela en la Nube, descoloca esta visión. En esta propuesta el currículo deja de ser una colección de respuestas para ser un conjunto de preguntas. Incluso en la generación de esas preguntas, le da un papel protagónico a los actores, alumnos, docentes y tutores. De paso, un currículo basado en preguntas apunta a la formación de las habilidades necesarias para crear conocimiento. ¡Claro!, un currículo único es una necesidad si la calidad se mide con un instrumento para todos. Si, como en Finlandia, ese no es el caso, diferentes caminos, diferentes currículos, no sólo son posibles, sino que necesarios.

El propósito del análisis realizado en estas líneas fue buscar supuestos, creencias, convicciones que pudiesen explicar o estar en la raíz de prácticas escolares que no responden a lo que sabemos de didáctica, que no entregan una visión crítica y conectada de lo que es la matemática, que no responden a la necesidad que tiene la sociedad actual de tener ciudadanos que puedan participar activamente en la construcción del espacio simbólico digital que caracteriza el momento por el que atraviesa la humanidad y que sigue centrada en contenidos, sin atender a las habilidades que harán que la matemática esté viva en la vida de todos.

Cada una de las creencias enunciadas, puede ser transformada en posibles principios o formatos de acción diferentes. Muchas de las implicaciones apuntan a una modificación sustancial del contenido y la forma en que aprenden matemática, didáctica y ciencias de la computación los futuros docentes. Para cerrar, algunos cambios que sugiere el análisis.

De centrarse en las variables de entrada, escuchar, atender, leer, movernos a variables de salida: expresar, escribir, diseñar, programar, pintar. De atender a "hago y comprendo", apartándonos de "escucho y olvido", pasando por "veo y recuerdo". Lo que aprendemos para la prueba, ya cumplió su objetivo, podemos olvidarlo y de hecho lo olvidamos. Lo que creamos y, más aún, de lo que nos hacemos responsables, se aprende para la vida.

De pensar que la epistemología es cuestión de filósofos a lograr una formación de los futuros docentes en matemática que releve su significado, su sentido, su historia y sus impactos en la cultura y la vida.

De creer que niños y niñas saben computación antes de ingresar a la escuela, hacerse cargo de que no saben nada de informática ni de qué y cómo está hecha la tecnología digital. Del mismo modo que hablan, se comunican y usan de manera muy eficiente su lengua materna, pero no saben cómo crear una novela o un poema. Consecuentemente, formar a los futuros docentes en ciencias de la computación y pensamiento computacional para que puedan acompañar activamente a sus alumnos en el ingreso a la sociedad del conocimiento.

De una formación inicial docente que prepara para dictar clases, dar tareas y evaluar sobre la base de preguntas decididas por el adulto, transitar a una formación de docentes con capacidad para diseñar espacios de aprendizaje en los que se den las matemáticas que se desea los estudiantes aprendan. Espacios en los que las decisiones sean tomadas por los adultos en la creación y mejoramiento de esos espacios y que las decisiones acerca del aprender sean realizadas por los que aprenden matemática y necesitan aprender a decidir.

De tener currículos cargados de contenidos que mantienen a los docentes permanentemente retrasados y tensos por "pasar la materia", a encontrar una organización escolar en la que investigar, poner a prueba ideas, regresar creativamente sobre los errores, sea lo natural, lo que las pruebas de ingreso, nacionales o internacionales, esperen y propicien; que las habilidades, el saber hacer y la vida misma tengan cabida en la sala de clases y "entren para la prueba".

Y, considerando los supuestos que le dan forma a las políticas de supervisión de los sistemas educativos -fuerzas poderosas para sostener el modelo de escuela imperante- podrían facilitar el cambio, dar espacio a la innovación si transitaran de la desconfianza a la confianza, de un currículo único -obligado porque las barreras a sobrepasar son también únicas- a diferentes caminos respondiendo a la variedad de talentos. Pasando, el currículo, a ser preguntas más que respuestas previamente formuladas. Son los supuestos que yacen en lo profundo del concepto de calidad de la educación los que requieren de explicitación y revisión. Es el concepto de calidad de la educación el que se traduce en mecanismos de supervisión y control. ¿Cuál es el espacio para la innovación, el cambio, la evolución del modelo escolar que dejan los mecanismos de supervisión y control?

La escuela es una de las instituciones más poderosas, más extendidas y con mayor impacto de entre todas las instituciones de nuestra sociedad. El formato que tiene la institución hoy no ha evolucionado en la misma dirección que lo han hecho las necesidades y aspiraciones de las generaciones jóvenes. Simplemente su estructura apunta en una dirección diferente a la que señalan los esfuerzos de reforma que se hacen eco de esas necesidades y aspiraciones. Este es un llamado de atención par remirar las bases en las que se sustenta la institución en la que se da la formación matemática de niños, niñas y jóvenes.

¿Es posible que cambie la clase de matemática? ¿Es posible que cambie el modelo imperante de escuela? (ver Anexo) ¿Es posible un cambio de paradigma en las escuelas de formación de docentes? Por último, podemos enunciar la pregunta de fondo de estas páginas siguiendo a Sugata Mitra: "*No hay que pensar en desmantelar el sistema antiguo y construir uno nuevo, hay que permitir que el sistema antiguo evolucione*"[11] y regresar al pensamiento de Gregory Bateson con que iniciamos el análisis, *"Las preguntas una vez formuladas buscan activamente sus respuestas"*.

¡Dejad que las águilas vuelen!

Referencias y bibliografía

Bateson, G. (1972). *Steps to Ecology of Mind: Collected Essays in Anthropology, Psychiatry, Evolution, and Epistemology*. Chicago, USA: University Of Chicago Press.

Davis, P. y Reuben H. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston, USA: Penguin Books.

Heiland, H. (1993). *FRIEDRICH FRÖBEL (1872-1852). Perspectivas: revista trimestral de educación comparada* (París, UNESCO: Oficina Internacional de Educación), vol. XXIII, nos 3-4, 1993.

Kilpatrick, J. (2016) en el prefacio de Klein, Felix (2016). Elementary Mathematics from a Higher Standpoint Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Berlín: Springer.

Lagos Garay, G. (2004). Gregory Bateson: un pensamiento (complejo) para pensar la complejidad. Un intento de lectura/escritura terapéutica. *Polis / Revista Latinoamericana, Número* [en linea], 3(9). Disponible en: <**http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30500918**> ISSN 0717-6554

[11] En una entrevista durante su visita a Chile en 2018. **https://www.elmostrador.cl/cultura/2018/01/25/experto-educativo-indio-debemos-preparar-a-los-ninos-para-el-mundo-de-dentro-de-30-anos/**

Mitra, S. (2015). *How to Bring Self-Organized Learning Environments to Your Community*. Newcastle University. Disponible en: **https://s3-eu-west- .amazonaws.com/school-in-the-cloud-production-ssets/toolkit/SOLE_Toolkit_Web_2.6.pdf**.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y Pruebas Nacionales para un currículo de Matemática que enfatiza Capacidades Superiores*. Ciudad de México, México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Sahlberg, P. (2011). *Finnish Lessons. What can the world learn from educational Change in Finland?*. New York, USA: Teachers Press.

Steen, A. (Ed)(1990). *On the shoulders of Giants: new approaches to numeracy*. Washington, DC, USA: National Academy Press.

Travers, K. y Lavanderos, L. (2015). *From Manufacture to Mindfacture: A Relational Viable Systems Theory*. Pensilvania, USA: IGI Global, Hershey.

Wolfram, C.(2014). Let's Fix Maths Education. Solve Today's Classroom. Crisis with Computer-Based Maths. Disponible en **http://www.computerbasedmath.org/?source=footer**

ANEXO

¿Puede ser reformada la escuela? La pregunta tiene sentido si se observa cuál ha sido el destino de una cantidad enorme de "reformas" que agitaron las aguas de la institución escolar, para que a la larga "Todo cambiase para seguir igual", para traicionar una vez más al autor del Gato Pardo. La pregunta llevó, al autor a la idea de buscar la axiomática, los pilares conceptuales en los que descansa –en el completo sentido de la palabra– esta institución.

Una fábula con la que desafié durante años a mis alumnos, futuros profesores de matemática y computación.

> Si los habitantes de un planeta que no tiene escuela – tal como la conocemos nosotros – le ofrecen un contrato para generar escuelas "tal como en la Tierra", usted sólo tiene que llevarse cuatro ideas, ponerlas a funcionar y todo el resto se reproducirá por sí solo, como consecuencia de estos cuatro pilares de la escuela que conocemos. (Por escuela que conocemos nos referimos, nuevamente, a escuelas elementales, liceos o colegios secundarios, institutos y hasta universidades si no consideramos los programas de postgrado que escapan al paradigma). Sólo cuatro ideas, sólo cuatro pilares bastan para que la escuela sea tal como es y quede instalada de forma que resista todo intento de reforma.

¿Cuáles son esas ideas tan poderosas?, ¿Cuál es la axiomática en la base del concepto de escuela?

La primera, el concepto de *grupo curso*. Lo que supone es que un grupo de niños, jóvenes o personas en general son considerados como iguales, que aprenden al mismo tiempo y que tienen las mismas motivaciones, los mismos intereses y experimentan necesidades iguales. La segunda, es la *confusión entre situación de aprendizaje con clase expositiva*, eminentemente verbal y con muy poca participación del estudiante". La tercera es el supuesto que el conocimiento viene en compartimentos estancos, sin comunicación entre sí, sin interacciones o interdependencias, se refiere al *poderoso e inamovible concepto de asignatura.* Y, la cuarta, es la que hace sistema, la que aglutina lo que las otras no hayan logrado, *es la perfecta confusión entre evaluación y calificación, la nota*[12]. Entre más nota sea la evaluación, menos de evaluación tendrá y será la variable que todo lo decide. Los puntajes de las pruebas nacionales se asimilan bastante bien, logran una perfecta separación entre los procesos y el resultado, de modo que las podemos considerar la versión sistémica de la nota del cuaderno de clases.

La ironía nada engendra, pero en esta materia no la pude evitar. Sólo la uso para dar énfasis al argumento. En forma más ponderada diríamos que en un sistema u organización en los que se ponen en juego las nociones de: grupo de alumnos tratados como iguales, exceso de palabras o de actuación de los docentes; materias desintegradas repartidas en un horario - consecuencia de la noción de grupo curso combinada con la de asignatura – y la nota como única motivación y modo de monitoreo de los resultados, se tiene consecuencias muy profundas.

[12] Ahora se han agregado los puntajes en pruebas estandarizadas y los rankings.

Son tan profundas, que he llegado a la convicción de que, si un movimiento que se llama a sí mismo reforma no cambia algunos de esos pilares, no será reforma, ya que las condiciones que se pretende modificar prevalecerán a cualquier otra medida que se aplique en el sistema. Y, a la inversa, la experiencia muestra que cualquiera que trate de modificar esos pilares se estrella con el sistema y es expulsado junto con sus intentos de cambio.

Siguiendo con la fábula, se puede pensar que los arquitectos de ese planeta reinventarían las salas de clases como los paralelepípedos rectos rectangulares que conocemos; que los administradores reproducirían la práctica de contratar profesores que serían puestos frente a los estudiantes en esas salas. El libro de clases, y hasta las pruebas nacionales e internacionales podrían ser prácticas que apareciesen con el tiempo.

El modelo de escuela que usamos encontró sus límites. El modelo que se basa en las nociones –o prácticas- de asignaturas aisladas las unas de las otras, grupo curso, clase expositiva y que equipara evaluación con notas, tiene límites y esos límites están sobrepasando lo que la sociedad está dispuesta a aceptar.

Se trata de un modelo que no vemos, por estar inmersos en él, pero no por no verlo es menos fuerte y... ¡tiene consecuencias!

Otro pensamiento inquietante, que surge con naturalidad al mirar la situación desde el ángulo que hemos adoptado, se refiere a la investigación en el campo. En efecto, cabe preguntarse ¿Cuánta investigación acerca del aprender y del enseñar ha sido hecha bajo la campana de un modelo único de escuela? Piense en la investigación acerca de las prácticas docentes, acerca de las relaciones alumno profesor, acerca del clima organizacional, acerca del impacto de determinadas formas de enseñar, la lista puede ser larga. ¿Se sostienen sus supuestos y por lo tanto sus conclusiones si levantamos la tapa del modelo escolar? Por momentos podemos haber estado haciendo "ciencia" sobre un modelo –lo que sugiere que puede haber otros modelos– o simplemente generalizando dentro de límites que no percibimos y que no fueron explicitados al realizar la investigación.

Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade[1]

Alessandro Jacques Ribeiro

Resumo

A literatura tem indicado a carência de pesquisas que se proponham a investigar e a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores para o ensino de álgebra na escola básica. Com isso, temos desenvolvido estudos que tematizam e consideram a aprendizagem profissional do professor como sendo construída na prática da sala de aula e a partir dela, e que essa aprendizagem é mediada por tarefas de aprendizagem profissional, por interações discursivas e pelo papel e as ações do formador durante processos de formação. O presente artigo visa apresentar e discutir resultados de investigações (i) sobre à aproximação da matemática escolar e da matemática acadêmica e (ii) sobre a presença e a interlocução da prática como um componente essencial nos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores para o ensino de álgebra, da escola básica à universidade.

Palavras-chave: aprendizagem do professor, ensino de álgebra, matemática universitária e matemática escolar, formação de professores.

Abstract[2]

The literature has indicated the lack of research that aims to investigate and unveil what is the genesis of teacher professional learning for the teaching of algebra in primary school and how it is constituted. With this, we have developed studies that thematize and consider the teacher's professional learning as being built on and from the classroom practice, and that this learning is mediated by professional learning tasks, discursive interactions and the role and actions of the trainer during training processes. This paper aims to present and discuss research findings (i) on the approximation of school Mathematics and academic Mathematics and (ii) on the presence and dialogue of practice as an essential component in teacher mathematical and didactic knowledge for teaching algebra, from primary school to university.

A. J. Ribeiro
Universidade Federal do ABC (UFABC), Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de junio de 2019 y aceptado el 20 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 117–129. Costa Rica

Keywords: teacher learning, algebra teaching, university Mathematics, school Mathematics, teacher education.

Resultados de pesquisas desenvolvidas no Brasil[3] (Alves, Aguiar, & Ribeiro, 2018; Elias, Ribeiro, & Savioli, 2019; Ferreira, Ribeiro, M., & Ribeiro, A., 2017; Lautenschlager & Ribeiro, 2017; Pazuch & Ribeiro, 2017; Ribeiro, Aguiar, & Pazuch, 2018; Ribeiro, Bezerra, & Gomes, 2017; Ribeiro & Cury, 2015) tem apontado para as especificidades dos conhecimentos e das práticas dos professores que ensinam matemática, da escola básica à universidade, no que tange ao ensino de álgebra. Tais pesquisas destacam particularidades relacionadas aos conhecimentos profissionais dos professores para o ensino de equações, funções, estruturas algébricas, bem como, para a promoção do pensamento algébrico no ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade.

Os conhecimentos profissionais (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Ponte, 1999) e a prática dos professores (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Lampert, 2010; Ponte & Chapman, 2008) inserem-se dentre dos temas amplamente investigados quando inventariamos a vasta literatura de pesquisa na formação de professores que ensinam matemática (Fiorentini, Passos, & Lima, 2016; Gellert, Hernandéz, & Chapman, 2013; Ponte, 2014; Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016). No entanto, pesquisas que se proponham a desvelar qual é e a explicar como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores (Opfer & Pedder, 2011; Webster-Wright, 2009) para o ensino de Álgebra na escola básica (McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, 2012) é uma lacuna a ser contemplada em estudos futuros.

A preocupação que justifica os esforços envidados nos estudos desenvolvidos em nossa agenda de pesquisa, emergem de resultados apontados por pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra, resultados estes que demonstram o insucesso dos estudantes na aprendizagem deste tema (Cyrino & Oliveira, 2011; Dorigo & Ribeiro, 2010; Kaput, 2008; Matos & Ponte, 2009; Stephens & Ribeiro,), ao mesmo tempo que documentam as dificuldades encontradas pelos professores no ensino de álgebra nos diferentes níveis escolares (Barbosa & Ribeiro, 2013; Doerr, 2004; Pazuch & Ribeiro, 2017; Ponte & Branco, 2013; Ribeiro, 2012; Ribeiro & Cury, 2015; Ribeiro & Oliveira, 2015; Wasserman, 2015).

Em complemento à problemática que se constitui, quando se atua na e se investiga a formação de professores que ensinam matemática, um dos grandes desafios a ser superado é o distanciamento entre a matemática ensinada nos cursos de formação inicial de professores e as práticas matemáticas efetivamente relacionadas à atuação na escola básica (Klein, 2004). Em nosso grupo de pesquisa, temos nos debruçados sobre questões desta natureza, por exemplo, nos trabalhos de Elias, Ribeiro e Savioli (2019), de Lautenschlager e Ribeiro (2017), e de Ribeiro e Oliveira (2015).

Assim, o objetivo deste artigo é apresentar e discutir resultados de pesquisas que problematizam a aprendizagem profissional do professor para o ensino de álgebra, da escola básica

[3] *"FORMATE - Formação Matemática para o Ensino"*, grupo de pesquisa credenciado no CNPq e que desenvolve pesquisas sobre conhecimentos profissionais do professor de matemática. Disponível em 13 mar. 2019, em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>

à universidade, pesquisas estas desenvolvidas ao longo dos últimos anos e, em especial, em um projeto de pesquisa[4] longitudinal envolvendo professores, formadores e pesquisadores da área da Educação Matemática.

1. Fundamentos teóricos

Ao retomar o objeto de estudo de nosso grupo, quer seja, a aprendizagem profissional dos professores, nota-se que tal temática tem sido estudada, discutida e investigada há vários anos (Opfer & Pedder, 2011). Dentre os resultados de estudos sobre a temática, no campo da Educação Matemática, emergiu uma perspectiva de aprendizagem profissional de professores fortemente ancorada na prática da sala de aula (Ball & Cohen, 1999; Lampert, 2010; Ponte & Chapman, 2008; Smith, 2001) e facilitadora de uma "aprendizagem profissional autêntica" (Webster-Wright, 2009).

Em seu estudo, Webster-Wright (2009) destaca ainda, que a formação inicial na universidade é apenas a primeira fase do processo de aprendizagem da vida profissional de muitos trabalhadores, como é o caso dos professores, uma vez que a eficácia dessa aprendizagem ocorre ao longo de muitos anos e no contexto da prática profissional. Essa visão holística sobre a aprendizagem profissional, em especial do professor, é também sustentada por Opfer e Pedder (2011), autores que defendem uma análise da aprendizagem profissional docente como um sistema complexo, e não como eventos episódicos. Neste sistema complexo inserem-se o professor, a escola e as tarefas/atividades que lhes são fornecidas para mediar a aprendizagem.

Mas como possibilitar uma aprendizagem profissional ao professor que, ao mesmo tempo, tenha início na universidade, considere a prática da sala de aula, e seja desenvolvida (e acompanhada) em sua vida profissional futura? Nesse sentido, temos buscado debruçar nossas atenções para a importância de elaborar e desenvolver oportunidades de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática dos professores, de modo a proporcionar aprendizagem profissional aos docentes ao longo de suas carreiras (Loucks-Horsley, 1997; Loucks-Horsley, Hewson, Love, & Stiles, 1998). Tal perspectiva é corroborada por Bruce, Esmonde, Ross, Dookie, & Beatty (2010), autores que discutem em seu estudo, que o ambiente da sala de aula deve ser considerado como base para construir oportunidades de aprendizagem profissional para os professores, de modo que eles se envolvam com o "uso de ciclos interativos de planejamento, desenvolvimento e reflexão [de aulas]" e que isso possibilite "conhecer como essas oportunidades de aprendizagem impactam para a eficiência dos professores e desempenho dos alunos (p. 1599)".

Fundamentado na literatura discutida até o momento, adotamos em nossas investigações, um entendimento sobre a necessidade de se considerar oportunidades para os professores aprenderem, e que em tais oportunidades sejam considerados o papel-chave das tarefas

[4] Projeto de pesquisa e de formação: *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais - COMEA"*, um projeto longitudinal, com duração de 4 anos (2013-2017), financiado pela Capes (Brasil).

de aprendizagem profissional (TAP), as quais assumimos como sendo "tarefas que envolvem professores no trabalho do ensino, podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade" (Ball & Cohen, 1999, p. 27). Vale destacar, como nos lembram Watson e Mason (2007), que há uma lacuna considerável na literatura acerca de estudos que analisem o papel das tarefas na aprendizagem dos professores, diferentemente da significativa produção relativa ao papel das tarefas na aprendizagem dos estudantes.

Em nosso trabalho de investigação, temos tomado por base um entendimento de que a aprendizagem do professor situa-se na prática diária, incluindo aí, não apenas os momentos de sala de aula, mas também de planejamento, avaliação, colaboração com colegas, entre outros (Davis & Krajcik, 2005); e que a aprendizagem do professor está distribuída entre indivíduos e subsidiadas por artefatos, como o caso de tarefas que são preparadas para sua formação (Putnam & Borko, 2000); consideramos a aprendizagem do professor como algo que:

> envolve o desenvolvimento e a integração de uma base de conhecimento sobre conteúdo, ensino e aprendizagem; tornando-se [o professor] capaz de aplicar esse conhecimento em tempo real para tomar decisões no ensino; participar do discurso do ensino; e tornar-se enculturado (e engajado) em uma variedade de práticas de professores (Davis & Krajcik, 2005, p. 3).

Atualmente, como resposta às lacunas identificadas na literatura e, ao mesmo tempo, como uma necessidade vivenciada em nosso grupo de pesquisa, temos buscado organizar um framework, que chamamos de Oportunidades de Aprendizagem do Professor (OAP) (Ribeiro & Ponte, 2020, no prelo), o qual tem por intenção se constituir como um modelo teórico-metodológico para dar apoio para (i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) identificar se e avaliar como as três dimensões do modelo geram oportunidades para os professores aprenderem durante os processos formativos. O modelo que está sendo proposto contempla, de forma articulada e interativa, as três dimensões que o compõem: (a) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), (b) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP), (c) Papel e Ações do Formador (PAF).

2. Aspectos metodológicos

Do ponto de vista da metodologia, adotamos uma abordagem qualitativa-interpretativa (Crotty, 1998; Erickson, 1986), fundamentada nos pressupostos da design-based research (DBR) (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Shaube, 2003; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). Nossas investigações inserem-se em um tipo específico de DBR (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016), o qual contribui para que professores – trabalhando em conjunto e em colaboração com pesquisadores – desenvolvam aprendizagens que lhes possibilitem implementar práticas de ensino inovadoras em suas salas de aula.

Uma vez que nossa compreensão de aprendizagem profissional dos professores está fortemente ancorada em trazer a prática letiva dos professores como uma das componentes essências das tarefas de aprendizagem profissional utilizadas nos processos formativos, certificamo-nos que tais tarefas contivessem registros da prática (Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014), como materiais curriculares, vídeos ou narrativas de episódios de aula, amostras de produção escrita dos estudantes, dentre outros. Complementando as TAP, os processos formativos que desenvolvemos são sempre mediados também pelas interações discursivas entre todos os participantes (IDP) (Nemirovsky, Dimattia, Ribeiro, & Lara-Meloy, 2005) e pelo papel a ações dos formadores (PAF) (Remillard & Geist, 2002).

Os dados foram recolhidos ao longo dos 4 anos do projeto que estamos a discutir, advém de diferentes processos formativos, foram utilizados utilizados (i) gravações em vídeo e em áudio; (ii) recolha de documentos (protocolos produzidos por alunos e professores, planos de ensino, entre outros); (iii) observação das oportunidades de aprendizagem profissional; (iv) entrevistas com professores e com formadores; (v) observação de aulas implementadas pelos professores em escolas de educação básica. O processo de análise se dá de forma indutiva e por meio de diferentes técnicas, uma vez que os dados recolhidos são de fontes múltiplas. Utiliza-se a codificação dos dados recolhidos e, de especial interesse para o escopo deste artigo, foram consideradas as *vignettes* elaboradas (Borko, Jacobs, Eiteljor, & Pittman, 2008), as quais eram compostas por episódios que emergiram dos áudios e vídeos produzidos durante as aulas ministradas em escolas de educação básica, assim como, registros escritos das reuniões da equipe do projeto.

Os participantes de nossas pesquisas são (a) professores em formação inicial e (b) professores que lecionam em salas de aula da escola básica; (c) estudantes de pós-graduação; (d) professores universitários; (e) pesquisadores. A equipe de participantes que tem atuado ao longo dos últimos anos sofreu algumas várias em sua composição, uma vez que se trata de um projeto de 4 anos, assim como, a equipe de formadores. No que se refere aos formadores, ao longo do projeto, ora a equipe era liderada por professores universitários e pesquisadores, ora por estudantes da pós-graduação em educação matemática, ora fora lideradas por professores universitários em parceria com professores da escola básica.

Apesar do caráter cíclico e iterativo de uma pesquisa do tipo DBR, por limitação de espaço do presente texto, não será possível explorar os diferentes ciclos que compuseram o estudo longitudinal, mas, para fins de ilustrar resultados que temos alcançados nos diferentes momentos de nosso projeto, serão apresentadas "sínteses" das análises e conclusões de alguns dos estudos, de modo que o leitor possa ter um panorama geral das contribuições que temos gerado para a temática das aprendizagens profissionais dos professores para o ensino de álgebra nos diferentes níveis de ensino.

3. Panorama das pesquisas do FORMATE

Com a proposta de se apresentar os principais resultados das pesquisas desenvolvidas pelo grupo FORMATE (Formação Matemática para o Ensino), no âmbito dos conhecimentos e práticas dos professores no que tange ao ensino de álgebra nos diferentes níveis de ensino, no contexto da escola pública de educação básica até o ensino universitário, a síntese que se segue coloca em discussão diferentes temáticas. Iniciamos por um estudo que desenvolveu um levantamento preliminar, de caráter "diagnóstico", no intuito de se conhecer a forma pelas quais, as avaliações de larga escala, os professores e os estudantes, concebiam a álgebra e seu ensino. Em seguida, por meio de estudos interventivos, investigou-se os processos de ensino e de aprendizagem de álgebra, dos primeiros anos de escolaridade até o ensino na universidade, levando-se em conta as diferentes temáticas da álgebra: do pensamento algébrico nos anos inicias, passando por números, equações e funções, e chegando no estudo de estruturas algébricas na licenciatura em matemática.

O primeiro estudo a destacar, identificado por *"Conhecimentos algébricos manifestados a partir das macroavaliações e das compreensões conceituais de professores e de estudantes"*, apresenta sínteses dos estudos diagnósticos realizados pelo grupo de pesquisa, os quais se relacionavam às três vertentes construídas e consideradas na pesquisa, a saber: as macroavaliações (como a Prova Brasil e o ENEM[5]); num segundo momento, os professores da Educação Básica e do Ensino Superior; finalmente, os estudantes da Educação Básica. Em sintonia com a temática da pesquisa desenvolvida pelo grupo, o intuito em cada uma dessas vertentes era identificar os conhecimentos algébricos manifestados nesses âmbitos e, no tocante aos professores, em específico, fossem do Ensino Superior ou da Educação Básica, acessar o que pensam sobre álgebra e sobre seu ensino. As análises dos dados produzidos durante essa etapa diagnóstica do projeto, possibilitaram a categorização das respostas dadas pelos sujeitos em seus respectivos contextos, tendo por base as concepções teóricas previamente estudadas pelo grupo e presentes na literatura. As análises realizadas fundamentaram ainda a construção de um Quadro Teórico de Referência (Ribeiro, Bezerra, & Silva, 2016), próprio para categorias de álgebra visando a abordagem de perfis conceituais, em acordo ao projeto que estava se desenvolvendo.

Trazendo para a discussão os números racionais e seus processos de ensino e de aprendizagem (Elias, Savioli, & Ribeiro, 2019), o segundo estudo que apresentamos é *"Tarefas de aprendizagem profissional sobre os números racionais em um curso de formação continuada de professores"*, no qual são abordados aspectos do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais na Educação Básica, buscando discutir com os professores participantes de processos formativos realizados pelo grupo, os diferentes significados dos números racionais, questões sobre o ensino e a aprendizagem desses números, bem como algumas relações com o tratamento mais formal desses números, via corpo dos números racionais. Para tanto, os encontros desses processos de formação foram planejados e desenvolvidos por meio de tarefas de aprendizagem profissional, tarefas preparadas e organizadas para atingir um objetivo específico para a aprendizagem de professores (no caso, favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais), levando-se em consideração o conhecimento prévio e as experiências que os professores traziam para os encontros. Identificou-se que esses encontros, organizados por meio de tarefas, criaram um ambiente propício para discussões e aprendizagens profissionais, no sentido de que os professores puderam explicitar seus conhecimentos acerca do conceito de número racional (Conhecimento Comum do Conteúdo), refletir sobre dificuldades

[5] A Prova Brasil e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) são avaliações de larga escala realizadas pelo governo brasileiro aos estudantes da educação básica.

de seus estudantes ao lidarem com os números racionais (Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes), debater estratégias para o ensino das operações com esses números (Conhecimento do Conteúdo e do Ensino), e relacionar os números racionais a outros conteúdos matemáticos (p.e. equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita), estabelecendo uma conexão com a estrutura algébrica corpo (Conhecimento do Conteúdo no Horizonte).

O terceiro estudo contempla reflexões sobre *"Tarefas de Aprendizagem Profissional do Professor que ensina Matemática envolvendo o conceito de equação sob a perspectiva do perfil conceitual"*. Nele são abordados o papel das Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) desenvolvidas em um processo formativo no qual se trabalhou com o conceito de equação a partir de uma abordagem de ensino diferenciada: a abordagem dos perfis conceituais[6]. Em uma das TAP em particular, os professores participantes elaboraram planos de aula para o 9º ano do Ensino Fundamental e para o 3º ano do Ensino Médio, planos estes que envolviam o conceito de equação sob a perspectiva do perfil conceitual. Os planos de aula elaborados foram analisados e selecionados pelos próprios professores participantes da formação, para que estes fossem desenvolvidos, posteriormente, em salas de aulas da Educação Básica. Essas aulas foram videogravadas e retornaram ao ambiente formativo para serem analisadas pelos professores participantes. Das análises depreendidas, a partir das discussões com os professores participantes sobre a TAP, conseguiu-se verificar a potencialidade desta TAP para a formação continuada de professores que ensinam matemática no que se refere ao conceito de equação e suas possibilidades de abordagens na Educação Básica (Alves, Aguiar, & Ribeiro, 2018).

O conceito de função foi o objeto matemático foco do quarto estudo *"Tarefas de aprendizagem profissional sobre o conceito de função: análise de uma intervenção com professores que ensinam matemática da Educação Básica"*. Nesse estudo foram apresentadas as tarefas trabalhadas com professores da Educação Básica durante o mesmo processo formativo do estudo anterior. A perspectiva a se alcançar era a de que fosse possibilitado aos professores estabelecerem relações com o conceito de função e seu ensino, ao produzirem materiais e ao debaterem aspectos de suas práticas docentes com outros professores. As quatro TAP desenvolvidas com os professores tematizaram: (1) *lista de fórmulas* (que pode ser utilizada para evidenciar conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de função e também de equação por meio da dialogicidade); (2) *questões interdisciplinares* (caracterizam a dinâmica de coletividade no ensino por meio do intercâmbio entre as Ciências da Natureza e a Matemática, com base no processo de resolução de problemas para construir o conceito de função); (3) *estudo de documentos e de exames* (proporcionou aos professores um momento de estudo das macroavaliações e dos documentos que constituem o currículo escolar, sendo também considerado um instrumento para a "prática" da escrita em Matemática), e (4) *análise de questões e resoluções de estudantes* (que diz respeito à definição de função e seus vínculos com os conhecimentos matemáticos para o ensino). Destacou-se, dentre outros resultados, que as TAP puderam contribuir para que os professores ampliassem seus conhecimentos profissionais para o ensino de função na educação básica (Ribeiro, Aguiar, & Pazuch, 2018).

[6] Para conhecer mais sobre o assunto, sugere-se a leitura de Ribeiro (2013).

Com o quinto estudo *"Ensino de polinômios na educação básica: relato de uma experiência de formação continuada de professores"*, colocou-se em discussão questões como: *Para que ensinamos polinômios nas escolas? Os conhecimentos dos estudantes e dos professores sobre os polinômios também incluem uma dimensão conceitual, ou se limita mesmo ao procedimental?* Com isso, organizou-se uma proposta de ensino que visasse discutir os polinômios adequadamente na formação dos professores, no sentido de que tais conhecimentos fossem uteis para quando o professor estivesse ensinando na Educação Básica. Com isso em mente, a partir das TAP que foram elaboradas dentro da problemática considerada, pôde-se identificar a urgência de investigações na formação continuada do professor da Educação Básica que considerem a articulação entre aspectos procedimentais e conceituais de temas da matemática da Educação Básica, como é o caso dos polinômios. Além disso, os resultados destacados pareciam contribuir na/com a elaboração de um tipo de *design* para a formação de professores, ou seja, um processo de formação continuada que contemple a necessidade de se trabalhar, com equidade, os diferentes tipos de e domínios do conhecimento profissional docente. Mereceu destaque ainda, dentre os resultados do referido estudo, que as produções dos professores que participaram do processo formativo indicavam a falta de domínio conceitual sobre os polinômios, ficando o trabalho dos professores, basicamente, em nível procedimental. Ao final, concluiu-se ainda sobre a importância de se repensar o currículo da formação de professores de matemática, de modo que seja possível a construção de "domínio conceitual" no conhecimento dos professores, de modo que estes possam ajudar seus alunos a superar uma aprendizagem puramente mecânica (Lautenschlager & Ribeiro, 2017).

Uma vez que o grupo de pesquisa FORMATE investiga os processos de ensino e aprendizagem de matemática em todos os níveis escolares, não poderíamos deixar de trazer para o debate o estudo *"Matemática nos Anos Iniciais e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico"*. Essa pesquisa desenvolveu-se a partir de intervenções propostas aos professores dos anos iniciais do ensino fundamental, tendo o Pensamento Algébrico por temática central. Discutiu-se nesse âmbito, o papel do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, tomando-se por referência a literatura da área com a finalidade que fossem identificados os principais elementos a serem considerados em uma abordagem dessa temática em salas de aula dos primeiros anos de escolaridade. As perspectivas teóricas advindas da literatura foram discutidas com professores dos anos iniciais, em um processo formativo, o qual permitiu o desenvolvimento de tarefas de aprendizagem profissional com o intuito de ilustrar e debater elementos do pensamento algébrico para os primeiros anos da escolaridade (Ferreira, Ribeiro, M., & Ribeiro, A., 2017).

4. Reflexões finais

Os estudos apresentados na seção anterior, desenvolvidos pelos membros do grupo de pesquisa FORMATE, ao longo de 4 anos, possibilitaram-nos obter um panorama longitudinal da álgebra escolar, tanto do ponto de visto do ensino, como do ponto de vista da aprendizagem. As temáticas das diferentes investigações contemplaram diversos conteúdos da álgebra escolar, desde os primeiros anos de escolaridade até o ensino superior. Isso nos permitiu estabelecer algumas conclusões que, ao serem consideradas em conjunto, levantaram outros questionamentos e, assim, retroalimentam o grupo e as questões de pesquisa que continuamos a investigar.

O estudo diagnóstico desenvolvido no início do projeto "COMEA" possibilitou ao grupo de investigadores perceber as dissonâncias entre o que se entende por "álgebra e seu ensino", ao serem considerados as avaliações de larga escala (como a Prova Brasil e o ENEM), a visão dos professores do Ensino Superior e a dos professores da Educação Básica. A dissonância se tornava ainda mais visível ao se considerar as compreensões dos estudantes da escola básica. Enquanto para uns, a álgebra é vista como uma linguagem simbólica e "bem estruturada", para outros, a mesma álgebra é um conjunto de símbolos que estão sujeitos a regras e procedimentos que permitem operar com estes. Ao se perceber as diferentes visões identificadas, o grupo decidiu por organizar um Quadro de Referência (Ribeiro, Bezerra, & Silva, 2016) sobre "o que se entende por álgebra e seu ensino", o qual favoreceu a continuidade das pesquisas, a partir daí, encaminhadas sob uma perspectiva intervencionista.

Os estudos posteriores problematizam a álgebra e seu ensino do ponto de vista da formação de professores, em especial no que se refere aos conhecimentos profissionais do professor para o ensinar matemática. Ao se colocar em discussão o conceito de número racional (Bezerra, Elias, & Souza, 2017) em um processo formativo organizado por meio de tarefas de aprendizagem profissional, os professores puderam explicitar seus conhecimentos acerca do conceito de número racional, refletir sobre dificuldades de seus estudantes ao lidarem com os números racionais, debater estratégias para o ensino das operações com esses números, e relacionar os números racionais a outros conteúdos matemáticos, favorecendo assim, uma conexão com a estrutura algébrica corpo. O estudo que contemplou o conceito de função com professores em formação inicial e continuada (Pazuch, Lima, & Albrecht, 2018), pôde identificar que o uso das TAP permitiu aos participantes estabelecer relações com o conceito de função, produzir materiais sobre o conceito de função, além de debater as práticas docentes de outros professores. O estudo que tematizou o ensino de equação (Aguiar, Alves, & Ribeiro, 2017), por meio da elaboração e desenvolvimento de planos de aulas sobre o conceito de equação em escolas de educação básica, complementado pelas posteriores reflexões coletivas entre os professores participantes do processo formativo sobre as aulas ministradas, levou os professores a, por exemplo, perceber que a escolha da turma de estudantes poderia ser repensada para o desenvolvimento da aula, já que o conhecimento prévio dos estudantes sobre o método de resolução, por exemplo, se mostrou um empecilho para alguns no desenvolvimento das tarefas propostas.

Ao se considerar os resultados dos demais estudos apresentados na seção anterior, percebeu-se que, investigar "o" e "com o" professor de matemática da escola básica, sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra, é um campo frutífero e que merecia ainda mais atenção por parte de nosso grupo de pesquisa. Com isso foi proposto, em 2018, um novo projeto de pesquisa[7], que ampliasse o escopo dos estudos anteriores adentrando na temática da aprendizagem profissional do professor que ensina álgebra nos diferentes níveis de ensino. Esse novo projeto envolve atualmente, estudantes de mestrado e de doutorado, além de pesquisadores de diferentes universidades brasileiras, além de parceria com a Universidade de Lisboa, e tem como proposta *compreender como se constitui e explicar como se desenvolve a aprendizagem profissional do professor de matemática no que tange ao ensino de Álgebra*. Assim, ao se entender a aprendizagem profissional do professor construída na prática da sala de aula e a partir dela, e que essa aprendizagem é mediada por tarefas de aprendizagem profissional (TAP), por interações discursivas entre os participantes e pelo papel e as ações do formador durante um processo de formação, espera-se alcançar, dentre dos resultados do projeto, contribuir para (i) aproximar a matemática escolar e a matemática acadêmica e (ii) favorecer a presença e a interlocução da prática como um componente essencial nos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores.

Referencias y bibliografía

Alves, K. A., Aguiar, M., & Ribeiro, A. J. (2018). As dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática: o *knowledge quartet* como ferramenta de análise da prática docente. *Acta Scientiae*– ULBRA, Canoas, 20, 22-42.

Aguiar, M., Alves, K. A., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento Profissional Docente e o Ensino de Equação: Uma reflexão baseada na prática. In: VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM), 2017, Madrid. *Anais VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática*. Madrid: SMPM, 1 - 8.

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, 62(3), 317-335.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbosa, Y. O. & Ribeiro, A. J. (2013). Multisignificados de equação: Uma investigação acerca das concepções de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 15*, 379-398.

Bezerra, F. J. B., Elias, H. R., & Souza, D. D. (2017). Conhecimento matemático para o ensino dos números racionais: discussão na/da formação de professors. In: Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 7. Madrid. *Anais VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática*, Madrid.

Borko, H., Jacobs, J. K., Eiteljor, E., & Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24, 417-436.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L., & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education*, 26, 1598-1608.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Shaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

[7] Projeto de pesquisa *"Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: um estudo envolvendo os contextos da escola básica e da universidade"*, financiado pela FAPESP (processo 2018/14429-2).

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24*(1), 249-305.

Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: meaning and perspective in the research process*. London: Sage.

Cyrino, M. & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema, 24*(38), 97-126.

Davis, E. A. & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34*(3), 3–14.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). Boston, MA: Kluwer,

Dorigo, M. & Ribeiro, A. J. (2010). Significados de equação: um estudo realizado com alunos do Ensino Médio. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 3*, 154-182.

Elias, H. R., Ribeiro, A. J., & Savioli, A. M. P. D. (2019). Epistemological Matrix of Rational Number: a Look at the Different Meanings of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI: 10.1007/s10763-019-09965-4

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In: Wittrock, M. C. (Org.). *Handbook of research on teaching*. New York, NY: MacMillan, pp. 119-161.

Ferreira, M. C. N., Ribeiro, C. M., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké* (on line), 25, 494-511.

Fiorentini, D., Passos, C. L. B., & Lima, R. C. R. (Org.). (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática*: Período 2001 a 2012. 1. ed. Campinas: FE-Unicamp, v 1, 488p.

Gellert, U., Hernandéz, R. B., & Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. In: Clements, M. A. et al. (Ed.). *Third international handbook of mathematics education*. New York, NY: Springer, 327-360.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*. Mineola, NY: Dover. (Reimpressão de 1932)

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education, 61*(1-2) 21–34

Lautenschlager, E. & Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. *Educação Matemática Pesquisa*, 19, 237-263.

Loucks-Horsley, S. (1997). Teacher change, staff development, and systemic change: Reflections from the eye of the paradigm. In S. N. Friel & G.W. Bright (Eds.), *Reflecting on our work: NSF teacher enhancement in K-6 mathematics* (pp. 133–150). Lanham, MD: University Press of America.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Matos, A. S. & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, Itália, Supplemento n.2 al n. 19.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Nemirovsky, R., Dimattia, C., Ribeiro, B., & Lara-Meloy, T. (2005). Talking about teachers episodes. *J Math Teacher Educ, 8*, 363-392.

Opfer, V. D. & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research, 81*(3), 376-407.

Pazuch, V. & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa, 19*, 465-496.

Pazuch, V., Lima, C. M., & Albrecht, E (2018). Conhecimentos mobilizados por professores que ensinam matemática e o conceito de função na educação básica. *Revista Eletrônica de Educação* (São Carlos), 12, 361-379.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72), Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: Ponte, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IE/UL, 343-358.

Ponte, J. P. & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista, 50*, 135-155.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77-98.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: English, L. D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed. pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Putnam, R. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4–15.

Remillard, J. T. & Geist, K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, p. 7-34.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema, 26*(42), 535-557.

Ribeiro A. J. (2013). Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática*. Ciência & Educação, 19*(1), p. 55-71.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Pazuch, V. (2018). O uso de vídeos em um processo formativo sobre o ensino de álgebra. In: Silva, R. S. R. (Org.). *Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas*. Porto Alegre, RS: Fi, 213p.

Ribeiro, A. J., Bezerra, F. J. B., & Gomes, V. M. S. (Org.). (2017). *Formação de professores que ensinam Matemática e a Álgebra da Educação Básica: um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC no âmbito do Observatório da Educação*. 1. ed. Campinas/SP: Leitura Crítica, v. 01. 200p.

Ribeiro, A. J., Bezerra, F. J. B, & Silva, R. L. (2016). Mapeamento de concepções de Álgebra: uma alternativa para compreender seus diversos significados. *Acta Scientiae, 18*(2), 419-434.

Ribeiro, A. J. & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, A. J. & Oliveira, F. A. P. V. S. (2015). Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. *Zetetiké, 23*(44), 311-327.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae* (ULBRA), 21, 49-74.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020, no prelo). Um modelo teórico para organizar e compreender oportunidades de aprendizagem do professor para ensinar matemática.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesk-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, 48(1), 1-27.

Stephens, M. & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *RELIME, 15*, 307-401.

Wasserman, N. H. (2015). Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro-and macro-levels of mathematical complexity. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 75-93.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 205-215.

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research, 79*(2), 702–739.

¿Es la excelencia matemática una prioridad curricular?[1]

José Luis Lupiáñez Gómez

Johan Espinoza González

Resumen

La formación y el desarrollo de los estudiantes diagnosticados con talento matemático o con altas capacidades, constituyen uno de los valores más importantes que un sistema educativo puede brindar a la sociedad, debido a la excelencia y el alto desempeño que pueden alcanzar estos estudiantes al llegar a un ámbito laboral. Sin embargo, en muchas ocasiones adolecen de fracaso escolar debido a la falta de directrices curriculares, de dinámicas de aula o de formación del profesorado. En este trabajo se caracterizará la noción de talento matemático, ejemplificando las habilidades que pueden desarrollar y describiendo posibilidades de diagnóstico.

Palabras clave: talento matemático, altas capacidades, procesos de diagnóstico.

Abstract

The education and development of students diagnosed with mathematical talent or with high abilities, constitute one of the most important values that an educational system can provide to society, due to the excellence and high performance that these students can reach when they reach a work environment. However, in many cases they suffer from school failure due to the lack of curricular guidelines, classroom dynamics or teacher training. In this work the notion of mathematical talent will be characterized, exemplifying the skills that can be developed and describing diagnostic possibilities.

Keywords: mathematic talent, high abilities, diagnostic processes.

Varios estudios se han propuesto precisar y clarificar el término talento con el propósito de hacerlo más operativo para la investigación (Benavides, 2008). Esto, porque existe una gran diversidad de concepciones para referirse a este concepto: superdotados, altas capacidades, talentosos; encontrándose más de 100 definiciones de talento y sus sinónimos (Villarraga,

J. L. Lupiáñez
lupi@ugr.es
Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España

J. Espinoza
johan.espinoza.gonzalez@una.cr
Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por los autores en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

Recibido por los editores el 15 de junio de 2019 y aceptado el 28 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 130–138. Costa Rica

Martínez y Benavides, 2004). Al respecto, Gagné (1995 y 1993), citado en Benavides (2008), propone el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento para distinguir los conceptos de superdotación y talento.

Para Martínez y Guirardo (2010) la superdotación se conceptualiza como un perfil donde el sujeto presenta un nivel elevado de razonamiento lógico, creatividad, memoria, que le posibilita una producción eficaz en cualquier ámbito o tarea, mientras que el talento hace referencia a una elevada aptitud en un ámbito o tipo de información. Además, el superdotado se caracteriza por un nivel elevado de varias aptitudes que puede combinar para obtener un resultado que va más allá de la simple suma de las habilidades, distinguiéndose no solo cuantitativamente, sino cualitativamente por la calidad de sus producciones (Ramírez, 2012).

Por tanto, la superdotación se refiere a la posesión de habilidades naturales en alto grado, que son espontáneas e innatas y que se presentan en al menos un dominio de habilidad; en contraste, el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, la superdotación se asocia a actividades intelectuales y al talento a destrezas y aptitudes más específicas.

Centrándonos en el talento el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua propone cinco concepciones con respecto a este término. El primero de ellos se refiere a una persona inteligente con capacidad de entender. La segunda se relaciona con una persona apta, con capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación. La tercera definición es una unión de la primera y segunda, ya que la concibe como una persona inteligente o apta para una determinada ocupación. La cuarta acepción, que corresponde a una definición original del término, concibe el talento como la moneda de cuenta de los griegos y romanos.

El talento también es referido a un conjunto de destrezas y habilidades que le permiten a un individuo dominar un área concreta del saber, de modo que la característica principal del talentoso es su especificidad (Prieto y Catejón, 2000). De igual forma, Clark (1997), citado en Díaz, Aleman y Hernández (2013) propone que un sujeto con talento presenta una distinción en algún campo particular, por ejemplo, música, artes y matemática, etc. Lopez-Andrada, Beltrán, López-Medina y Chicharo (2000), también hacen referencia a este concepto y sostienen que los estudiantes con talento muestran habilidades específicas en áreas muy concretas.

Además, el Departamento de Educación de los Estados Unidos (USOE), plantea la siguiente concepción de los sujetos con talento:

> Los niños talentosos y sobresalientes son los que, identificados por profesionales calificados, manifiestan la virtud de habilidades extraordinarias y son capaces de dar un alto rendimiento académico. Ellos requieren programas educativos diferenciados o servicios más allá de los normalmente brindados por programas regulares de trabajo escolar, para potenciar su contribución a sí mismos y a la sociedad. (Renzulli, 1996, p. 15)

Otros autores consideran que el talento es una posibilidad de logro que es potencialmente inherente a todo ser humano, por lo que se desarrolla en cualquier momento de la vida de acuerdo con las habilidades de cada ser humano (Huamán, 2006), citado en Reyes-Santander y Karg (2009). Al respecto Villarraga et al., (2004), distingue entre talento actual y talento potencial. El primero se refiere al ya desarrollado y evidenciado por un sujeto talentoso; mientras que el segundo al que aún no se ha desarrollado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos.

Ramirez (2012) hace un análisis sobre la posible interrelación entre las características de la aptitud matemática que proponen los estudios de Greenes (1981), Miller (1990) y Freiman (2006) y afirma que de ellas se deduce que este constructo ha sido definido en términos de superioridad en procesos matemáticos. Además, considera que la posesión de unas adecuadas actitudes cognitivas como la flexibilidad para organizar datos, agilidad mental, etc., pueden verse manifestadas en el desarrollo de procesos idóneos para realizar con éxito algunas actividades como localizar la clave de los problemas, desarrollar estrategias eficientes, etc.

Villarraga et al., (2004) también proponen cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato o genético, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos. Dentro del enfoque del logro o rendimiento, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977), quien concibe el talento como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad.

Con respecto al talento matemático, una de las formas más sencillas de definir este constructo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, 2004). Por lo que, en general, se nomina a aquellos estudiantes talentosos en matemática que son hábiles resolviendo problemas para sujetos de una edad superior. Morales (1998, citado en García, 2014) agrega que poseen un alto grado de dedicación a las tareas asignadas y que presentan altos niveles de creatividad a la hora de abordar tareas matemáticas.

Castelló y Batlle (1998), citado por Fernández, Castillo y Barbarán (2010) consideran que una persona con talento matemático se caracteriza por disponer de elevados recursos de representación y manipulación de informaciones que se presentan en la modalidad cuantitativa y/o numérica.

Ramírez (2012) señala que las características que definen a estudiantes con talento matemático se han desarrollado desde los años ochenta del pasado siglo y propone que:

> Un alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (pp. 23-24)

En este estudio hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas.

A continuación se presentan algunas ideas relacionadas con la caracterización del talento matemático.

1. Caracterización del talento matemático

En la actualidad, la atención de niños superdotados o con talento va adquiriendo importancia tanto en los diferentes currículos escolares como en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este interés también se refleja en la conformación de grupos de discusión en Congresos de relevancia en el área de la Educación Matemática como es el ICME 10 (TSG4) o el ICME 11 (TSG6) (Benavides, 2008).

Esta misma autora afirma que estudiar las características particulares que poseen estos estudiantes es una de las líneas de investigación que se han desarrollado alrededor del tema. De hecho, Krutetskii (1976) es quizás uno de los primeros investigadores que realizó un estudio sistemático en este sentido al observar los procesos cognitivos de 192 niños entre los 6 y 16 años ante una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii sostiene que este tipo de estudiante no sólo tiene mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma cualitativamente diferente sobre las matemáticas y poseen algunas habilidades de resolución de problemas matemáticos de los adultos.

De igual forma García (2014) argumenta que desde edades escolares los niños con talento presentan características que los diferencian de los demás, como es el mostrarse activos, persistentes, flexibles y curiosos hacia el aprendizaje. Además, poseen una excelente rapidez en la captación de conceptos matemáticos complejos y abstractos. González y Domingues (2015) también argumentan que la creatividad, la motivación o el pensamiento divergente son cualidades que presentan este tipo de estudiantes.

Otros autores se han ocupado en estudiar el pensamiento de este tipo de estudiantes cuando resuelven tareas de resolución de problemas y concluyen que el razonamiento que muestran es muy diferente de estudiantes ordinarios en términos de velocidad y profundidad (Keşan, Kaya, y Güvercin, 2010). Greenes (1981) recoge algunas particularidades que presentan los estudiantes con talento en matemática, entre las que se destacan la formulación espontánea de problemas, la flexibilidad del manejo de datos, la originalidad de interpretación y la agilidad mental o riqueza de ideas. Por su parte, Freiman (2006) afirma que este tipo de estudiantes se caracterizan por preguntar espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, buscar patrones y relaciones, localizar la clave de los problemas, producir ideas originales, valiosas y extensas, etc.

Por último, Reyes-Santander y Karg (2009) proponen que los estudiantes aventajados en matemática presentan dominio de campos del conocimiento matemático, muestran persistencia y perseverancia en actividades matemáticas que le interesan y de generación metacognitiva, así como producir resultados generales.

A continuación se aborda algunas estrategias e instrumentos que se han empleado para identificar estudiantes con talento.

2. Mecanismos de identificación de estudiantes con talento

Uno de los objetivos de los estudios relacionadas con el talento consiste en establecer mecanismos de identificación para este tipo de estudiantes (Castro, 2008). A continuación se describen algunas estrategias e instrumentos que se han utilizado con este propósito.

Con respecto a las estrategias, Manzano, Arranz y Sánchez de Miguel (2010) presentan cuatro criterios que se pueden emplear en la identificación de estudiantes con talento. El primer criterio se relaciona con la identificación basada en aptitudes y considera que la puntuación mínima para distinguir niños con alta capacidad mediante la prueba de aptitud general debe ser superior al percentil 82, porque esta puntuación es equivalente a un coeficiente intelectual de 115. El segundo criterio es la identificación basada en la creatividad, donde los sujetos que obtienen una puntuación por encima del percentil 75 en los factores exclusivamente creativos según Torrance se consideran con alta capacidad.

El tercer criterio es la combinación de los dos anteriores, por lo que se consideran solo aquellos sujetos que obtienen una puntuación superior al percentil 82 en la prueba de aptitud general y que además demuestran niveles de creatividad que según Torrance están por encima del percentil 75 en todos los factores creativos medidos. Por último, el cuarto criterio es la identificación basada en el modelo de Renzulli, el cual se centra en el modelo de los Tres Anillos establecido por Renzulli (1977). En este criterio se incluyen los sujetos que muestren una alta producción cognitiva general, un alto nivel de motivación y un alto nivel de creatividad.

Genovard y Castelló (1990), citados por González García (2015), clasifican las principales estrategias de identificación en tres grandes grupos: identificación basada en las medidas informales, identificación basada en medidas formales y análisis individualizados. En el primer grupo se encuentran los cuestionarios y auto informes. La ventaja de éstos consiste en la economía de tiempo y en la recolección de ciertos indicios sobre el perfil excepcional del estudiante. En el segundo grupo están los que evalúan directamente los componentes implicados en la excepcionalidad. A pesar de que presentan cierta fiabilidad, resulta una estrategia costosa de aplicar porque los instrumentos generalmente son extensos y su aplicación requiere de expertos en el área. En cuanto a los análisis individualizados, se centran en las características específicas de los sujetos, recogiendo información con técnicas del primero y segundo grupo; así como información de tipo biográfico.

Rogado et al. (1994) menciona una estrategia adicional denominada identificación en el aula, la cual consiste en la observación seria y continua por parte del docente del trabajo de los estudiantes en el aula, el análisis de la creatividad, originalidad y perseverancia que muestra en las tareas que resuelve. Así mismo incluye las calificaciones escolares, la información aportada por otros profesores, sus padres y compañeros de clase.

En relación con los instrumentos, Benavides (2008) menciona varios que agrupa en dos grandes bloques: las técnicas subjetivas o informales y las técnicas objetivas. Las primeras se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son:

a) Informes de los profesores, que generalmente están influenciados por cuestiones del rendimiento escolar y no siempre toman en cuenta aspectos relevantes del talento. Entre este tipo de instrumentos, se puede citar las escalas de Renzulli (SCRBSS) para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes.

b) Informes de los padres, que suponen una fuente de información relevante sobre todo en aspectos evolutivos en las edades tempranas. Se pueden citar los cuestionarios para padres de Beltrán y Pérez (1993).

c) Nominaciones de los compañeros, que recolectan información respecto a las capacidades, intereses, rendimiento académico, socialización y liderazgo del sujeto. Se puede citar el cuestionario para la nominación de iguales de Beltrán y Pérez (1993) que incluye, entre otras cuestiones, cómo señalar a compañeros que haría mejor un presupuesto, el mejor inventor o el más divertido.

d) Autoinformes, que son adecuados para alumnos mayores. Estos autoinformes son poco significativos pues no suelen generar diferencias entre alumnos con talento y alumnos promedio (Genovard y Castelló, 1990).

Con respecto a las técnicas objetivas, éstas se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de instrumentos empleados son:

a) Test de inteligencia general, que ocupan un lugar fundamental en la evaluación del talento y sigue siendo el criterio más valorado por los especialistas. Entre los más aconsejados están el Stanford-Binet Test of intelligence, las escalas de Wechsler y el test de matrices progresivas de Raven.

b) Test de aptitudes específicas, que permiten afinar mucho el tipo de talento del alumno y generalmente incluyen medidas específicas en distintas áreas como razonamiento verbal, numérico, matemático, etc. Entre los test de aptitudes específicas se encuentra la batería de aptitudes diferenciales y generales (BADyG) de Yuste.

c) Pruebas de rendimiento, que evalúan generalmente la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas. Los profesores también pueden elaborar pruebas basadas en el currículum ya que tienen un buen conocimiento del alumno.

d) Test de creatividad, que analiza la creatividad del sujeto a través de medidas de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración de las respuestas. Se puede destacar la prueba de Torrance Test of Creative Thinking (TTCT).

e) Test de personalidad, los cuales pueden dar a conocer la madurez emocional y social del alumno. Entre estos se puede citar el cuestionario de personalidad EPQ-J de Eysenck y Eysenck.

Con respecto a las estrategias empleadas en la identificación del talento matemático, la revisión de literatura constata que existen diversos métodos de enfoque cualitativo y cuantitativo; destacándose entre ellos los test estandarizados. El problema de éstos es que puede suceder que niños muy capaces en el área de la matemática no sean identificados o que suceda lo contrario, niños que no son talentosos puedan ser identificados como tal (Benavides, 2008).

Niederer e Irwin (2001) proponen los siguientes seis mecanismos para identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. Así mismo, Marjoram y Nelson (1988) sugieren algunos métodos como la nominación de los profesores o una puntuación sobresaliente en test de inteligencia general.

De igual forma, algunos autores proponen el uso de la invención de problemas como una herramienta que podría ser utilizada en la identificación de estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986, Kesan et al., 2010), ya que ésta permite observar los conocimientos y habilidades matemáticas, así como la creatividad de niños considerados con talento matemático (Krutetskii, 1976). Además, autores como Getzels y Jackson (1962), citados en Silver (1994) y Balka (1974) han empleado actividades de invención de problemas en el proceso para identificar individuos creativos.

Por último, Prieto, Bermejo y López (2000) sostienen que la identificación del talento estará condicionada de acuerdo con el propósito que se persiga. De esta forma, si el objetivo es identificar-clasificar el talento, el diagnóstico consistirá en determinar si cumple los criterios para ser considerado como tal. Si el fin es proporcionar un currículum o realizar una intervención, el procedimiento se centrará en la evaluación-reconocimiento que se centra en reconocer las altas habilidades y sus manifestaciones. De acuerdo con este autor, ambos corresponden a dos modelos de atención a la diversidad que pueden funcionar incluso de forma conjunta.

Así, en este estudio se analizaron las diferentes concepciones del talento matemático, ya que existe una diversidad de concepciones para referirse a este concepto. También se buscó aportar información sobre las principales características que presentan los estudiantes con talento matemático, así como las diferentes estrategias e instrumentos que se han empleado en su identificación, en la que se mencionaron brevemente las tareas de invención de problemas como una estrategia complementaria dentro de este proceso.

Por último, se coincide en la necesidad de una identificación y caracterización de estudiantes con talento, que aporte información para una respuesta educativa pertinente a las necesidades específicas que éstos tienen, evitando así los efectos negativos por inadecuación, desinterés o incluso dificultades en el aprendizaje. Esto debe constituir una prioridad curricular.

Agradecimientos

Este estudio ha tenido el apoyo del proyecto PGC2018.095765.B.I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (España).

Referencias y bibliografía

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21,* 633-636.

Beltrán, J., y Pérez, L. (1993). Identificación. En L. Pérez (Ed.), *10 Palabras clave en superdotación* (pp. 137-168). Navarra: Verbo Divino.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113–140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado de **http://funes.uniandes.edu.co/1191/**

Díaz, E., Aleman, H. y Hernández, C. (2013). Un modelo pedagógico para desarrollar el potencial de estudiantes talentosos en matemática en Costa Rica. *Uniciencia*, *27* , 51–66.

Ellerton, N. (1986). ChildrenŽs made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17* (3), 261–271.

Fernández, J. A., Castillo, S. y Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *Edupsykhé*, *9* (2), 221–234.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, *3* (1), 51–75.

García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces* (Tesis doctoral) Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Genovard, C., y Castelló, A. (1990). *El límite superior. Aspectos psicopedagógicos de la excepcionalidad intelectual.* Madrid: Pirámide.

González García, M. (2015). *Perfiles cognitivos asociados a alumnos con altas habilidades intelectuales* . Recuperado de **http://www.tdx.cat/handle/10803/313461**

González, M. y Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula*, *21* , 21–32.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28* (6), 14–17.

Keşan, C., Kaya, D. y Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student's Mathematical Abilities, *2* (3), 677–687.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* . Chicago: Universidad de Chicago Press.

Lopez-Andrada, B., Beltrán, M. T., López-Medina, B. y Chicharo, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades* . Madrid: Ministerio de Educación y cultura, Centro de investigación y Documentación Educativa.

Martínez, M. y Guirardo, A. (2010). *Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Barcelona: Editorial Graó.

Manzano, A., Arranz, E. y Sánchez de Miguel, M. (2010). Multi-criteria identification of Gifted Children in a Spanish Sample. *European Journal of Education and Psichology, 3* (1), 5-17.

Marjoram, D. y Nelson, R. (1988). Talento matemáticos. En J. Freeman (Ed). *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos* . Bilbao: Santillana.

Niederer, K. e Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed), *Proceeding of the 25th Conference of the Internacional Group of Psychology of Mathematics Education*, Utretcht, Vol. 3, 431-438. Utretcht: The Netherlands.

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodriguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*.

Prieto, M. D., Bermejo, M. R. y López, O. (2000). Procedimientos de evaluación e identificación de los alumnos superdotados. En M. D. Prieto & J. L. Castejón (Eds), *Los superdotados: esos alumnos excepcionales* (pp. 45-75). Málaga: Ediciones Aljibe.

Prieto, M. y Castejón, J. L. (2000). *Los superdotados: esos alumnos excepcionales* . Málaga: Ediciones Aljibe.

Ramírez (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Reyes-Santander, P. y Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. . González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403–414). Santander: SEIEM.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talents*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. (1996). En qué consiste lo sobresaliente: un reexamen de la definición de sobresaliente y talentoso. *Dossier, 5* , 12-29.

Rogado, M. I., Nograro, C. R., Zabala, B., Etzebarría, A., Albes, M. C., García A. C., Gonzalo, P. I., Mauleón, J. M., Del Barrio, B. y Fernández, I (1994). *La Educación del alumnado de altas capacidades*. Pais Vasco: Departamento de Educación, universidad e investigación.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing.pdf. *For the Learning of Mathematics*, *14* (1), 19–28.

Villarraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en iberoamerica* (pp. 25–35). Orealc-Unesco.

Interpretando o letramento estatístico dentro do currículo de matemática do ensino básico: *um projeto internacional de ensino integrado sobre o tema de energia com dados reais*[1]

Yuriko Yamamoto Baldin

Resumo

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. O conceito de letramento estatístico em nível básico, no contexto de ensino de matemática integrado com temas interdisciplinares, implica desafios de interpretação e análise de propostas de aulas inovadoras. Este texto tem como objetivo discutir um projeto de colaboração internacional entre Chile, Brasil e Japão, realizado em 2017, trazendo referências teóricas do letramento estatístico para interpretar uma aula-pesquisa realizada em classes de 6º ano do ensino básico. O projeto utilizou a metodologia de Lesson Study em uma aula STEM, mediada por tecnologia de comunicação à distância. A aula alcançou resultados replicáveis em outros contextos.

Palavras chave: letramento estatístico em ensino básico; ensino integrado STEM; educação para cidadania; Lesson Study e sequência didática; aula mediada por tecnologia de comunicação.

Abstract[2]

The issue of renewable energy production is linked to the discussion about the sustainability of the planet and to education for responsible citizenship, when a problem of responsible energy consumption can be developed in the basic education curriculum, promoting a critical posture in reading and interpreting real data. The concept of statistical literacy at the Primary level, in the context of the integrated teaching of Mathematics, implies challenges of interpretation and analysis of innovative classes. This text is intended to expose and

Y. Y. Baldin
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 28 de junio de 2019 y aceptado el 2 de agosto de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 139–150. Costa Rica

analyze an international collaboration project between Chile, Brazil and Japan, carried out in 2017, looking for theoretical references on statistical literacy to interpret a Grade 6 class at the Primary level. The project used the Lesson Study methodology in a STEM class, mediated by distance communication technology. The class has achieved replicable results in other contexts.

Keywords: Statistical literacy in basic education; integrated STEM teaching; Civics; Lesson Study; class mediated by communication technology.

Resumen

El tema de la producción de energía renovable está vinculado a la discusión sobre la sostenibilidad del planeta y con la educación en la escuela para la ciudadanía responsable, cuando se puede elaborar un problema de consumo responsable de energía en el currículo de educación básica, promoviendo una postura crítica en la lectura de datos reales y su interpretación. El concepto de alfabetización estadística en el nivel básico, en el contexto de la enseñanza integrada de las matemáticas, implica retos de interpretación y análisis de clases innovadoras. Este texto tiene como propósito exponer y analizar un proyecto de colaboración internacional entre Chile, Brasil y Japón, realizado en 2017, buscando referencias teóricas sobre alfabetización estadística para interpretar una clase para sexto año de la Básica. El proyecto utilizó la metodología de Lesson Study en una clase STEM, mediada por la tecnología de comunicación a distancia. La clase ha logrado resultados replicables en otros contextos.

Palabras clave: Alfabetización estadística en la educación básica; enseñanza STEM integrada; Educación para la ciudadanía; Lesson Study y la secuencia didáctica; clase mediada por la tecnología de la comunicación.

1. Introdução

A Estatística se consolidou durante o século 20 como uma disciplina que possui características próprias, entre as quais no tratamento de dados, especialmente dos dados numéricos que, por se expressarem por notações e operações/fórmulas matemáticas, aparecem como parte do currículo escolar em níveis desde iniciais a secundários, e com mais ênfase em nível superior, sendo ensinado em nível de escola básica como tópicos de matemática (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Segundo Garfield & Ben-Zvi (2008), a Educação Estatística, que cresceu a partir das investigações da Educação Matemática, distingue uma diferença essencial da disciplina Estatística em relação à Matemática na abordagem do estudo sobre dados numéricos, o que leva ao conceito de *letramento estatístico*, que será elaborado adiante. Na página 8 da referência citada, encontramos citação de Moore que aponta a diferença entre a abordagem matemática de dados numéricos, que os trabalha como números em abstrato, regidos pela estrutura matemática, e a da estatística que trabalha dados como "números com contexto", quando o contexto traz significados para os números que representam dados, não podendo estes ser analisados sem levar em consideração "como foram coletados" e "o que representam" (Cobb & Moore, 1997, apud Garfield & Ben-Zvi, 2008, p.8). Garfield e Ben-Zvi (2008) argumentam que as diferenças essenciais entre a matemática e a estatística levam necessariamente a uma análise diferenciada das dificuldades de *ensino da estatística*, quando consideradas como parte da formação de professores, e do estudo das dificuldades de aprendizagem dos alunos, que por sua vez, reagem diferentemente em relação a atividades de matemática e de estatística. Enquanto o ensino da matemática se fundamenta na estrutura subjacente da teoria matemática que se manifesta por meio de definições, fórmulas, expressões, e de resolução de problemas através de procedimentos de operações e raciocínios abstratos, as atividades de estatística trabalham com incertezas, análise de dados obtidos em contextos reais, a variabilidade de dados, a leitura de condições por trás dos dados e inferências a partir da análise de dados. A referência (Groth, 2007) também corrobora estas considerações para conceituar o *conhecimento da estatística para o ensino.*

As diferenças percebidas pelos avanços nas investigações sobre Educação Estatística implicaram maior compreensão sobre as necessidades de reformas curriculares em todos os níveis para focar o letramento estatístico, em paralelo ao letramento matemático e de alfabetização. Documentos como NCTM (2000) e CBMS (2012) são contribuições que detalham orientações sobre as tendências dos currículos atuais, refletindo os conhecimentos gerados pela pesquisa, reforçando a necessária preparação dos professores do Ensino Básico no Conhecimento Pedagógico de Conteúdo para Matemática e Estatística.

Em Watson (2011) encontramos uma importante visão conceitual de *letramento estatístico* em escolas com extensa e completa elaboração dos objetivos do ensino de estatística e seus níveis de desenvolvimento ao longo dos anos escolares. No prefácio desta referência (Watson, 2011, p.vii), o letramento estatístico é destacado como "preparação de *todos* os estudantes para participar na tomada de decisões baseada em dados, e a preparação de *alguns* estudantes para estudo posterior de estatística formal" , tendo como base a premissa de que "é através da escola elementar e média que a intuição e a compreensão sobre chances e dados são refinadas" e que esse nível de desenvolvimento deve anteceder o estudo de estatística em nível mais avançado.

No Brasil, o recente documento de Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil-MEC, 2018) estabelece, para o Ensino Fundamental e Médio, as orientações para o ensino de tópicos básicos de matemática do eixo *Probabilidade e estatística*, que substitui a denominação anterior da área *Tratamento de Informação*, com descrição das competências e habilidades alinhadas com os conceitos do letramento estatístico. Há, entretanto, muito a investigar durante a implementação do novo Currículo para constituir um conhecimento sólido que promova mudanças significativas e efetivas na prática escolar e que elucide o significado de conexões entre os conhecimentos básicos de matemática que se refletem no letramento estatístico, reforçados em cada nível de compreensão (Watson, 2011).

A questão de pesquisa que focamos neste trabalho se origina a partir de um projeto de parceria internacional (Baldin, Isoda, Olfos & Estrella, 2018):

"Como podemos desenvolver as competências indicadas pelo letramento estatístico dentro do currículo de matemática em nível básico?"

O texto está organizado em seções: Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico; Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia;

Metodologia de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula *cross-border*; Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico; Conclusão.

2. Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico

Seguimos fundamentalmente Garfield & Ben-Zvi (2007) para conceituar o letramento estatístico. Segundo estes autores, o letramento estatístico constitui "uma habilidade essencial esperada de cidadãos em sociedades imersas em informações, e é frequentemente considerado um resultado esperado da educação escolar como um componente necessário de letramento numérico e estatístico" (p.380). O letramento estatístico envolve em especial o reconhecimento e a capacidade de interpretar diferentes representações de dados.

Entendemos também as perspectivas de outros autores como a de Gal (2002) que consideramos complementar à definição de letramento estatístico: "Letramento estatístico constitui habilidade para interpretar, avaliar criticamente e comunicar sobre informação estatística e mensagens" (p.1). Além disso, o letramento estatístico permite a uma pessoa desenvolver uma habilidade de avaliar informações de caráter estatístico que aparecem na mídia, assim como apreciar o valor do conhecimento estatístico na vida cotidiana, cívica e profissional como consumidores e produtores de dados (del Pino & Estrella, 2012). Esta visão conecta o letramento estatístico à educação escolar para formação de cidadão consciente e ∫responsável.

Para elucidar a posição de letramento estatístico como base da educação estatística e sua distinção da matemática e letramento numérico, Garfield e Ben-Zvi (2007) ressaltam os conceitos de "raciocínio estatístico (*statistical reasoning*)" e de "pensamento estatístico (*statistical thinking*)" que fazem parte da teoria de educação estatística, que se juntam ao "letramento estatístico", apresentando hierarquias entre eles, assim como suas interseções. O pensamento estatístico, próprio da disciplina Estatística como ciência, não será abordado neste trabalho, por não implicar primariamente na análise do projeto de ensino que é objeto de estudo de caso. Para este trabalho, seguimos a concepção de Watson (2011) de que o raciocínio estatístico desenvolvido ao longo do currículo da escola básica, antecede o desenvolvimento do ensino formal de estatística que requer o *pensamento estatístico*. De acordo com esta referência, o fluxo de tópicos de conteúdo sobre *amostragem, representação, síntese, chance, inferência e variação* é essencial para a aprendizagem posterior de estatística formal. Esses tópicos constituem fundamentos para tomada de decisões ou questionamentos ao defrontar com situações apresentadas por meio de dados ou problemas do mundo real (Watson, 2011), logo a análise de dados por meio de representações se mostra como uma das primeiras estratégias para desenvolver um raciocínio estatístico que pode ser trabalhado desde os anos do ensino fundamental.

O conceito de "raciocínio estatístico" corresponde a um avanço do estágio de habilidade básica de um cidadão para a de raciocinar com ideias estatísticas, atribuindo sentidos e significados para informação estatística (Garfield & Ben-Zvi, 2007). O raciocínio estatístico pode envolver o conectar um conceito a outro, ou combinar ideias sobre os dados e a chance. O raciocínio estatístico significa também compreender e explicar processos estatísticos, assim como interpretar resultados estatísticos. Em nível de ensino fundamental, a representação de dados quantitativos/numéricos por meio de figuras ou gráficos que demandam habilidades de leitura e interpretação de seus significados, além de números e conceitos matemáticos que aprendem na aritmética elementar, corresponde a tópicos importantes do currículo escolar, conectando o letramento numérico ao letramento estatístico. Segundo (Friel, Curcio & Bright, 2001), Curcio (1987) já apontava, na página 383 desta referência, que o conteúdo matemático de um gráfico, que inclui números, conceitos, relações numéricas e operações fundamentais, seria um fator que necessita de um conhecimento prévio para a compreensão do gráfico. Isso significa forte interação entre o ensino da matemática básica e o desenvolvimento de raciocínio estatístico. A referência (Friel et al., 2001) argumenta ainda que para se atingir o letramento estatístico é necessário desenvolver a habilidade de ler e compreender gráficos estatísticos e tabelas de dados, e aponta para três níveis de *leitura de gráficos com compreensão*, classificados por Curcio (1989).

Neste artigo, baseamos na lista ampliada, em (Shaughnessy, 2007), para a exploração de dados feita por representação gráfica, com um critério de quatro níveis de leitura de gráficos para a análise de informações extraídas da leitura: a) leitura de gráfico/dados; b) leitura *dentro* do gráfico/dados; c) leitura *além* do gráfico/dados; d) leitura *por trás* do gráfico/dados. Esta lista representa um aprofundamento com mais detalhes a partir dos níveis de Curcio (1989). Os níveis representam gradativamente as competências que se aprofundam na direção do letramento estatístico, que iniciando com a identificação dos dados representados graficamente, avançam para o nível de compreender os significados (ler dentro) para poder inferir para além dos dados iniciais (ler além), e finalmente conjecturar outros contextos ou as causas do fenômeno cujos dados estão representados (ler por trás) (Shaughnessy, 2007, p.991).

No estado atual da investigação em Educação Estatística, há um crescente desenvolvimento no estudo sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento dos alunos, voltado para promover mudanças no ensino, da "estatística procedimental" com fórmulas, técnicas e cálculos para um desenvolvimento da "compreensão conceitual" na direção do letramento estatístico (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Watson, 2011; Oliveira, Henriques, da Ponte, 2016).

3. Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. Entretanto, o planejamento de uma aula que incorpore os princípios de letramento estatístico desde o ensino básico em contexto de interdisciplinaridade é um desafio inovador para pesquisadores e professores em exercício.

Shaugnessy, em Rossman & Shaughnessy (2013), discute o desafio de trabalhar o letramento estatístico em níveis básicos do ensino escolar, pela preparação insuficiente em matemática dos professores que atuam nos anos iniciais, e pelo fato do conteúdo escolar relacionados à aquisição de habilidades do letramento estatístico estar "embutido dentro do amplo eixo de *Medidas e Dados* ,com progressão orientado mais para medição (linear, área e medida de volume) do que para estatística. ... (...) recomendações para coleta e apresentação de dados são orientadas para representar frações e decimais na reta numérica ...sem raciocínio sobre a distribuição de dados." (p.11)

No contexto desse desafio, com o tema de Energia para Sustentabilidade, e com o objetivo de investigar e produzir experiências didáticas para nível básico, o APEC- Lesson Study Project (http: //www.criced.tsukuba.ac.jp) trabalha aulas interdisciplinares na perspectiva STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) com características de letramento estatístico, e com colaboração internacional de vários países e realizações transfronteira (cross-border). O artigo (Isoda, Araya, Eddy et al., 2017) traz uma experiência de Aula Pública sobre Eficiência Energética, realizada à distância, com transmissão via Skype, entre uma classe em Chile e outra nos Estados Unidos. Nesse artigo, as características de uma Aula Pública nos moldes concebidos como Lesson Study, em que uma aula demonstrativa é observada por professores colaboradores e convidados, e é comentada após a aula, são detalhadas de forma a implicar em comunidades de aprendizagem coletiva que reduz o isolamento de professores e de salas de aula que visam um ensino eficaz.

Ainda em 2017, González e Isoda realizaram para o Projeto APEC uma oficina de tarefa estatística que utilizou tabelas de dados reais sobre os gastos com energia elétrica de países, em escala internacional, para instigar os participantes de nível escolar secundário a "explorar os dados" para raciocinar com conceitos estatísticos, por exemplo, de "percepção sobre indícios de variabilidade dos dados", "desenvolvimento e compartilhamento de pensamentos sobre as fontes de variação dos dados em períodos de tempo", e "desenvolvimento de raciocínio informal de inferência usando os dados como recursos para estimativas, predições e generalizações".

A oficina utilizou recursos de representação gráfica em linhas para leitura de dados, apoiada nos critérios de Shaughnessy (2007) para desenvolver o letramento estatístico em nível de ensino secundário, e lançou um questionamento se uma atividade neste tema poderia ser realizada em nível fundamental de ensino (González & Isoda, 2017).

Isso motivou o projeto de colaboração internacional, de uma Aula-pesquisa para 6º ano do ensino fundamental com o tema de "consumo responsável de energia", analisado neste artigo sob a perspectiva de letramento estatístico na escola. A metodologia do projeto destaca as etapas de Lesson Study, desde a fase de planejamento até a análise final, com enfoque STEM e de letramento estatístico, e em caráter transfronteira (cross-border) entre Chile e Brasil, como parte do APEC-Lesson Study project. A avaliação qualitativa do projeto focou nas evidências da possibilidade de replicar a aula em diferentes contextos e dentro do currículo de matemática dos países participantes (Baldin, Isoda, Olfos & Estrella, 2018).

4. Metodología de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula cross-border

As etapas de Lesson Study (Fernandez & Yoshida, 2004) basearam a estrutura do projeto de Aula-pesquisa, que assim se denomina por ser uma aula especialmente desenhada coletivamente por um grupo de pesquisadores e professores de sala de aula, em busca de evidências para fundamentar a análise de resultados desejados de uma aula inédita. Resumidamente, as etapas da Lesson Study constituem de: *Pesquisa para o plano de aula; Elaboração do plano de aula com estabelecimento de questão/problema norteador da atividade em sala de aula; Implementação do plano de aula acompanhada por observação e registro da atividade; Análise pós-aula com reflexão e síntese dos resultados com auxílio de folhas atividade dos alunos e questionários aos professores e observadores.*

A metodologia de Lesson Study para implementação de uma aula-pesquisa com tema interdisciplinar de energia, além de estar alinhada com os conhecimentos esperados para 6º ano do ensino básico de países diferentes, facilita a análise de conceitos de letramento estatístico que é o foco deste trabalho.

A ***pesquisa*** para a elaboração do plano de aula envolveu extenso intercâmbio, entre os dois grupos de estudo no Brasil e no Chile, de estudos sobre o conteúdo curricular dos dois países, assim como de desenho especial dos objetivos da aula que deixem claros os conceitos de letramento estatístico, quais sejam de planejamento e desenho de tarefas adequadas e atividades que permitam diagnosticar e avaliar os níveis de compreensão dos alunos, como aponta Watson (2011).

Após filtrar os conhecimentos previstos para 6º ano (11–12 anos de idade) em duas escolas públicas, do Brasil e Chile, assim como considerar os conhecimentos prévios das duas turmas, o ***plano de aula*** foi desenhado com as características de execução simultânea, comunicação sincronizada, gravação da aula durante a execução observada por pesquisadores e professores dos grupos de estudo em cada país, socialização interativa facilitada pela tecnologia de comunicação, tradução simultânea de espanhol e português na sala brasileira. (Baldin, Estrella, Olfos & Morales, 2017). Os dados reais de produção e consumo de energia renováveis e não renováveis dos dois países, nos anos 1990 e 2013, foram extraídos da base de dados do Banco Mundial (//wdi.worldbank.org/table/3.6) e apresentados aos alunos com representação em barras de coluna, acessíveis ao conhecimento dos estudantes, ilustrados na Figura 1. Esta parte faz parte da pesquisa para o planejamento da aula para adequar o conteúdo e as estratégias didáticas ao conhecimento dos alunos e ao currículo escolar.

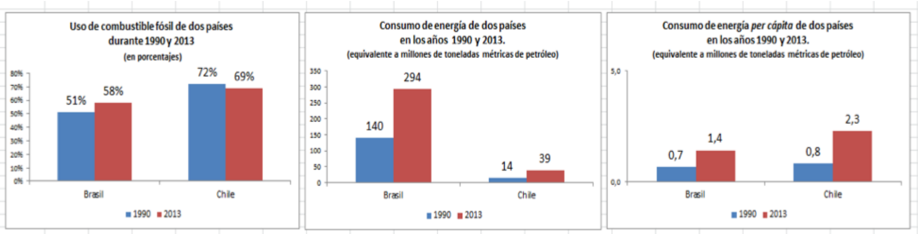


Figura 1: Gráficos de colunas duplas para trabalho dos alunos. Fonte: (Baldin et al., 2017)

O planejamento da aula com o desenho dos gráficos atende ao objetivo de adequar as tarefas de leitura e interpretação de dados à luz das competências apontadas por Shaughnessy (2007).

O gráfico no meio da Figura 1 fornece dados de consumo total de energia de Brasil e Chile em dois momentos de coleta, em 1990 e 2013, e se relaciona à habilidade de leitura de dados com unidades adequadas, correspondendo à competência de identificar os dados representados. Além disso, desenvolve a competência de leitura "dentro" do gráfico por meio da interpretação do significado dos dados por leitura dos elementos presentes no gráfico. O gráfico à esquerda, sobre as porcentagens de consumo de "combustível fóssil" dentro do consumo total de energia, envolve não apenas a habilidade de leitura "dentro" do gráfico sobre o significado do conceito de porcentagem, mas também trabalha a competência de leitura "além" dos gráficos, por instigar a discussão sobre a natureza do dado "combustível fóssil" dentro do contexto de poluição ambiental e suas consequências, situando cada país geográfica e socialmente no planeta. O gráfico "per capita", à direita da Figura 1, envolve a competências de leitura "dentro", "além" e ainda "por trás" dos gráficos, pois não trabalha apenas os conceitos matemáticos envolvidos nos dados no gráfico, e sim, leva ao questionamento chave da atividade sobre a responsabilidade social de indivíduos de cada país, assim como à reflexão que conduz a conjecturar, argumentar para encontrar razões para discutir e responder à pergunta aberta "*Temos sido consumidores responsáveis?*". A atividade se conforma ao objetivo de desenvolvimento sustentável do projeto APEC, apoiado pela UNESCO (Mochizuki, 2017), e se conecta ao letramento estatístico em nível escolar (Watson, 2011).

O objetivo disciplinar da aula-pesquisa foi estabelecido como "analisar e extrair informação a partir de gráficos de barras duplas que representam os dados", enquanto o objetivo transversal da atividade foi "argumentar e comunicar as conclusões".

A tarefa/problema da atividade foi, portanto, estabelecida como responder à questão: "*Temos sido consumidores responsáveis?*". Esta questão aberta instiga os alunos a trabalhar colaborativamente, reflexivamente, e interpretar os dados para respostas que conectem a aula a questões mundiais de sustentabilidade do planeta, e a utilizar conhecimentos de matemática curricular como de porcentagem, estudo de unidades de medida não usuais para energia, escalamento de unidades nos eixos gráficos, uso de representações decimais na comparação entre os consumos e conceitos de proporcionalidade, e o conceito de *per capita* que exige o conhecimento de *razão* entre quantidades numéricas para sua representação, entre outros, para argumentar, justificar e comunicar.

O plano elaborado foi resultado de um trabalho colaborativo entre dois Grupos de Estudo em projetos de Lesson Study, respectivamente no Brasil e Chile, com participação de pesquisadores universitários e professores de escolas públicas (Baldin et al, 2017). A aula foi organizada para 60 minutos, com previsão, dentro do plano, de eventuais dificuldades dos alunos e de estratégias de intervenção das professoras em respectiva classe por meio de questionamentos que estimulem o raciocínio. Além do planejamento da aula-pesquisa, foi planejada uma aula preliminar sobre diferentes fontes de energia, o significado de uma unidade especial de medição de energia, a de *tonelada métrica de petróleo*, que foi realizada em cada país, mas com material comum elaborado pelos Grupos de Estudo. A fase de "estudo e preparação" de material para a aula corresponde a "pesquisa de material didático - kyouzai kenkyuu" do ciclo de Lesson Study (Fernandez & Yoshida, 2004).

A ***execução da aula – pesquisa*** foi gravada, com transmissão sincronizada com tecnologia Skype que permitiu interação direta dos alunos durante a aula, com diálogos e compartilhamento de respostas e ideias. A intermediação de professora de espanhol no lado brasileiro para traduzir a comunicação foi um dos pontos importantes para os alunos que estudam a língua espanhola como língua estrangeira curricular, e que vivenciaram a experiência de interagir com colegas de mesmo nível escolar que trabalharam as mesmas atividades. As folhas atividades com os gráficos da Figura 1 e questionamentos para responder foram trabalhadas individual e em grupo e entregues para as respectivas professoras. As respostas dos alunos foram compartilhadas por meio de comunicação on-line com visualização mútua de cada classe e leitura das folhas respostas, que foram recolhidas no final pelas respectivas professoras, constituindo material para análise.

A ***análise posterior a aula*** foi realizada por meio de questionários semiestruturados para orientar os observadores nas avaliações do plano executado, desempenho da classe, e resultado global obtido. Esta opção se alinha a Sharma (2010), que discute teorias de avaliação de pesquisa qualitativa em educação estatística e aponta esta forma de avaliação de atividades didáticas que visam o letramento estatístico como uma das alternativas possíveis para validar as evidências de aprendizagem.

Desta forma, as etapas básicas da metodologia Lesson Study estiveram presentes na Aula-pesquisa, e se conectaram com as tendências recentes da investigação em educação estatística sobre como a compreensão e o raciocínio sobre conceitos estatísticos poderiam ser "desenvolvidos através de sequencias de atividades cuidadosamente planejadas e como essas poderiam ser levadas para a sala de aula" (Garfield & Ben-Zvi, 2008, p. 4).

5. Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico

Os princípios da aula STEM utilizando representação gráfica de dados, alinhados com os conceitos de letramento estatístico, permearam o desenho do plano de aula para alcançar seus objetivos:

- Entender a problemática da eficiência energética no planeta (*leitura de gráfico*);
- Entender a comparação entre os dados estatísticos representados por gráficos de colunas duplas, explorando, lendo as propriedades das medidas e escalas dos gráficos e interpretando-as em contexto real dos dados (*leitura dentro dos dados*);
- Avaliar criticamente as informações para responder a uma questão aberta, justificando a resposta e comunicando aos colegas (*leitura além e por trás dos dados*).

A execução da aula mostrou a possibilidade de levar atividades que trabalham as competências em tratamento estatístico de dados reais para sala de aula de 6º ano, com questões que estimulam os alunos a pensar sobre o consumo responsável de energia, fontes de energia não poluente, e também sobre o desenvolvimento de senso de cidadania num mundo global, por meio de interação sincronizada com colegas de países diferentes, com população e condições geográficas diferenciadas. A análise comparativa na leitura de dados por meio de barras duplas propiciou oportunidades de reflexão crítica aos alunos e a levá-los a perceber os significados dos dados no seu contexto, mesmo dentro das limitações nas habilidades de conectar os conceitos matemáticos a suas interpretações. Neste sentido, podemos observar que a questão aberta proporcionou também a oportunidade de expressar em suas palavras os argumentos e justificativas para compartilhar com os colegas de classes transfronteiras. A linguagem expressa nem sempre é correta (Figura 2), porém o trabalho em equipe para responder a uma questão aberta e compartilhar sua resposta com colegas além fronteira teve um significado profundo na aprendizagem na sala de aula e na atitude em relação ao mundo em que os jovens vivem.

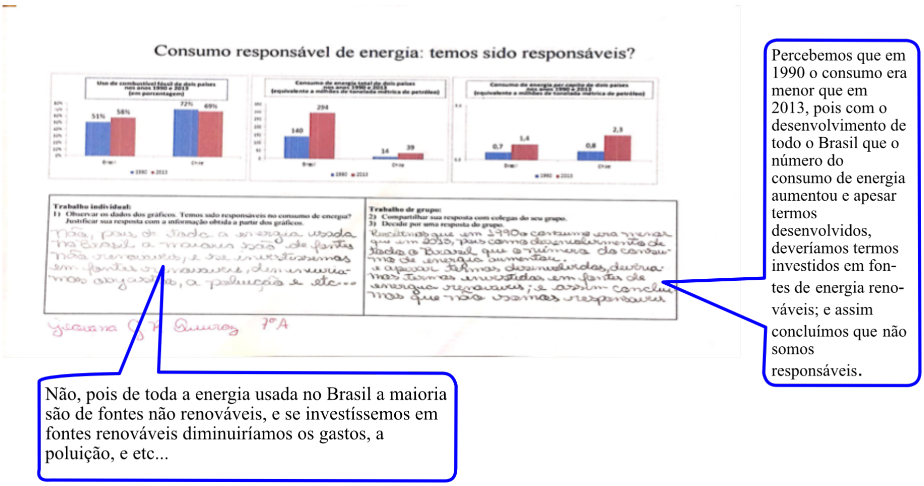


Figura 2: Folha resposta de uma estudante brasileira. Fonte: Baldin et al, 2018

Para as professoras e os participantes observadores das aulas, a aula pesquisa permitiu esclarecer as dimensões do conhecimento pedagógico de conteúdo para entender os conteúdos de matemática curricular que estão relacionados ao desenvolvimento de conceitos estatísticos, assim como os processos de aprendizagem dos alunos na compreensão e no desenvolvimento do raciocínio estatístico.

6. Conclusão

As respostas dos alunos e suas reações obtidas na experiência de Aula Pública com enfoque de Lesson Study sobre o tema de Eficiência Energética (Isoda, Araya et al., 2017), do projeto APEC- HRD para alunos de Ensino Médio, se assemelham aos obtidos na Aula Pesquisa relatada neste artigo, e isso nos anima a arriscar que, a aula, estudada à luz dos princípios de letramento estatístico, corrobora os indícios de que a metodologia de Lesson Study e as aulas interdisciplinares auxiliam a trazer significados na interpretação de dados reais no contexto que educam para a cidadania, e contribuem para desenvolver o conhecimento pedagógico de conteúdo para a formação dos professores. Podemos afirmar também que os resultados obtidos se alinham aos objetivos do letramento estatístico nas escolas, no sentido de Watson (2011), e fornecem evidências de que é possível trazer atividades consistentes ao letramento estatístico dentro do currículo de matemática do ensino fundamental.

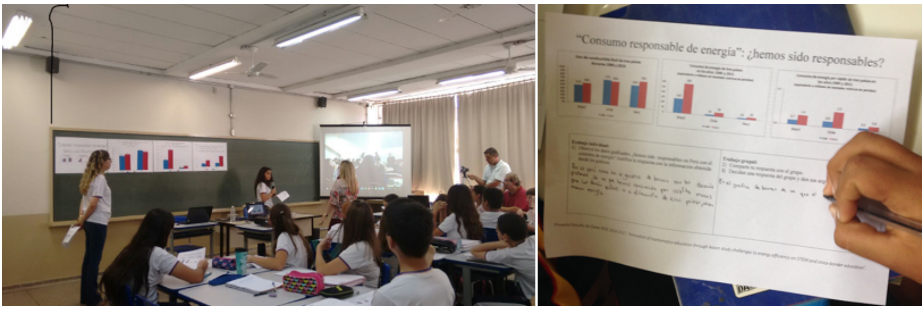


Figura 3: Socialização de respostas por Skype; réplica da aula com gráfico triplo, em Lima

O plano de aula mostrou-se ainda replicável em contexto de estudo comparativo entre três países, com os dados em barras triplas, envolvendo dados de Brasil, Chile e Peru (Figura 3), o que mostra a robustez do desenho da aula pesquisa, e possibilidade de generalizar o estudo para anos subsequentes com outras formas de representação de dados, por exemplo, de gráfico em linhas como ocorreu na oficina de González e Isoda (2017). Em 2019, houve outra experiência replicada, à distância e mediada pela comunicação síncrona entre duas escolas Chilenas sob coordenação de Estrella e Olfos desse projeto, aperfeiçoando o plano de aula conforme o nível de conhecimento matemático dos alunos. A questão posta para discussão na introdução ofereceu um estudo que abriu caminhos para mais investigações sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento.

Agradecimentos

Agradecimentos a todos os colaboradores dos Grupos de Estudo, Escuela Gaspar Cabrales (Valparaiso, Chile), Escola Genaro do Marco (Mirassol, Brasil), professoras que realizaram a aula-pesquisa e seus estudantes pela valiosa participação no projeto.

Agradecimentos aos pesquisadores Soledad Estrella, Raimundo Olfos e Masami Isoda pela parceria no projeto APEC- Lesson Study. Agradecimentos ao revisor por ter contribuído com a atualização e correção de referências sobre os níveis de leitura de gráficos.

Referencias y bibliografía

Baldin, Y. Y., Estrella, S., Olfos, R. & Morales, S. (2017). Plano de aula-pesquisa sobre o tema de energia para 6º ano do Ensino Básico, Projeto APEC-Lesson Study Project. São Carlos-Valparaíso: UFSCar-PUCV.

Baldin, Y. Y., Isoda, M. Olfos, R. & Estrella, S. (2018). A STEM Cross-Border Lesson on Energy for Basic Education under APEC Lesson Study Project. In *Proceedings of 8 th ICMI-EARCOME*, vol 1, p. 236-247. Taipei- Taiwan: Dept of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Brasil-MEC (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério de Educação.

CBMS (2012). *The Mathematical Education of Teachers II* . Providence, RI: American Mathematical Society. http://www.cbmsweb.org/MET2/met2.pdf

Cobb, G. W. & Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics and Technology. *The American Mathematical Monthly, vol.104, no. 9 pp 801-823.* Taylor and Francis on behalf of Mathematical Association of America. Doi 10.2307/2975286

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18, pp 382-393.*

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston VA: NCTM

del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamer icana*, 49 (1), p. 53-64.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Friel, S. N., Curcio, F. & Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Facts Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education, vol 31, n. 2, pp 124-158.*

Gal, I. (2002). Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1. P. 1-51. The Netherlands: International Statistical Institute.

Garfield, J., Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students´ statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science + Business Media B. V. doi: 10.1007/978-1-4020-8383-9

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical R eview75, 3, p. 372- 396* doi:10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

González, O. & Isoda, M. (2017) How to Develop Statistical Tasks on Energy Resiliency Using Data from the APEC Energy Database, **http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/GonzalezWorkshop**

Groth, R. E. (2007). Towards a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 38, n. 5, pp 427-437.

Isoda, M., Araya, R., Eddy, C., Matney, G., Williams, J., Calfucura, P., Aguirre, C., Becerra. P., Gormaz, R., Soto-Andrade, J., Noine, T., Mena-Lorca, A., Olfos, R., Baldin, Y., Malaspina, U. (2017) Teaching Energy Efficiency: A Cross-Border Public Class and Lesson Study in STEM. *Interaction Design and Architecture(s) Journal–IxD&A,* N. 35, p. 7-31.

Mochizuki, Y. (2017) Understanding SDGs and SDG Target 4.7, **http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/MochizukiKeyNote.pdf**

NCTM (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston VA: National Council of Mathematics.

Oliveira, H., Henriques. A., da Ponte, J. P. (2016) Developing Statistical Literacy (DSL): Student Learning and Teacher Education. *In D. Ben-Zvi, K. Makra (Eds) The Teaching and Learning of Statistics*. Cham: Springer

Rossman, A. & Shaughnessy, M. (2013). Interview with Mike Shaughnessy, *Journal of Statistics Education*, 21:1, doi: 10.1080/10691898.2013;1188967-1

Sharma, S. (2010), Qualitative Methods in Statistics Education Research: Methodological problems and Possible Solutions. *In C. Reading (Ed) Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8).*

Shaughnessy, J. M. (2007) Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. P. 957-1009. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Watson, J. M. (2011) *Statistical Literacy at School, Growth and Goals*. Series: Studies in Mathematical Thinking and Learning. New York: Routledge Taylor & Francis Group.

APEC Lesson Study Project in: //www.criced.tsukuba.ac.jp

World Bank Database: //wdi.worldbank.org/table/3.6

Criterios valorativos y normativos en la didáctica de una disciplina científica[1]

Vicenç Font Moll

Resumen

A la Didáctica de las Matemáticas se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder ¿qué ha ocurrido aquí?, ¿cómo y por qué? La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta ¿qué se podría mejorar? Se trata de demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas. En este trabajo se reflexiona sobre el constructo criterios de idoneidad didáctica en el marco de la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor (segunda demanda). Más en general, se realiza un trabajo de desarrollo teórico del constructo idoneidad didáctica: cómo se originó, hacia qué nos conduce y cómo puede afectar a la práctica del profesor de matemáticas.

Palabras clave: criterios normativos, idoneidad didáctica, enfoque ontosemiótico.

Abstract[2]

The teaching of Mathematics must respond to two different demands. The first intends that its theoretical constructs serve to understand the teaching-learning processes of Mathematics, and the second serves to guide the improvement of these processes. The first demand requires tools for a descriptive and explanatory approach to teaching that serves to answer what has happened here? How and why? The second demand needs tools for a valuation of the teaching that serves to answer the question: What could be improved? These are different, but closely related, demands. This paper reflects on the constructive criteria of pedagogical suitability within the framework of the problem of the role that assessments and normative principles should play in teacher practice (second demand). More generally, a theoretical development work of the pedagogical suitability construct is carried out: how it originated, what it leads us to and how it can affect the practice of the Mathematics teacher.

Keywords: normative criteria, aptitude for teaching, ontosemiotic approach.

V. Font
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona, España
vfont@ub.edu

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de junio de 2019 y aceptado el 22 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 151–161. Costa Rica

1. Introducción

En la revista *For the Learning of Mathematics* recientemente se han publicado varios artículos (Bartolini, 2018; Davis, 2018; Gascón y Nicolás, 2017; Godino, Batanero y Font, 2019; Oktaç, Trigueros y Romo, 2019) que reflexionan sobre la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio? Se trata de una cuestión sobre el carácter prescriptivo de los resultados consolidados de la investigación científica en Didáctica de la Matemática (Gascón y Nicolás, 2017, p. 26).

En el artículo citado, Gascón y Nicolás analizan las respuestas dadas a la pregunta anterior por varios autores, aplicando la perspectiva específica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Finalizan el trabajo planteando cuestiones más específicas para concretar la cuestión general acabada de comentar, que pueden ser abordadas desde diferentes marcos teóricos, con la intención de iniciar un debate de articulación de teorías. Concretamente plantean las siguientes preguntas (p. 30): ¿Cuáles son los principios o asunciones básicas de cada uno de los enfoques o teorías didácticas? ¿Qué fenómenos didácticos se proponen explicar y qué problemas prioriza? ¿Cómo inciden dichos principios sobre los fines de la educación que cada enfoque considera «valiosos» (lo que puede dar lugar a prescripciones normativas) y sobre el tipo de problemas de investigación que el enfoque en cuestión privilegia? Las asunciones básicas de los diferentes enfoques o teorías didácticas y los correspondientes fines que propugnan, ¿son compatibles entre sí? En caso contrario, ¿en qué medida podemos afirmar que los diferentes enfoques forman parte de la misma disciplina? Dichas cuestiones implican una concepción de la Didáctica de la Matemática como campo de investigación, y, por tanto, asumir la naturaleza de los resultados de dicha investigación, como conocimientos didácticos.

En Godino, Batanero y Font (2019) se responde a la cuestión general formulada por Gascón y Nicolás (2017) a partir de los principios y herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). Según estos autores, El EOS asume una concepción amplia de la Didáctica de las Matemáticas (DM) como ciencia y tecnología, al considerar que esta disciplina debe abordar cuestiones descriptivas, explicativas, predictivas, propias del conocimiento científico, y también prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico. Dicho de otra manera (Font y Godino, 2011), la DM tiene que dar respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar su mejora, lo cual nos lleva a una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones son correctas (buenas) y cuáles son incorrectas (malas). Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

En general, los enfoques teóricos que se han generado en la DM están más cómodos con la primera demanda que con la segunda. La razón es que con la segunda demanda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) es, usando la metáfora de la moral, que nos adentramos en un terreno en que los términos a utilizar son más bien propios del discurso moralista, ya que son del tipo: calidad, bien, mal, mejor, peor, correcto, incorrecto etc. Es decir, nos adentramos en una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones se deben hacer. Dicho de otra manera, dejamos el terreno firme de la ciencia (sea esta de tipo positivista o antipositivista) para adentrarnos en un terreno menos firme.

Ahora bien, hay programas de investigación que consideran que la razón de la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/ explicativa) es poder afrontar la segunda. Una revisión de la literatura muestra que una parte importante de los trabajos de investigación relacionan ambas demandas de facto, aunque en muchos casos sin justificar fundadamente dicha conexión.

Hay dos aserciones que, probablemente, pueden ser aceptadas por la mayoría de marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas: a) cuanto mejor podamos describir, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje (primera demanda), estaremos en mejores condiciones para conseguir una mejora de la enseñanza (segunda demanda), b) los resultados generados como consecuencia de la primera demanda influyen, de alguna manera, en la generación de valores y normas que guían la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Es decir, en general se asume algún tipo de conexión entre las dos demandas, aunque los diferentes enfoques teóricos difieren en la manera de fundamentarla.

En el EOS, se considera que la naturaleza del conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo), y, por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más efectivos posible (componente tecnológico - prescriptivo). Se entiende que la descripción, explicación y predicción, son los fines de la actividad científica, mientras que la prescripción y valoración, son los principales objetivos correspondientes a la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos. Por tanto, en el marco del EOS se ha decidido afrontar la segunda demanda a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI), el cual se descompone en componentes e indicadores.

Con relación al constructo de idoneidad didáctica, en diversas investigaciones se ha observado un fenómeno que se manifiesta con cierta regularidad: los componentes de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando estos valoran un episodio o justifican que una propuesta didáctica representa una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Es decir, sus comentarios se pueden considerar evidencias de un uso implícito de algún componente de los CI como norma que debe orientar la práctica del profesor para que esta sea de calidad.

En este artículo se describe y se explica dicho fenómeno, situando el constructo *idoneidad didáctica* en la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor. Más en general, se realiza un trabajo de desarrollo teórico del constructo *idoneidad didáctica*: cómo se originó, hacia qué nos conduce y cómo puede afectar a la práctica del profesor. En los apartados siguientes explicaremos primero un breve resumen de este constructo, a continuación, explicaremos con más detalle el fenómeno acabado de comentar y, después, profundizaremos en la génesis y desarrollo del constructo CI, para finalizar con unas consideraciones generales.

2. Problema de optimización del aprendizaje: criterios de idoneidad didáctica

El constructo *idoneidad didáctica* surge como respuesta a la siguiente pregunta *¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?* En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

La Didáctica puede ofrecer principios provisionales (normas que son llamadas en el EOS criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir, primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, segundo, para valorar sus implementaciones. Estos principios son útiles en dos momentos:1) a priori, los criterios de idoneidad orientan cómo se debe llevar a cabo un proceso de instrucción, 2) a posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado e identificar posibles aspectos de mejora en el rediseño. Para generar estos principios los investigadores en educación matemática deben dialogar y colaborar con todos los demás sectores interesados en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (profesores, padres, administración, etc.). Esto permitirá crear consensos que generen principios para orientar y valorar los procesos de instrucción, con la finalidad de conseguir una enseñanza idónea de las matemáticas. Se reconoce, no obstante, que la identificación de criterios de idoneidad, tanto generales como específicos, requiere de una agenda de investigación que se abre a discusión y desarrollo en la comunidad de educación matemática.

Dicho constructo general de idoneidad se ha particularizado en seis criterios parciales, (Font, Planas y Godino, 2010): 1) epistémica: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia, 2) cognitiva: grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial del alumnado, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados, 3) interaccional: Un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y, por otra parte, permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, 4) Mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, 5) emocional: grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio y 6) ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Ahora bien, para que dichos criterios sean operativos, se proponer una caracterización a partir de componentes e indicadores (Godino, 2013; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). Por ejemplo, para el criterio de idoneidad epistémica se puede formular el siguiente criterio parcial (componente): Los significados de los objetos institucionales pretendidos en cada contexto educativo deben ser una muestra representativa del significado de referencia global del objeto y tener en cuenta las restricciones de los contextos y sujetos implicados.

El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. Supongamos, por ejemplo, que hay consenso en que uno de los criterios es que los alumnos hayan aprendido (criterio cognitivo), que otro sea que se les haya enseñado unas matemáticas relevantes (con resolución de problemas, modelización, etc.) (criterio epistémico) y otro sea que se debe motivar a los alumnos para conseguir su implicación (criterio afectivo). Es relativamente fácil conseguir alguno de estos tres criterios por separado, pero lo que es más difícil y valioso es conseguir un cierto equilibrio entre los tres. Metafóricamente, un barco se hunde si no lleva la carga equilibrada.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, y en definitiva responder a la pregunta genérica, ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad está inspirada en la teoría consensual de la verdad de Peirce y de sus desarrollos y adaptaciones posteriores realizadas por autores como Apel (1991) y Habermas (1997). En esta teoría, "verdadero" es, en principio, un enunciado para un usuario cuando cree que cualquier otro sujeto racional estaría dispuesto a asignar el mismo predicado al enunciado. La verdad no se piensa en relación a un mundo separado de ideas, no como "conformidad" con ideas trascendentes, sino cómo aquello que podría ser defendido ante un conjunto de interlocutores y aceptado por ellos.

3. Descripción del fenómeno

En el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019) se ha desarrollado un modelo teórico de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas llamado modelo CCDM (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

En diferentes investigaciones y contextos de formación, se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias de este modelo y aprendan los conocimientos que se contemplan en él (por ejemplo, Rubio, 2012; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos de (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico propuestos por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010), ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo CCDM. Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo de análisis emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo.

Dichos ciclos formativos (talleres), en el marco del EOS son considerados experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor (EDCCP) y son un tipo de Teacher Development Experiment (TDE). Los TDE estudian el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan en los principios de los experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000), lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. Estos dispositivos formativos, siempre se inician con una primera fase de reflexión en la que se les pide a los asistentes que reflexionen, sin darles ninguna pauta, sobre un episodio de aula (video, transcripción, etc.), se les pide que comenten lo que les parece más relevantes, significativo, etc. en base a su trayectoria anterior.

Estos EDCCP se han realizado en muchos países diferentes (España, Brasil, Chile, Ecuador, Costa Rica, Argentina, México, Perú, Colombia) y con diferentes tipos de profesores (profesores en formación, formadores de profesores, profesores en ejercicio) y de diferentes niveles educativos (primaria, secundaria, bachillerato y postgrado) —dos de las cuales están descritos en Rubio (2012) y Seckel (2016). En estas experiencias se han observado algunas regularidades:

1) Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.

2) Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos (relacionados con las matemáticas, cognitivo, relacionados con el entorno curricular, cultural y sociolaboral, con la gestión de la interacción, con aspectos emocionales y afectivos, con el uso de recursos, etc.).

3) Cuando las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor.

4) La valoración positiva de estos criterios se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

5) Estos criterios coinciden con algunos componentes de los criterios de idoneidad didáctica.

La explicación de por qué los CI funcionan como regularidades implícitas en el discurso del profesor hay que buscarla en la génesis de dicho constructo.

4. Génesis y desarrollo del constructo idoneidad didáctica

Las decisiones adoptadas para delimitar las bases que han permitido el desarrollo del constructo idoneidad didáctica han sido (Breda, Font y Pino-Fan, 2018):

1) La primera decisión es que debe ser un constructo que permita al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se realiza.

2) La segunda decisión, derivada de la primera, es utilizar un término que tenga un cierto aire de familia con el término calidad, pero en el que los aspectos contextuales sean más predominantes que los estructurales o inherentes. Por esta razón, se optó por el término idoneidad para introducir el constructo CI.

3) La tercera decisión es considerar que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste se orienta a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor. Desde esta perspectiva, la DM nos puede ofrecer principios provisionales (un tipo de normas llamados aquí criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, o bien por un sector importante de ella, que pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

4) La cuarta decisión es que el constructo de idoneidad didáctica ha de ser multidimensional y, por tanto, ha de descomponerse en idoneidades parciales y, a su vez, cada una de ellas hacerlo en componentes e indicadores.

5) la quinta decisión es que un proceso de instrucción se considera idóneo cuando se consigue un cierto equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, y no cuando sólo se dan algunos de ellos.

6) La sexta decisión es que los criterios de idoneidad parciales (en tanto que consensos a priori) pueden entrar en conflicto con el contexto en que trabaja el docente, lo cual comporta, primero, tratar los CI de manera conjunta (y no como criterios independientes como frecuentemente se hace en el caso de la calidad) y, segundo, a cuestionar o relativizar la validez de un determinado criterio en un contexto específico, lo cual lleva a dar pesos relativos diferentes a cada criterio en función del contexto.

Esta sexta decisión es posible porque los CI se consideran como normas que son principios en lugar de normas que son reglas. Los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por peso. Dicho de otra manera, los CI, en tanto que principios, no son binarios, son graduales.

7) La posible contradicción entre la quinta y la sexta decisión se puede resolver mediante el rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje. En efecto, de acuerdo con la sexta decisión, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección. Ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevalezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada.

La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas? ya que es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad relacionada con la educación matemática; clarificando, a ser posible, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en su generación. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de CI, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica.

A continuación, explicamos brevemente estas dos fases que han llevado al constructo CI, compuesto por seis criterios de idoneidad didáctica parciales, cada uno, a su vez, desglosado en componentes e indicadores, cuya función es señalar aspectos a mejorar en la práctica del profesor.

Para el desarrollo del constructo CI, se han considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de la DM (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Las principales tendencias que se tuvieron en cuenta fueron: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática, etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El caso paradigmático de reconversión de algunas de estas tendencias en principios explícitos es el caso de los principios del NCTM (2000): currículum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología e igualdad. En el EOS se consideró que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM, reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los CI, o bien podían contemplarse como componentes suyos. En concreto, se reinterpretaron los principios del NCTM como se explica en Breda, Font y Pino-Fan (2018). Por ejemplo, el principio del currículum del NCTM señala claramente la idea de unas matemáticas importantes. Por esta razón, este principio, en la propuesta de criterios de idoneidad, se descompone en dos. Uno llamado criterio de idoneidad epistémica, que se relaciona con la idea de matemáticas importantes, y otro, llamado criterio de idoneidad ecológica, que se refiere al hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen que tener en cuenta el entorno en que se realizan. Por entorno se entiende todo aquello que está alrededor del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en ella, en particular el currículum oficial.

Además de las tendencias y principios comentados anteriormente en el área de la DM se han generado conocimientos y resultados que gozan de amplio consenso. Algunos de los aportes de los diferentes enfoques del área de la DM también se han tenido en cuenta para el desarrollo del constructo CI (Godino, 2013).

5. Consideraciones finales

Tal como se ha explicado antes, en diversas investigaciones (Seckel y Font, 2015; Morales y Font, 2017; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Morales-López y Font, 2019) se ha observado el uso implícito de los criterios de idoneidad didáctica por parte del profesorado de matemática en formación inicial y continua cuando reflexionan sobre su propia práctica o la de otros; puesto que los criterios de idoneidad didáctica funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representan una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta noción para guiar su reflexión. Una posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. Esta última explicación donde más plausible parece es en la formación de futuros profesores, ya que es evidente que ellos no han participado en la generación de los consensos que son el soporte de los criterios de idoneidad didáctica. Por tanto, en la formación inicial de profesores, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo.

Con relación a la cuestión de cómo afecta a la práctica del profesor un constructo como el de idoneidad didáctica, la primera consideración es que es una herramienta que se puede enseñar a los profesores en formación y en servicio para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Lima, 2015). En particular, los criterios de idoneidad didáctica se están enseñando como contenido para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica en diferentes postgrados.

La segunda, es que su aplicación concreta debe ser situada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. Se trata de contrastar el ideal con la realidad, pero en lugar de responsabilizar al profesor del desfase inevitable entre ambos, el uso de los criterios de idoneidad didáctica le da la posibilidad al profesor de reflexionar y decidir, de manera autónoma y en función del contexto, acciones para conseguir una mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Los criterios de idoneidad son una guía de orientación para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no unos principios o criterios que produzcan la frustración del profesor normal al no poder alcanzarlos.

En cada contexto el profesor puede cuestionar ciertas verdades que tienen un amplio consenso. Por ejemplo, puede haber un gran consenso en que organizar la clase en forma de proyecto de trabajo y dando mucho peso a la modelización es, a priori, lo más deseable; pero, si tenemos que hacerlo con un grupo de alumnos heterogéneos, en los que la capacidad de concentración dura poco tiempo, quizás esta verdad deba ser cuestionada en este contexto particular. Con este ejemplo se pretende señalar que un consenso asumido en el área de la Didáctica de las Matemáticas como una buena manera de enseñar las matemáticas puede funcionar de modo incoherente o producir contra efectos no previstos, al encarnarse en unas prácticas de enseñanza en un contexto de aula (espacio-temporal) determinado.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias y bibliografía

Apel, K.O. (1991). *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Barcelona: Paidós e I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

Bartolini, M. G. (2018). Answer to Gascón y Nicolás. *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 50-53.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 44-49.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37 (3), 26-30.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics, *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 35-40.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V, (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema,* 31(57), 90-113.

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En, J. A. Nicolás y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Madrid: Tecnos.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, 45, e189468. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1678- 4634201945189468

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics. 39*(1), 30-34.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 19(1), 71-98.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. Tesis de Doctorado, Universitat de Barcelona.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis de Doctorado. Universitat de Barcelona.

Seckel, M.J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, 19, 55-75.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematicals and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Use of open source mathematics textbooks in university courses[1]

Vilma Mesa

Abstract

In the *Undergraduate Teaching and Learning in Mathematics with Open Software and Textbooks* project we study the use of open source textbooks in the teaching and learning of mathematics at the university level (Beezer et al., 2018). The project gathers (a) real-time, individualized viewing data from three dynamic university textbooks for calculus, linear algebra, and abstract algebra; (b) ongoing surveys of users' descriptions of the textbook use; (c) users' questionnaires (beliefs and attitudes towards mathematics, technology, teaching, and learning); and (d) student performance (tests of knowledge and grades). The textbooks have been enhanced with a variety of features (WeBWorK, Geogebra, Interactive Reading Questions, and computational cells). In this article I highlight the theoretical and methodological approaches used in the project to answer two questions: How do students and instructors use textbooks? and How can we develop textbooks that will improve teaching and learning?

Keywords: open-source textbooks, university textbook use, data analytics, calculus, linear algebra, abstract algebra.

Resumen

En el proyecto it Undergraduate Teaching and Learning in Mathematics with Open Software and Textbooks se estudia el uso de libros de texto de código abierto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario (Beezer et al., 2018). El proyecto recoge (a) datos de visualización individualizados en tiempo real de tres libros de texto universitarios dinámicos para cálculo, álgebra lineal y álgebra abstracta; (b) encuestas continuas de las descripciones de los usuarios sobre el uso de libros de texto; (c) cuestionarios de los usuarios (creencias y actitudes hacia las matemáticas, la tecnología, la enseñanza y el aprendizaje); y (d) desempeño del estudiante (pruebas de conocimiento y calificaciones). Los libros de texto se han mejorado con una variedad de características (WeBWorK, Geogebra, Preguntas interactivas de lectura y celdas computacionales). En este artículo se destacan los enfoques teóricos y metodológicos utilizados en el proyecto

V. Mesa
School of Education, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA
vmesa@umich.edu

[1] Este trabajo corresponde a la participación de la autora en una mesa redonda plenaria realizada en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de junio de 2019 y aceptado el 28 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 162–169. Costa Rica

para responder dos preguntas: ¿Cómo usan los libros de texto los estudiantes y los instructores? y ¿Cómo podemos desarrollar libros de texto que mejoren la enseñanza y el aprendizaje?

Palabras clave: libros de texto de código abierto, uso de libros de texto universitarios, análisis de datos, cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta.

Within the array of resources for teaching and learning, the textbook continues to be the most prevalent one for instructors and students. Textbook formats have been changing from paper to digital, open source formats, including sophisticated tools such as computing cells, annotation tools, and powerful search engines, easing access at relatively low cost. Importantly, open source textbooks never expire or go out of print and can be distributed at no cost to students, making them practically fully accessible. The study we report here is part of a large funded project that seeks to describe how instructors and students use three open-source, technologically enhanced textbooks: Active Calculus (Boelkins, 2018), Linear Algebra (Beezer, 2017), and Abstract Algebra (Judson, 2017). These textbooks have been created in a markup language called PreTeXt that allows for the textbooks to be viewed in any device and in any platform.

We use Rezat and Strässer's (2012) didactical tetrahedron to investigate how resources mediate instruction (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003). Our conceptualization of instruction, as the interactions between the instructor, students, and the mathematics content, is depicted in the base of the tetrahedron (Figure 1).

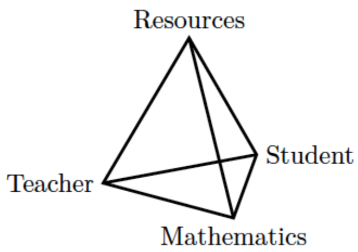


Figure 1. The didactical tetrahedron, that indicates how resources mediate the various elements of instruction (Rezat & Strässer, 2012, p. 241)

To understand how resources are used, we follow Gueudet and Trouche (2009) in their definition of documents: the combination of a set of resources plus the schemes of utilization given by the users (instructor and students). Resources are defined as the collection instruments gathered for a particular purpose (e.g., textbook, past lecture notes, syllabi in the case of the instructor; class notes, homework, index cards in the case of the students). Schemes of utilization include the processes that users engage in as they use the resources. These schemes have three distinct components, a material component (how the physical textbook or software is manipulated), a mathematical component (e.g., how the mathematical definitions are changed from canonical definitions), and the didactical component (e.g., how specific features are used by instructors and students). We seek to describe two processes, *instrumentation*, that considers the influences on the user of the set of available resources, and *instrumentalization*, how the users change the resources as they use them (see Figure 2).

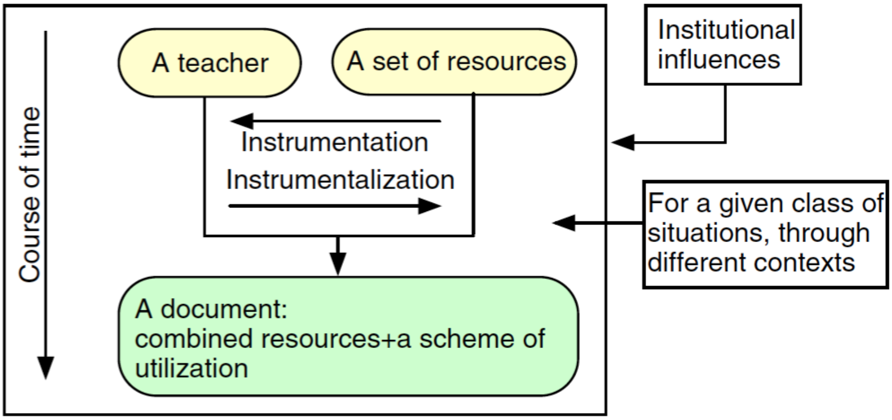


Figure 2. The documentational approach (Gueudet and Trouche 2009).

We do these by attending to two areas of instructors' work: lesson planning and its enactment seeking to identify operational invariants, instructors' beliefs that shape the design, and use of resources (e.g., beliefs about ways with which students better understand definitions). Two areas of students' work were considered: how they read the textbook and how they prepare for exams.

1. Methods

We use a mixed methods design to gather use data from students and instructors as they engage with the textbooks (see Figure 3).

	Beginning of term	2	4	6	8	10	12	14	End of term
Teacher surveys	X								
Teacher logs		X	X	X	X	X	X		
Course syllabi	X								
Computer-generated data of teacher and student textbook viewing									
Student logs		X	X	X	X	X	X		
Student survey					X				
Student tests	X							X	
Student grades									X

Figure 3. Data collection over a full term. An X indicates the timing of data collection for each type of data. The continuous line for computer generated data represents data that is automatically collected as users interact with the textbooks.

Instructors and students fill out surveys at different points in time to describe their beliefs and attitudes towards mathematics and technology. We collect tests of students' knowledge at the beginning and at the end of the semester to gather information about their knowledge growth. In addition we collect student and instructor logs (online surveys with four to seven questions about the use of the textbook during the past two weeks). In addition we collect computer generated viewing data (see Figure 4) which can be navigated at the user level (see Figure 5), time spent and number of clicks done on each textbook section and element (see Figure 6).

To analyze the data we use ongoing natural language processing (Blei, Ng, & Jordan, 2003) to gather themes from all the student responses to logs. Instructors' responses are analyzed manually to identify the schemes of use of their textbooks. We aggregate across semesters to identify recurring themes and triangulate the log and viewing data with the time data to corroborate themes and patterns of viewing.

2. Results

I report briefly on findings from (1) the analysis of bi-weekly log data from 102 students from four instructors in four different states who were using a dynamic linear algebra textbook (Beezer, 2017) in the Spring semester of 2018. The textbook includes common linear algebra chapters (e.g., systems of linear equations, matrices, vector spaces, etc.) and (2) the various documents that instructors and students created as they used the textbooks.

Analysis of bi-weekly log data

The analysis of the viewing data revealed, unsurprisingly, that viewing tended to occur during the days when the classes were offered (mostly during class sessions), close to exams days, or when homework was due. The students mainly used solutions of exercises—in 17,405 viewings, 81% of the viewing time was for solutions of exercises, 15% for examples, and 5% for all the other elements. In the log responses students reported that they checked the textbook the day before class or the last day of their break; they also used it to study for the upcoming class, or when they were stuck, missed class, or had not understood their instructor's explanation. Students reported using mainly problems, exercises, and examples as they were preparing for class. When asked about their use of theorems, definitions, and examples, students said those were mainly used when producing notes for later use because they wanted to make sure they were connecting ideas and knew the basic definitions.

We found six themes in the analysis of student responses to their viewing of the linear algebra textbook ($n = 120$). The students indicated:

- Theme 1: Viewing the textbook to study the material (58%); in addition, they mentioned some ways in which they do so. Students said that they:
- Theme 2: Start viewing examples (skipping text); then attempt the examples; and if need be, view the text to clarify ideas (17%).
- Theme 3: Start viewing homework; if the solution is wrong, read solution in detail to understand what problems they had (10%).

- Theme 4: Viewing to read word for word (8%).
- Theme 5: Viewing to cross-reference with class work (5%).
- Theme 6: Viewing formulas and definitions and keep track on personal document (3%).

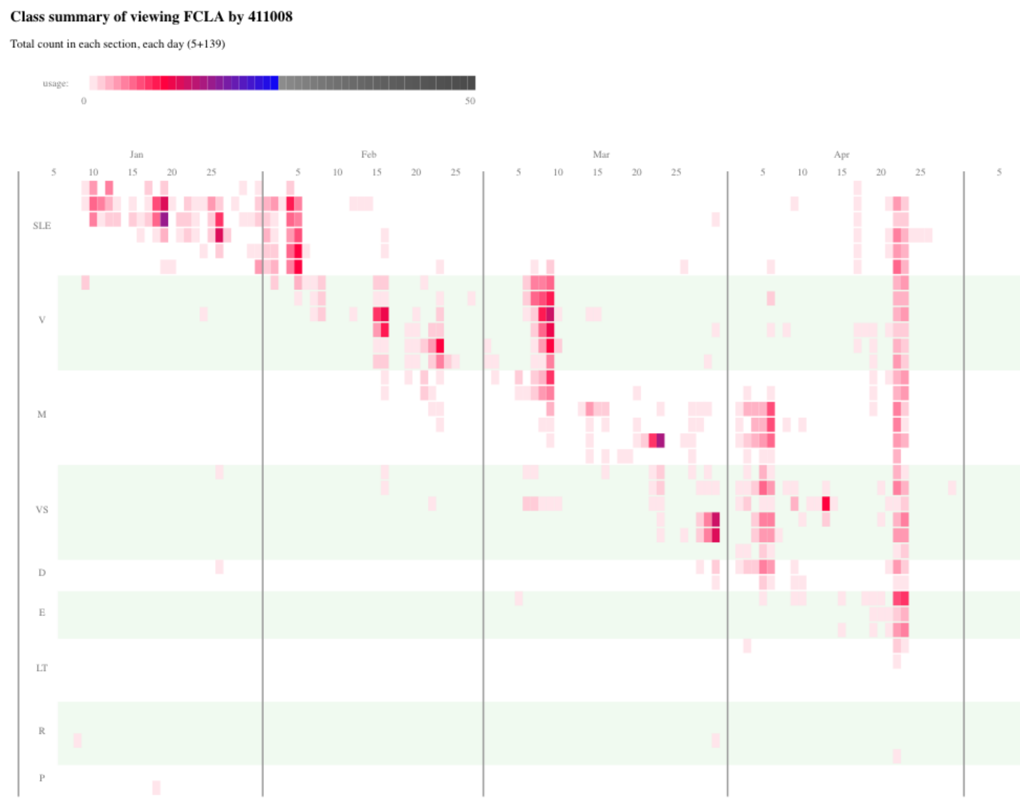


Figure 4. Viewing data for a course using the linear algebra textbook.

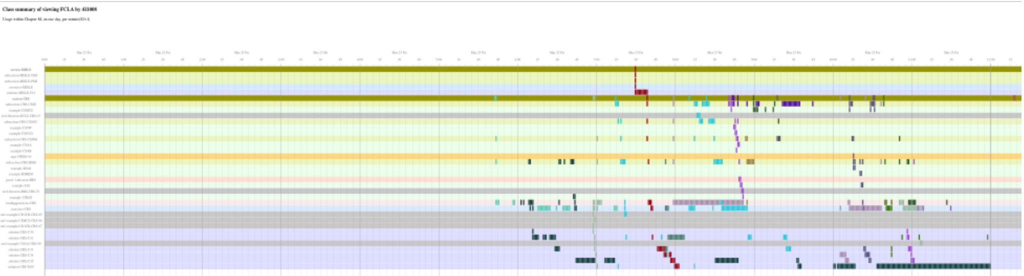


Figure 5. Viewing data at the individual level for a course using the linear algebra textbook.

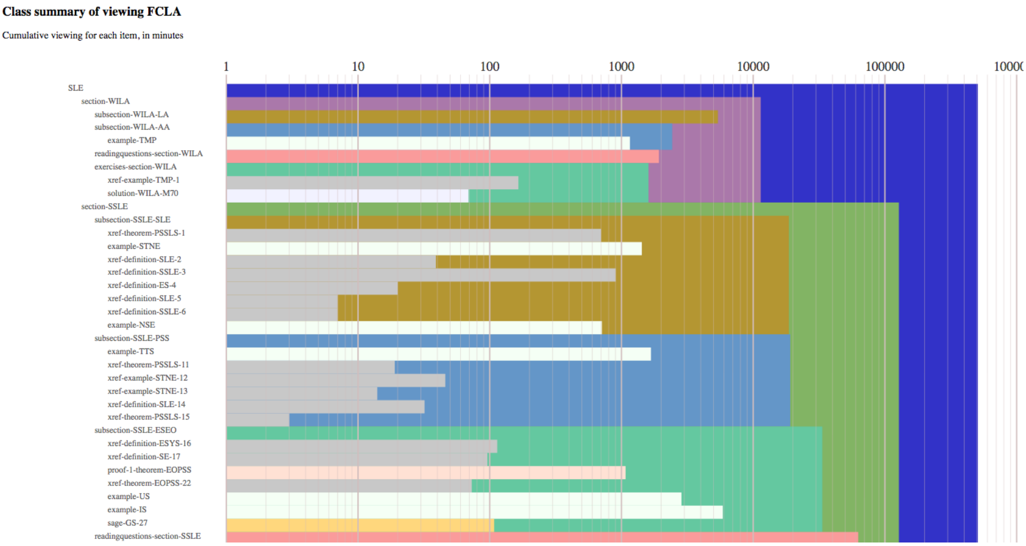


Figure 6. Data collection over a full term.

Here are some illustrative examples:

- "I normally spend a couple of hours studying the book, I don't have a set schedule or timetable for my studying. I also use my textbook to review and touch up on things I haven't looked at in a while." (Theme 1)
- "Feb 19 Mon, Chapter M 6-9 PM: I was looking over example problems to help me prepare for my quiz, and I looked at definitions and theorems to help explain notation and solutions." (Theme 2)

Analysis of documents

Instructors created lecture notes, syllabi, personal notes, and assessments, all with the goal of facilitating their teaching of the course. Students created class notes, homework documents or solutions, and textbook notes in order to improve their understanding, for practice, and reminders or memorization. Both students and instructors used many other resources. In terms of the instructors, they relied on colleagues, past notes, notes from when they were students, other textbooks, Wolfram alpha and other mathematical programs such as Sage, Maple or Mathematica, the textbook authors, and programming software, such as Python. Students mentioning working with classmates, the Internet, Google, YouTube, Chegg, Khan Academy, class lecture videos, other printed and HTML textbooks, family members, and their instructors. Students did not use the open-source feature and infrequently used computational cells.

Figure 7 summarizes the instrumentalization processes for the document *lecture notes* that we have found. They range from the less to more dynamic instrumentalizations: how in each of those uses, the textbook was used to shape the *lecture notes*.

	Lecture Notes Format	Instrumentalization
↓Less to More Dynamic↓	Handwritten notes in paper (from bullet points to full text)	References to the textbook (section, page number, verbatim examples, theorems, text)
	Online videos	Instructor read whole sections pointing to key words or theorems Instructor included talked aloud solutions to textbook problems
	Beamer/Power Point presentations	Hyperlinks to the textbooks
	Sage worksheet	Hyperlinks to the textbooks Inclusion of Sage cells to graph and calculate

Figure 7. Various instrumentalizations of the document *Lecture notes*, from less to more dynamic.

During class time, some instructors copied their notes on the blackboard, whereas some distribute them ahead of time to the students, either as PowerPoints that they could annotate by printing them, or as Sage worksheets that students could compile and manipulate in real time. The rules of actions and the reasons students and instructors had to use various documents are given in Figure 8.

	Rules of Action	When/Why
Students	Read	Study for examinations or class (study notes)
	Look for definitions	Clarify meaning to work out homework (homework solution)
	Study examples and proofs	Work out the homework (homework solution)
Instructors	Identify major course topics	Create syllabus before the term starts
	Identify theorems and definitions	Create lecture notes for each class; ensure consistency
	Identify examples	Clarify definitions and theorems in class (lecture notes)

Figure 8. Rules of action, reasons, and situations for using documents by students and instructors.

3. Discussion

We were able to identify various ways in which the students and the instructors created documents and instrumentalized the textbooks as they created those documents. While the documents created are not novel, we are able to clearly identify them and illustrate the ways in which the users used them. We found that students and instructors seemed reluctant to take full advantage of novel features (such as the programming cells) opting instead for using their usual processes of document generation. We speculated that by itself, the design of the textbooks is insufficient for facilitating the adoption of alternative ways of using these textbooks in generating those documents. We noticed that students did not use features that were not required by their instructors and that they used those that their instructors said were important to use (e.g., definitions, theorems, examples, proofs).

Instructors might need training about ways to take advantage of the open nature of the textbooks. Some instructors, for example, only associated open source with the free access of the textbooks. We are planning gatherings and conversations with designers, authors, and instructors, so that the process of creating the textbooks becomes more transparent. Textbook production is expensive, and thus, research that documents how open access textbooks can be made widely available is important. Yet, without knowing how to best take advantage of the new technologies, we might not realize their potential within mathematics classrooms.

Acknowledgment

Funding for this work has been provided by the National Science Foundation (IUSE 1624634, 1821114). Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation. Thanks to David Farmer, the American Institute of Mathematics and the members of the Research in Teaching Mathematics in Undergraduate Settings (RTMUS) at the University of Michigan for their research support.

Referencias y bibliografía

Beezer, R. (2017). *First course in linear algebra*. Gig Harbour, WA: Congruent Press. Available at http://linear.pugetsound.edu/. HTML available at **http://linear.ups.edu/html/fcla.html**.

Beezer, R., Judson, T., Farmer, D., Morrison, K., Mesa, V., & Lynds, S. (2018). Undergraduate Teaching and learning in Mathematics with Open Software and Textbooks (UTMOST): National Science Foundation (DUE 1821706,1821329,1821114,1821509).

Blei, D. M., Ng, A. Y., & Jordan, M. I. (2003). Latent Dirichlet allocation. *Journal of machine Learning research, 3*(Jan), 993-1022.

Boelkins, M. (2018). *Active Calculus*. Available at https://activecalculus.org/single/: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*, 119-142.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Judson, T. (2017). *Abstract algebra: Theory and applications*. Available at http://abstract.pugetsound.edu/. HTML available at **http://abstract.ups.edu/aata/**. Orthogonal Publishing L3C.

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education, 44*, 641-651. doi:10.1007/s11858-012-0448-4

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B., & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 22*(2), 152-175. doi:10.1080/10511970.2010.509336

Una visión actual del CIAEM: primeros años del siglo XXI[1 2]

Carlos Sánchez Fernández

Resumen

¿Cuál ha sido la evolución del *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) en el siglo XXI? ¿Cuáles sus principales objetivos y realizaciones? ¿Cuál ha sido su relación con la comunidad internacional de Educación Matemática y en particular con la *International Commission on Mathematical Instruction* ICMI? ¿Su participación en la creación y fortalecimiento de nuevos espacios regionales de la Educación Matemática? Y más allá de las dimensiones organizacionales: ¿cuáles han sido los temas dominantes en las actividades plenarias de las *Conferencias Interamericanas de Educación Matemática*? Desde estas interrogantes básicas, trataremos de encauzar una reflexión prudente, pluralista y crítica, sobre el pasado más reciente del CIAEM. En estos pocos años vividos en el siglo XXI-concretamente a partir de la XI Conferencia (2003, Blumenau)- ha habido un posicionamiento del CIAEM a partir del cultivo de la calidad académica, una innegable vinculación más estrecha con la comunidad internacional, usos de medios tecnológicos, y dinámicas y características que bien nos permiten afirmar que se ha dado un salto cualitativo en la historia de esta agrupación. Nuestro propósito es estimular la reflexión consciente, para extraer las ideas fértiles y sugerir acciones eficaces que mantengan un alto nivel de servicio social en las Américas.

Palabras clave: educación matemática, historia de la educación matemática, CIAEM, cultura matemática.

Abstract[3]

What has been the evolution of the Inter-American Committee on Mathematical Education (IACME) in the 21st century? What are its main goals and accomplishments? What has been its relationship with the international community of Mathematics Education, and, in particular, with the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)? How has

C. Sánchez
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

[1] Este trabajo corresponde a la participación del autor en una mesa redonda plenaria realizada en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] Para redactar esta ponencia hemos utilizado en especial, y profusamente, el lúcido trabajo del presidente del CIAEM Angel Ruiz Zúñiga, publicado como Ruiz, A. (2013). El autor asume toda la responsabilidad en las afirmaciones y criterios expuestos en el presente análisis.
[3] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 4 de junio de 2019 y aceptado el 27 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 170–177. Costa Rica

it participated in the creation and strengthening of new regional spaces for Mathematics Education? And beyond the organizational dimensions: What have been the dominant themes in the plenary activities of the Inter-American Mathematics Education Conferences? From these basic questions, we will try to channel a prudent, pluralistic and critical reflection on the most recent past of IACME. In these few years lived in the 21st century - specifically from the XI Conference (2003, Blumenau) - there has been a positioning of IACME beginning with the cultivation of academic quality, an undeniable closer connection with the international community, uses of technologies, and dynamics and characteristics that allow us to affirm that there has been a qualitative leap in the history of this group. Our purpose is to stimulate conscious reflection, extract fertile ideas and suggest effective actions that maintain a high level of social services in the Americas.

Keywords: Mathematics Education, history of Mathematics Education, IACME, mathematical culture.

1. Contexto histórico socio cultural: Comienzos del tercer milenio

En los últimos años se ha dado un notable avance en la Educación Matemática internacional y particularmente el CIAEM ha conseguido una gran proyección en el ámbito americano y un posicionamiento sobresaliente en esa comunidad internacional, especialmente alrededor de las acciones desarrolladas por el ICMI y eso constituye un logro incuestionable que ha representado compromiso, sapiencia y, sobre todo, liderazgo. Pero también este avance se ha visto influido por condiciones globales que tanto han favorecido nuevos desarrollos autóctonos en el área interamericana. En nuestra opinión, se destacan las características siguientes:

- Cambios notables en las ideologías que dominaron en América Latina durante la Guerra Fría y el periodo neoliberal. Primero tuvimos una "Ola Rosa" desde la izquierda y después se han entronizado representantes de una "Ola Lila" por la derecha.

- Demanda por más instituciones de educación superior, lo que ha promovido la creación de muchas instituciones privadas de un nivel muy diverso. En algunos países esto ha propiciado inestabilidad del sistema y manifestaciones de protesta.

- Intensificación de la globalización de la vida económica, social y cultural, con lo que se ha facilitado el intercambio de experiencias, pero también han penetrado fácilmente costumbres y vicios que provocan una diversión más.

- Impacto extraordinario de las tecnologías digitales, Internet y las redes sociales virtuales como forma clave de comunicación y de organización que ha revolucionado el sistema educativo y también distrae al joven.

- Leve mejoría de la situación socioeconómica de la región sin que se haya eliminado, ni con la "Ola Rosa" de la izquierda, ni con la "Ola Lila" de la derecha, el cada vez más peligroso desequilibrio entre los que poseen las riquezas y los grupos desposeídos.

2. Características de la última etapa del CIAEM: 2003-2018

Se puede decir que el CIAEM inició una nueva etapa histórica en la primera década del siglo XXI, con 10 objetivos principales que poco a poco, y con notable esfuerzo del núcleo directivo en este periodo, se han convertido en logros:

1) ***Potenciar la calidad académica y la proyección de las conferencias interamericanas***. Esto se logró con dos acciones muy claras: por un lado, mediante un aumento considerable en especialistas de alto nivel de la comunidad internacional de Educación Matemática (el número de oradores invitados de las CIAEM ha oscilado entre 30 y 50 personalidades); y por otra parte, con demandas mayores de excelencia científica, mediante revisiones rigurosas y toda una estructura científica muy cuidadosa. Esto ha sido más notable a partir del XIII CIAEM de Recife, Brasil. Las CIAEM se han convertido en este periodo en una referencia regional de calidad para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

2) ***Consolidar la publicación regular de trabajos seleccionados de las Conferencias***. Esto se consiguió a través de un convenio con la revista Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática (editada por la Universidad de Costa Rica).

3) ***Crear mecanismos de reconocimiento a personalidades de la comunidad internacional de Educación Matemática*** tanto por sus trayectorias académicas como por su apoyo a la región latinoamericana y también al CIAEM. En este sentido se crearon la Medalla Luis Santaló (que se entrega en cada CIAEM desde 2011) y la Medalla Marshall Stone (se entregó por primera vez en la XV CIAEM, 2019).

4) ***Incrementar la asociación con la comunidad internacional de Educación Matemática***. Esto se ha logrado con el protagonismo de directivos del CIAEM en las actividades del ICMI y de la International Mathematical Union IMU.

5) ***Apoyar la creación y desarrollo de nuevos espacios regionales para la Educación Matemática***. Esto se logró especialmente mediante el apoyo a la creación de la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE), que nació en un taller seminario del Capacity and Networking Project CANP del ICMI, Costa Rica, 2012.

6) ***Apoyar vitalmente congresos regionales de Educación Matemática***. Esto se ha conseguido con la organización de los Congresos de Educación Matemática de América Central y El Caribe (CEMACYC), celebrados con sonado éxito, el primero en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013 y el segundo en Santiago de Cali, Colombia, en noviembre del 2017 y ya se apoya la realización del siguiente en Costa Rica en el 2021.

7) ***Consolidar el uso intensivo de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM***, tanto en la organización de sus eventos como en su proyección y desarrollo. Evidenciado a través de un conjunto de plataformas alimentadas hábilmente desde Costa

Rica que nutren sitios web, redes sociales y la plataforma que organiza las conferencias internacionales.

8) ***Crear y velar por el desarrollo de una comunidad virtual del CIAEM***. No ha tenido todo el impacto generalizado que se desea, pero sin dudas ha jugado un papel definitivo en los últimos años.

9) ***Dinamizar y formalizar su estructura organizativa***. Esto se consignó mediante Términos de Referencia y en particular con la obtención de personalidad jurídica en México para el Comité Interamericano de Educación Matemática. En este periodo que analizamos, el CIAEM se concibe como una Red, como una Comunidad académica y no como una sociedad profesional de carácter internacional.

10) ***Mantener una línea importante de colaboración con el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los Estados Unidos de América***. En este periodo, además de continuar una presencia en las reuniones nacionales del NCTM, se han traducido al español varios textos del NCTM, por ejemplo Principles to actions: Ensuring Mathematical Success for All que apareció en febrero 2014 y Prácticas para orquestar discusiones productivas en matemáticas con una primera edición en español en junio 2016. Estos se han distribuido en las actividades del CIAEM. Estas traducciones han sido realizadas por medio de convenios y contratos formales entre las directivas del NCTM y el CIAEM.

Un detalle interesante en esta nueva etapa fue la participación de directivos, expresidentes y varios miembros de la red del CIAEM apoyando una profunda reforma curricular de la enseñanza de las matemáticas en la educación preuniversitaria en Costa Rica (véase **https://www.reformamatematica.net**), aprobada por las autoridades educativas de ese país en 2012 (Ruiz, 2013 y 2018). Varias acciones del CIAEM y de REDUMATE han permitido difundir las lecciones de esa importante reforma en toda la región.

3. CIAEM, ICMI y nuevos espacios regionales para la Educación Matemática

El CIAEM siempre ha mantenido una perspectiva interamericana, en particular, entre los países más desarrollados y los que todavía están en vías de desarrollo. Pero también entre la región americana y el resto del mundo. Una de las relaciones más importantes para el CIAEM siempre ha sido con el ICMI. Marshall Stone siendo presidente del ICMI fundó el CIAEM, y distinguidos directivos del CIAEM han estado en el Comité Ejecutivo del ICMI (U. D'Ambrosio, E. Luna, C. Vasco). La relación o cercanía sin embargo ha tenido altibajos. Particularmente, entre 1998 y el 2008 no hubo un representante del CIAEM en el Comité Ejecutivo del ICMI y tampoco lo hay entre el 2017 y el 2020.

Entre el 2007 y el 2016, esto debe subrayarse, se dio una relación especial entre el CIAEM y el ICMI. En la XII CIAEM de Querétaro participó Michèle Artigue en ese entonces presidenta del ICMI (aunque había participado también en la XI CIAEM en Blumenau). Uno de los elementos especiales, sin embargo, fue que este evento sirvió a su vez para apoyar al ICME 11 que se desarrollaría en Monterrey en el 2008.

Un factor que profundizó la nueva relación fue la incorporación del presidente del CIAEM, Angel Ruiz Zúñiga, dentro del *International Program Committee* del ICME 11, lo que permitió concertar diversas acciones de miembros del CIAEM en el congreso. La cercanía entre CIAEM-ICMI se intensificó aún más cuando el presidente del CIAEM fue electo uno de los vicepresidentes de ICMI para el periodo 2010-2012, lo que se anunció en ICME 11, y luego fue reelegido para el periodo 2013-2016 (esto nunca había sucedido anteriormente). Por decisión del Ejecutivo del ICMI el presidente del CIAEM fue designado para formar parte de la *Commission for Developing Countries* CDC de la IMU entre 2010 y 2018 (una de las comisiones más importantes del IMU). Véase IMU (2019). Estas posiciones ofrecieron oportunidades muy valiosas para fortalecer los lazos de CIAEM con ICMI y con IMU y, en particular, promover acciones en América Latina.

Una de las acciones más importantes dentro de esa nueva relación (y de las oportunidades abiertas) se dio alrededor del *Capacity and Networking Project* (CANP) del ICMI, el programa más importante del ICMI para países en desarrollo; este decidió realizar su segundo "workshop" (el primero había sido en Mali, África) para favorecer América Central y El Caribe. Así es como se organizó la Escuela seminario *Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática* (CANP 2012) en agosto de 2012, en Costa Rica. El "workshop" contó con la principal iniciativa del ICMI para propiciar el progreso de la Educación Matemática en regiones en vías de desarrollo, con el patrocinio del *International Council for Science* ICSU e IMU (cf. CANP,). El nivel de apoyo financiero y académico dado por ICMI al CANP de Costa Rica nunca se había dado en la región latinoamericana. El apoyo del CIAEM a este workshop fue muy fuerte (especialistas, representantes nacionales, seguimiento, coordinación, elaboración intelectual, ...). No habría sido posible ese evento sin el compromiso del CIAEM.

En el CANP 2012 se fundó la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE, http ://redumate.org) con una perspectiva hacia América Central y El Caribe, pero con una visión internacional muy amplia. Ya en noviembre del 2013 REDUMATE organizó el I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (información en el sitio **http://i.cemacyc.org**), en República Dominicana, que tuvo un gran éxito (más de 600 participantes, 150 oradores de 19 países) y en noviembre del 2017 se repitió el éxito logrado con un II CEMACYC entonces en Santiago de Cali, Colombia, (con 400 participantes). Véase **https://ii.cemacyc.org**. El apoyo del CIAEM a la Red y a estos congresos ha sido decisivo. Existe entonces una relación estratégica de cooperación entre CIAEM y REDUMATE (y una "intersección no vacía" entre ambos espacios).

El ICMI decidió realizar un CANP 5 en Lima en 2016 para favorecer una nueva región de América Latina (Bolivia, Ecuador, Perú, Paraguay). Tanto el presidente del CIAEM como uno de sus vicepresidentes (Patrick Scott) estuvieron en el "workshop" de este CANP en donde nació una nueva organización: *Comunidad de Educación Matemática de América del Sur* CEMAS: Esta iniciativa también se inscribió dentro de las oportunidades abiertas por la participación del presidente del CIAEM en el Ejecutivo del ICMI. Miembros de CEMAS y REDUMATE participan en las actividades de la otra Red y de las CIAEM.

Aunque el Comité Ejecutivo del ICMI no haya incluido en el periodo 2017-2020 un representante del CIAEM, eso no significa que las relaciones entre ambas organizaciones se vayan a debilitar. El periodo 2007-2017 afianzó una fructífera relación de cooperación académica. El CIAEM sigue siendo la organización multinacional oficial del ICMI en la región americana (ICMI, 2019).

4. Tendencias promovidas a través de las actividades plenarias de las CIAEM y los CEMACYC

Revisando los temas de las conferencias y las mesas plenarias que se han organizado en los cuatro CIAEM y los dos CEMACYC realizados a partir de 2003 hasta el 2019 encontramos una diversidad y énfasis muy similar al observado en los ICME (International Congress on Mathematical Education). Hemos resumido temas y nacionalidad de las personalidades invitadas para facilitar la reflexión.

Temáticas principales de las actividades plenarias:

Resolución de problemas: [6 act.]

Formación de profesores: [6 act.]

Experiencias de la Educación Matemática en las Américas: [6 act.]

Tecnologías digitales en Educación Matemática: [6 act.]

Historia y epistemología de las matemáticas: [5 act.]

Otros temas de Didáctica de la Matemática: [5 act.] (Competencias (2 act.), Situaciones didácticas (1 act.); Semiótica (1 act.), Currículo (1 act.).

Nacionalidad de los participantes en actividades plenarias:

- **Participantes del área interamericana** (contando repeticiones): Argentina [2]; Brasil [5]; Chile [1]; Colombia [7]; Costa Rica [3]; Cuba [3]; Guatemala [1]; México [4]; República Dominicana [2]; USA [5]; Venezuela [2].

- **Participantes de otras áreas** (contando repeticiones): España [4]; Dinamarca [2]; Francia [6]; Italia [1]; Japón [1]; Reino Unido [1]; Suráfrica [1]

Destacamos en todo este periodo la notable y contundente participación plenaria del infatigable Maestro Ubiratan D'Ambrosio y la destacada educadora investigadora Michèle Artigue, ambos con una larga y exitosa trayectoria profesional que, con sobrados méritos, ha sido reconocida internacionalmente.

Un comentario: aunque en las conferencias paralelas y en las temáticas principales de las CIAEM se ha incluido como temas centrales la formación inicial y continua de maestros y profesores, sería conveniente darle un lugar mayor en las plenarias. En particular, haciendo un llamado efectivo al desarrollo del pensamiento matemático y sobre todo en el uso adecuado de las prácticas argumentativas en el nivel secundario de enseñanza.

5. Perspectivas y desafíos

El CIAEM tendrá desafíos importantes en los próximos años. El escenario internacional ha cambiado mucho desde que nació en 1961, y aunque desde el 2003 solo han pasado poco más de 15 años, los cambios planetarios han sido extraordinarios. Las condiciones y las expectativas de individuos y organizaciones son otras. Estar atentos a los cambios generacionales y a los que provocan la tecnología y la sociedad contemporánea, será apenas un punto de partida. Resumamos algunas ideas sobre lo que consideramos más prioritario en el futuro próximo:

- Las acciones del CIAEM del futuro deberán asumir como una base los extraordinarios resultados obtenidos mediante los diez objetivos que se han desarrollado en los pasados años, y en esa dirección: velar dar continuidad a una labor por el fomento de la calidad intelectual de sus conferencias, la regularidad de sus publicaciones, el uso sabio de las tecnologías en sus quehaceres, la potenciación de los espacios en la Educación Matemática que se han creado con el patrocinio y la inspiración de ICMI (en particular con REDUMATE y CEMAS)

- Seguir cultivando la rica relación con el ICMI, el IMU y el NCTM que mucho se ha logrado fortalecer en los últimos años.

- Darle un espacio mayor en las plenarias a la formación inicial y continua de maestros y profesores. En particular, hacer un llamado más efectivo al desarrollo del pensamiento matemático y al uso adecuado de las prácticas argumentativas sobre todo en el nivel secundario.

- Seguir sumando y multiplicando profesionales de la Educación Matemática, investigadores, docentes y estudiantes al esfuerzo mancomunado por la excelencia profesional en toda la región. En este sentido, incorporar a una mayor cantidad de mujeres a las labores de promoción, organización y dirección a todos los niveles.

Finalmente, en los últimos años, el equipo directivo del CIAEM ha logrado mantener una relación de no confrontación con las otras organizaciones multinacionales que trabajan en la región (como la FISEM y el CLAME). De lo que se trata, con todos y para todos, es de colocar los objetivos de calidad, pertinencia y seriedad académicas como la base para que los profesionales de la Educación Matemática, investigadores, docentes y estudiantes sigan sumándose al esfuerzo por lograr un impacto mayor en la extensión de una cultura matemática integral sólida y pluralista en toda la región.

Referencias y bibliografía

Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM (2011). Términos de referencia. Descargado de **www.ciaem-iacme.org**.

D'Ambrosio, U. (2008). ICMI and its influence in Latin America, in M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction*

(1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education, Roma: Instituto Della Encyclopedia Italiana–Collana Scienze e Filosofia.

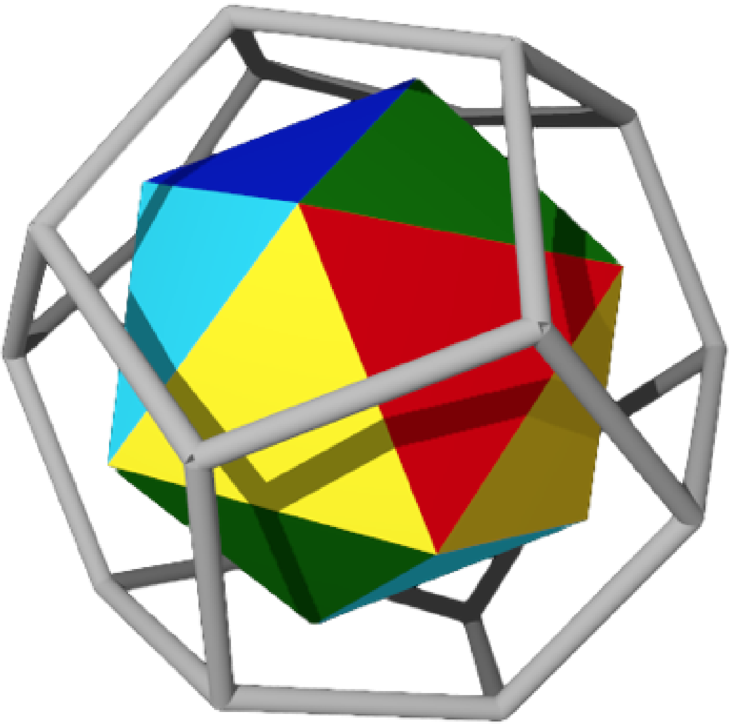
International Commision on Mathematical Instruction [ICMI] (2019). Affiliated Organizations. Descargado en enero 2019 de **https://www.mathunion.org/icmi/organization/affiliated-organizations**

International Mathematical Union [IMU] (2019). Members Commission for Developing Countries (CDC). Descargado de **https://www.mathunion.org/cdc/about-cdc/members** en junio de 2019.

Ruiz, A. (2013). El CIAEM y las organizaciones internacionales de Educación Matemática en América Latina. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 8. Número 11, pp. 15-25. Costa Rica

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México: Comité Interamericano de Educación Matemática Descargado de **https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf** en febrero de 2019.

Experiencias y propuestas



Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad[1]

Edwin Chaves Esquivel

Resumen

El currículo de Matemáticas de Costa Rica aprobado en 2012 plantea importantes retos a las autoridades del Ministerio de Educación Pública del país. Los docentes han enfrentado complicaciones para diseñar situaciones de aprendizaje congruentes con los fundamentos curriculares. Acá se ejemplifica un problema matemático para ser desarrollado en los salones de clase, cuya solución articula diferentes elementos curriculares. Se describe el momento y la intensidad en que cada uno de estos elementos participa. Entre otros aspectos se ejemplifica un modelo desarrollado por el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica que relaciona una serie de indicadores con tres niveles de complejidad, para evaluar el nivel de participación de los procesos y capacidades matemáticas en la solución del problema. Se espera que este ejemplo sea ilustrativo para favorecer una mejor comprensión de la puesta en práctica de este currículo y apoye una planificación educativa coherente con él.

Palabras clave: educación matemática, didáctica de la matemática, currículo matemático, planificación de tareas matemática.

Abstract[2]

The Mathematics curriculum of Costa Rica approved in 2012 poses significant challenges to the authorities of the Ministry of Public Education of the country. Teachers have faced complications in designing learning situations consistent with the curricular fundamentals. Here a mathematical problem is exemplified to be developed in classrooms, and the solution articulates different curricular elements. The interaction of the moment and intensity in which each of these elements is described. Among other aspects, a model developed by the Mathematics Education Reform Project in Costa Rica is exemplified, which relates a series of indicators with three levels of complexity, to assess the level of participation of mathematical processes and capacities in solving problems. This example is expected to be illustrative in promoting a better understanding of the implementation of this curriculum and in supporting coherent educational planning.

E. Chaves
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
echavese@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a la participación del autor en una mesa redonda plenaria realizada en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 8 de junio de 2019 y aceptado el 23 de julio de 2019.

Keywords: Mathematics Education, Mathematics teaching, Mathematics curriculum, Mathematics task planning.

1. Introducción

Desde el 2013 en Costa Rica se inició la implementación de un nuevo currículo matemático para la educación preuniversitaria. A pesar de que han transcurrido ya más de seis años desde que se inició este proceso, todavía quedan importantes retos para plasmar en los salones de clase lo establecido en el currículo. Una de las labores más importantes para este trabajo de aula consiste en la planificación de tareas o problemas dirigidos a los estudiantes que vengan a articular apropiadamente los diferentes elementos curriculares. En el presente documento se ejemplifica la interacción de los procesos matemáticos descritos en los programas en la solución de un problema que ha sido propuesto para trabajar con estudiantes de décimo año en concordancia con el currículo de matemática de Costa Rica.

2. Síntesis de la propuesta curricular

Los fundamentos teóricos que sustentan el currículo matemático de Costa Rica promueven la generación de capacidades cognoscitivas superiores en procura de lograr una competencia en el uso de las Matemáticas para la vida, consiste en promover la capacidad para utilizar la disciplina para un mejor entendimiento del entorno y favorecer la toma de decisiones (MEP, 2012).

Los conocimientos matemáticos incluidos en el currículo pertenecen a cinco áreas: *Geometría, Números, Relaciones y Álgebra, Medidas y Probabilidad y Estadística*. Para cada una de ellas se definen dos tipos de habilidades: específicas y generales. Las primeras son capacidades para desarrollar en el corto plazo e interactúan con los conocimientos matemáticos del área. Las segundas se plantearon para ser logradas a lo largo de un ciclo educativo[3], normalmente están constituidas por un grupo de habilidades específicas donde se establecen diversas formas de integración (Ruiz, 2018). La cantidad y calidad de los conceptos o conocimientos matemáticos ha sido formulada en función del progreso de las capacidades que se desean desarrollar.

Para una adecuada puesta en práctica del currículo se estableció como estrategia didáctica la resolución de problemas a partir de cuatro momentos: presentación del problema, trabajo independiente de los estudiantes, contrastación y comunicación de estrategias, y cierre o clausura (MEP, 2012. p.13). En los problemas de aula, se consideran dos etapas: en la primera se plantea uno o más problemas organizados para la generación de nuevos conocimientos o habilidades, en donde el estudiante pueda construir el aprendizaje y lograr habilidades en la búsqueda de soluciones a los problemas. En la segunda etapa se promueven problemas encaminados a la movilización de los conocimientos o habilidades

[3] La educación primaria está constituida de dos ciclos de tres años cada uno y la secundaria académica incluye un ciclo de tres años y el último de dos años.

adquiridas previamente, con el propósito de consolidar lo aprendido y su implementación (MEP, 2012).

Para lograr una adecuada transición entre interacción de los conocimientos matemáticos y habilidades específicas con las habilidades generales en camino a la competencia matemática, los estudiantes deben adquirir ciertas capacidades superiores transversales que permitan avanzar progresivamente. Estas capacidades se asocian a lo que el currículo consigna como *procesos matemáticos* (colecciones de acciones que fomentan las capacidades) y se activan al momento en que los estudiantes adquieren habilidades específicas en la implementación de conocimientos matemáticos mediante la resolución de problemas. En resumen, los procesos matemáticos constituyen actividades cognitivas que realizan los individuos dentro de las distintas áreas matemáticas. Se consideren cinco procesos

- *Razonar y argumentar*: incluye actividades mentales que desencadenan formas del pensamiento matemático para desarrollar capacidades en la comprensión de una justificación, además desarrollar argumentaciones y conjeturas, entre otras.

- *Plantear y resolver problemas*: Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales. Se trata de capacidades para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema.

- *Comunicar*: es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos. Busca generar la capacidad para expresar ideas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático de manera escrita y oral a otras personas.

- *Conectar*: pretende el entrenamiento estudiantil para la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas. De igual manera, persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.

- *Representar*: Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares). También pretende desarrollar capacidades para traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas. (Chaves, 2017. p.4)

La participación de los procesos matemáticos en forma sistemática permite generar las capacidades superiores (que llevan los mismos nombres de los procesos). Sin embargo, para alcanzar estas capacidades es necesario que en las tareas o problemas matemáticos que se utilizan en la acción educativa posean diferentes niveles de complejidad que, a su vez, son producto de la activación de estos procesos en diferentes grados. Los niveles considerados en el currículo se resumen en:

- *Reproducción*: se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.

- *Conexión*: remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.

- *Reflexión*: incluye la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. (MEP, 2012).

3. Propuesta para la valoración de problemas

Debido a la importancia que co NR leva el diseño de tareas o problemas matemáticos que sean consistentes con los fundamentos curriculares en cada una de las etapas, ya sea en el trabajo de aula o para la evaluación misma, a lo interno del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica se ha diseñado un modelo que permite evaluar los problemas en consonancia con los diferentes elementos curriculares. Para ello se incluyen indicadores que valoraran la intervención de cada uno de los procesos matemáticos de acuerdo con el nivel de complejidad con que se activa en la solución del problema. Entonces, el modelo está constituido por dos elementos:

- 61 indicadores que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres grados distintos.

- 5 criterios para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración (Ruiz, 2018. p. 103).

La siguiente figura ilustra que se pueden establecer tres grados de complejidad creciente de la intervención de los procesos o capacidades.

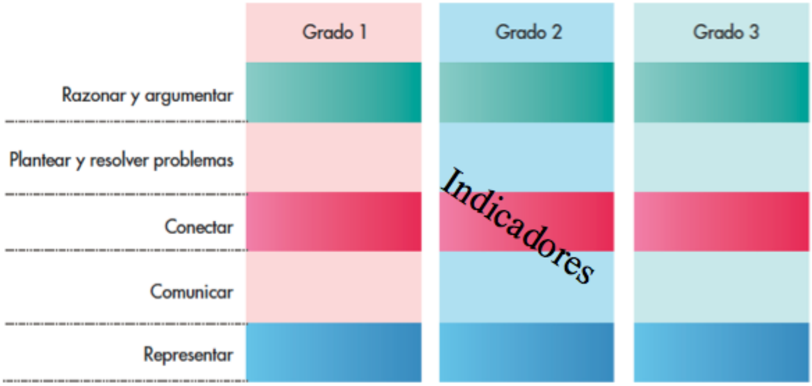


Figura 1: Grados de procesos / capacidades superiores. (Ruiz, 2018. p.118)

Para el diseño de estos indicadores se ha tomado en cuenta los principios establecidos en el currículo, donde se incluyen ciertas pautas generales relacionadas con los niveles de complejidad de un problema. El siguiente cuadro resume estas pautas:

Tabla 9. Niveles de complejidad de un problema: indicadores en el currículo

Nivel A: Reproducción	Nivel B: Conexión	Nivel C: Reflexión
Reconocer objetos o métodos matemáticos equivalentes. Identificar objetos matemáticos o propiedades matemáticas sencillas dentro de una situación familiar dada. Realizar procedimientos rutinarios y aplicar algoritmos estándar, en ambientes familiares al estudiante. Identificar y escribir de manera sencilla aunque coherente matemáticamente, expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos no complicados.	Interpretar una situación matemática con exigencia mayor que en el nivel de reproducción. Resolver problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante. Conectar distintas representaciones de una situación (algebraicas, numéricas, gráficas, etc.). Conectar elementos matemáticos dentro de un área o que relacionan dos o más áreas matemáticas.	Plantear y resolver problemas complejos. Argumentar, justificar, y generalizar la resolución de problemas complejos. Comprobar si los resultados obtenidos corresponden a las condiciones de partida del problema. Comunicar los resultados de la aplicación de estrategias con lenguaje matemático y precisión matemática. Conectar elementos matemáticos de dos o más asignaturas.

Figura 2: Niveles de complejidad. (Ruiz, 2018. p.137)

Una vez que la participación de cada proceso ha sido valorada, para evaluar el problema completo se realiza una ponderación según el grado que presentó en cada proceso, donde se consideran los criterios:

- NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.

- NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión.

- NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión. (Ruiz, 2018, p. 124-125)

Si no se satisfacen estas condiciones, se definen nuevos criterios para clasificarlo, se toma en consideración los indicadores del mayor grado y valoraciones particulares en cada problema;

los procesos "Razonar y argumentar" y "Plantear y resolver problemas" ocupan un lugar preponderante en esta etapa.

4. Ejemplo de implementación de la propuesta en Probabilidades

Las Probabilidades fueron incluidas dentro del área denominada Estadística y Probabilidad, con el propósito de estudiar la incertidumbre y el azar en diferentes contextos. No se plantea llevar a cabo un estudio profundo y abstracto de este tema. Se inicia con análisis intuitivos en los primeros años de la primaria y paulatinamente se van construyendo diferentes conocimientos que permitan concluir, a finales de la secundaria, con ideas claras de conceptos como: diferencias entre azar y determinismo, el papel del azar en fenómenos aleatorios, definiciones: clásica y frecuencia de probabilidad, Axiomas de Kolmogorov, teoremas básicos sobre probabilidades, ley de los grandes números, entre otros. Con el logro de las habilidades planteadas en el currículo se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar las probabilidades para modelar situaciones aleatorias simples y valorar su papel en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Seguidamente se muestra un problema que está estructurado para ser aplicado a estudiantes de décimo año (jóvenes entre 16 y 17 años) en el área de Estadística y Probabilidad. Concretamente este problema se ha ubicado dentro del estudio de las probabilidades; sin embargo, como se verá más adelante intervienen también otras áreas.

Problema: lanzamiento de un dardo

Considere que usted, junto a un grupo de amigos, generan un juego que consiste en lanzar un dardo a una figura que se encuentra sobre el piso a una distancia de 10 metros. La figura está constituida por un rectángulo de 50 centímetros de ancho y 150 centímetros de largo. Las figuras internas son un hexágono regular, un círculo y un cuadrado, tal como muestra la figura 3.

Participan cuatro jugadores, cada uno escoge una región, cada vez que el dardo caiga en dicha región, independientemente de quién lance, el jugador obtiene un punto; gana el jugador con mayor puntaje después de varios lanzamientos. Si el dardo cae fuera de la figura o justo sobre una línea divisoria entre regiones se repite el lanzamiento tantas veces como sea necesario y, además, suponga que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del rectángulo original.

Si usted fuera invitado a participar en este juego y solamente quedaran libres las regiones amarilla y gris ¿cuál es la probabilidad de ganar en cada lanzamiento en cada una de ellas y cuál seleccionaría usted?

Solución

Tomando en cuenta los supuestos del problema y de acuerdo con las dimensiones dadas para las regiones, para resolverlo, primeramente, se requiere determinar el área de cada una de las regiones.

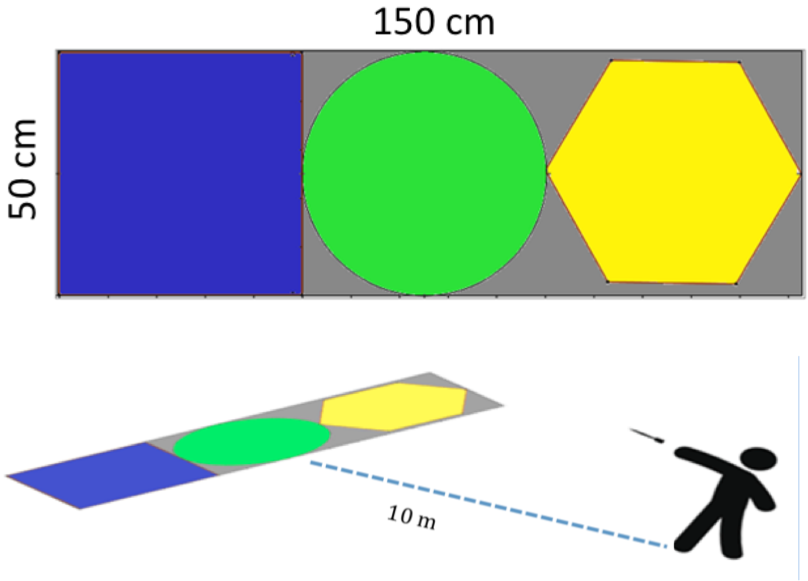


Figura 3: Lanzamiento de un dardo.

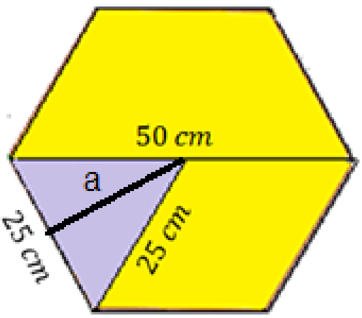
Las dimensiones del rectángulo son 50 cm de ancho y 150 cm de largo. Por esta razón, la figura de color azul corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado, por lo que su área viene dada por:

$$50\,\text{cm} \cdot 50\,\text{cm} = 2500\,\text{cm}^2.$$

Por otro lado, la figura de color verde es un círculo de 50 cm de diámetro, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2\,\text{cm}^2 \approx 1963,49\,\text{cm}^2.$$

Para el hexágono se sabe que las diagonales miden 50 cm, al tratarse de un hexágono regular, el lado mide 25 cm.



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12,5^2}\,\text{cm} \approx 21,65\,\text{cm}.$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\,\text{cm} \cdot 21,65\,\text{cm}}{2} \approx 1623,75\,\text{cm}^2$$

Finalmente, el área de la región gris corresponde al complemento de la suma de las áreas de las tres figuras con respecto al área de la región rectangular que las incluye.

El área de las tres figuras (cuadrado, círculo y hexágono) mide aproximadamente:

$$2500\,\text{cm}^2 + 1963,49\,\text{cm}^2 + 1623,75\,\text{cm}^2 = 6087,24\,\text{cm}^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150\,\text{cm} \cdot 50\,\text{cm} = 7500\,\text{cm}^2$$

El área de la región gris sería aproximadamente:

$$7500\,\text{cm}^2 - 6087,24\,\text{cm}^2 \approx 1412,76\,\text{cm}^2$$

De acuerdo con lo anterior y según establece la definición clásica de probabilidad, se tendría:

Región	***Área en cm^2***	***Probabilidad de ocurrencia*** $\left(\frac{\text{área de región}}{\text{Area total}}\right)$
Azul (cuadrado)	*2500,00*	*0,333*
Verde (círculo)	*1963,49*	*0,262*
Amarilla (hexágono)	*1623,75*	*0,217*
Gris	*1412,76*	*0,188*
Total	***7500,00***	***1,000***

De acuerdo con lo anterior, debería seleccionar la región amarilla (hexágono regular) debido a que le proporciona mayor probabilidad de ganar que la región gris en cada lanzamiento, aunque se debe tener presente que las regiones azul y verde tienen mayor probabilidad de ganar.

Análisis didáctico del problema

Conocimientos y áreas incluidas

Primeramente se van a considerar las áreas matemática que intervienen en la solución del problema. Este problema resulta ilustrativo para observar esta integración de conocimientos y habilidades en diferentes áreas matemáticas. Además de Probabilidad y Estadística la solución integra las áreas de Geometría y Relaciones y Álgebra. Los conocimientos correspondientes a cada una de ellas son:

Estadística y Probabilidad

- Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades (MEP, 2012. p. 436).

Geometría

- Polígonos: área (MEP, 2012. p. 389).

En concordancia con lo anterior, aparecen en los programas de estudios habilidades relacionadas con las tres áreas, tanto específicas como generales.

Participación de los procesos

Seguidamente se describe la forma en que se activa cada uno de los procesos matemáticos y su nivel de complejidad. Para ello se consideran los indicadores que se elaboraron dentro del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Los códigos que aparecen son los que se utilizan en dicha propuesta tal como se puede observar en Ruiz[4] (**2018**). Hay que tener presente que para la clasificación se consideran los indicadores de mayor grado; es decir, puede ocurrir que haya dos indicadores de grado 1 que corresponde a un proceso, pero si hay un indicador de grado 2 que se satisface también, entonces solamente se incluye aquel o aquellos correspondientes al mayor de los grados.

Razonar y argumentar

La información ofrecida en el contexto del problema no está en forma explícita, esto obliga a los estudiantes a plantear e implementar argumentos vinculados con el cálculo de áreas para la determinación de las probabilidades (RA2.1). La respuesta no es directa y amerita la argumentación correspondiente para fundamentar la decisión de escoger la región amarilla (RA2.2). Grado 2

Plantear y resolver problemas

El problema planteado resulta novedoso para los estudiantes y deben identificar los procedimientos a utilizar (PRP2.1) , en este sentido los estudiantes requiere n realizar secuencialmente los procedimientos matemáticos para determinar las probabilidades solicitadas (PRP2.2). Finalmente, la solución del problema implica establecer conexiones entre Geometría y Probabilidad (PRP2.3). Grado 2

Conectar

Se debe realizar la conexión entre lo planteado en el contexto del problema con los conceptos matemáticos para determinar probabilidades, mediante el peso relativo del área de las regiones particulares sobre el área total (procedimiento conocido) (C2.1). Se conectan conceptos matemáticos de Geometría y Probabilidad para encontrar la solución (C 2. 2). Grado 2

Comunicar

Se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, hay que tener presente el supuesto de equiprobabilidad para los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística) , luego el cálculo de las áreas para determinar posteriormente la probabilidad que el dardo caiga en cada región. Por ello, se requiere interpretar y seguir una secuencia de razonamientos matemáticos ya estudiados (COM 2.2), además d e describir mediante lenguaje matemático los resultados del cálculo de áreas y de las probabilidades determinadas (COM 2.3), finalmente se debe comunicar la decisión tomada con base en los cálculos realizados (COM 2.4). Grado 2.

---

[4] Si el lector desea conocer con mayor detalle la propuesta para la valoración de las tareas matemáticas, la descripción detallada de los indicadores con los respectivos niveles de complejidad, la nomenclatura y otros detalles asociados, se le invita consultar Ruiz (**2018**)

Representar

En el desarrollo del proyecto se debe hacer una adecuada lectura de la información textual y visual para la determinación de áreas de cada región, pasar luego a las probabilidades o las proporciones correspondientes del área de cada región en relación al rectángulo que las incluye (R 2.2 y R 2.3) Grado 2.

Con el propósito de simplificar la redacción, en la descripción anterior los indicadores del apéndice han sido parafraseados y resumidos. Sin embargo, en ella se muestra el aporte de este problema a la consecución de las capacidades superiores en cada caso.

1. Nivel de complejidad del problema

Tal como se observa en la descripción previa, todos los procesos se activan en grado dos, esto es una muestra de que el problema se puede ubicar con un nivel de complejidad intermedio, es decir es un problema de Conexión.

2. Acción de aula y momentos de la lección

El análisis de este problema permite que los estudiantes alcancen un nivel intermedio de razonamiento. Este es un claro ejemplo por medio del cual se relacionan conceptos geométricos y probabilísticos para resolver un problema que, aunque hipotético, ejemplifica una situación lúdica que requiere de cierta destreza matemática y del dominio de diferentes habilidades para encontrar la solución.

Aunque los cálculos no son complejos, el mayor reto se enfoca en la identificación y planificación de la estrategia matemática que se debe implementar para encontrar la solución. Por esta razón, es necesario otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes puedan debatir en la interpretación del problema y en la búsquela de una estrategia de solución. Es posible que inicien con estrategia de ensayo y error que les ayude a identificar la ruta correcta. El docente debe estar atento para apoyar este proceso.

Dada la estructura del problema analizado, no es adecuado utilizarlo para la generación de conocimiento nuevo sino para una etapa posterior que permita la movilización y aplicación de las habilidades adquiridas en las dos áreas matemáticas. Con esto se demuestra que los problemas de movilización no siempre son problemas de reproducción de conocimientos, sino que es conveniente retar al estudiante para utilice los conocimientos y habilidades adquiridas en situaciones de mayor complejidad que le permitan alcanzar capacidades mayores de razonamiento.

Otra virtud que tiene este tipo de problemas es que el contexto se convierte en una base para la generación de otras tareas de mayor o menor nivel de complejidad, que permite fomentar el desarrollar en mayor medida las capacidades cognitivas de los estudiantes. Por ejemplo, el problema puede ser modificado para generar una tarea matemática de mayor nivel de complejidad tal como se muestra:

Participan cuatro jugadores, a cada uno se le asigna aleatoriamente una región, cada vez que el dardo caiga en dicha región se asigna un puntaje al jugador correspondiente independientemente de quién lance, gana el jugador con mayor puntaje después de varios lanzamientos. Si el dardo cae fuera de la figura o justo sobre una línea divisoria entre *regiones se repite el lanzamiento tantas veces como sea necesario y además suponga que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del rectángulo original.*

Si usted tuviera que establecer este puntaje (entre cero y cien) a cada color o región dentro del rectángulo, para que el juego sea equitativo (probabilísticamente honesto) para quienes lo practiquen ¿cuáles serían los valores correspondientes a cada color?

Se podría encontrar la solución correspondiente y verificar que, bajo la modificación planteada, la valoración de la participación de los procesos matemáticos correspondería en la mayoría de los casos al nivel tres, por lo que sería un problema de reflexión (Ruiz, 2018).

Conclusión

En el marco de un currículo enfocado a la generación de capacidades superiores como el de Costa Rica, la posibilidad de realizar una descripción y clasificación en las diferentes tareas matemáticas que se proponen, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, se convierte en un instrumento de vital importancia para apoyar la acción docente y su puesta en práctica de dicho currículo.

En particular, para el caso Costa Rica, estas u otras valoraciones semejantes permiten realizar un planeamiento educativo acorde con los fundamentos teóricos del dicho currículo. Estas acciones permitirían al docente dosificar el trabajo de aula de manera que exista un adecuado equilibrio entre tareas o problemas de diferentes niveles de complejidad, un equilibrio en la participación de los procesos matemáticos y de los ejes disciplinares. Al mismo tiempo, ofrece la oportunidad de evaluar la adquisición de los aspectos más tangibles como es la relación entre conocimientos matemáticos y habilidades específicas, pero más importante aún permite visibilizar el tránsito entre esta relación que ocurre en el corto plazo hacia la adquisición de las habilidades generales y de la competencia matemática en el mediano y largo plazo. Esto se consigue gracias la interacción de los procesos matemáticos y sus niveles de complejidad en los diferentes problemas, y por ende, la consolidación de las capacidades de orden superior. Todo esto privilegiando la acción estudiantil quienes son partícipes directos de todo el proceso.

Por otro lado, un planeamiento equilibrado como el que se indicó en el párrafo anterior, permite al docente valorar la pertinencia de cada tarea planteada, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, en un marco mucho más amplio como es un planeamiento educativo en congruencia con los fundamentos del currículo. La capacidad de precisar el grado de participación de cada proceso matemático permite mapear las acciones que se estarían estableciendo para avanzar de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes hacia el logro de capacidades matemáticas. Desde el punto de vista de una sana planificación educativa, la realización de esta práctica permite ir haciendo los ajustes necesarios para consolidar la intervención de los procesos en el corto, mediano y largo plazo, por lo que apunta sólidamente al fortalecimiento de la competencia matemática. Al mismo tiempo, en el caso de la evaluación, los resultados que se puedan obtener mediante la puesta en práctica de este proceso de planificación en las acciones de aula suministran información sobre el avance de los estudiantes y su rendimiento, de modo que se puedan establecer las acciones correctivas correspondientes.

La propuesta para la valoración de las problemas es un importante insumo que se espera venga a contribuir en la articulación de una estrategia evaluativa que sea congruente con el potencial de los principios curriculares que se han plasmado en los programas de estudio.

Referencias y bibliografía

Chaves, E. (2017). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Memorias del II CEMACYC.* Cali, Colombia, 2017. Recuperado de **http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/ii-cemacyc/paper/viewFile/494/154**

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Recuperado de **http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf**

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México, Ciudad de México: Comité Interamericano de Educación Matemática. Recuperado de **https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf**

El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica[1]

Carlos Eduardo Vasco Uribe

Resumen

Desde distintos puntos de vista, en los últimos CIAEM el autor ha venido proponiendo un enfoque global para las matemáticas mismas y para su epistemología, su historia y su didáctica: "El Programa Cronotopía". Este pretende analizar la totalidad sincrética introspectiva que podríamos llamar "mi experiencia espacio-temporal personal y privada", para tratar de capturar algunas características de la construcción de mi propio espacio-tiempo mental que llamo "mi cronotopo". Se presentan algunos avances logrados hasta ahora en este programa de investigación —en el sentido de Lakatos, Balzer, Moulines y Sneed— para desarrollar una disciplina académica que se llamaría "la Cronotopía". El Programa Cronotopía pretende reformular las matemáticas mismas desde esta disciplina, en particular la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas, y toda la teoría formal de procesos y sistemas, con sus sustratos, sus estructuras y sus dinámicas, para reorientar así su epistemología, su historia y su didáctica.

Palabras clave: epistemología de las matemáticas, historia de las matemáticas, didáctica de las matemáticas, teoría general de sistemas, modelos y teorías.

Abstract

From different viewpoints, in the last few IACME-CIAEM conferences the author has been formulating a global approach to Mathematics, its Epistemology, its History and its Didactics: "The Chronotopy Program". The Chronotopy Program intends to analyze the introspective syncretic totality we might call "my personal, private spatio-temporal experience", to try to capture some characteristics of the construction of my own mental space-time I name "my chronotope". This lecture synthesizes some advances achieved up to now in this Research Programme —in the sense of Lakatos, Baltzer, Moulines and Sneed— in order to develop an academic discipline that would be named "Chronotopy". The Chronotopy Program intends to reformulate Mathematics itself, in particular, ancient Astronomy, Geometry and Arithmetic, and the whole formal theory of processes and systems with their substrates,

C. E. Vasco
Doctorado Institucional en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
carlosevasco@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

Recibido por los editores el 14 de junio de 2019 y aceptado el 27 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 191–198. Costa Rica

structures, and dynamics, in order to reorient accordingly its Epistemology, its History and its Didactics.

Keywords: epistemology of mathematics, history of mathematics, didactics of mathematics, general systems theory, models and theories.

1. Introducción al cronotopo, la Cronotopía y el Programa Cronotopía

El "Programa Cronotopía" se propone construir una ciencia —en el sentido de una disciplina académica o saber explícito, serio y disciplinado que pretende pasar de *doxa* a *episteme*— acerca de todos los aspectos del espacio-tiempo mental interno y el externo, comenzando por los aspectos directa e intuitivamente auto-inspeccionables del interno.

Así pues, la Cronotopía estudia, ante todo, el espacio-tiempo mental interno del sujeto-agente noético-semiótico que trata de practicar esa disciplina, al que, siguiendo una sugerencia de Bakhtin, llamo "mi cronotopo", utilizando las raíces griegas de tiempo-chronos y de espacio-topos.

En mi cronotopo interno parecen fundirse como totalidades indiferenciadas —"sincréticas", diría Piaget al hablar del "sincretismo infantil", o los antropólogos que estudian el sincretismo religioso— el espacio, el tiempo, los cuerpos, los líquidos, el cambio y el movimiento (ver Piaget y García, 1982). Ese trasfondo difuso es el que me permite representarme, imaginarme o *modelar* mentalmente los procesos externos y representarme a mí mismo en forma privada el mundo externo por medio de distintas imágenes y modelos mentales imaginados e imaginarios que proyecto sobre ese trasfondo o que parecen surgir espontáneamente de él. Es en ese trasfondo en donde cada uno de nosotros —al menos yo mismo— se imagina todos los aspectos de las matemáticas antiguas y modernas como ciencias formales, y todos los aspectos de la física antigua o astronomía y la física moderna como ciencias fácticas.

Esos modelos mentales imaginados guían mi actividad, y continuamente tengo que "echarlos a correr" ("run" en el sentido de la informática) para "navegar" en el mundo externo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir.

Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte del modelo mental de mi casa. Para las matemáticas, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las figuras geométricas, las letras y los números en las superficies planas de los libros, los cuadernos o los tableros, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales cronotópicos en mi cerebro y trato de externalizarlas con palabras, gestos y dibujos para examinarlas mejor yo mismo y compartirlas con otros.

Una primera conclusión podría ser que en el Programa Cronotopía no hay números reales distintos de los imaginarios: todos son imaginarios e imaginados. Si usted considera que sus imágenes mentales son reales en su cerebro, entonces, para usted también todos los números imaginarios serían reales en ese sentido.

2. Un poco de historia de la especie "sapiens" del género "Homo"

Una vez que algunas especies de un cierto género de antropoides, primates, homínidos u homininos lograron ir separando tiempos para el ocio, el disfrute, el descanso, el ritual, la fiesta, la música y la danza, y en esos ratos de ocio empezaron a dedicar más y más tiempo para la reflexión mental sobre todas esas actividades conscientes y sobre los sueños diurnos y nocturnos, se fueron perfeccionando los lenguajes análogos multimodales de todas las artes y afinando sus productos. Más tarde se fue configurando el lenguaje articulado o digitalizado o cuantizado en sonidos discretos, inicialmente sílabas, que permitieron el cuento, la poesía y el teatro para intentar expresar en forma externa y pública las impresiones, representaciones y valoraciones internas de los fenómenos externos perceptibles directamente por el cerebro de cada uno de los miembros de esa especie privilegiada. No sabemos prácticamente nada acerca del espacio, el tiempo, el cambio y el movimiento "allá afuera", pero sí podemos analizar el cronotopo interno de cada uno y tratar de "comparar notas" con lo que nos externalicen los otros miembros de nuestra especie.

Se fueron configurando así múltiples tallas, pinturas, grabados, estatuas y otras construcciones táctiles y visuales, que en la Cronotopía se llaman "las grafías": dibujos, rasguños, pinturas, esculturas y diagramas que permiten externalizar y hacer públicas las imágenes y modelos mentales de los cerebros cada vez más grandes de los especímenes del género "Homo". Al mismo tiempo se inventaron múltiples narrativas, relatos, admoniciones, prescripciones e instrucciones acerca del espacio y el tiempo, los usos y costumbres, que en la Cronotopía se llaman "las logías": sartas de sonidos, sílabas y palabras articuladas que nos permiten compartir las imágenes y modelos mentales entre los miembros cercanos de nuestra especie "sapiens".

Esas logías y grafías comienzan a ayudar a nuestros antepasados a hacer mejores refugios, a cazar con más eficacia y menos riesgos, a domesticar plantas y animales, a perfeccionar herramientas, a desarrollar la agricultura y a construir las primeras edificaciones y los primeros asentamientos o ciudades. De eso no hace mucho tiempo: menos de diez mil años.

Hace solo cinco o seis milenios, con la invención de la escritura o "logografía" —que es la grafía de las logías— empiezan las primeras civilizaciones, se consolidan las élites y las castas sacerdotales y se inician los primeros imperios. Se perfeccionan las medidas y los instrumentos de medición, los números y los cálculos o cuentas, que en la Cronotopía se llaman "las metrías" y se van multiplicando las expresiones de las regularidades, leyes, normas y esquemas que en la Cronotopía se llaman "las nomías".

En menos de mil años se desarrollaron simultáneamente la Física, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas en la China, la India y Mesopotamia. Hace unos 4000 años pasaron estos saberes a Egipto, y hacia el año 700 A.C. a toda el Asia Menor y a las ciudades del Peloponeso, sobre todo a Atenas y, más tarde, volvieron a Egipto: a Alejandría. Ya desde esa misma época se extendieron y refinaron esos saberes a toda la Magna Grecia mediterránea, inicialmente con Tales y Pitágoras, culminando con los maestros atenienses, alejandrinos y sicilianos, entre los que sobresalen Euclides y Arquímedes.

Desde el punto de vista de la Cronotopía, excepto por el desarrollo de mejores tecnologías, es poco lo que han progresado la Astronomía, la Geometría y la Aritmética que practicamos los matemáticos en nuestros modelos mentales cronotópicos. Más bien podría decirse que desde las aritméticas de Boecio y Nicómaco en la Edad Media europea del año 400 al año 1600, y en todos los 300 años desde 1600 hasta el "Programa de Erlangen" de Lie, Klein y Poincaré en 1872 (período que algunos llaman "las Matemáticas Modernas" o "de la Modernidad"), con muy contadas excepciones de matemáticos geniales, poco se progresó en ese mundo mental tridimensional que estudia, analiza y trata de reconstruir y practicar el "Programa Cronotopía".

Esas externalizaciones de los cronotopos mentales de los que llamamos desde la Antigüedad "sabios", "astrólogos", "gurúes" o "magos" hasta el Renacimiento europeo de los siglos XV y XVI conformaban las únicas ciencias entonces conocidas.

Antes del año 1600, en la Edad Media y en el Renacimiento europeos no se encuentra ningún uso de la palabra "ciencia" en el sentido actual. Solo después de la invención de la imprenta y la expansión de los libros impresos comenzó la Ilustración de los siglos XVI y XVII. A comienzos del siglo XVII se configuró en Europa central "la ciencia nueva" de los fenómenos terrestres y celestes estudiados por la astronomía de Copérnico, Galileo y Tycho Brahe. Esa "nueva ciencia" que se anuncia con Galileo y empieza a balbucear con Descartes, se formuló explícitamente en Inglaterra con el "Novum Organon" de Francis Bacon,[2] quien pretendió desplazar al antiguo "Organon" de Aristóteles y a toda la sabiduría filosófica y astronómica medieval. Su primer gran producto fue la Mecánica newtoniana, refinada en la Mecánica analítica leibniziana y lagrangiana. Luego vino la explosión científica del siglo XIX con las teorías del campo electromagnético de Maxwell y la termodinámica de Clausius, Joule y Helmholz. A comienzos del siglo XX surgen las teorías de la relatividad de Lorenz, Poincaré y Einstein. Poco después, aparecen en solo dos años tres variantes de la Mecánica cuántica: la ecuación de Schrödinger (en 1926), la mecánica matricial de Werner Heisenberg (en 1927) y las ecuaciones de Pauli y Dirac (en 1928).

3. Un poco de historia autobiográfica

Este intento que guía el Programa Cronotopía —el de reconstruir todas las matemáticas antiguas y modernas a partir de mis propios modelos mentales que puedo examinar y analizar en mi cronotopo mental privado— tiene ya una larga historia en mi vida académica. Comenzó con mi tesis de pregrado en filosofía sobre el espacio-tiempo en la Relatividad

[2] Francis Bacon, conde de Verulamio, se propuso elaborar una reestructuración de lo que hoy llamamos "ciencias" en su *Instauratio magna*, que tenía varias partes. En 1620 publicó dos libros de aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino humano, que llamó *Novum Organum sive indicia vera de interpretatione Naturae*. Esta obra, con la de William Gilbert en 1600: *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure*. London: Peter Short, y con cuatro escritos de Galileo entre 1610 y 1638 (1610: Sidereus Nuncius; 1623: Il Saggiatore; 1632: Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo; 1638: Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze) pueden considerarse los pilares fundamentales que en una sola generación establecieron "la nueva ciencia" en el sentido actual de esa palabra. Antes de 1600 no se encuentra diferencia entre conocimiento y ciencia, y se utilizaba para todo la misma palabra: "scientia".

Especial, dirigida por mi maestro Carlo Federici en 1960. Después, continuó con mi tesis de doctorado, que terminé en 1968, en la que analicé todas las posibles fórmulas algebraicas que combinaran productos conmutativos o no, asociativos o no asociativos, de dos y tres variables, sin importar su interpretación sino solo sus propiedades formales. Por eso llamo a esa rama del álgebra no asociativa "el álgebra abstracta e inútil", pero puedo garantizarle al lector o lectora que ha sido muy apasionante y divertida.

Cuando regresé a Colombia en 1971, empecé a trabajar de nuevo con mi antiguo maestro Carlo Federici, colaborándole en el Instituto de Ciencias del Instituto Colombiano de Pedagogía Icolpe de 1972 a 1976, y luego, de 1976 a 1978, en la recién creada Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios educativos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia en Bogotá. También encontré un nuevo gran maestro, el Dr. Alberto Campos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. El Dr. Campos me invitó a colaborarle en algunos de los cuatro cursos de Lógica y Matemática I a IV que él había diseñado para los estudiantes de Filosofía de la Universidad Nacional.[3] Sin los cursos, discusiones y escritos de Alberto Campos de 1972 a 1992, no me hubiera adentrado en la historia de las matemáticas, comenzando desde los Presocráticos, Tales, Pitágoras y Euclides; pero con sus aportes, me atreví a preparar y escribir mi trabajo de ascenso sobre la historia del álgebra del Renacimiento, y desde entonces no he dejado de estudiar y disfrutar la historia de las matemáticas, su epistemología, su práctica y su didáctica.

En especial, con el Programa Aritmo-Geométrico pitagórico que aprendí con el Dr. Campos, he venido tratando de reconstruir las matemáticas a partir de la Astronomía Antigua, mucho más antigua que Tales y Pitágoras, descubriendo cada vez más profundidad en la teoría eudoxiana de las razones, las proporciones y las desproporciones, en la de las razones cruzadas, la armonía y la anarmonía.

Sin los cursos de filosofía y epistemología de las matemáticas que el Dr. Campos logró establecer en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, y sin las oportunidades de dirigir yo mismo algunos de esos cursos, no hubiera empezado a trabajar yo mismo y a enseñar en distintas universidades cursos de epistemología de las matemáticas en los que presentaba las cuatro escuelas dominantes en los siglos XIX y XX: el Platonismo, el Formalismo, el Logicismo y el Intuicionismo y, luego, otros cursos más generales de epistemología.

En esos cursos y lecturas fui impulsado y retado por el maestro Alberto Campos y por mi otro gran maestro, Carlo Federici, a intentar formular mi propia filosofía de las matemáticas de tal manera que, teniendo en cuenta las cuatro escuelas de filosofía de las matemáticas, el Platonismo, el Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo, lograra superar sus vacíos y limitaciones, ante todo para tener en cuenta la producción de nuevas matemáticas del siglo XX desde el "Programa de Erlangen" de Félix Klein en 1872.

---

[3] El Dr. Alberto Campos Sánchez imprimió una edición mecanografiada de sus notas de clase en dos tomos, *De Pitágoras a Euclides* y *De Euclides a Hilbert y Bourbaki*. Posteriormente, en 1994 publicó una revisión de esa obra en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá: *Axiomática y geometría: desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.*

El profesor Fernando Zalamea fue el que señaló la ausencia de las matemáticas más avanzadas de todo el siglo XX en los libros, la historia y la filosofía de las matemáticas, y quién lo creyera, hasta en la docencia de las matemáticas universitarias en toda Latinoamérica. En todos los currículos de la educación media o bachillerato y en los de los cuatro primeros semestres de las universidades, solo aparecen matemáticas elaboradas *antes* del final del siglo XIX.

El profesor Zalamea me ganó muy pronto la carrera de producir una nueva filosofía de las matemáticas que incluyera las matemáticas de 1870 año 2000, cuando publicó su filosofía sintética de las matemáticas (Zalamea, 2009). Apenas ahora, 50 años después de ese remoto comienzo con mis maestros Federici y Campos, y diez años después del desafío que me lanzó la filosofía sintética de Fernando Zalamea, estoy intentando configurar una filosofía propia que llamo "sincrético-analítica", basada en tres teorías generales: la de Procesos y Sistemas (como Metafísica), la de Modelos y Teorías (como Metagnósica) y la de Representaciones e Interpretaciones (como Metasémica).

La filosofía que sustenta el Programa Cronotopía, que propongo llamar "Filosofía Sincrético-Analítica" para distinguirlas de las filosofías analíticas y sintéticas, se puede resumir en esas tres partes: su Ontología con la Teoría General de Procesos y Sistemas (basada en von Bethalanffy, 1950/1976 y 1979; Klir, 1972; Vasco, 1980, 1991, 1995), su Gnoseología y su Epistemología con la Teoría General de Modelos y Teorías (Lakatos, 1978; Balzer, Moulines & Sneed, 1988; Balzer & Moulines, 1996; Sneed, Moulines & Balzer, 2000; Díez & Moulines, 2003; Chang & Keisler, 1973; Vasco, 2013; 2014; 2016) y su Semiología con la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones, basada en Charles Sanders Peirce, pero sobre todo en Duval (1995/2004; 2017) y en D'Amore, Fandiño & Iori (2014).

La idea central del Programa Cronotopía es la de volver a examinar la lógica, las matemáticas, la teoría de la información y la física antigua y nueva, comenzando no desde la ciencia actual de los siglos XX y XXI, sino desde la Astronomía Antigua, pasando por Heráclito, Parménides y Zenón, por Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquimedes, hasta las modernas teorías cosmológicas, relativistas y cuánticas. No se trata de preguntarse si son verdaderas o no, ni quién inventó qué y en dónde, sino de reinventarlas yo mismo en mi propio cerebro.

Se trata de reconstruir individualmente las ciencias que Federici llamaba "formales y fácticas pre-antrópicas" —o por lo menos las abióticas— no solamente desde el registro escrito acumulado en los 25 siglos anteriores, sino desde su reinterpretación interna en los modelos mentales cronotópicos que fabrica incansablemente esa maravillosa imaginación personal y privada mía, mi "máquina de sueños". Lo que me da la ilusión de avanzar en este programa (claramente megalomaníaco) es que confío en que cada niño o niña, adolescente o persona adulta neurológicamente sana tiene una máquina de sueños igual o mejor que la mía. No creo poder enseñarle gran cosa a ninguno de ellos y ellas, pero sí me considero capaz de atender a sus intentos de explicitar sus modelos mentales, a hacerles preguntas que los lleven a poner en ejercicio su propia máquina de sueños y a disfrutar esa gimnasia mental que es francamente adictiva. El Programa Cronotopía propone nada menos que esa adicción a las matemáticas mentales es la más apropiada para evitar o superar cualquier otra adicción a la que se sientan inclinados los y las jóvenes del siglo XXI. Para ejercitarme en la Cronotopía, trato de mirar de lado y de reojo, escudriñando alrededor de mis modelos mentales multimodales, el trasfondo espaciotemporal en el que parecen estar inmersos. A ese trasfondo difuso lo llamo con Michail Bakhtin "mi cronotopo mental".

Consecuentemente, llamo a este programa que he venido proponiendo desde hace unos 20 años "el Programa Cronotopía", porque se trata de la vivencia subjetiva de construir y examinar los modelos mentales que surgen en mi cronotopo mental, personal y privado, y de "echar teorías" sobre ellos (ver Vasco, 2006; 2011).

Así trato de reconstruir en poco tiempo las largas cuatro fases por las que supongo va pasando toda ciencia del pasado o del futuro: la acumulación de logías y grafías, como serían la Cronología y la Cronografía para las vivencias del tiempo y la Topología y la Topografía para las vivencias del espacio. Estas dos fases se podrían llamar retrospectivamente "precientíficas", para avanzar luego en el desarrollo de las dos fases de consolidación científica: las métricas o las metrías, como la Cronometría y la Topometría, las que nos permiten establecer las regularidades, patrones, esquemas, leyes o nomías, que configurarían, en nuestro caso, la Crononomía y la Toponomía. Así se avanzaría en una Cronotoponomía integrada: la Cronotopía del futuro.

Mi conjetura actual y mi apuesta de vida en los pocos años que me queden, es que en el avance de la tercera a la cuarta fase del Programa Cronotopía, que consiste en ir perfeccionando las metrías para pasar a la síntesis de las nomías para configurar esa futura disciplina, la Cronotopía, se sintetizarían de nuevo, –desde la Astronomía Antigua– todas las ramas de lo que ahora llamamos las matemáticas, la lógica, la teoría de la información y la física matemática, tanto la clásica como la relativista y la cuántica, incluyendo la cosmología o astrofísica. Esta ontología sincrético-analítica de procesos y sistemas, con las tres teorías generales (la de Procesos y Sistemas TGPS, la de Modelos y Teorías TGMT y la de Representaciones e Interpretaciones TGRI) tomaría lo mejor del Platonismo, el Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo para formular una filosofía de las matemáticas que podríamos llamar "modelo-teorética".

Referencias y bibliografía

Balzer, W., Moulines, C. U., & Sneed, J. D. (1988). *An architectonic for science: The Structuralist Program* (Synthese Library, 186). Dordrecht: Kluwer.

Balzer, W., & Moulines, C. U. (1996). *Structuralist theory of science: Focal issues, new results* (Perspectives in Analytical Philosophy, Bd. 6). New York/Berlin: De Gruyter.

Bertalanffy, L. von (1976). *Teoría General de los Sistemas: Fundamentos, desarrollo, aplicaciones.* México: Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1950).

Bertalanffy, L. von (1979). *Perspectivas en la Teoría General de Sistemas.* Madrid: Alianza.

Chang, C. C., & Keisler, H. J. (1973). *Model theory.* Amsterdam: North-Holland.

D'Amore, B., Fandiño, M. I., & Iori, M. (2014). *Semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Díez, J. A., & Moulines, C. U. (2003). *Fundamentos de filosofía de las ciencias.* Barcelona: Ariel.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (2a. ed. Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali: Peter Lang/Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995: *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang).

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations.* Berlin, New York, etc.: Springer-Verlag.

Klir, G. J. (Ed.). (1972). *Trends in General Systems Theory*. New York: John Wiley & Sons.

Lakatos, I. (1978). *La metodología de los programas de investigación científica y Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J., y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Sneed, J. D., Moulines, C. U., & Balzer, W. (2000). *Structuralist knowledge representation. Paradigmatic examples.* (Poznán Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities 75). Poznan: Rodopi.

Vasco, C. E. (1980). Teoría de sistemas y metodologías científicas. *Ciencia, Tecnología y Desarrollo, 4*(4), 463-482.

Vasco, C. E. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 18*(69), 211-223.

Vasco, C. E. (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo, *Educación para el desarrollo* (Informes de Comisionados I. Colección Documentos de la Misión, Tomo 2, pp. 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República–Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional–Colciencias.

Vasco, C. E (2006). Cronotopía: Un «Programa de Bogotá» para lo que se suele llamar «Geometría». En C. Ruiz et al. (Eds.), Memorias: *XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, Junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vasco, C. E. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), 6(9), 77-91. Disponible en el URL: **http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6961**

Vasco, C. E. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica 8(11), 133-148. Disponible en el URL: **http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14721**

Vasco, C. E. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C. J. Mosquera (Comp.). *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales, N. 1* (pp. 25-79). Bogotá: Universidad Distrital-Doctorado Interinstitucional DIE. Disponible en el URL **http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/perspectivas_educativas**

Vasco, C. E. (2016). Matemáticas Modelo-Teoréticas: un programa neo-estructuralista para las matemáticas, su historia, su epistemología y su didáctica en el siglo XXI. Conferencia invitada en la XIV CIAEM de Tuxtla Gutiérrez (Chiapas) en 2015. La primera parte pp. 1-15, fue presentada parcialmente en la ENHEM 3, Cali, 28 de octubre de 2010. La segunda parte: pp. 14-27 con correcciones y complementos, fue presentada en la ENHEM 4, Cali, 10 de octubre de 2013. Está disponible en el URL **https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23956**

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Principios didácticos para una práctica matemática transdisciplinar[1 2]

Ettiène Guérios

Resumen

En este artículo, escrito en el modo de ensayo, se presentan los procesos constitutivos de la enseñanza, teniendo como eje guía la adherencia entre el proceso de capacitación, las prácticas didácticas y metodológicas, la cognición, el aprendizaje y el desarrollo humano. Caracteriza las prácticas matemáticas en perspectiva multi, inter y transdisciplinar, diferenciándolas en el contexto de la enseñanza en el aula. Discute principios y relaciones didácticas establecidas en la tríada el maestro, el estudiante y el conocimiento matemático en el proceso de enseñanza de las matemáticas a través de la Resolución de Problemas. Teoriza sobre la acción didáctica con intencionalidad educativa como posibilidad de desarrollo cognitivo y significado del conocimiento matemático escolar. Presenta ejemplos de proyectos de enseñanza en matemáticas que vinculan aspectos didácticos y educativos en un proceso único y simultáneo cuyo enfoque trasciende la organización disciplinaria establecida en las matrices curriculares, constituyéndose en una práctica didáctica transdisciplinaria.

Palabras Clave: Didáctica, enseñanza, educación, matemáticas, cognición, transdisciplinariedad, formación, complejidad.

Abstract

This essay deals with the constitutive processes of teaching, having as its guiding axis the adherence between training process, didactic-methodological practices, cognition, learning and human development. It characterizes mathematical practices in multi, inter and transdisciplinary perspectives, differentiating them in the context of teaching in the classroom. It discusses principles and didactic relationships established in the triad teacher, student and mathematical knowledge in the process of teaching mathematics through Problem Solving. It theorizes about the didactic action with educational intentionality as a possibility of cognitive development and significance of the school mathematical knowledge. It reflects on solving algorithms and mathematical understanding in schoolchildren's learning. It presents

---

E. Guérios
Universidade Federal do Paraná, Brasil
ettiene@ufpr.br

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] Texto publicado en portugués como parte del capítulo "Contribuições do pensamento complexo para a formação de professores em uma perspectiva transdisciplinar" en el libro "Teoria da complexidade: contribuições epistemológicas e metodológicas para uma pedagogia complexa", Editora Appris, Curitiba, 2019.

Recibido por los editores el 2 de junio de 2019 y aceptado el 12 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 199–209. Costa Rica

examples of teaching projects in mathematics that link didactic and educational aspects in a single and simultaneous process whose approach transcends the disciplinary organization established in the curricular matrices, constituting itself in a transdisciplinary didactic practice.

Keywords: Didactics, teaching, education, mathematics, cognition, transdisciplinarity, training, complexity.

Resumo

Este artigo escrito na modalidade de ensaio aborda sobre processos constitutivos da docência tendo como eixo norteador a aderência entre processo de formação, práticas didático-metodológicas, cognição, aprendizagem e desenvolvimento humano. Caracteriza práticas matemáticas em perspectiva multi, inter e transdisciplinar, diferenciando-as no contexto da docência em sala de aula. Discorre sobre princípios e relações didáticas estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas. Teoriza sobre a ação didática com intencionalidade educativa como possibilidade de desenvolvimento cognitivo e de significação do conhecimento matemático escolar. Apresenta exemplos de projetos de docência em matemática que vinculam vertente didática e vertente educativa em um processo único e simultâneo cuja abordagem transcende a organização disciplinar estabelecida nas matrizes curriculares constituindo-se em prática didática transdisciplinar.

Palavras Chave: Didática, docência, educação, matemática, cognição, transdisciplinaridade, formação, complexidade.

1. Introducción

Este artículo, escrito en el modo de ensayo, tiene sus orígenes en la investigación realizada por esta autora en el Programa de Posgrado en Educación y en el Programa de Postgrado en Educación: Teoría y Práctica de la Enseñanza, de la Universidad Federal de Paraná (Brasil). La formación de los profesores que enseñan matemáticas es el enfoque que investigo, teniendo como eje guía la adherencia entre el proceso de formación, las prácticas didácticas y metodológicas, la cognición, el aprendizaje y el desarrollo humano. El enfoque teórico en este artículo se centra en ideas sobre creatividad, disciplinariedad, transdisciplinariedad, complejidad, problematización y resolución de problemas. Las aportaciones provienen de Ribeiro y Moraes (2014), Nicolescu (1988), Petraglia y Vasconcelos (2017), Morin (1998), Guérios (2002), Guérios y Medeiros (2016), Guérios y Modtkoski (2017) y Puchkin (1969).

Parto de la suposición de que la enseñanza en matemáticas, desde la Educación Infantil a la Educación Universitaria, puede vincular aspectos didácticos y educativos en un proceso único y simultáneo cuyo enfoque trasciende la organización disciplinaria establecida en las matrices curriculares. En este ámbito, hay una simbiosis entre las dos en la que una basa la otra. Es decir, en la educación para la vida, las matemáticas se enseñan, lo que a su vez da sentido a la propia existencia y permite el desarrollo de valores como la base de una educación que, como dice Petraglia (2017, p.67), pretende la *participación del sujeto en el universo sociocultural y político, considerando su conciencia, libertad y autonomía para el ejercicio de una formación compleja, ética y planetaria.*

En este sentido, fundamentos del pensamiento complejo postulados por Edgar Morin en el conjunto de sus obras extendieron mi horizonte teórico para que pudiera superar la comprensión de que la competencia docente podría establecerse solo mediante el conocimiento de la materia que enseña y la capacidad técnica instrumental, a lo que llamo una dimensión mecánica de la acción didáctica, no pocas veces, prescriptiva (Guérios, 2002). Sin embargo, lo imponderable e impredecible prevalecen en el aula y las situaciones imprevistas desencadenan movimientos cognitivos que no siempre se esperan, cuya prescripción pedagógica estática y fragmentada en el ámbito disciplinario no absorbe, ni considera. Esta superación está en el centro de una reforma paradigmática que

> supera la dimensión mecánica del acto didáctico y tiene el acto de crear como un desencadenante para el aprendizaje [...] En situaciones que se alejan del modelo tradicional de restringir ideas para garantizar un curso programado, lo inesperado tiende a ser el motivo principal para desencadenar acciones didácticas compatibles con el surgimiento del pensamiento de los alumnos.[3] (Guérios, 2002, p. 177-179)

El reflejo de lo que señalé brevemente hasta ahora está en la discusión que desarrollo a continuación.

2. Caracterización de prácticas matemáticas en perspectiva multi, inter e transdisciplinar

Es importante enfatizar las características constitutivas y conceptuales de los términos, establecidas por sus prefijos "multi", "inter" y "trans", atrayendo la atención sobre la complementariedad entre ellos. Traigo a la luz las palabras de Nicolescu que ayudan a comprender los términos. El autor dice que la interdisciplinariedad

> concierne la transferencia de métodos de una disciplina a otra [...] Como la pluridisciplinariedad, la interdisciplinariedad desborda las disciplinas pero su finalidad permanece también inscrita en la investigación disciplinaria. Por éste su tercer grado, la interdisciplinariedad contribuye al big bang disciplinario.[...] La transdisciplinariedad concierne, como el prefijo "trans" lo indica, lo que está a la vez entre las disciplinas, a través de las diferentes disciplinas y más allá de toda disciplina. Su finalidad es la comprehensión del mundo presente en el cual uno de los imperativos es la unidad del conocimiento. (Nicolescu, 1998, p. 35)

Con respecto a la acción didáctica, es decir, la enseñanza, la transdisciplinariedad es central para la capacidad de *transgresión de las fronteras entre las disciplinas, de una superación de la pluri y de la interdisciplinariedade* (Nicolescu, 1988, p. 3). La creatividad es

[3] Original en portugues: ultrapassa a dimensão mecânica do ato didático e tem o ato de criar como desencadeador de aprendizagem [...] Nas situações que fogem ao tradicional modelo de cerceamento das ideias para garantir um andamento programado, o inesperado tende a ser a mola mestra para desencadear ações didáticas compatíveis com o emergir do pensamento dos alunos (Guérios, 2002, p. 177-179).

potenciadora para que ocurra esta transgresión. Sí, porque los procesos cognitivos creativos fomentan la autonomía en el hacer docente a través del desarrollo de estrategias que permiten la superación de acciones didácticas estáticas, preocupadas únicamente con el cumplimiento del contenido curricular jerárquico en las disciplinas escolares. Tomo de Morin (**1998**, p. 220) que el desarrollo de estrategias se basa en un examen de las condiciones, a la vez determinadas, aleatorias e inciertas [...] La estrategia puede modificar el guión de acciones previstas, en función de las nuevas informaciones que vienen por el camino que ella puede inventar[4]. En este sentido, el desarrollo de estrategias presupone el diálogo y la elaboración de conjeturas e hipótesis, y que el desarrollo de las competencias heurísticas habilitadas para enfrentar varias estrategias posibles, es decir, para crear las condiciones de vida, permitirá a las emergencias de libertades[5].

De hecho, la concepción del conocimiento es determinante en la forma en que lo entendemos, lo que se refleja en la práctica del maestro. Entiendo que hay una simbiosis entre la forma en que se concibe el conocimiento – la ciencia – y la forma en que pensamos y actuamos. Por lo tanto, el conocimiento puede ser concebido por el maestro como disciplinario o transdisciplinario, lo que permite o no, como dice Nicolescu, comprender el mundo en su unidad. Desde esta perspectiva, la de la transdisciplinariedad, Ribeiro y Morais (**2014**, p. 249) *conciben la creatividad como la expresión de una experiencia de naturaleza compleja, de un conocimiento de naturaleza transdisciplinaria, que se materializa a partir de las actividades desarrolladas y de las relaciones emergentes*[6]. Para los autores, la creatividad es un fenómeno complejo y multidimensional.

Articulo a esta discusión mi defensa de que la acción docente puede estar compuesta de dos vectores, uno de ellos es el compromiso con el aprendizaje matemático de los estudiantes y el otro, el compromiso educativo. En este sentido, la acción didáctica con intencionalidad educativa se convierte en propulsora del desarrollo cognitivo de los estudiantes, lo que les permite tener un significado del conocimiento matemático escolar. Sí, *el método es una actividad reflexiva y consciente*[7] (Morin, **1988**, p.339). Es decir, educar para la vida y para el aprendizaje como un acto relacionado que trasciende la dimensión disciplinaria, al mismo tiempo que pone en relación el conocimiento matemático escolar y la existencia misma, considerando como una tríada el hombre, el individuo y la sociedad en la composición del pensamiento sobre el universo. Es decir, la transdisciplinariedad no es solo la *transgresión de las fronteras entre las disciplinas,* pero también, *es la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binarios: sujeto-objeto, subjetividad-objetividad, materia-conciencia, naturaleza-divinidad, simplicidad-complejidad, reduccionismo-holismo, diversidad-unidad.*

[4] Original en portugues: se fundamenta num exame das condições, a um só tempo, determinadas, aleatórias e incertas [...] A estratégia pode modificar o roteiro de ações previstas, em função das novas informações que chegam pelo caminho que ela pode inventar.

[5] Original en portugues: o desenvolvimento das competências heurísticas tornadas aptas para encarar várias estratégias possíveis, isto é, para criar condições de vida, vai permitir a emergências de liberdades. (p.304)

[6] Original en portugues: concebem a criatividade como a expressão de uma vivência de natureza complexa, de um conhecimento de natureza transdisciplinar, que se materializa a partir das atividades desenvolvidas e das relações emergentes.

[7] Original en portugues: o método é atividade pensante e consciente.

Esta dualidad está transgredida por la unidad abierta englobando el Universo y el ser humano (Nicolescu, 1988 p. 44).

En mi investigación, me intrigó identificar que hay algo subtendido que rige la acción didáctica de los maestros, independientemente del método que utilicen. Algo que se construye como en una malla que articula conocimientos formales (específicos y pedagógicos) con la experiencia vivida, es decir, con la experiencia de cada uno. He identificado que construyen principios que fundamentan la práctica que desarrollan como resultantes de la postura frente a lo que hacen en el aula (Guérios, 2002). Tales principios pueden resultar en prácticas disciplinarias prescriptivas para la confirmación de verdades consolidadas o en prácticas que consideran la complejidad del aula y tienen la creatividad como un propulsor de acciones. Una profesora entre las que investigué, por ejemplo, compone un principio didáctico basado en su convicción de que los *contenidos fragmentados, disociados de su contexto estructural, no producen un significado conceptual*[8] (ibid., p. 190). Cualquiera que sea la modalidad didáctica que desarrolle esta profesora, el principio que rige su acción es el investigativo. Incluso en la clase de exposición oral, es posible empezar con preguntas de investigación y hacer que el conocimiento sea vivo y significativo para los estudiantes (y para ella misma), dice ella, que difiere de las prácticas fragmentadas, prescriptivas y disociadas de las situaciones que surgen en el aula. Traigo palabras de Guérios y Modtosky para sellar lo que he expuesto hasta ahora:

> Prescripción pedagógica. Este es un término que nos molesta. Complejidad educativa. Este es un término que nos provoca. Prescripción, en un contexto de verticalidad y externalidad a la práctica educativa del profesor, significa orden y determinación. Es dogmático, dado su carácter de absoluta certeza. Tiene sentido de las normas curriculares que deben seguirse, de las ofertas didácticas que deben reproducirse, de los caminos que se deben recorrer, sin que procesos de transformación sean inherentes a la práctica didáctica que se realiza en cada momento y en cada circunstancia. La prescripción, en este sentido, nos parece enyeso para el acto creativo, si concebimos que la práctica pedagógica es dinámica y es, el acto creativo, un elemento nuclear para tal dinamización[9]. (Guérios y Modtosky, 2017, p.116)

El compromiso con el aprendizaje matemático y la educación de los estudiantes en una perspectiva transdisciplinaria se puede lograr a través de situaciones propias de la complejidad del mundo real a las que los estudiantes forman parte y que, problematizadas, se convierten en situaciones didácticas mediadas por la Resolución de Problemas, sobre lo que discutiré a continuación.

[8] Original en portugues: conteúdos fragmentados, dissociados de seu contexto estrutural, não produzem sentido conceitual

[9] Original en portugues: Prescrição pedagógica. Eis um termo que nos incomoda. Complexidade educativa. Eis um termo que nos provoca. Prescrição, em um contexto de verticalidade e externalidade à prática educativa do professor, significa ordem e determinação. É dogmático, visto seu caráter de certeza absoluta. Tem sentido de normatizações curriculares a serem seguidas, de ofertas didáticas a serem reproduzidas, de caminhos a serem caminhados, sem que processos transformativos sejam inerentes à prática didática que se faz a cada tempo e a cada circunstância. Prescrição, nesse sentido, nos parece engessante para o ato criativo, se concebermos que a prática pedagógica é dinâmica e que é, o ato criativo, elemento nuclear para tal dinamização

3. Principios y relaciones didácticas en el proceso de enseñar Matemáticas a través de la Resolución de Problemas.

Con respecto a la Resolución de Problemas como una posibilidad para la enseñanza en Matemáticas, esta autora y Medeiros (2016) investigaron los aspectos didácticos en la práctica de profesores en lugar de la actividad cognitiva de los estudiantes. Establecimos una tríada de elementos triangulados formada por estudiantes de 6º y 7º grado de Primaria, sus maestros y el conocimiento matemático escolar, con la resolución de problemas como un camino de aprendizaje. Como acción de investigación, buscamos comprender la actividad heurística de los estudiantes e identificar las relaciones didácticas establecidas por los maestros en esta tríada.

La identificación de estas relaciones didácticas permitió percibir múltiples facetas de una metodología de enseñanza mediada por la resolución de problemas y colaboró para que los profesores tomen conciencia de *la complejidad de la dinámica de las relaciones, las interrelaciones y las conexiones en las que se comprende su propio desempeño*[10] (Guérios y Medeiros, 2016, p. 228). Hemos traído de Puchkin (1969) construcciones teóricas sobre "acto de creación", "situación problemática" y "pensamiento creativo" y percibimos que existe una conexión entre ellas en situaciones configuradas en la vida y en la escuela. Me atrevo a decir que la vida trasciende las paredes de la escuela, la significa y es significada por ella. Complemento mi audacia destacando de Petraglia (2017, p.77):

> la importancia de la reflexión capaz de promover una conciencia de la complejidad presente en la realidad para cualquier profesional, entendiendo que todo está interconectado y que es en el aprender a aprender que el sujeto que al mismo tiempo es educador y aprendiz transforma su práctica en acciones transformadoras[11] (p.77).

Hemos identificado diferentes movimientos en las resoluciones de los alumnos. Como la búsqueda de palabras clave o números en los enunciados para operarlos de alguna manera, principalmente mediante el logro de resoluciones algorítmicas sin preocuparse por el sentido de las situaciones configuradas en los enunciados; en este caso, la acción didáctica fue lineal, prescriptiva, enredada en los amarres y en los límites de la organización disciplinaria. Como la creación de estrategias resolutivas; en este caso, las situaciones de enseñanza creativa trascienden las fronteras disciplinarias expresadas en los enunciados, favorecieron la percepción de la realidad por los estudiantes, que la significaron y permitieron la comprensión conceptual de los contenidos curriculares. *Así, establecemos una simbiosis entre la actividad educativa del profesor y su acción didáctica en las clases de matemáticas, que establece conexiones de significado con vistas a la dinamicidad en un*

[10] Original en portugues: sobre a complexidade da dinâmica das relações, inter-relações e conexões em que sua própria atuação está compreendida.

[11] Original en portugues: importância da reflexão capaz de promover uma tomada de consciência da complexidade presente na realidade, para qualquer profissional, entendendo que tudo está interligado, e que é no aprender a aprender que o sujeito que, ao mesmo tempo é educador e aprendiz transforma sua prática em ações transformadoras.

proceso de aprendizaje[12] (Guérios y Medeiros, 2016, p. 220) posible gracias al desarrollo de estrategias del pensamiento.

Establezco un paralelo entre lo expuesto y la actividad educativa de los profesores en una dimensión transdisciplinaria. Nicolescu (1988: 61) dice que la transdisciplinariedad *es una transgresión generalizada, que abre un espacio ilimitado de libertad, conocimiento, tolerancia y amor*. Nicolescu dice:

> De toda evidencia, la metodología transdisciplinaria no reemplaza la metodología de cada disciplina, que permanece como lo que ella es. Pero, la metodología transdisciplinaria fecunda estas disciplinas, proveyéndoles esclarecimientos nuevos e indispensables que no pueden ser producidos por la metodología disciplinaria. La metodología transdisciplinaria podría conducir aún a verdaderos descubrimientos en el seno de las disciplinas. Esto es natural porque un aspecto de la transdisciplinariedad es la investigación de lo que atraviesa las disciplinas (idem, p.102).

Como resultado de nuestra investigación, llegamos a la conclusión de que los principios y las relaciones didácticas establecidas en la tríada *profesor*, *estudiante* y *conocimiento matemático* en el proceso de enseñanza de las matemáticas a través de la Resolución de Problemas pueden ser potencialmente heurísticas, creativas y motivadoras (Medeiros y Guérios, 2016, p.228). "Potencialmente heurística, porque movilizan el descubrimiento, el desarrollo de autonomía y creación de diferentes estrategias para el mismo problema; creativas, porque pueden modificar y transformar conceptos vacíos de significado en situaciones-problemas con la valorización del sentido lógico de las respuestas; motivadoras, porque dan sentido a los diversos problemas que resuelve la matemática". (mis subrayados)

4. Proyectos de docencia para una práctica transdisciplinaria

Ahora presento ejemplos de proyectos de enseñanza desarrollados en una perspectiva interdisciplinaria con el fin de desarrollar una práctica transdisciplinaria. Uno es el llamado "Literatura y Matemáticas", conducido en las aulas de 5º año de la escuela primaria. Con la intención de establecer un diálogo interdisciplinario entre Matemáticas y Literatura, este proyecto permitió a los estudiantes mejorar su concentración y el desarrollo de una lectura atenta de historias y poesía cuya comprensión hizo posible la interpretación de la información. La intención didáctica era que los estudiantes interiorizasen el placer por la lectura y las matemáticas a través de las prácticas educativas.

Una de las actividades que destaco fue la elaboración de un Libro-Juego de naturaleza interdisciplinaria entre Matemáticas y Lengua Portuguesa al asociar el aprendizaje de conceptos matemáticos con el desarrollo de prácticas textuales. La autoría del Libro-Juego fue colectiva, de todos los alumnos de la clase. La trama se creó debido a las problematizaciones de la literatura leída y el contenido emergió en la interfaz entre literatura y

[12] Original en portugues: Configuramos, assim, uma simbiose entre a atividade educativa do professor e sua ação didática em aulas de matemática, que estabelece conexões de sentido com vistas à dinamicidade num processo de aprendizagem

matemáticas. El escenario creado fue estimulado por un "principio de elección", en el cual el lector puede elegir el camino que desea seguir, participando así en la construcción del libro, que para los estudiantes no podría estar listo y terminado, pero sí curioso, estimulante y con diferentes caminos. Los resultados fueron perceptiblemente positivos, ya que los estudiantes extrapolaron el objetivo inicial de la actividad, que duró muchas clases. Se envolvieron en la fantasía de la literatura y de manera lúdica establecieron relaciones con la vida cotidiana. En el establecimiento de tales relaciones hicieron una selección e interpretación de informaciones que generaron situaciones-problemas, que, a su vez, facilitaron el desarrollo del razonamiento lógico matemático En otro ámbito, los estudiantes desarrollaron sentimientos positivos acerca de las matemáticas y la literatura al experimentar lo que denominaron experiencia placentera y creativa.

Hubo otros proyectos, como el que articuló Matemáticas con Arte y lo que resultó en la construcción de un rompecabezas derivado del cuidadoso análisis de la cubierta de un libro. Lo que enfatizo es que, en el curso de las actividades, los contenidos matemáticos curriculares tales como operaciones elementales, secuencia numérica, cuantificación, simetría, gráficos, conceptos y unidades de medidas se desarrollaron desde una perspectiva conceptual, siempre a través de situaciones-problemas. Nos dimos cuenta de que los estudiantes han desarrollado placer en la lectura e interés en las matemáticas a través de prácticas educativas.

Otros proyectos de enseñanza tuvieron como temática la sostenibilidad ambiental, financiera, social y económica, cuya dimensión transdisciplinaria estuvo presente debido a la intencionalidad educativa que apunta al desarrollo de valores para la ciudadanía asociada al aprendizaje matemático. La problematización de las situaciones que surgieron durante las actividades fue el principio didáctico guía que generó acciones de investigación resueltas mediante la Resolución de Problemas, lo que permitió el *aprendizaje conceptual de los contenidos curriculares, dándoles importancia*[13] (Guérios y Medeiros, 2016, p.209). Una de las intenciones era sensibilizar a los estudiantes sobre la preservación de los recursos naturales de la naturaleza con miras a cambiar las actitudes que generan beneficios para la población, vinculando el consumo y el uso consciente. En este sentido, en el curso del proceso, nos dimos cuenta de que conceptos específicos de este campo de conocimiento, como las 4 R de la sostenibilidad (reciclar, reutilizar, repensar y reducir) se desarrollasen conceptualmente para que las relaciones matemáticas se estableciesen en la confluencia de ambos, y no como aplicación de un campo en el otro. Se puede decir que la multidimensionalidad de lo real estuvo presente en esta necesidad de integración de campos no previstos, pero que surgieron y fueron considerados, cambiando la ruta didáctica y de contenidos previamente establecida. Con la perspectiva descrita y realizada en diferentes clases en diferentes años, se desarrollaron contenidos curriculares matemáticos, tales como operaciones aritméticas, números decimales, fracciones, porcentajes, formas geométricas, unidades de medida, sistemas monetarios, procesamiento de información (tablas y gráficos), conceptos de geometría plana (medidas, ampliación y reducción, polígonos, ángulos, área y perímetro) y espacial (caras, aristas y vértices de sólidos geométricos).

[13] Original en portugues: *aprendizagem conceitual dos conteúdos curriculares provendo-os de significabilidade*

Un proyecto interesante fue el que desarrolló conceptos de sostenibilidad social a través de las matemáticas escolares asociadas con los deportes. La dinámica pedagógica tuvo como eje central el objetivo educativo de propiciar experiencias para el desarrollo de valores con vistas al ejercicio de la ciudadanía. Con el fin de generar las situaciones pertinentes a las acciones desarrolladas, la calidad de vida fue problematizada, con vistas a un convivio placentero entre las personas. Se desarrollaron ideas sobre el trabajo en grupo y grupo cooperativo de trabajo. A través de tablas y gráficos resultantes de la votación para elegir un deporte específico para toda la clase, los estudiantes eligieron el fútbol. Luego, a partir de las reglas del fútbol, crearon un deporte colaborativo y con relaciones sostenibles en las que golear no era lo más importante, sino la interacción y la buena convivencia entre los jugadores. En este proceso de creación, hubo una exploración de los conocimientos matemáticos relacionados con la geometría y la aritmética. Una actividad que impresionó fue la creación de una hoja de observación compuesta por elementos de buenos modales y "educación". Por ejemplo, se anotaron puntos por quién golpeó al jugador contrario, provocó una falta, mantuvo la pelota y otras actitudes no compatibles con el comportamiento atlético y ciudadano. Los alumnos de la clase se dividieron en tres grupos. Dos de ellos eran los equipos en el campo y el otro era el grupo observador que completaba la hoja para cada juego jugado. Luego, los datos de las hojas de los observadores de todos los juegos fueron sistematizados y representados en gráficos y tablas. La discusión de los datos provocó discusiones interesantes, por ejemplo, que vivimos en una sociedad regida por convenciones y que existen reglas que permiten una buena convivencia social. El significado atribuido a las discusiones educativas se deriva del significado matemático que obtuvieron cuando desarrollaron las actividades, es decir, una significando la otra en movimiento recursivo.

Concluyo con el ejemplo del proyecto que desarrolló la enseñanza de las matemáticas financieras en la escuela desde una perspectiva de la educación para la vida. En este caso, las situaciones problematizadas se relacionaron con la vida cotidiana de los estudiantes y las aspiraciones personales de cada uno para el momento presente (sus deseos que podrían alcanzarse) y para un futuro previsto por ellos, a partir del estudio matemático de la viabilidad financiera. A través de la resolución de problemas que surgieron de las problematizaciones, se discutieron temas como presupuesto familiar, ahorro, economía y otros. Los maestros agregaron argumentos y conocimientos asociados con los vínculos que los estudiantes establecieron entre las referencias que surgieron de la experiencia en sus propios mundos, la experiencia colectiva y el conocimiento matemático escolar. También aquí, tenemos una simbiosis entre la perspectiva educativa y el aprendizaje matemático, uno significa el otro.

5. Consideraciones Finales

Este artículo ofrece subsidios para pensar sobre la enseñanza de las matemáticas en una perspectiva transdisciplinaria que vincula los aspectos educativos y de enseñanza de los contenidos matemáticos de la escuela, a través de la significación de una por la otra, que puedo llamar recíproca.

Respetando el hecho de que el movimiento cognitivo de los estudiantes es un proceso individual y singular, que implica en diferentes formas de pensar matemáticamente la misma situación en la misma aula, las prácticas realizadas permiten a los estudiantes y profesores desarrollar análisis de circunstancia, conjeturar, desarrollar estrategias para soluciones de situaciones configuradas y realizar un análisis reflexivo circunstanciado. Tenemos la creatividad como un principio didáctico que desencadena el movimiento cognitivo para tal desarrollo.

La creatividad es la clave para que la práctica didáctica y el aprendizaje de los alumnos alcancen una dimensión transdisciplinaria que permita la construcción de significados concretos de acuerdo con la realidad en que se vive.

La interdisciplinariedad experimentada en las actividades didácticas permitió discusiones reflexivas relevantes sobre los temas desarrollados, que permitieron a los estudiantes construir significados que vinculaban el aprendizaje matemático y el aprendizaje para la vida, haciendo posible superar la dimensión interdisciplinaria a la transdisciplinariedad.

En nuestro caso, pretendemos desarrollar un concepto de sostenibilidad vinculado a los preceptos de una formación ciudadana que comienza desde cada persona hasta una comprensión de la vida colectiva. Ribeiro y Moraes (2014, p. 250) afirman, con lo que estoy de acuerdo, que *cuando nos involucramos en el desarrollo de una actividad creativa, surge un flujo de información, que cruza los diferentes niveles de realidad o materialidad del objeto allí presente*[14]. De hecho, Morin (1988) nos advierte sobre la multidimensionalidad de lo real y su imprevisibilidad. Ribeiro y Moraes afirman que el desarrollo de una actividad creativa puede requerir conocimientos de otras áreas, que a menudo experimentamos cada vez que aceptamos lo imponderable, admitimos lo impredecible e incorporamos situaciones y hechos que han surgido. En este caso, dicen las autoras, *la dinámica comienza a explorarse a partir de la reconexión de ciertos aspectos disciplinarios del diálogo con los objetos, poniéndolos en interacción, buscando descubrir potencialidades, convergencias, divergencias, buscando un conocer más global, integrado y abarcador*[15] (2014, p. 250).

El principio investigativo, si construido como dinamizador de la actividad docente (Guérios, 2002), permite que las relaciones didácticas establecidas en la tríada profesor, estudiante y conocimiento matemático sean potencialmente heurísticas, creativas y motivadoras, como lo han identificado Guérios y Medeiros (2016).

Es posible afirmar que, si la creatividad es constitutiva de la enseñanza de los maestros, las posibilidades de que los estudiantes también la desarrollen serán significativas. Sendo creativo, la potencialidad heurística se acentúa en proporción al desarrollo del pensamiento estratégico. En este sentido, Guérios y Modtosky (2017) llaman la atención sobre el hecho de que el desarrollo del pensamiento complejo hace posible la aprehensión de la multidimensionalidad de lo real sin reducir el conocimiento del todo a sus partes, o considerar el

[14] Original en portugues: ao nos implicarmos no desenvolvimento de uma atividade criativa, um fluxo de informações surge, atravessando, assim, os diferentes níveis de realidade ou de materialidade do objeto ali presente

[15] Original en portugues: a dinâmica passa a ser explorada a partir da religação de determinados aspectos disciplinares do diálogo com os objetos, colocando-os em interação, buscando descobrir potencialidades, convergências, divergências, em busca de um conhecer mais global, integrado e abrangente

todo, en el que las partes pierden la dimensión de totalidad que los compone. Establecer relaciones en un contexto multidimensional es el desafío. Es un principio complejo que encuentra resonancia en la afirmación de Nicolescu (p.3) de que la transdiciplinariedad es *la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binarios [...] que abre un espacio ilimitado de libertad, de conocimiento*. Los ejemplos presentados aquí muestran que la transdisciplinariedad, según Ribeiro y Moraes (2014, p. 249), se materializó a partir de las actividades desarrolladas y las relaciones emergentes según el dictamen de Nicolescu.

En el contexto discutido aquí, la formación de los profesores debe ser considerada. Reitero la defensa de una formación menos fragmentada, una formación dirigida a comprender y aceptar la multidimensionalidad del real como componente de la práctica educativa.

Reitero la defensa de Guérios y Modtosky (2017, p. 116-117) de una *formación más conexa, preocupada con el desarrollo del pensamiento de los profesores, con sensibilidad a la práctica educativa, con la flexibilidad en la acción didáctica, con la percepción que las certezas absolutas generan recetas [...]*[16] que no contribuyen a una actividad de enseñanza compuesta simultáneamente por el compromiso con el aprendizaje matemático y por el compromiso con la vida como práctica educativa.

Referencias y bibliografía

Guérios, E. (2002). Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática. Tese (Doutorado). UNICAMP: Campinas. Disponível em **http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253667**

Guérios, E., Medeiros Jr, R. J. (2016). Resolução de Problemas e Matemática no Ensino Fundamental: uma perpsctiva didática. In Brandt, C., Moretti, M. (orgs), *Ensinar e Aprender Matemática: possibilidades para a prática educativa*. Ponta Grossa: UEPG, Cap. 10, 209-232. Disponível em **http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158.pdf**

Guérios, E., Modtkoski, H. h. (2017) Conexões entre Gaston Bachelard, Edgar Morin e o pensamento complexo. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M., Silva E. *Complexidade e Educação: Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV. Cap. 6, 115-136

Morin, E. (1998). *Ciência com consciência*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Nicolescu, B. (1988). *La Transdisciplinariedad. Manifesto*. Paris: Du Rocher.

Petraglia, I., Vasconcelos, M.A. (2017). Um pensamento complexo para o conhecimento e a educação. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M.; Silva E. *Complexidade e Educação: Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV. Cap. 3. 67-80

Puchkin, V. N. (1969). *Heurística: a ciência do pensamento criador*. Rio de Janeiro: Zahar.

Ribeiro, O., Moraes, M. C. (2014). *Criatividade em uma perspectiva transdisciplinar*. Brasília: Liber Livro e UNESCO.

[16] Original en portugues: formação mais conexa, preocupada com o desenvolvimento do pensamento dos professores, com a sensibilidade para a prática educativa, com a flexibilidade na ação didática, com a percepção de que certezas absolutas geram prescrições [...]

Refletindo sobre a inclusão das tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática[1] [2]

Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Resumo

Este artigo discute a incorporação das tecnologias digitais na formação de professores de Matemática no Brasil. Apresentando exemplos de ações que podem ser inseridas em cursos de Licenciatura em Matemática. A ideia é que os futuros professores tenham oportunidade, durante a sua formação, de utilizarem recursos digitais e, com isto se sintam capacitados a utilizarem tais recursos quando forem profissionais da educação.

Palavras-chaves: Educação Matemática, Formação de professores, Tecnologias Digitais.

Abstract

This article discusses the inclusion of digital technologies in initial formation of match teachers in Brazil, and features examples of actions that can be introduced in Mathematics graduation courses. The idea is that future teachers have the opportunity during their training to use digital resources and thus feel empowered to use such resources when they are educational professionals.

Keywords: Mathematics Education, Teacher training, Digital Technologies.

1. Introdução

As Tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia. Neste período de informatização tecnológica, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a Educação, e a Educação Matemática, também necessitam adequar-se a essa realidade.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) a Educação no Brasil tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Desse modo, a educação e a inserção na sociedade digital implicam em uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica, cujo uso da tecnologia pelos docentes é condição

C. Groenwald
Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil
claudiag@ulbra.br

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] Projeto com apoio do CNPq, com a bolsa de produtividade da autora.
Recibido por los editores el 15 de junio de 2019 y aceptado el 29 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 210–218. Costa Rica

necessária para essa adequação. Embora o Ministério da Educação (Brasil, 2013) considere importante a utilização de tecnologias de qualidade objetivando a melhoria da educação, o mesmo adverte que o uso de recursos tecnológicos, de forma isolada e desalinhada com a proposta pedagógica da escola, não garante a qualidade da Educação.

Ao utilizar as tecnologias para proporcionar condições favoráveis à aprendizagem, o professor deve, antes de tudo, definir o objetivo instrucional desejado para então organizar as ações e recursos para atingir seus objetivos. E, para isto, é fundamental conhecer as possibilidades que as tecnologias oferecem e quais tecnologias são adequadas aos estudantes, ao conteúdo a ser desenvolvido e ao nível de ensino a que se destina.

Nesse sentido a conferência apresentada na XV Conferência Interamericana de Educação Matemática (XV CIAEM), em Medellin, na Colômbia, no ano de 2019, propôs uma discussão sobre a importância de incluir, nos cursos de formação inicial de professores, ações que oportunizem aos estudantes de Matemática utilizarem as tecnologias em seu planejamento didático.

Torna-se fundamental que os professores evidenciem as mudanças no processo de ensino e aprendizagem da Matemática quando se utilizam tecnologias digitais, apontando possibilidades que estes recursos oferecem para a Educação Básica.

2. Formação de professores no Brasil

A responsabilidade em formar professores de Matemática, no Brasil, está a cargo das Universidades, em cursos de Licenciatura. Tais cursos habilitam professores para lecionarem na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a desenvolverem pesquisas na área de Educação Matemática, podendo atuar, também, no ensino superior na formação de professores. Salienta-se que, no Brasil, os cursos de Matemática Bacharelado habilitam profissionais para lecionarem no ensino superior e a realizarem pesquisas em Matemática pura. Importante frisar que os profissionais formados em cursos de Licenciatura em Matemática possuem habilitação para lecionarem nas séries finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos), com estudantes de 10 a 13 anos, Ensino Médio, com estudantes de 14 a 16 anos, na EJA e no ensino superior na área de Educação Matemática.

Os cursos de Licenciatura possuem 3200 horas, distribuídas em 2200 horas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural, 400 horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso, 400 horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso e 200 horas de atividades complementares.

A prática de ensino, deve ser desenvolvida ao longo de todo o curso, visa desenvolver as competências para ser professor, como: saber analisar livros didáticos, saber usar recursos digitais no planejamento didático docente, saber usar os recursos didáticos, saber falar em público, ter domínio de turma, saber usar a simbologia e linguagem adequada, ter bom relacionamento com os alunos e colegas, saber se relacionar com os pais, entre outras habilidades necessárias ao desenvolvimento da profissão professor. Neste sentido é importante promover oportunidades, durante a formação inicial, de desenvolver essas competências. Neste sentido, é importante que os estudantes sejam chamados a realizarem as ações de: apresentar trabalhos, realizarem trabalhos de grupo, a utilizarem diferentes recursos didáticos e a planejamentos com atividades didáticas para os conteúdos que vão lecionar futuramente, bem como, a realizarem a análise de tarefas matemáticas e a preverem respostas dos estudantes.

O Estágio Supervisionado de Ensino deve ser desenvolvido a partir da metade do curso, objetiva que o estudante tenha oportunidade de conhecer a escola, seu futuro ambiente de trabalho, dando aulas em uma turma que possua professor titular e com a orientação de um supervisor da Universidade.

As atividades complementares estão distribuídas em atividades de Iniciação Científica (pesquisas com orientação de um professor da Universidade), monitorias em disciplinas do curso, aulas em projetos nas escolas, participação em cursos complementares, participação em congressos da área de Educação Matemática ou Matemática ou Educação Geral.

Ainda, segundo o MEC/CNE (2001) "Desde o inicio do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas". É importante, também, a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática, como *softwares* matemáticos, uso de calculadoras, tablets, smartphones.

Neste sentido faz-se necessário discutir as formas de desenvolver, nos futuros professores de Matemática, durante a sua formação inicial, experiências que desenvolvam a competência para atuarem com tecnologias, associadas às metodologias de ensino.

3. Uso de tecnologias digitais na Educação Básica

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re)organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das TIC no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade dessa inclusão no planejamento escolar.

Perrenoud (2000), com base no pensamento de Tardif, salienta que as tecnologias demandam e, ao mesmo tempo, oportunizam uma mudança de paradigma, em relação às aprendizagens e não às tecnologias. Para o autor as TIC contribuem com os trabalhos pedagógicos e didáticos porque permitem criar situações de aprendizagem diversificadas.

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e as tecnologias devem ser consideradas como características indispensáveis para a sala de aula. Consideram que os computadores, os tablets, os *smartphones* podem ser utilizados para reunir dados, fazer pesquisas na sala de aula e para utilizar aplicações que façam cálculos, simulações, assim como para fomentar a visualização, permitindo que os alunos se envolvam com jogos que exijam habilidades para resolução de problemas.

Os computadores, tablets, telefones inteligentes e calculadoras avançadas, segundo o NCTM, tornam acessíveis uma gama de aplicações que auxiliam aos usuários a explorar Matemática, dando sentido aos conceitos e procedimentos, e a envolvê-los com o raciocínio matemático (NCTM, 2014).

Considera-se, portanto, que as TIC se constituem em importantes recursos que auxiliam o professor em seu trabalho docente, colaborando com mudanças significativas na educação.

Nas tecnologias têm-se os dispositivos dedicados, que são aparatos tecnológicos com uma função específica e destinados a uma única finalidade, como o DVD, e os dispositivos informáticos multifuncionais, como os computadores e afins, que em conjunto com um determinado *software* de aplicação, ou aplicativo, adquire as características e funcionalidades específicas para atender a uma determinada finalidade. Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de multiplaforma, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o Android, iOS e Windows Mobile para dispositivos móveis, e Windows, Linux e OSX para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos. Nesse sentido um *software* que se adapta a essas características é o GeoGebra.

Também, é importante que os alunos de licenciatura em Matemática, saibam realizar planejamentos com os recursos digitais e os utilizem com uma nova visão de ensino, que permitam, aos estudantes, a visualização, a formação de conjecturas e a generalização de conceitos matemáticos e, também, que o uso de tais recursos permitam o desenvolvimento do pensamento matemático.

Salienta-se que os professores não necessitam saber criar e programar recursos, mas sim, conhecer como utilizar os recursos que existem disponíveis.

Neste sentido, conhecer objetos de aprendizagem e saber como incorporá-los em seu dia a dia na sala de aula é muito importante e podem ser um apoio às aulas.

Os objetos de aprendizagem segundo Willey (2002), são recursos digitais que podem ser reutilizados para o suporte ao ensino. Para o IEE - Institute of Electrical and Electronics Engineers () os objetos de aprendizagem são qualquer entidade, digital ou não, que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o processo de aprendizagem que utilize tecnologia. Um objeto de aprendizagem deve ter um objetivo de aprendizagem dentro de um determinado tempo para a sua execução, Mortimer (2002) coloca que esse tempo é usualmente em torno de quinze minutos. A característica de reutilização, consequentemente, faz com que um objeto possua uma descrição mínima de seus objetivos, tipos de interações e autor, através da adoção de um padrão de metadados; outra característica é que o objeto deve existir em si só, ou seja, não deve depender de outros objetos para atender o seu objetivo proposto.

Dentro de um enfoque pedagógico, Merrill (2002) afirma que objetos sem um design instrucional são somente objetos de conhecimento, ou seja, tem um caráter mais informativo. Tal preocupação tem levado aos desenvolvedores a adotarem uma postura construtivista, com atividades de interação que permitam a ação do aluno.

Importante frisar que os objetos de aprendizagem quando incorporados e organizados em uma sequência didática apresentam um alto potencial para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Entende-se por Sequência Didática a organização de um conteúdo qualquer, a partir da articulação entre os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos, com atividades didáticas planejadas para esse fim, com foco na aprendizagem. Segundo Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas são "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos". Dolz e Schneuwly (2004) consideram que sequências didáticas são organizadas pelo professor com o objetivo de alcançar a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação.

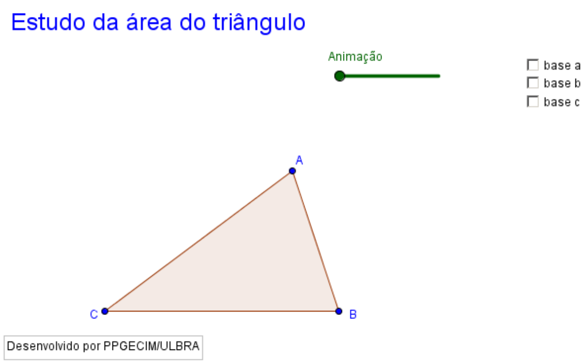
Segundo Groenwald, Zoch e Homa (2009) a vantagem do uso de uma sequência didática em uma plataforma de ensino é a possibilidade da utilização de diferentes recursos, com padrão superior de qualidade, com um conteúdo visual com maior qualidade de visualização.

A seguir apresentam-se exemplos do uso de tecnologias, em específico o *software* Geogebra. O Geogebra é um *software open source*, sob o GNU (General Public License) disponível em www.geogebra.org., que agrega as funcionalidades de DGS e de *Computer Algebric System* (CAS) no plano, sendo indicado para Geometria, Álgebra e Cálculo (Hohenwarter e Preiner, 2007).

Segundo Hohenwarter e Fuchs () o Geogebra é um *software* de Geometria interativa que também fornece possibilidades algébricas como entrar diretamente com equações, direcionado aos estudantes (10 a 18 anos) e professores do Ensino Médio.

4. Exemplos do uso de tecnologias digitais no planejamento escolar na Educação Básica

A Figura 1 apresenta um objeto de aprendizagem, desenvolvido no Geogebra, onde é possível que o estudante visualize a transformação do triângulo em um paralelogramo e que perceba que a medida da área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. É possível que o estudante realize as transformações optando por uma das alturas do triângulo em relação a uma das bases. Importante salientar que permite ao estudante observar que dependendo da base escolhida, obtêm-se diferentes alturas, permanecendo a mesma medida da área.



Manipulações com o objeto

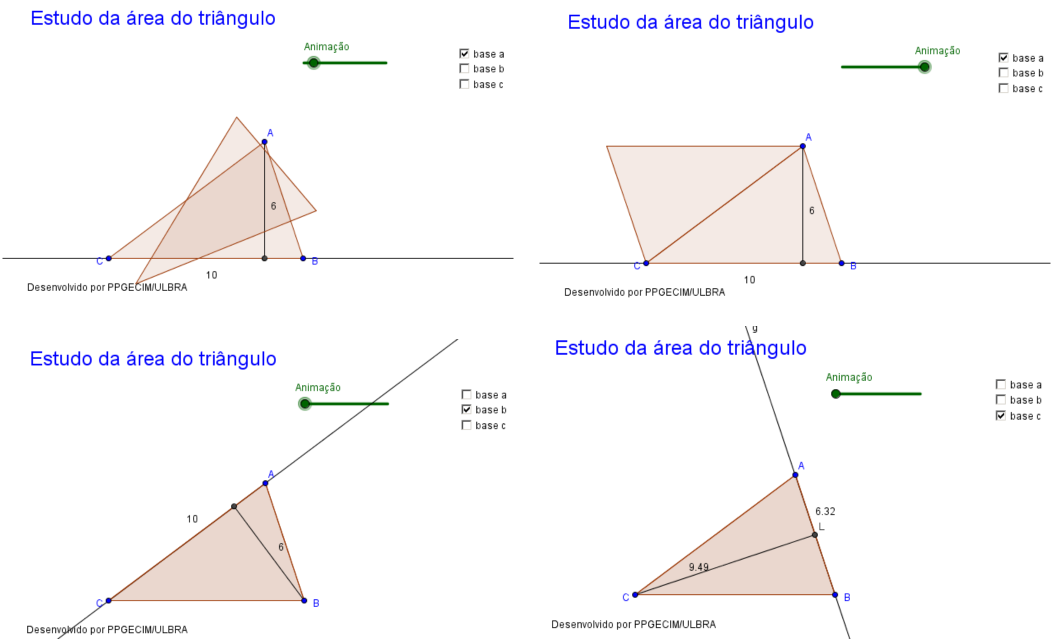


Figura 1. Objeto de Aprendizagem Área do Triângulo. Fonte: **http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.**

Outro objeto de aprendizagem que demonstra a importância do uso das tecnologias digitas sobre o uso de lápis e papel, está apresentado na figura 2, com a demonstração da área do círculo. Com lápis e papel pode-se realizar esta demonstração com, no máximo, oito recortes, porém utilizando um objeto de aprendizagem é possível realizar muitas divisões, neste caso, foram utilizados 200 recortes.

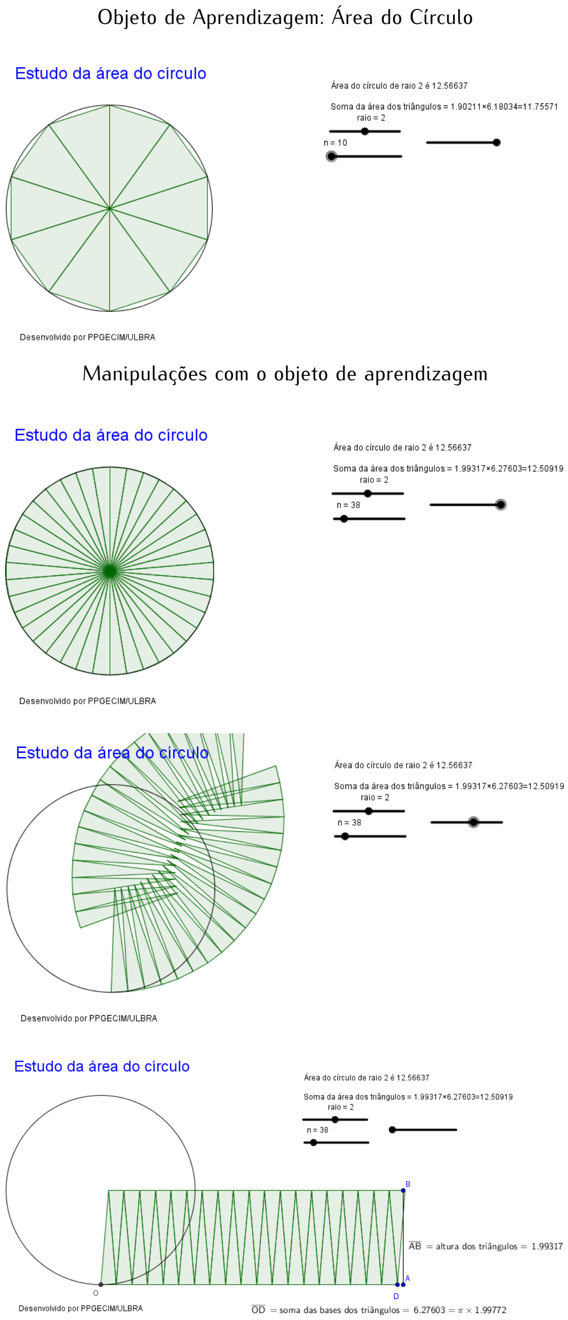
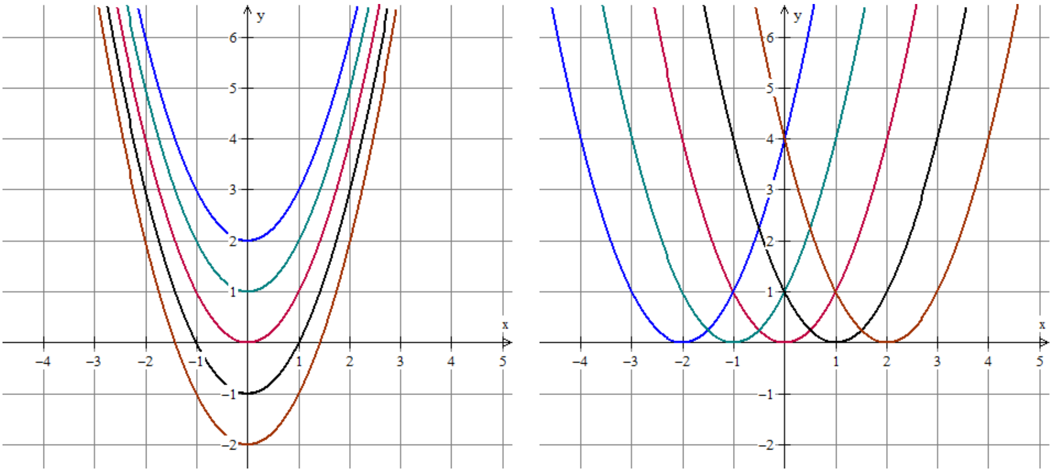


Figura 2. Objeto de Aprendizagem Área do Círculo. Fonte: **http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.**

Outro exemplo, do uso de tecnologias na Educação Básica, é no estudo de funções no Ensino Médio, o professor pode fazer com que os estudantes tracem gráficos, utilizando um *software*, por exemplo o *Winplot*, ou o *Geogebra*.

O aluno deve perceber os tipos de crescimento e decrescimento, bem como, representar as funções na forma algébrica, geométrica e com linguagem natural. Recomenda-se que os estudantes possam analisar o que acontece quando se altera os parâmetros em uma função, identificando os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se altera os coeficientes.

A Figura 3 apresenta um exemplo com função quadrática.



Translação vertical, para $f(x) = x^2$ alterando o parâmetro b de -2 a 2.

Translação horizontal $f(x) = (x + b)^2$

Figura 3. Translações com função quadrática. Fonte: Autora.

5. Considerações finais

Para finalizar, ressalta-se que o professor deve estar preparado para inserir esses recursos em sala de aula, mas também não deve ter como objetivo utilizar a tecnologia apenas pelo uso, sem uma intenção clara e bem estruturada.

Nesse sentido Barboza (2009, p. 19), ressalta que: as tecnologias fornecem vários recursos que podem ser aplicados na educação, porém cada um desses recursos deve ser estudado e analisado pelos professores antes de serem usados em sala de aula, caso contrário, só servirá para informatizar o que era feito no modelo tradicional de educação.

Salienta-se, também, que o Geogebra é um *software* adequado à construção de objetos de aprendizagem manipuláveis sem que seja necessário o conhecimento de programação avançada.

Importante frisar que os objetos desenvolvidos não devem ser apresentados individualmente, pois os mesmos são baseados no conhecimento da área do paralelogramo e do retângulo, logo, salienta-se a importância da construção de uma sequência didática que apresente os objetos encadeados, de forma que permita a visualização, o desenvolvimento de conjecturas e a generalização por parte dos estudantes. A sequência com todos os objetos de aprendizagem para o cálculo de áreas com figuras planas pode ser encontrada em: **http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio**.

Referencias y bibliografía

Barboza., A. (2009). Ambientes Virtuais de Aprendizagem um estudo de caso no Ensino Fundamenta e Médio. *Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática*, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. doi.org/10.1002/job.

Brasil. (2013). *Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território*. Retirado de: **http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018 &Itemid=948**.

Dolz, J. e Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*.Campinas: Mercado da Letras.

Groenwald, C.; Zoch, L. e Homa, A.(2009). Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. *Bolema*, Rio Claro, v. 22, p. 27 - 56, n. 34.

Hohenwarter, M. e Fuchs, K. *Combination of dynamic geometry , algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Disponível em: **http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf**. Acesso em: 4/6/2014.

Hohenwarter, M. e Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, v. 7. Disponível em: **http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html**.

IEEE - *Learning Tecnology Committee* (LTSC). (2010). In: WG12 - Learning Object Metadata. Disponível em **http://ltsc.ieee.org/wg12/**. Acesso em: 14/11/2010.

MEC/CNE - Ministério Da Educação, Conselho Nacional De Educação. (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Parecer CNE/CES 1.302/2001.

Merrill, D. (2002). Position statement and questions on learning objects research and practice. *Learning objects technology: Implications for educational research and practice, AERA*. New Orleans. Disponível em: **http://www.learndev.org/LearningObjectsAERA2002.html**.

Mortimer, L. (2002). *(Learning) Objects of desire: Promise and practicality*. Learning Circuits (April). Disponível em **http://www.learningcircuits.org/2002/apr2002/mortimer.html**. Acesso em: 15/01/2011.

NCTM. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical sucess for all.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nóvoa, A. (2007). *Desafios do Trabalho do Professor no Mundo Contemporâneo*. Palestra de António Nóvoa.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Willey, D. (2002). *Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxionomy*. Disponível em: **http://reusability.org/read/ chpters/wiley.doc**. Acesso em: 10 fev. 2010.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática[1]

Mónica E. Villarreal

Resumen

El desarrollo de actividades y proyectos de modelización matemática en la formación de futuros profesores resulta de vital importancia debido a que, tanto en documentos curriculares para la formación inicial de profesores de matemática, como en documentos curriculares para la educación secundaria, se recomienda la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática. Diversos investigadores indican que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial. En este artículo se describe un escenario de modelización creado para que futuros profesores de matemática desarrollen diversas actividades de modelización, en particular, para que lleven adelante proyectos de modelización abierta, con tema de libre elección. En base a datos recopilados durante siete años, se presentan experiencias de modelización llevadas adelante en este escenario. Se muestra el tipo de temas que fueron seleccionados, los contenidos matemáticos que se utilizaron para dar cuenta de los problemas formulados y el importante papel de las tecnologías en un proceso de modelización. El análisis detallado de un proyecto permite mostrar logros, dificultades y reflexiones en torno a la modelización. Se concluye con algunas reflexiones que ponen de manifiesto la necesidad de repensar las acciones propuestas en el escenario de modelización creado y coordinar acciones entre matemáticos y educadores matemáticos a fin de que la modelización sea comprendida, por los futuros profesores, como actividad matemática y como abordaje pedagógico.

Palabras clave: educación, matemática, modelización matemática, formación de profesores, tecnologías.

Abstract[2]

The development of mathematical modeling activities and projects in the education of future teachers is of vital importance because, both in curricular documents on initial mathematics teacher preparation, and in curricular documents on secondary education, the introduction

M. E. Villarreal
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 4 de junio de 2019 y aceptado el 22 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 219–234. Costa Rica

of applications and modeling for the teaching of mathematics is recommended. Several researchers indicate that, if future teachers are intended to design modeling activities for their classes in high school, they need to have modeling experiences during their initial preparation. This article describes a modeling scenario created for future mathematics in which various modeling activities are developed. In particular, open-ended modeling projects are carried out on freely selected topics. Based on data collected over seven years, modeling experiences carried out in this scenario are presented. It shows the type of topics that were selected, the mathematical contents that were used in formulating the problems, and the important role of technologies in a modeling process. The detailed analysis of a project allows a demonstration of achievements, difficulties and reflections on modeling. It concludes with some reflections that highlight the need to rethink the actions proposed in the modeling scenario created, and to coordinate actions between mathematicians and mathematical educators so that modeling is understood, by future teachers, as a mathematical activity and as a pedagogical approach.

Keywords: education, Mathematics, mathematical modeling, teacher preparation, technologies.

1. Breve introducción: problemática y contexto

Este texto aborda aspectos de la problemática de la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización matemática como proceso científico y como abordaje pedagógico. Desde hace unos diez años un grupo de docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), del cual soy integrante, investiga en torno a la temática del desarrollo profesional de futuros profesores de matemática que llevan adelante proyectos de modelización[3], esto es, actúan como modelizadores; o que diseñan e implementan actividades de modelización durante el transcurso de sus primeras prácticas docentes en aula. Estas investigaciones han sido desarrolladas con estudiantes[4] que cursan la carrera de Profesorado en Matemática en la UNC. Esta carrera tiene una duración de 4 años. Su plan de estudios está compuesto por un 66% de cursos disciplinares (matemática, física o computación) impartidos por matemáticos o físicos y un 34% de cursos de carácter didáctico-pedagógico impartidos por pedagogos o educadores matemáticos.

En este artículo el foco se coloca en los futuros profesores en cuanto modelizadores y se propone como objetivo: reportar acerca de sus experiencias de modelización en el marco de un curso de Didáctica de la Matemática (DM).

En las siguientes secciones, se presentan algunas ideas en torno al vínculo entre modelización, currículum y formación inicial de profesores de matemática. El tratamiento de estas ideas busca fundamentar la importancia de la inclusión de la modelización en la formación de profesores. Luego, se hace referencia a los desafíos que la modelización implica para el trabajo docente. Posteriormente, se describe el escenario de modelización creado en el curso

[3] Para evitar repeticiones, a veces se usa "modelización" en lugar de "modelización matemática".
[4] De no mediar una aclaración, "estudiantes" se refiere siempre a "futuros profesores".

de DM y se brindan detalles de las acciones llevadas a cabo en él. Finalmente, se reportan algunos resultados de investigaciones realizadas en ese escenario de modelización.

2. Modelización en el currículum

Según Kaiser (2014), la importancia de la modelización a nivel internacional se ve reflejada en muchos currículums nacionales, sin embargo, todavía no es claro cómo integrar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el ámbito local (Argentina), y en coincidencia con lo observado por Kaiser, la modelización es mencionada en documentos curriculares destinados a la educación secundaria. Por ejemplo, en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba se encuentran propuestas de situaciones de enseñanza relacionadas con la modelización, y se señala que el docente:

- Considerará la ***modelización*** para resolver problemas tanto externos como internos a la matemática. Además, propiciará el estudio de límites del modelo matemático para explicar un problema o fenómeno que se intenta resolver o explicar. Para que el estudiante pueda describir, analizar o predecir el fenómeno de la realidad modelado (por ejemplo, fenómenos sociales y/o naturales) mediante la matemática puesta en juego, se requiere que los estudiantes observen la realidad; la describan en forma simplificada; construyan un modelo; trabajen matemáticamente con él para arribar a resultados y conclusiones matemáticas; interpreten los resultados; evalúen la validez del modelo para poder explicar esa realidad.

- Incluirá problemas que se modelen matemáticamente para el ***tratamiento del álgebra***, acudiendo a generalizaciones y contemplando una perspectiva amplia del álgebra como instrumento de modelización. Desde esta postura, las variables, ecuaciones y funciones, son instrumentos de modelización de problemas desde dentro y fuera de la matemática. Su visión como instrumento de modelización, implica que el docente deberá proponer tareas que apunten a cada uno de los pasos de la modelización matemática: identificación y designación de variables que caracterizan el sistema a modelizar, establecimiento de relaciones entre variables, trabajo a partir de expresiones simbólicas que permiten conocer el sistema modelado, interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico. (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2011, p. 48, énfasis en el original).

En el primer ítem se destaca la propuesta de trabajar tanto con modelización intra-matemática como extra-matemática. Asimismo, se menciona el estudio de los límites de un modelo para explicar un determinado fenómeno de la realidad y se explicitan las fases de un proceso de modelización. En el segundo ítem, el proceso de modelización se vincula más específicamente al álgebra como instrumento privilegiado para modelizar y se especifica la necesidad de proponer tareas que den cuenta de las fases del proceso para ese caso particular.

Ante las propuestas de enseñanza como las que se acaban de citar, cabe preguntarse: ¿qué perspectiva de modelización subyace en las mismas? Por un lado, el proceso de modelización es visto en estos diseños curriculares como un *vehículo* para aprender matemática (Julie y Mudaly, 2007); lo que se busca es ofrecer aplicaciones de contenidos matemáticos ya estudiados. Aquí puede verse que se denomina modelización al uso de modelos ya creados para resolver ciertos problemas reales. En estos casos estamos en presencia de la aplicación de un modelo matemático ya estudiado que resulta adecuado para resolver un problema. Se trata de lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *aplicaciones ilustrativas*.

Por otro lado, se pone de manifiesto una postura que busca que los estudiantes se adentren en un proceso de modelización y sean creadores de modelos para fenómenos de la realidad. El desarrollo de este proceso en clases de matemática promueve lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *modelización activa*. Estos autores afirman que en este caso puede existir una variedad de herramientas matemáticas útiles para dar cuenta del problema y que elegirlas y usarlas apropiadamente es el mayor desafío para los estudiantes. En este caso, interesa el proceso de modelización en sí, como actividad matemática y como *contenido* (Julie y Mudaly, 2007).

Si se espera que los profesores lleven adelante procesos de modelización activa en sus clases, es necesario que ellos mismos vivan esa experiencia. En este artículo se reportan, en particular, experiencias de modelización con futuros profesores de matemática.

3. Modelización en la formación inicial de profesores de matemática

Los requerimientos de diseños curriculares para la educación secundaria en relación con la modelización –tales como los mostrados en la sección anterior–, la existencia de diferentes perspectivas asociadas a ese proceso y la variedad de tareas de modelización destinadas para clases de matemática (ver, por ejemplo, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) plantean desafíos para la formación de futuros profesores. ¿Qué ambientes de aprendizaje es necesario crear en el ámbito de la formación inicial si se pretende que los futuros profesores tengan condiciones para dar cuenta de requerimientos curriculares en torno a la modelización? Estos desafíos también son mencionados en el contexto internacional y muchos investigadores manifiestan sus preocupaciones, propuestas y reflexiones en relación con la modelización matemática en la formación de futuros profesores.

Doerr (2007) afirma que es necesario que los futuros profesores encuentren "experiencias de modelización que proporcionen una variedad de contextos y herramientas y que los involucren en análisis de meta-nivel de su actividad de modelización" (p. 77). Niss, Blum y Galbraith (2007) enfatizan que, si se pretende que los profesores de matemática incluyan "aplicaciones y modelización en sus agendas de enseñanza de manera eficiente, exitosa y reflexiva, necesitan oportunidades para desarrollar esa capacidad durante su educación inicial y a través de actividades regulares de desarrollo profesional en servicio" (p. 7). Blum (2015) se refiere a la necesidad de proporcionar a los futuros profesores el conocimiento profesional necesario para llevar adelante actividades de modelización y desarrollar experiencias de enseñanza con modelización. Por su parte, Gastón y Lawrence (2015) sostienen que la formación de los futuros profesores debería incluir conocimientos acerca de qué es la modelización matemática, cómo puede ser incorporada en la enseñanza y cómo se pueden evaluar las actividades de modelización. Estos autores afirman que es deseable que los futuros profesores ganen experiencia significativa con la modelización, sea a través de la realización de actividades de modelización en cursos de matemática, o a través de cursos específicos de modelización.

Este breve recorrido por la literatura, permite distinguir tres focos asociados con las recomendaciones propuestas por los diferentes autores: 1) la importancia de vivenciar experiencias de modelización, 2) la preocupación con el desarrollo de conocimientos profesionales para generar, implementar y evaluar actividades de modelización en el aula y 3) el abordaje del proceso de modelización como objeto de enseñanza en sí mismo. Se puede decir que todos los autores presentados en esta revisión coinciden en la necesidad de ofrecer a los futuros profesores oportunidades para experimentar la modelización durante su formación inicial. La próxima sección presenta una propuesta para la formación inicial de profesores de matemática que pretende atender esa necesidad.

4. Un escenario de modelización para la formación de futuros profesores

Las recomendaciones de los expertos en relación a la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización, e incluso la presencia formal de la modelización en los estándares locales para la formación de profesores no garantizan su tratamiento en el trayecto de la formación inicial. La realidad en nuestro contexto local, en particular en la carrera del Profesorado en Matemática de la UNC, está lejos de atender esos requerimientos. En los cursos disciplinares específicos de matemática se ofrecen escasos ejemplos de aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas extra-matemáticos y, además, se brinda poco (o ningún) espacio para la modelización activa.

Dadas las dificultades que significa intentar introducir cambios en los formatos pedagógicos y contenidos de los cursos de matemática que forman parte del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la UNC, y a fin de ofrecer oportunidades de vivenciar experiencias con el proceso de modelización matemática, en 2010 decidimos crear un ambiente de aprendizaje especial, un *escenario de modelización*[5], en el marco del curso de Didáctica de la Matemática. Desde entonces hemos mantenido esta práctica y hoy en día este escenario de modelización matemática está consolidado.

El curso de DM tiene modalidad anual, se dicta en el tercer año del plan de estudios y se extiende por 30 semanas con dos clases de cuatro horas por semana. En este curso, se estudian diferentes tendencias en educación matemática: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación, modelización matemática.

Nociones de modelo, modelo matemático y proceso de modelización matemática son debatidas en el curso. Las fases de un proceso de modelización matemática son descriptas y discutidas con los estudiantes en base al trabajo de Bassanezi (2012). Según este autor, un proceso de modelización consta de varias fases. Comienza con la *selección de un tema*

[5] La noción de *escenario de modelización* que aquí se emplea fue desarrollada por Esteley (2014).

o fenómeno del mundo real[6], que por algún motivo sea de interés, y continúa con la *formulación de problemas* o preguntas asociadas con el mismo. Posteriormente se inicia una búsqueda de datos o se diseña un experimento para obtenerlos (*experimentación*). Una fase de *abstracción* comienza cuando se seleccionan variables y se levantan hipótesis o conjeturas. Al traducir las preguntas o problemas enunciados en lenguaje natural para el lenguaje matemático, se inicia un proceso de *matematización* para obtener un modelo matemático. La aceptación o rechazo de tal modelo es la *validación*. Si el modelo es rechazado, puede comenzar una fase de *modificación* y un nuevo ciclo se inicia.

Una vez estudiadas las fases de un proceso de modelización matemática, se muestran y analizan experiencias de actividades de modelización en diferentes contextos educativos (Asinari y Frassa, 2017; Mina y Dipierri, 2017; Mina, Esteley, Cristante y Marguet, 2007; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Villarreal y Esteley, 2013) y se resuelven varios problemas que requieren la creación de un modelo. Por último, se invita a los futuros profesores a desarrollar sus propios proyectos de modelización, siguiendo las fases del proceso y utilizando libremente tecnologías digitales, si así lo desean. Para ello, se pide a los estudiantes que formen pequeños grupos y seleccionen un tema del mundo real de su interés, formulen problemas relacionados con este tema, seleccionen variables, planteen hipótesis, diseñen experimentos (si es necesario), busquen información, recopilen y procesen datos, resuelvan el problema y trabajen en una fase de validación. Para esta tarea, el esquema del proceso de modelización de Bassanezi (2012) previamente estudiado es un pilar importante.

Después de que los grupos han elegido un tema de interés, se les pide que realicen una presentación de los mismos para el resto de la clase. Esta instancia de interacción colectiva resulta un pilar importante ya que los estudiantes reciben sugerencias y comentarios, tanto de los docentes como de sus colegas de clase. A partir de esta instancia, es posible que se formulen nuevos problemas, se reformulen los iniciales o inclusive se cambie de tema.

Durante el desarrollo de los proyectos de modelización, los estudiantes pueden consultar a especialistas en los temas seleccionados. Estos especialistas pueden ser otros docentes de la facultad o de la UNC, familiares, amigos o profesionales externos a la UNC. En muchos casos, la consulta con especialistas se constituye en otro pilar importante de la experiencia.

Algunas de las actividades relacionadas con los proyectos de modelización son realizadas por los estudiantes de forma autónoma en horarios extra-clase. Durante el desarrollo de los proyectos, los profesores de DM actúan como consultores que pueden ayudar a formular o reformular los problemas, recomendar la consulta de un especialista y establecer el contacto, informar sobre posibles fuentes de datos o sugerir nuevas preguntas para que los estudiantes se involucren en procesos de modelización más complejos.

Al final del proceso, cada grupo escribe un informe y hace una presentación oral para toda la clase. Durante estas presentaciones, que tienen una duración de alrededor de 40 minutos, el resto de la clase hace preguntas y comentarios sobre el proyecto que se está

[6] Blum (2002) denomina *mundo real* a "todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como la escuela y la universidad o disciplinas científicas y académicas diferentes de la matemática" (p. 152, traducción propia).

presentado. En muchos casos, surgen discusiones sobre la modelización como parte de la futura tarea docente en la escuela, o reflexiones sobre el papel de la tecnología en el proceso de modelización. La ejecución de todas las actividades de modelización descriptas anteriormente requiere aproximadamente seis semanas.

En síntesis, se puede decir que el escenario propuesto está caracterizado por: (a) la naturaleza abierta de los proyectos a desarrollar, debido a la libre elección de un tema del mundo real para estudiar y formular preguntas; (b) la ausencia de contenidos matemáticos predeterminados que deban ser enseñados, el foco está puesto en la modelización como una actividad matemática que merece ser enseñada en sí misma; (c) el carácter interdisciplinario del trabajo; (d) la promoción de la reflexión sobre la matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y la modelización y (e) el dominio del proceso completo de modelización. Por su parte, los principales pilares que permiten sostener las experiencias de modelización en este escenario son: (a) el estudio previo del proceso de modelización y las fases que lo integran y el análisis de experiencia desarrolladas en diferentes contextos educativos; (b) las instancias de interacción colectiva con los colegas de curso y los docentes de DM; (c) la asistencia de especialistas de distintas áreas del conocimiento y (d) el libre uso de distintas tecnologías digitales.

Este escenario creado con fines educativos, también se tornó en un escenario a ser investigado. La próxima sección reporta resultados de dos estudios y muestra detalles del desarrollo de un proyecto particular.

5. El escenario de modelización como escenario investigado

Las experiencias de modelización llevadas adelante en el escenario de modelización descripto en la sección anterior, se han registrado de diferentes maneras: informes finales escritos de los estudiantes, notas de campo durante las clases, vídeos de las presentaciones orales finales. Estas fuentes de datos nos han permitido desarrollar diferentes estudios en el periodo 2010-2016. En las siguientes subsecciones se detallan resultados que provienen de dos estudios.

Un primer estudio

En Villarreal, Esteley y Smith (2015) se abordaron las siguientes preguntas de investigación: ¿qué contenidos matemáticos utilizan los futuros profesores en sus proyectos?, ¿qué tipo de problemáticas o preocupaciones aparecen en los proyectos? y ¿qué dificultades enfrentaron durante el proceso de modelización? El estudio, se basó en 11 proyectos desarrollados por 41 estudiantes de las cohortes 2010, 2011 y 2012. La Tabla 1 muestra, de manera sintética, el tema de cada proyecto, el tipo de problemática o preocupación detectada y el contenido matemático involucrado en cada uno.

Tabla 1. Problemáticas abordadas y contenidos matemáticos involucrados en los proyectos de modelización.

Proyectos de modelización de los futuros profesores	Problemáticas/ Preocupaciones	Contenido matemático
Captación de agua en zonas secas	Socio-económica	Función de dos variables
Consumo de agua en el hogar Consumo de energía eléctrica en el hogar Basura y recolección de residuos reciclables	Ecológica	Estadística Estadística Funciones de proporcionalidad directa e inversa
Tiempo de espera en el comedor universitario Abastecimiento de gas en garrafas en una localidad rural Consumo de soja Transmisión genética y características humanas	Personal	Función lineal Función lineal Función lineal Probabilidad
Gastos de viaje escolar de fin de curso	Didáctica	Programación lineal
Juegos de lotería Recuperación de la inversión para un cierto negocio	Matemática	Probabilidad Funciones exponencial y logarítmica

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

El análisis reveló que la libre elección de un tema para iniciar un proyecto de modelización fue un obstáculo importante para los estudiantes, pero también fue posible constatar que la creación de escenarios de modelización en el curso de DM habilitó espacios de reflexión en torno al rol docente en tales escenarios. A fin de profundizar el análisis y mostrar algunas dificultades que pueden surgir en un proceso de modelización, a continuación, se muestra con cierto nivel de detalle el proyecto referido a la basura.

Basura y recolección de residuos reciclables. Este proyecto fue desarrollado por Irene y Rosa y el relato del mismo está basado en la presentación oral que ellas realizaron para sus compañeros de clase. Al comienzo de la presentación se refirieron a la dificultad que experimentaron para definir el tema a tratar, señalando que al principio habían pensado en una variedad de temas: reservas y tipos de uso del petróleo, accidentes automovilísticos, forestación y deforestación, la música y la matemática, optimización del transporte y, basura y recolección de secos. Finalmente, optaron por este último tema y justificaron su decisión diciendo "Nos vamos a concentrar en una problemática local y que tenga una función social". Las preguntas que formularon en torno a este tema fueron también variadas: "¿Qué cantidad de basura reciclable se recolecta por día/semana? ¿Se clasifica? ¿Cuáles serían las clases? ¿Qué cantidad de beneficiarios tienen este servicio? ¿Todos separan la basura?" Estas preguntas podían responderse a partir de una búsqueda de datos en Internet u otras fuentes. De hecho, Irene expresó: "... teníamos un montón de ideas en relación a eso, pero nunca veíamos la matemática". Sin embargo, tal como lo señala Stillman (2015), a partir de esos datos fue posible formular problemas susceptibles de ser analizados matemáticamente.

Superada esa primera instancia de incertidumbre, Irene y Rosa iniciaron un proceso de investigación a partir del cual obtuvieron información acerca de la recolección diferenciada de residuos, sus beneficios y los aspectos socio-ambientales involucrados, realizaron una entrevista con un funcionario de la Municipalidad de Córdoba responsable del programa de reciclado en la ciudad y visitaron la página web de la empresa encargada de la recolección diferenciada de residuos. Finalmente, obtuvieron datos de la población de Córdoba a partir del Censo de población y vivienda realizado en 2010.

En función de la información obtenida a partir de las distintas fuentes consultadas y preocupadas con los datos desalentadores en relación a la escasa respuesta de la población en torno a la importancia del reciclado, las estudiantes se propusieron como objetivo central de su proyecto "modelizar para concientizar" y no necesariamente "obtener una súper fórmula", tal como lo expresó Rosa. Para comenzar a generar modelos, plantearon las siguientes hipótesis:

- Los habitantes de Córdoba no son conscientes de la cantidad de basura reciclable que producen.
- Al año producimos más de nuestro peso en basura.
- Un gran porcentaje de basura que podría ser reciclada se tira junto con la basura común.

En el desarrollo del proyecto, las estudiantes generaron un conjunto de indicadores numéricos que relacionaban de diferente manera los datos encontrados, los llamaron "modelos lineales". Cada uno de ellos fue calculado bajo el supuesto que todos los habitantes producen la misma cantidad de basura. Por ejemplo, sabiendo que en Córdoba se producen 1.500.000 kg de basura diariamente y que la población es de 1.329.604 habitantes (según el Censo 2010), bajo el supuesto ya mencionado, se obtiene que cada habitante produce diariamente 1,3 kg de basura. Por otro lado, a partir de datos obtenidos en una encuesta realizada por la empresa a cargo de la recolección diferenciada de residuos, se sabía que el 31% de la población de Córdoba separa la basura y que diariamente se recolectan 28 tn de residuos reciclables. Bajo el mismo supuesto asumido en el cálculo anterior, si todos los habitantes de la ciudad separaran la basura, diariamente se recolectarían 90,32 tn de basura reciclable. La Figura 1 muestra el modo en que las estudiantes representaron estos indicadores.

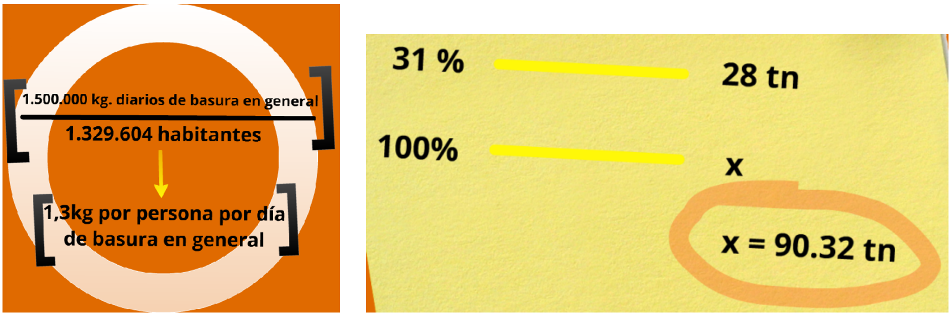


Figura 1: Dos indicadores numéricos mostrados en la presentación oral.

Atendiendo al objetivo de "modelizar para concientizar", las estudiantes produjeron un video que de una manera muy sencilla y al mismo tiempo impactante, permitía visualizar lo que significaba reciclar 90,32 tn. El video comenzaba con la pregunta: "¿Tenés idea de lo que significa 90,32 tn?", para luego proponer "Pensemos en un hombre de 90 kg". A partir de ahí, iban apareciendo siluetas de hombres vestidos con basura reciclable (que las estudiantes denominaron "hombres basura") hasta completar 1003 siluetas, que corresponden a la cantidad de hombres equivalente a 90,32 tn. La secuencia del video puede verse en la Figura 2. La misma finaliza mostrando en imágenes la cantidad de "hombres basura" que no son recuperados a causa de no separar la basura que podría ser reciclada.

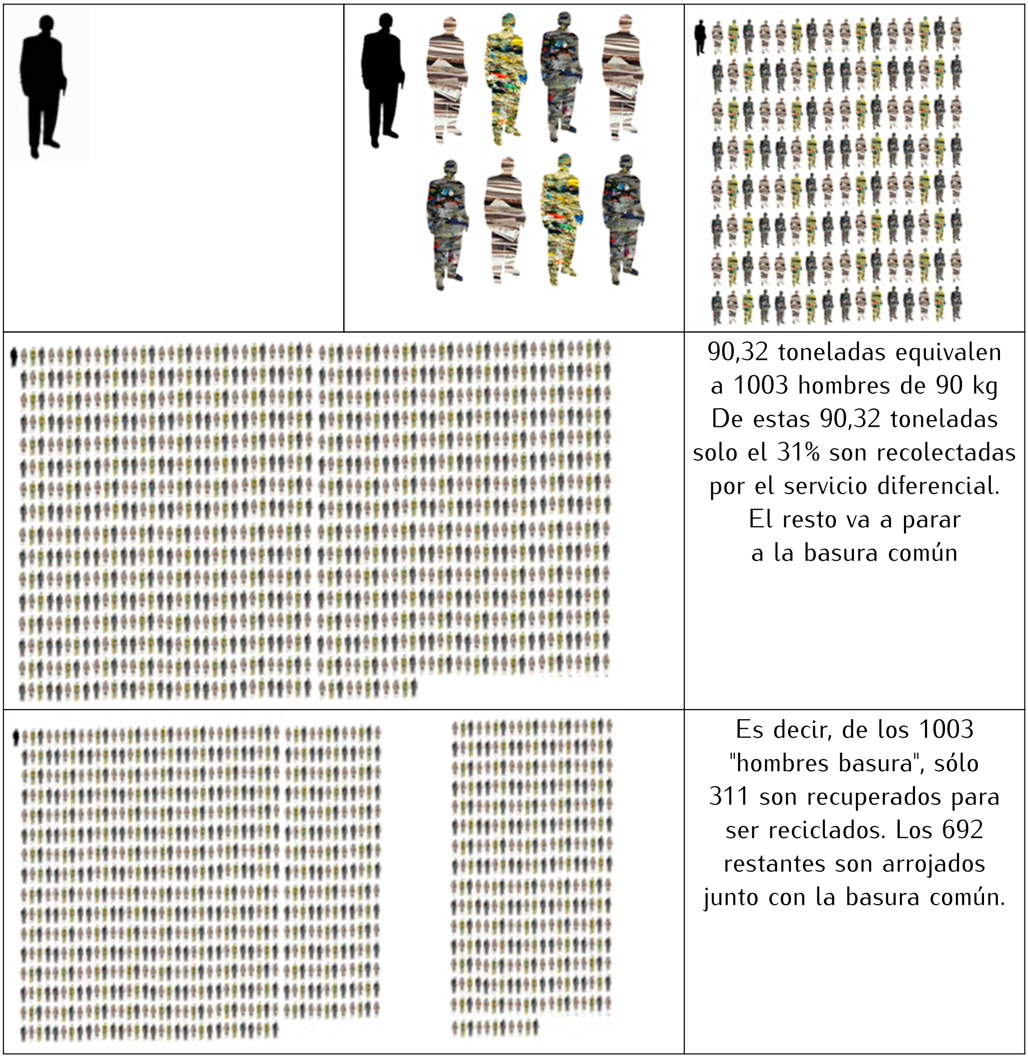


Figura 2. La secuencia del video.

La generación de un tercer indicador numérico construido por las estudiantes, fue posible gracias al siguiente dato: del total de la población de la ciudad de Córdoba, solo 650.000 habitantes gozaban del servicio de recolección diferenciada. Esto significa que un 48,89% de la población total podía separar la basura para reciclar. Sin embargo, solo el 31% de la población lo hace, y entonces hay un 17,89% que, teniendo el servicio disponible, no separa la basura. Si lo hicieran, a las 28 tn que se reciclan diariamente podrían sumarse 16 tn más, bajo el mismo supuesto asumido desde el comienzo (todos los habitantes producen la misma cantidad de basura reciclable por día). La Figura 3 muestra el modo en que las estudiantes exhibieron este cálculo en la presentación oral ante la clase. Puede observarse que, en este caso, las estudiantes utilizan la equivalencia con la cantidad de "hombres basura", según fuera mostrada en el video.

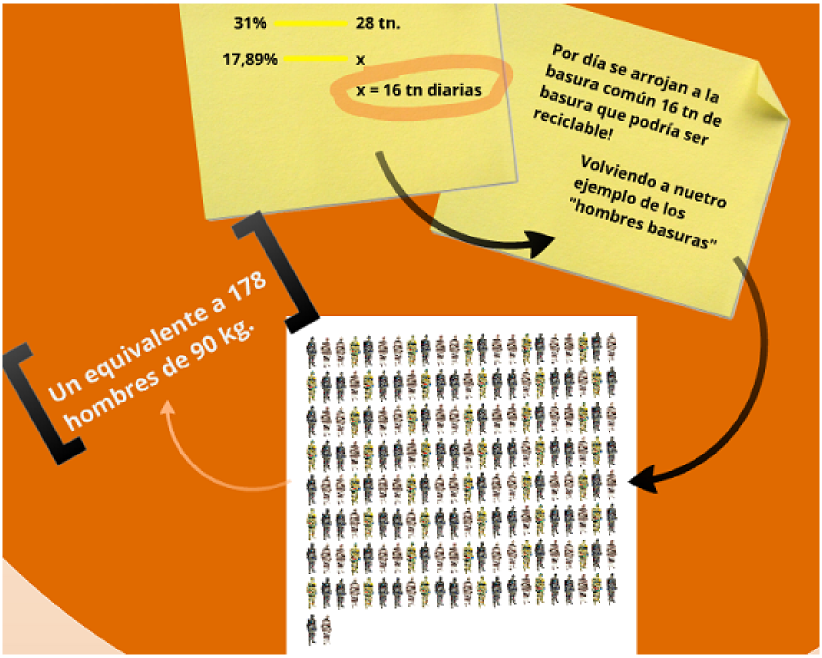


Figura 3. El tercer indicador numérico.

Durante la presentación del proyecto, Irene y Rosa manifestaron que una de las principales dificultades que tuvieron durante el desarrollo del mismo fue la elección del tema a tratar. Esto les demandó mucho tiempo hasta decidirse por el tema de la basura y la recolección de secos. El motivo de esta elección, tal como se indicó antes, fue el reconocimiento del valor de abordar una problemática local relevante y con una función social importante. En segundo lugar, las estudiantes indicaron que la búsqueda de información significó también una dificultad ya que existen pocos datos oficiales disponibles públicamente. Un tercer aspecto que actuó como una dificultad fue que las estudiantes querían poner en juego una matemática más avanzada en el proceso de modelización. Irene afirmó: "Pensamos que un modelo debería ser una fórmula complicada que implica muchas variables. Nos tomó un tiempo entender que el fenómeno podría describirse linealmente..." Estas palabras permiten inferir que, posiblemente exista entre las estudiantes la idea de que dado que ellas eran estudiantes avanzadas, deberían poner en juego una matemática más sofisticada que trascendiera el empleo de la "regla de tres simple".

Un aspecto relevante que se puso de manifiesto en la presentación oral fueron las reflexiones en torno a su futura tarea como docentes y qué potencialidades reconocían en el trabajo con modelización matemática, pensando en sus futuros alumnos.

Un segundo estudio…y nuevos proyectos

En sucesivas cohortes del curso de DM, a partir de 2010, fue posible observar que el uso de tecnologías digitales fue aumentando de manera significativa en los proyectos de modelización. Así, en el estudio que se reporta en Villarreal, Esteley y Smith (2018) se abordaron las siguientes cuestiones: ¿qué tecnologías seleccionan los futuros profesores para utilizar en sus proyectos de modelización, y con qué propósitos?, y ¿en qué fases del proceso de modelización el uso de tecnologías fue significativo? En este trabajo se analizaron 32 proyectos de modelización que involucraron a 108 estudiantes del Profesorado en Matemática a lo largo de siete cohortes consecutivas, entre 2010 y 2016.

Las tecnologías utilizadas en los proyectos se clasificaron en cuatro categorías: Internet, planillas de cálculo, software matemático (GeoGebra, Mathlab) y lenguajes de programación (Python y Octave). El uso de Internet se manifestó en el 75% de los proyectos, principalmente como fuente de datos e información relacionada con el tema elegido. Las planillas de cálculo se emplearon en el 56% de los proyectos. La Tabla 2 muestra una categorización de los propósitos de uso de Internet o planillas de cálculo y, entre paréntesis, se indica la fase o fases del proceso de modelización enriquecidas por ese uso. La tabla pone en evidencia que las fases en las cuales estas tecnologías resultaron más significativas fueron las de experimentación y matematización.

El software matemático y los lenguajes de programación se utilizaron principalmente en la fase de matematización y no se crearon categorías específicas ya que los propósitos de uso estaban relacionados con la temática específica de cada proyecto.

Tabla 2. Propósitos de uso de Internet y planillas de cálculo.

Tipo de tecnología	Propósitos de uso (fase del proceso de modelización)
Internet	Buscar datos o información para iniciar la construcción del modelo (Formulación-Experimentación). Seleccionar variables (Abstracción). Formular o reformular el problema (Formulación-Modificación) Generar datos usando aplicaciones on-line (Experimentación). Validar el modelo (Validación)
Planilla de cálculo	Mostrar datos usando tablas o diferentes tipos de representación gráfica para comunicar resultados (Matematización). Realizar cálculos sencillos utilizando las prestaciones automáticas de las planillas de cálculo (Matematización). Programar funciones personalizadas utilizando las funciones originales de la planilla para realizar cálculos de una manera más eficiente, ejecutar simulaciones o aplicar el modelo creado (Matematización - Validación).

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

En Villarreal, Esteley y Smith (2018) puede verse la diversidad de temas abordados en los proyectos y el uso de las tecnologías digitales en cada uno de ellos. En particular, hay un análisis detallado de un proyecto donde el empleo de tecnologías resultó esencial para su desarrollo.

En los años 2017 y 2018, nuevos proyectos de modelización fueron desarrollados por los futuros profesores que cursaban DM. En particular, en 2018, se solicitó a los estudiantes que manifestaran qué habían aprendido durante el proceso. Los futuros profesores reconocieron haber aprendido a aplicar contenidos matemáticos ya conocidos y que eso les había permitido dar sentido a esos contenidos (por ejemplo: grafos o regresión lineal). También señalaron como aprendizajes: el manejo de datos de la realidad, el empleo de prestaciones de programación en las planillas de cálculo y la aplicación de lenguajes de programación. Todos los grupos destacaron sus aprendizajes en torno a los temas específicos elegidos (recorridos en parques nacionales de la Patagonia argentina, termotanques solares, autos eléctricos, aborto inducido, viajes en Argentina). En el caso del proyecto dedicado al aborto, la pregunta formulada fue: ¿Cuántos abortos inducidos se producen por año en Argentina? La complejidad de la misma condujo hacia el estudio de un modelo ya existente que presenta la construcción de un multiplicador que es utilizado para estimar el número "real" de abortos, a partir de datos proporcionados por hospitales y encuestas a agentes de salud. Así, en el escenario de modelización creado en el marco de DM, no solo se crearon modelos, sino que también se estudiaron y aplicaron modelos creados por otros.

6. Reflexiones finales

La creación de escenarios de modelización en el curso de DM permitió a los futuros profesores experimentar el proceso de modelización durante su formación inicial. Al mismo tiempo, se pudo constatar que las tecnologías pueden ampliar y mejorar las experiencias de modelización de estos futuros profesores. Algunos de los proyectos de modelización desarrollados y las reflexiones expresadas por los futuros profesores, durante las presentaciones orales o en el informe final escrito, son evidencia de experiencias significativas. En particular, algunos estudiantes dieron sentido a la experiencia previendo posibles implicaciones para su futuro como profesores, tal es el caso de dos estudiantes que, en las conclusiones de su trabajo, escribieron:

> Consideramos que es muy importante haber experimentado el proceso de modelización ya que nuestras experiencias personales influirán en la forma en que seremos como profesores en el futuro. Al experimentarlo, sentimos y vivimos el proceso como lo harían nuestros futuros alumnos, y este hecho nos convenció de que la modelización matemática puede ser implementada como una estrategia pedagógica.

La experiencia vivida por los estudiantes les permitió visualizar que la modelización podría ser una propuesta pedagógica en su futuro como profesores. Al mismo tiempo, les posibilitó dar sentido a las diferentes experiencias de modelización en contextos educativos que habían sido analizadas en el curso de DM.

Mientras tanto, también es importante reconocer que no todos los estudiantes vivieron una experiencia significativa en el escenario de modelización creado en DM. En estos casos, podía observarse que los estudiantes no se involucraban en sus proyectos de modelización. Diferentes razones pueden explicar esta situación: gran demanda de tiempo, dificultad para seleccionar un tema de interés y plantear problemas relacionados con él, dificultad para trabajar en colaboración con colegas. Asimismo, la ausencia de aplicaciones y actividades de modelización extra-matemáticas en los cursos de matemática y el escaso uso de tecnologías en la carrera del Profesorado en Matemática podrían actuar como barreras para la propuesta. Si bien los estudiantes disponen de conocimientos matemáticos avanzados, hacer uso de los mismos como herramientas para generar un modelo, no resulta una práctica familiar. En este punto se observa la necesidad de coordinar acciones entre los educadores matemáticos y los matemáticos para generar una comprensión más profunda de la modelización como propuesta pedagógica y actividad matemática.

Entretanto, las dificultades señaladas arriba fueron vividas por la mayoría de los grupos, incluidos aquellos que sí se comprometieron con el desarrollo de sus proyectos y pudieron superarlas. Es posible que muchos estudiantes no estuvieran convencidos de la relevancia de la modelización y de la importancia de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En este sentido, es importante destacar que ni la modelización matemática, ni las tecnologías digitales han sido actores importantes durante la formación matemática en el Profesorado. Queda planteada la necesidad de indagar de manera más profunda y sistemática en torno a las razones que hacen que algunos estudiantes no se involucren en el desarrollo de proyectos de modelización, ni entiendan su potencial como abordaje pedagógico.

Finalmente, es importante reconocer también que el tipo de actividad de modelización propuesto quizás significa un salto en relación a las actividades matemáticas a las que los estudiantes están habituados. Tal vez sea necesario desarrollar previamente pequeños proyectos, más acotados y sencillos, que aborden las distintas fases de un proceso de modelización de manera más gradual y que preparen el camino para luego poder abordar proyectos de modelización completos. Tal como lo señalan Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), los tipos de tareas de modelización matemática recorren un amplio abanico de posibilidades, del cual los proyectos abiertos es solo uno. Esto conduce a la necesidad de repensar la secuenciación y el tipo de actividades de modelización propuestas en el curso de DM.

A pesar de las dificultades mencionadas, y en base a la evidencia positiva obtenida a lo largo de estos años, puede afirmarse que la implementación de actividades de modelización y el uso de tecnologías proporcionan aportes significativos para la formación inicial, por muchas razones: pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes, pueden contribuir a una educación inclusiva y pueden hacer que los futuros profesores sean sensibles hacia diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

Referencias y bibliografía

Asinari, M. y Frassa, S. (2017). Experiencia de modelización matemática realizada en una escuela rural estatal con modalidad de pluricurso. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la educación matemática* (pp. 161-186). Córdoba: FAMAF-UNC.

Bassanezi, R. (2012). *Temas y modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En Cho, S.J. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–discussion document. *Educational Studies in Mathematics,* 51(1-2), 149-171. doi: 10.1023/A:1022435827400

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 69-78). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_5

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. (Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba). Recuperado de: **https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2013/05/EBOOK_ESTELEY.pdf**

Gastón, J., y Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research*, 7(4), 1-11. doi:10.5539/ijsp.v4n4p1

Julie, C., y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503-510). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_58

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-403). New York: Springer.

Mina, M. y Dipierri, I. (2017). Jóvenes diseñadores de rampas de acceso: aprendiendo matemática en un escenario de investigación con tecnologías. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M.; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la educación matemática* (pp. 187-212). Córdoba: FAMAF-UNC.

Mina, M.; Esteley, C.; Cristante, A. y Marguet, I. (2007). Experiencia de modelización matemática con alumnos de 12-13 años. En Abrate, R.; Pochulu, M. (Eds.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 295-304). Villa María, Argentina: UNVM.

Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011). *Diseño Curricular. Ciclo Básico de la Educación Secundaria*. Recuperado de: **httphttp://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php**

Muller, E. y Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-Overview. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study* (pp. 267-274). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_28

Niss, M.; Blum, W y Galbraith, P. (2007). Introduction. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 16(3), 1-27. doi: 10.15517/aie.v16i3.26084

Stillman, G. (2015). Problem finding and problem posing for mathematical modelling. En Lee, N. H.; Ng, D. K. (Eds.), *Mathematical modelling from theory to practice* (pp. 41-56). Singapore: National Institute of Education. doi: 10.1142/9789814546928_0003

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, Año XVIII, 36, 219-251.

Villarreal, M. y Esteley, C. (2013). Escenarios de modelización y medios: acciones, actividades y diálogos. En Borba, M.; Chiari, A. (Eds.), *Tecnologias digitais e educação matemática* (pp. 273-308). São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Villarreal, M. y Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática* (pp. 25-50). Córdoba: FAMAF-UNC.

Villarreal, M.; Esteley, C., y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 327-341. doi: 10.1007/s11858-018-0925-5

Villarreal, M.; Esteley, C. y Smith, S. (2015). Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En Stillman, G.; Blum, W.; Biembengut, M. (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 567-578). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-18272-8_48

Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza[1]

Hugo Barrantes Campos

Resumen

El estudio de las transformaciones geométricas en el plano ocupa un lugar cada vez más importante en los programas de Matemáticas de la educación general básica en diversos países. Los conceptos y técnicas involucrados no corresponden, en general, a los temas clásicos en ese nivel educativo. Esto hace que en muchas ocasiones los docentes muestren reticencias a la hora de enfrentar el trabajo de aula en relación con esta temática.

Se exponen aquí algunas ideas que pueden ser útiles a los profesores en la enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano. Se enfatiza el enfoque de resolución de problemas, así como el uso de construcciones con regla y compás, las cuales se pueden realizar de modo equivalente con software de geometría dinámica mediante el uso de rectas y circunferencias, como un medio de comprender el concepto general de simetría.

Palabras clave: educación matemática, transformaciones geométricas, simetría, isometría, geometría dinámica.

Abstract[2]

The study of geometric transformations in the plane occupies an increasingly important place in the Mathematics programs of basic general education in various countries. The concepts and techniques involved do not correspond, in general, to the classical themes at that educational level. This means that teachers often show reluctance when facing classroom work in relation to this issue.

Here some ideas that may be useful to teachers in teaching/learning of transformations in the plane are presented. The problem-solving approach is emphasized, as well as the use of constructions with ruler and compass, which can be performed in an equivalent way with dynamic geometry software through the use of lines and circles, as a means of understanding the general concept of symmetry.

Keywords: Mathematics Education, geometric transformations, symmetry, isometry, dynamic geometry.

H. Barrantes
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, Costa Rica
habarran@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 28 de mayo de 2019 y aceptado el 2 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 235–246. Costa Rica

1. Transformaciones geométricas en el currículo escolar

El estudio de las transformaciones geométricas se ha ido introduciendo paulatinamente en diversos currículos escolares en diversas partes de mundo. Diversos elementos relacionados con este tema se mencionan en currículos latinoamericanos, por ejemplo, en Chile (Ministerio de Educación, República de Chile, 2011), Perú (Ministerio de Educación, 2016), Colombia (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998), Costa Rica (MEP, 2012). Lo que hay en mente con la consideración de este tema de estudio es la búsqueda del desarrollo de diferentes capacidades matemáticas superiores en el sentido señalado por Ruiz (2018), referidas a plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, conectar, comunicar y representar (p. 75). De tal manera, el currículo de Matemáticas de la educación primaria y media costarricense establece que:

> Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. (MEP, 2012, p. 15)

Por otra parte, en Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (1998) se enuncia que:

> En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo. (p. 40)

En la enseñanza media se podría definir formalmente el concepto de transformación como una aplicación inyectiva del plano sobre sí mismo; sin embargo, este enfoque formal que permite un estudio profundo del tema, carece de la riqueza didáctica del enfoque más visual e intuitivo que ve una transformación como un movimiento de los puntos o las figuras manteniéndolas congruentes a sí mismas, en el caso de las isometrías, o al menos manteniendo su forma como en el caso de las homotecias. Al respecto, Yanik y Flores (2009) en un estudio con futuros profesores encontró que todos los participantes concebían las transformaciones como movimiento; explicaban que las isometrías podían describirse como movimientos de todos los puntos del plano más que como aplicaciones del plano sobre sí mismo (p. 55).

En ese sentido, en MEP (2012) se menciona lo siguiente:

> El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. (MEP, p. 52)

La introducción de este tema, que no ha sido tradicional, en los planes de estudio de la enseñanza primaria y media, implica que el docente observe al menos partes de la geometría elemental con una perspectiva novedosa para lo cual a menudo no está suficientemente preparado, de ahí la importancia del aporte de recursos que lo apoyen en su labor de aula.

2. Otra perspectiva para el estudio de temas tradicionales

Las transformaciones geométricas son interesantes para ser estudiadas en sí mismas, pero también sirven como una herramienta para el estudio de otros temas de la geometría euclidiana desde otra perspectiva. Al respecto en NCTM (2010) se subraya su importancia al señalar que las transformaciones geométricas representan una forma alternativa para el estudio de la congruencia, semejanza y simetría (p. 62). Agregamos que puede ser útil también para visualizar otras propiedades y conceptos tales como el cálculo de áreas, según veremos más adelante.

Se ilustra el uso de esta perspectiva mediante dos situaciones.

Congruencia de triángulos

La congruencia se puede estudiar desde el punto de vista de la simetría. Para ello recordamos que la reflexión, traslación y rotación conservan las medidas de los ángulos y reciben el nombre de isometrías.

Se dice que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **isométricos** si A' es la imagen de A, B' es la imagen de B y C' es la imagen de C mediante una misma isometría. La noción de triángulos isométricos es equivalente a la de triángulos congruentes.

A partir de aquí se pueden estudiar las congruencias a partir de las isometrías y sus propiedades.

Lo interesante de este enfoque es que algunos problemas sobre congruencias pueden ser resueltos de manera sencilla mediante el uso de isometrías o con una combinación de ambos enfoques.

Un ejemplo. En la figura 1 se tiene que ΔABC y ΔADE son isósceles, ambos con ápice en A. Además $AD = 2AB$.

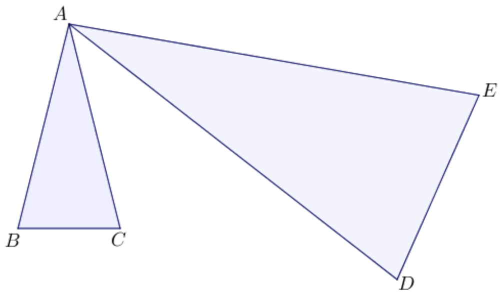


Figura 1: Dos triángulos isósceles.

Hay que demostrar dos cosas:

a) Los triángulos BAD y CAE son isométricos y, por lo tanto, $BD = EC$.

b) SI I y J son respectivamente los puntos medios de CE y BD entonces los triángulos AIC y AJB son isométricos y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

Para a), sea $\alpha = m\angle BAC = m\angle DAE$. Considere la rotación con centro en A y amplitud α (considerada en dirección anti horario). Bajo esta rotación, A lleva a A pues A es el centro de la misma y por lo tanto permanece invariante, B lleva a C y D lleva a E. Se concluye que los triángulos BAD y CAE son isométricos. Como B y C son homólogos y E y C son homólogos mediante esta isometría, entonces $BD = EC$.

Para b) considere la misma isometría. A lleva a A, B lleva a C y J lleva a I. Observe que I y J son equidistantes de A y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

El teorema de Viviani

Este teorema establece que dado un triángulo equilátero y un punto P en su interior, entonces la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo.

Hay un prueba simple, elegante y muy visual de este teorema, la cual utiliza isometrías. Considere el triángulo equilátero dado en la figura 2 (a) y trace paralelas a los lados del triángulo que pasen por P (figura 2 (b)).

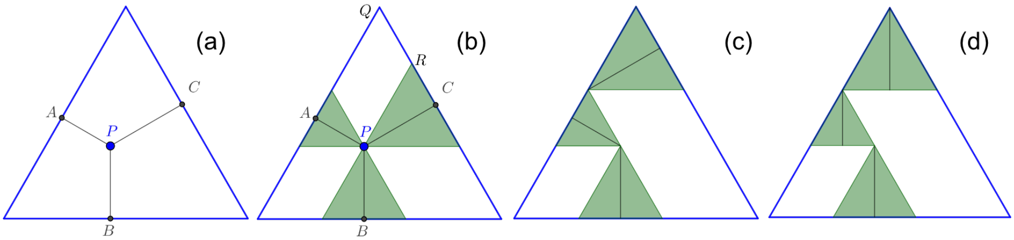


Figura 2: Según el teorema de Viviani $AP + BP + CP$ es igual a la altura del triángulo equilátero.

Los tres triángulos destacados en la figura 2 (b) son equiláteros y sus alturas son los segmentos AP, BP y CP. Se traslada el triángulo verde a la derecha según el vector $\overrightarrow{RQ}$, se obtiene la figura 2 (c). Posteriormente se rota ese mismo triángulo alrededor de su centro un ángulo de 60º y finalmente el triángulo verde a la izquierda se rota 60º alrededor de su centro. Así se obtiene la figura 2 (d) en la cual se puede verificar que $AP + BP + CP$ es igual a la altura del triángulo equilátero dado.

3. Isometrías y áreas de figuras planas

Se enseña el cálculo de áreas de figuras planas básicas de diversas maneras. A menudo se enseñan las fórmulas sin más, pero en ocasiones se trata de que los estudiantes comprendan dichas fórmulas mediante, por ejemplo, el uso del tangrama o el doblado de papel. Otra forma útil puede ser el uso de transformaciones isométricas puesto que, dado que la imagen de un polígono mediante una isometría es congruente al polígono original entonces se preserva el área. Ilustramos esto a continuación.

Área del paralelogramo

Se supone conocido que el área de un rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura.

Para determinar la forma en que se calcula el área del paralelogramo, consideramos uno de base b y altura a.

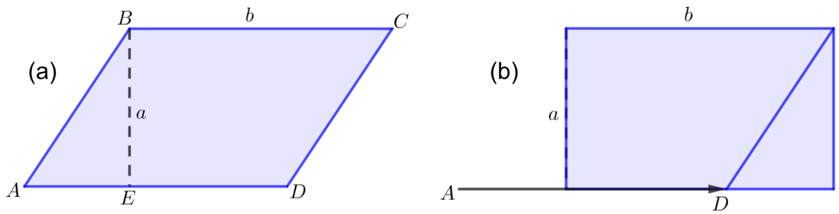


Figura 3: Cálculo del área del paralelogramo de base b y altura a.

Con la notación de la figura 3 (a), consideremos el triángulo ABE y trasladémoslo según el vector $\overrightarrow{AD}$, si luego eliminamos el ΔABE obtenemos la figura 3 (b), que corresponde a un rectángulo de base b y altura a.

El área del rectángulo es $b{\cdot}a$ y, puesto que en el proceso de trasladar y eliminar, el área se conserva, entonces el área del paralelogramo es $b{\cdot}a$.

Con el uso de un software de geometría dinámica, por ejemplo *Geogebra*, esto se puede visualizar mejor. Se define un deslizador que determine el segundo extremo del vector $\overrightarrow{u}$ que inicia en A y mediante él se puede visualizar cómo el triángulo se va trasladando hasta ocupar su posición final cuando $\overrightarrow{u}$ sea igual a $\overrightarrow{AD}$.

Área del trapecio

A partir del área del paralelogramo y mediante una isometría se puede obtener el área del trapecio.

Considere un trapecio de base mayor c, base menor b y altura a.

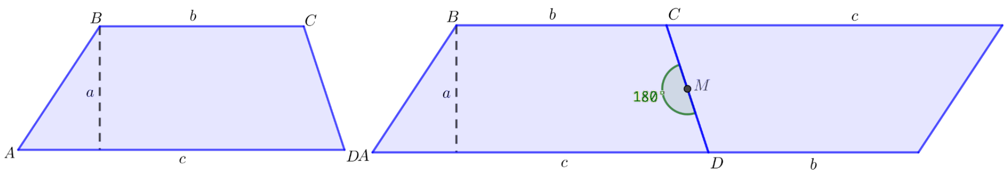


Figura 4: Cálculo del área del trapecio.

Con la notación de la figura 4 izquierda, marquemos el punto medio M del lado CD y luego apliquemos una rotación al trapecio de amplitud 180º en sentido horario con centro en M, se obtiene un paralelogramo como el de la figura 4 derecha, de base $b + c$ y altura a.

El área de este paralelogramo es $(b + c) \cdot a$ y puesto que está formado por dos trapecios congruentes, entonces el área del trapecio es igual a $\frac{1}{2}(b + c) \cdot a$.

Con *Geogebra* se visualiza esto de manera dinámica mediante un deslizador que defina el ángulo de la rotación con centro en M.

Simetría y diseños

Siguiendo a Askew (2016) se puede decir que, en general, el término simetría evoca formas armoniosas y, particularmente, a la simetría axial en el contexto de la geometría euclidiana, pero a los matemáticos les gusta aplicar conceptos en un nuevo contexto. De tal modo, la palabra cotidiana "simetría" obtiene un significado matemático más amplio a través de la conexión con el reflejo y la rotación. Un objeto matemático es simétrico con respecto a una operación matemática particular si conserva ciertas propiedades, en este caso la apariencia, después de que se haya aplicado la operación. Las formas básicas de simetría -reflexión, rotación, cambio de escala, desplazamiento- y su combinación, forman la base del estudio de la geometría euclidiana, la consideración de tales simetrías es la geometría con la que tiene que ver la educación escolar pero también se pueden usar para deducir hechos menos conocidos, por ejemplo, el que enuncia que, en esencia, solo hay diecisiete patrones diferentes de "tapizados" (pp. 8-9).

En Kappraff (2015) se propone una serie de diversos diseños en el plano que siguen patrones. Tales diseños se pueden realizar con regla y compás o con un software como *Geogebra* que simule estos instrumentos. También se puede utilizar dicho software para reproducir estos diseños mediante recta y circunferencias y el uso de las transformaciones en el plano.

Diseños en redes de triángulos equiláteros

Un red de triángulos equiláteros es una teselación del plano mediante triángulos rectángulos. Se puede construir usando regla y compás o simulándolos con *Geogebra* (por ejemplo). Para ello se construye una circunferencia de un radio r dado, se selecciona un punto de esa circunferencia y con centro en ese punto se traza otra circunferencia del mismo radio r que la primera. Estas circunferencias tienen dos puntos de intersección, con el mismo radio r, se dibujan dos circunferencias cuyos centros son esos puntos de intersección. Se continúa de esa forma dibujando circunferencias de radio r con centros en los puntos de intersección que han resultado del paso previo. Luego se conectan mediante rectas los centros de las circunferencias y finalmente se borran estas para obtener la red.

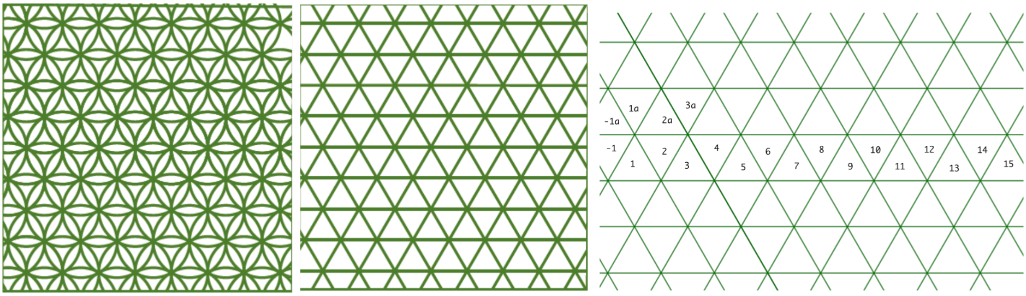


Figura 5: Proceso para la creación de una red de triángulos equiláteros utilizando regla y compás o reflexiones.

También se puede crear esta red mediante reflexiones a partir de un triángulo equilátero base (vea la figura 5 derecha).

Se traza el triángulo 1, éste se refleja sobre su lado derecho para obtener el 2 y así sucesivamente hacia la derecha. El triángulo 1 se refleja sobre su lado izquierdo para obtener el -1 y así hacia la izquierda y sucesivamente para obtener una hilera de triángulos. El 2 se refleja sobre su base para obtener el 2a y luego se procede como antes para obtener otra hilera. El proceso se repite hacia arriba y hacia abajo.

Utilizando esta red se pueden crear diseños artísticos muy interesantes. Por ejemplo, marque los vértices de uno de los triángulos de la red y denótelos por P, Q y R. Luego marque otros puntos como se ve en la figura 6 (a). Con centro en cada uno de esos puntos y radio igual al lado del triángulo trace las seis circunferencias que se observan en la figura 6 (b). Borre las circunferencias con excepción de los arcos indicados por la figura 6 (c). Se obtiene una figura básica que podemos denominar como triángulo volador.

Se marca uno de los vértices del triángulo volador y se aplica al mismo una rotación de 60º con centro en dicho punto (S en la figura 6 (d)), se obtiene un triángulo volador 2, este se rota 60º alrededor de S, y así sucesivamente hasta obtener los primero 6 triángulos voladores. Rotaciones de 60º con centros apropiados producen en diseño completo. Finalmente se elimina la red de triángulos para obtener la figura 8. Diseños más intrincados se pueden obtener de esta manera.

Además de la propia belleza de los diseños que se pueden obtener, este tipo de construcciones permiten visualizar, repasar o introducir conceptos y propiedades. Por ejemplo, pueden surgir preguntas tales como ¿por qué en cada vértice confluyen exactamente seis figuras (que equivale al número de triángulos que comparten cada vértice)?, ¿cuánto mide cada uno de los arcos que constituye cada triángulo volador?, entre otras que permiten ver más profundamente en el diseño elaborado.

Diseños en redes de cuadrados

Un red de cuadrados es una teselación del plano mediante cuadrados. La construcción de esta red es más sencilla que la de triángulos equiláteros.

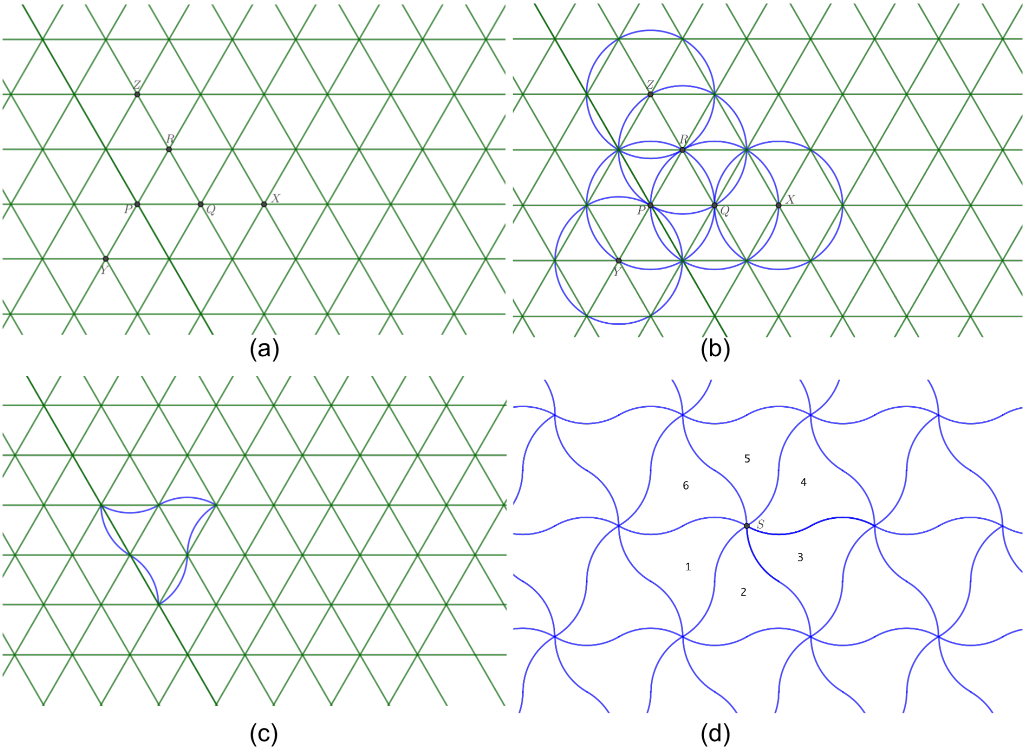


Figura 6: Proceso para la creación de un triángulo volador.

Utilizando regla y compás se puede construir a partir de dos rectas perpendiculares entre sí. Se dibuja una circunferencia con centro en el punto de intersección de estas rectas. Luego se dibujan cuatro circunferencias con el mismo radio que la primera y cuyos centros son los puntos de intersección entre ambas rectas y el círculo original. Finalmente, se dibujan circunferencias con el mismo radio y centros en los puntos de intersección de las circunferencias que van resultando, en todas direcciones.

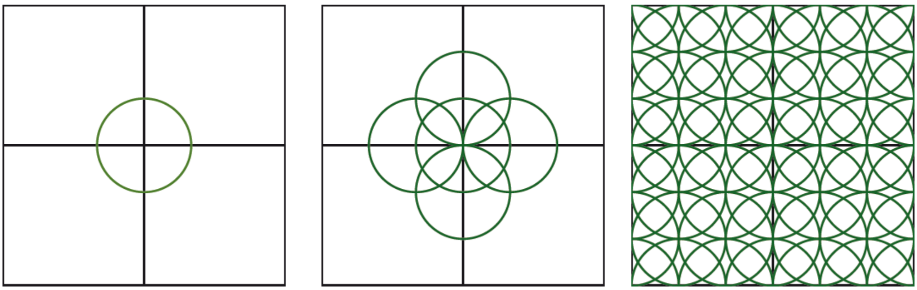


Figura 7: Base para la elaboración de una red de cuadrados.

Conectando mediante rectas los centros de las circunferencias que son tangentes se obtiene una red de cuadrados en el plano. Desde luego, esta red se también puede obtener a partir de un cuadrado base mediante traslaciones en diferentes direcciones.

Con esta red de cuadrados y las circunferencias que la originaron se pueden crear diseños interesantes como el de la figura 8 izquierda.

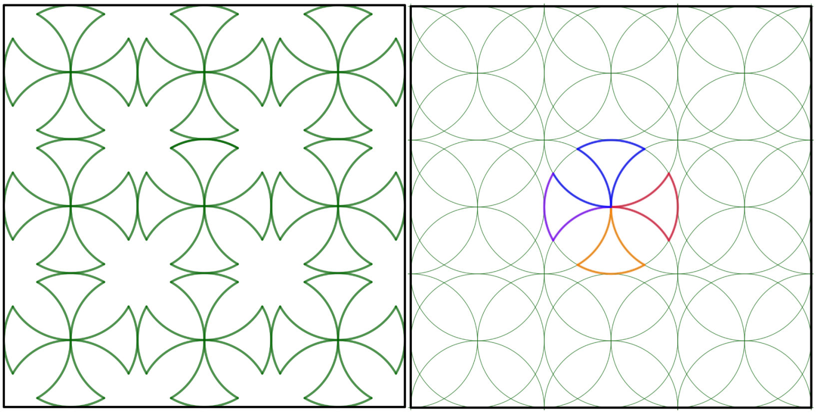


Figura 8: Diseño a partir de una red de circunferencias.

Se identifican tres arcos que formen el triángulo curvo (en azul en la figura 10). Luego se rota este triángulo 90º en el sentido horario con centro en el vértice inferior para obtener el rojo. Alrededor del mismo punto se rota el rojo 90º en sentido horario para obtener el anaranjado y este se rota 90º alrededor del mismo punto para obtener el violeta. Esto produce un figura básica que se puede trasladar en diferentes direcciones para obtener el diseño completo. Al eliminar las circunferencias de la red se obtiene el diseño de la figura 8 derecha.

Frisos

Los frisos son cierto tipo patrones simétricos según ciertas transformaciones a lo largo de una cinta. Matemáticamente un friso es una cinta o banda infinita y un patrón básico que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. En la práctica se usan solo segmentos de una cinta. Existen siete clases diferentes de patrones de frisos (Meyer, 2006).

Los patrones de frisos involucran traslaciones, rotaciones de medio giro, reflexiones y reflexiones con deslizamiento. Cada uno de los siete tipo de patrones de frisos se genera mediante una o varias de estas transformaciones. A continuación se proporciona un ejemplo de cada uno de ellos, se utiliza la forma que se da en la figura 9 como forma básica que genera el diseño completo mediante transformaciones.

Figura 9: Forma básica que genera los siete patrones de frisos que se dan a continuación.

El patrón denominado F_1 es generado solamente por traslaciones. La forma básica se traslada a la derecha según un vector $\overrightarrow{u}$, la que se obtiene se traslada hacia la derecha según el mismo vector y así sucesivamente.

Figura 10: Patrón de friso F_1.

En el patrón F_1^3 la forma básica es reflejada con deslizamiento con respecto a la línea central de la cinta. Una segunda reflexión con deslizamiento nos regresa a la forma básica. El patrón completo es generado por una reflexión con deslizamiento.

Figura 11: Patrón de friso F_1^3.

En el patrón F_1^2 se tienen dos ejes verticales, la forma básica se refleja según uno de ellos y luego, el par de formas se traslada dos veces la distancia entre los ejes.

Figura 12: Patrón de friso F_1^2.

El patrón F_2 es generado por medios giros en dos puntos fijos dados A y B. La forma básica es rotada según el primer punto A y el resultado se rota medio giro alrededor de B para obtener el par. Aplicando rotaciones en los dos puntos fijos se genera una traslación.

Figura 13: Patrón de friso F_2.

F_2^2 es un patrón generado por una reflexión según un eje vertical seguido por una rotación de medio giro alrededor de un punto fijo. Dado que el eje vertical también es rotado 180^o se traslada la forma básica hasta dos veces la distancia entre los dos ejes hasta la siguiente imagen.

Figura 14: Patrón de friso F_2^2.

F_1^1 es un patrón generado por una traslación entre formas básicas sucesivas y una reflexión respecto a un eje en la línea central.

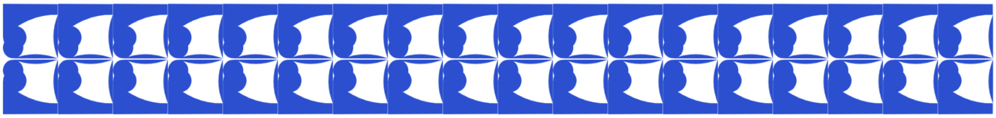


Figura 15: Patrón de friso F_1^1.

El patrón F_2^1 es generado por dos ejes verticales y uno. Se coloca una forma básica abajo del eje horizontal entre dos ejes verticales, se refleja se refleja según el un eje vertical, luego la combinación de las dos formas se refleja sobre el eje horizontal. Finalmente la configuración de cuatro formas es trasladada sucesivamente hasta dos veces la distancia entre los ejes verticales.

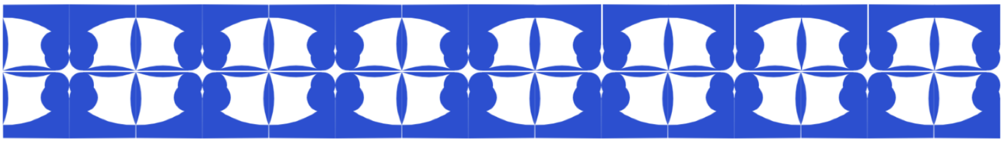


Figura 16: Patrón de friso F_2^1.

Desde el punto de vista didáctico, la identificación del patrón que aparece en un tipo de friso o construir frisos según un determinado patrón, puede servir como ejemplos muy interesantes en el estudio de las transformaciones.

5. Conclusión

La introducción en el currículo de nociones relativas a transformaciones en el plano –isometrías y homotecias– obedece, en general, a diferentes aspectos. Por una parte está el afán por modernizar el currículo en cuanto a geometría se refiere pero esta modernización conlleva la necesidad de incursionar en temas o herramientas que permitan un abordaje de la geometría más ameno pero también más útil en la comprensión conceptual y que permita al final un mayor desarrollo en la consecución de competencias y capacidades matemáticas en los estudiantes.

El abordaje de estos temas, y su uso para el estudio de temas más clásicos desde otra perspectiva, requiere también nuevas capacidades por parte de los docentes y exige, necesariamente, que se tengan recursos que puedan ayudarle en su labor.

Lo expuesto en este trabajo pretende dar algunas nociones de lo que se puede realizar mediante el uso de las transformaciones.

Referencias y bibliografía

Askew, M. (2016). *Geometrie. Von Pi bis Pythagoras*. Berlin: Librero IBP.

Kappraff, J. (2015). *A participatory Approach to Modern Geometry*. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Meyer, W. (2006). *Roads to Geometry*. San Diego: Academic Press.

Ministerio de Educación, Chile (2011). *Matemática, Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Currículum y Evaluación*. Chile: autor. Descargado de **https://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/04/programa-de-estudio-1-medio-matematica-191115.pdf**

Ministerio de Educación Nacional, Colombia (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas.* Colombia: autor. Descargado de **https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf**

Ministerio de Educación Pública, Costa Rica (2012). *Programas de estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Costa Rica: autor.

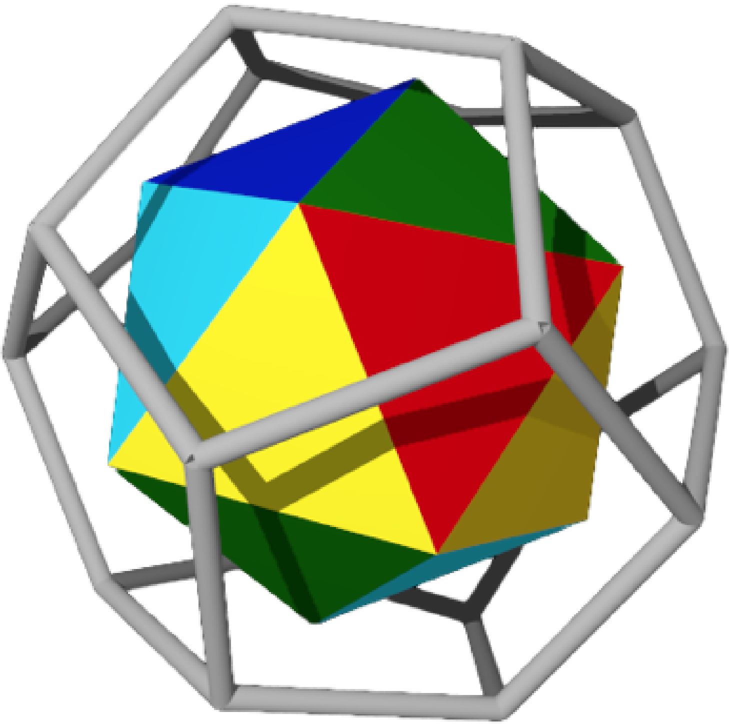
Ministerio de Educación, Perú. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*. Perú: autor. Descargado de **http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf**

NCTM (2010). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and sense making*. (2nd ed) Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores.* Ciudad de México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Yanik, H. B. y Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior, 28, 41-57*. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.003

Documentos



La investigación sobre la formación inicial del profesor de Matemática en el marco de la XV CIAEM[1]

Nelly León Gómez
Ricardo Poveda Vásquez
Claudia Vargas Díaz

Resumen

La formación del docente de Matemática es un campo de interés investigativo que se percibe en las múltiples temáticas que se desarrollan a nivel internacional. En las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM) esta ha tenido una fuerte presencia incluyendo la formación inicial como también la formación continua y el desarrollo profesional en los diferentes niveles educativos de los países participantes. Aquí se presenta una visión panorámica del estado actual de esta cuestión con base en la revisión de los trabajos aprobados de la XV CIAEM, como punto de partida hacia la reflexión y la contrastación con las tendencias globales sobre la materia. Se enfatiza la preparación inicial de docentes.

Este documento, con algunas pequeñas modificaciones, sirvió de base para la Sesión Temática de la XV CIAEM titulada: "La preparación de docentes que enseñan matemáticas (inicial y continua)".

Palabras clave: Formación del profesor de Matemática, formación inicial, formación continua, investigación en formación docente.

Abstract[2]

Mathematics teacher preparation is a field of research interest with multiple themes that are developed internationally. In the Inter-American Mathematics Education Conferences (IACMEs), Mathematics teacher preparation has had a strong presence including initial preparation as well as continuing education and professional development at the different educational levels of the participating countries. Here is a panoramic view of the current status of this issue based on the review of the approved works of IACME XV. It is a starting

---

N. León
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
nellyleong@hotmail.com
R. Poveda
Universidad Nacional, Costa Rica
ricardopovedav@gmail.com
C. Vargas
Universidad de Santiago de Chile, Chile
claudia.vargas.d@usach.cl

[1] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 3 de junio de 2019 y aceptado el 28 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 248–259. Costa Rica

point towards reflection and contrast with global trends on the subject. Initial teacher preparation is emphasized. This document, with some minor modifications, served as the basis for the Thematic Session of IACME XV: "The initial and continuous preparation of mathematics teachers".

Keywords: Mathematics teacher preparation, initial training, continuing education, teacher preparation research.

1. Introducción

La formación del profesorado es un tema de interés actual con pertinencia social, académica y científica dado el relevante papel que éste cumple en la educación de los ciudadanos que las sociedades reclaman en la contemporaneidad. Tal es la importancia del docente que se ha llegado a afirmar que el logro de los propósitos que se plantean en programas educativos dependerá más de lo que éste piense, sienta y haga que de las inversiones en tiempo y recursos materiales y humanos que se destinen a ellos, lo cual estará condicionado de alguna manera por la formación que este ostente.

En el campo de la Educación Matemática la formación del profesor constituye un tema de interés y de preocupación investigativa. Esto se refleja, como lo señalan Guacaneme y Mora (2012), en la proliferación de publicaciones respecto al tema, la realización de estudios de gran escala como el Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) (Tatto, Ingvarson, Schwille, Peck, Senk, y Rowley, 2008) y la inclusión de la formación docente como tema en diversos eventos académicos de cobertura internacional como el International Congress on Mathematical Education (ICME) y la CIAEM. Con respecto a las CIAEM, es posible referir las últimas tres ediciones de este evento en las cuales se han incluido varios temas al respecto. La XIII CIAEM (Recife - Brasil, (2011) tuvo como uno de sus dos temas centrales la formación de profesores en Educación Matemática; en la XIV CIAEM (México – Chiapas, (2015) se incluyó un tema para la formación inicial de profesores de enseñanza primaria en Educación Matemática grados 1 a 6 y otro para los profesores de enseñanza secundaria grados 7 a 12, además de un tema sobre formación continua y desarrollo profesional en Educación Matemática. Finalmente, en la XV CIAEM (Colombia – Medellín, (2019), se ofreció un tema sobre formación inicial de profesores y otro sobre formación continua y desarrollo profesional.

Precisamente, lo que queremos en este espacio académico es presentar una visión panorámica de la investigación latinoamericana en formación docente en Educación Matemática en el marco de esta XV CIAEM como punto de partida para la reflexión y la discusión sobre estos temas, respecto a los cuales hay muchas interrogantes en el tapete aparte de las inquietudes que puedan aquí surgir.

2. Tendencias internacionales en la investigación en formación docente y desarrollo profesional en Educación Matemática

En un intento de mostrar una panorámica de los centros de interés de la investigación en la formación del profesor de Matemática tomaremos como referencia el estudio que Strutchens, Huang, Losano, Potari, Cyrini, Da Ponte y Zbiek (2017) realizaron en el marco del Grupo de Estudio Temático "La Educación Matemática de los futuros profesores de secundaria en el mundo" desarrollado durante el ICME-13 en Hamburgo, además de los trabajos de Sánchez (2011) que hace una revisión de las tendencias en la investigación sobre educación de los profesores de Matemática, y los de la línea de investigación en desarrollo profesional del docente de Matemática del grupo de Cardeñoso, Flores, y Azcárate (2001)

Este último grupo de autores clasifica los problemas de interés en el campo que nos ocupa, a partir de la revisión realizada por Rico (1996), en investigaciones sobre: a) el currículo, b) los procesos de enseñanza/aprendizaje, c) la formación didáctica/matemática de los profesores, y d) investigaciones sobre cuestiones epistemológicas y/o teóricas, ubicando en este último su línea de investigación "Formación y desarrollo de los profesores de Matemática" cuyo interés abarca no solo estrategias de formación, sino también la manera de concebir el quehacer del docente y el proceso de su desarrollo profesional en el entorno donde se desenvuelve.

Sánchez (2011) presenta una revisión de las tendencias internacionales, principalmente entre 1999 y (2019, en la investigación sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática, considerando las temáticas, los referentes teóricos y las tendencias. Sobre los tópicos la discusión se centra en cinco categorías: a) las concepciones y creencias de los profesores: b) las prácticas de enseñanza de los docentes; c) conocimientos y habilidades; d) relación entre teoría y práctica y, e) prácticas reflexivas; siendo, según este autor, la primera categoría la más seguida debido quizás a la idea que se tiene de que las creencias y las concepciones de los docentes inciden directamente en su práctica educativa (Skott, 2009, citado por Sánchez, 2011)

En cuanto a los aspectos teóricos, Sánchez reporta el uso de una amplia gama de conceptos como referentes en las investigaciones sobre formación del docente de Matemática, y en particular destaca los siguientes: a) conocimiento pedagógico del contenido y otras formas de conocimiento partiendo de las nociones iniciales de Shulman (1986, 1987) hasta las aportaciones de Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps, et al. (2005), en su teoría "Matemática para la enseñanza" en la cual descomponen las dos categorías expuestas por Shulman, "conocimiento del contenido matemático" y "conocimiento pedagógico del contenidos", en subcategorías: "conocimiento común del contenido" y "conocimiento especializado del contenido", para la primera; y "conocimiento del contenido y del estudiante" y "conocimiento del contenido y de la enseñanza" para la segunda; b) reflexión en acción y reflexión sobre la acción, categorías propuestas por Schön (citado por Sánchez) como posibilidades del docente para cuestionar su práctica durante y después del acto pedagógico, lo que se complementa con la categoría reflexión para la acción que ocurriría antes de la actuación (Scherer y Steinbring, 2007; citado por Sánchez) y, c) comunidad de práctica, propuesta por Wenger (2001) para referirse a un grupo de docentes que comparten interés por su práctica, reflexionan y aprenden sobre ella de manera compartida. Sobre las nuevas tendencias en investigación, Sánchez señala cuatro cuestiones de interés: a) formación On-line del profesor de Matemática; b) diseño de tareas y su rol en la formación del docente, c) formación y desarrollo profesional de los formadores de docentes y d) justicia social en la educación de los profesores de Matemática.

En el grupo de estudio temático del ICME-3, Strutchen et al. (2017) organizaron los puntos de discusión en cuatro áreas: a) conocimiento del profesor, b) tecnología, herramientas y recursos, c) identidad profesional del profesor y d) experiencias de campo. Sobre el dominio del contenido matemático mencionan los estudios internacionales TEDS-M que direccionan el conocimiento en cuatro subdominios: número y operaciones, álgebra y funciones, geometría y medida, y datos y azar (Tatto et al., 2008); tres dimensiones cognitivas: conocer, aplicar y razonar; y como procesos matemáticos: resolución de problemas y modelación y razonamiento y demostración. Señalan Scrutchen et al. (2017) que predominan los contenidos de número y geometría, las dimensiones cognitivas de conocer y aplicar y los procesos de resolución de problemas y modelación.

En los estudios relacionados con el conocimiento del profesor de Matemática predomina como perspectiva teórica la cognitiva constructivista, con escasa presencia de enfoques socioculturales y metodológicamente, las aproximaciones cualitativas interpretativas con indagaciones a pequeña escala.

Para finalizar esta visión panorámica de la investigación en la formación del profesor de Matemática, mostramos las dimensiones que Guacaneme y Mora (2012, pp 107-108) resumen como tendencias en la educación del profesor de Matemática como campo de investigación: a) las creencias, visiones y concepciones de los profesores; la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas; currículo; b) Las actividades prácticas en el quehacer docente de los profesores y los procesos de aprendizaje profesional que a partir de ellas se desarrollan y las relaciones entre el conocimiento teórico y la práctica de la enseñanza de las matemáticas; c) Los conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas. En esta línea de acción destacan las investigaciones sobre el conocimiento matemático necesario para orientar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (*mathematics for teaching*), así como las indagaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido matemático (*pedagogical content knowledge*); d) las estrategias y tareas utilizadas en los programas de formación de profesores de matemáticas para su educación; e) las dinámicas de formación que se dan en comunidades de práctica de profesores de matemáticas y su relación con su desarrollo profesional; f) la educación de los formadores de profesores; y h) La educación online de profesores de Matemática.

3. La investigación sobre la formación inicial de profesores en la XV CIAEM

En el Tema 01: *Formación Inicial de profesores* se aceptó un total de 67 trabajos, 36 en portugués, 30 en español y 1 en inglés, distribuidos según el tipo y el número de autores por trabajo, como se muestra en el Cuadro 1:

Cuadro 1. Clasificación según idioma y número de autores de trabajos presentados en el tema de formación inicial en la XV CIAEM.

Nº de autores	Comunicaciones						Talleres					Posters					
	1	2	3	4	5	T	1	2	3	4	T	1	2	3	4	T	Total
Portugués	3	16	5	17	2	33						2	1			3	36
Español	4	12	7	2		25		2		1	3		1	1		2	30
Inglés										1	1						1
Total	7	28	12	19	2	58		2		2	4	2	2	2		5	67

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM

Estos trabajos fueron presentados por docentes/investigadores de 13 países, siendo Brasil y Colombia los de mayor representación (Ver Cuadro 2)

Cuadro 2. Distribución de autores por países de los trabajos presentados en el tema de formación inicial en la XV CIAEM.

País	Nº de autores	País	Nº de autores
Argentina	5	España	12
Bélgica	1	Estados Unidos	3
Brasil	71	México	14
Chile	4	Mozambique	1
Chile-Brasil	1	Perú	3
Colombia	24	Venezuela	1
Costa Rica	5		

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM

La mayor parte de los trabajos estuvieron dirigidos principalmente al nivel de Educación Superior al tratarse de investigaciones sobre la preparación que reciben los futuros docentes en las universidades para el ejercicio de la enseñanza de la Matemática; en segundo lugar, están los trabajos que reportan experiencias formativas con la intervención de estudiantes de Educación Básica, Primaria o Secundaria (Ver Cuadro 3).

Cuadro 3. Nivel educativo al que van dirigidos los trabajos presentados en el tema de formación inicial en la XV CIAEM.

Nivel educativo	Nº de trabajos
Educación Infantil	2
Educación Primaria	7
Educación Secundaria	7
Educación Básica*	11
Educación Superior	42
General	7

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM. *No se indica si es Primaria o Secundaria

Dentro de las investigaciones, coincidiendo con las líneas internacionales, predominan las aproximaciones cualitativas de enfoque interpretativo con alcance exploratorio o descriptivo. También destacan los diseños de investigación acción que se ubican en el paradigma crítico, los estudios documentales y los que se centran en el análisis del discurso en menor escala. Esto se puede visualizar en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Enfoque, tipo y diseño de investigación de trabajos presentados aceptados en el tema de formación inicial en la XV CIAEM.

Enfoque	Cuantitativo	Cuali-cuantitativo	Cualitativo
Tipo o diseño	Descriptivo (1)	Descriptivo (1)	Sin especificar (10) Exploratoria (4) Descriptiva (5) Interpretativa (7) Naturalista-Etnográfica (1) Estudio de caso (5) Investigación acción (5) Análisis de contenido (5) Documental (6) Ingeniería didáctica (1)

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM.

Nota: Los números dentro del paréntesis indican la cantidad de trabajos aceptados en la XV CIAEM.

Además de estos trabajos se presentaron trece experiencias de aula y tres propuestas pedagógicas.

Las líneas de investigación que surgen de la revisión y análisis de los trabajos aceptados en el tema de la formación inicial del profesor de matemática las organizamos en el Cuadro 5 según el campo de interés y el énfasis en la formación, el cual hemos diferenciado en cuatro ámbitos de formación: disciplinar, pedagógica, práctica e investigativa, reconociendo que ésta no es una separación claramente delimitada, sino que apunta al mayor énfasis formativo visualizado en cada escrito, por lo que algunos trabajos están clasificados en más de un eje formativo. Estos cuatro componentes de la formación ya fueron estudiados en los informes sobre la formación inicial y continua del profesor de matemática generados en el marco de los Seminarios Formación Docente y Construcción de Capacidades CANP-2 y CANP-5. (Ruiz, 2017; Baldin y Malaspina, 2018)

Cuadro 5. Líneas de investigación según el campo de interés y énfasis en la formación, de los trabajos aceptados en el tema de formación inicial en la XV CIAEM.

Campo de interés	**Énfasis en la formación**				**Total**
	Disciplinar	**Pedagógica**	**Práctica**	**Investigativa**	
Aprendizaje	5	4			**9**
Didáctica	3	10	2	2	**17**
Conocimiento profesional de profesor	5	6	2		**13**
Competencias profesionales		2	1		**3**
Currículum	2	1			**3**
Pensamiento y razonamiento matemáticos	4	2			**6**
Diseño y resolución de problemas	1	2		1	**4**
Historia de la Matemática	1				**3**
Uso de Tecnología	5	5			**10**
Concepciones y creencias		1		2	**3**
Educación especial-educación inclusiva	1	4			**5**
Integración Escuela-Universidad		1	4	2	**7**
Formación de formadores			1		**1**
Articulación formación inicial-formación continua			1		**1**
Total	**28**	**39**	**11**	**7**	

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM

Los campos de interés derivan de las tendencias internacionales ya mostradas y de lo que ha emergido de las propuestas, partiendo de las palabras clave, los resúmenes y de una revisión más detallada de los extensos cuando fue necesario. Esta categorización no es disyuntiva, sino que algunos trabajos están ubicados en más de un centro de interés.

El ámbito de la formación pedagógica, que abarca tanto la general como la especializada, fue el que tuvo mayor repercusión, seguido de la formación disciplinar en matemática y un tanto alejados de estos, los de formación práctica o para la práctica y la formación en, para y desde la investigación, mostrando así que lo que más preocupa a los investigadores son las cuestiones relativas a la adquisición del conocimiento matemático por los futuros docentes y a los procesos de enseñanza y aprendizaje del mismo.

Si nos desplazamos por las filas del Cuadro 5, lo primero que podemos percibir es que el campo de mayor interés investigativo ha sido el de la didáctica, particularmente asociado al ámbito de la formación pedagógica. Aquí encontramos indagaciones sobre el diseño de tareas, actividades y recursos; uso de materiales concretos y juegos didácticos entre otros; en el ámbito de la formación disciplinar se incluyen trabajos que abordan la enseñanza de contenidos matemáticos que se desglosan en el Cuadro 6:

Cuadro 6. Número de trabajos por contenidos matemáticos y nivel escolar en las investigaciones sobre formación inicial del docente en la XV CIAEM.

	Infantil	Primaria	Secundaria	Básica*	Superior
Clasificación	1				
Magnitudes	1				
Números y operaciones		4	2	2	
Geometría		1	1	2	4
Razones y proporciones		1			
Álgebra y funciones			1		
Estadística				1	
Cálculo					5
Álgebra y teoría de números					1
Topología					1

Fuente: Elaboración propia con base en los trabajos presentados en la XV CIAEM

*Sin especificar si es primaria o secundaria

Como se ve, están presentes los cuatro subdominios que mencionan los estudios TEDS-M y predominan los de números y geometría, en concordancia con lo reportado en el Grupo de Estudio Temático del ICME-3 antes reseñado.

En el componente de formación práctica destacamos trabajos sobre la intencionalidad pedagógica y didáctica de la práctica docente y el aula de práctica como un ambiente lúdico.

En concordancia con las tendencias internacionales, el segundo lugar lo ocupan los estudios sobre el conocimiento profesional y las competencias del profesor de Matemática, lo que evidencia la inquietud por aproximar respuestas a la interrogante sobre el tipo de conocimientos y habilidades que necesita una persona para ser un buen profesor de Matemática pues está claro que para esto no es suficiente conocer los contenidos a enseñar y las teorías pedagógicas (Sánchez, 2011, citado por Cruz-Márquez y Montiel, 2019). En este rubro encontramos diversidad de trabajos que analizan: el conocimiento profesional del profesor de enseñanza media, cómo enseñar a los profesores a enseñar matemática, decisiones de acción del docente sobre el pensamiento de los estudiantes, saberes docentes para el diseño de tareas, asignación de significados a conceptos matemáticos, el estudio de temas específicos como forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor, hasta investigaciones que reportan el estado del arte de este tema focalizado en espacios específicos.

Algunas comunicaciones tienen como punto focal desarrollar en los docentes en formación la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia abarca tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar/anticipar la comprensión de estos y decidir cómo responder basándose en tal comprensión (Jacobs, Lamb y Philipp; 2010). Esta ha sido aplicada para estudiar las decisiones de acciones del docente sobre el pensamiento matemático de estudiantes de primaria y para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento de niños de educación infantil.

La temática sobre el uso de las nuevas tecnologías ha sido incorporado por Strutchens et al. (2017) como uno de los ejes de interés investigativo en el campo que nos ocupa, y lo han direccionado en tres vertientes a) como herramienta para la construcción dinámica de conocimientos en el estudiante para docente de Matemática y la generación de actitudes positivas hacia su aplicación futura en el aula; b) como herramienta auxiliar en el diseño de tareas y en el seguimiento del pensamiento del estudiante al realizarlas y c) como herramienta para propiciar el razonamiento matemático de los estudiantes mediante la resolución de problemas. En esta CIAEM se han presentado propuestas que, mediante el uso las nuevas tecnologías, se direccionan hacia el diseño, reformulación y resolución de problemas; el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas; el despliegue de estrategias motivacionales que involucran recursos como juegos y videos; el aprendizaje de conceptos de diversas áreas de la Matemática, especialmente de Geometría a través del software dinámico Geogebra. Otros trabajos orientan sus propósitos a la integración de la tecnología en la práctica docente a través de la metodología Lesson Study, a las dificultades de los docentes para incorporar las facilidades tecnológicas a sus clases de Matemática y a la virtualización en la formación docentes a través de estudios a distancia; esto último reportado por Sánchez (2011) como una tendencia emergente en la materia.

El aprendizaje de la Matemática es – cómo no – un tema concerniente al quehacer educativo que preocupa a docentes e investigadores. Este se da de manera conjunta con el proceso de enseñanza, pero lo hemos diferenciado como punto de interés tomando como criterio los sujetos sobre los cuales recae el norte investigativo, es decir, los estudiantes. Algunas aportaciones sobre este punto se enfilan hacia la formación disciplinar, mediante estudios que indagan sobre cómo los docentes en formación aprenden ciertos temas matemáticos, sus dificultades conceptuales y las oportunidades de aprendizaje que realmente se les ofrecen en los diversos programas de formación. Otros hacen hincapié en la formación pedagógica de los futuros docentes como facilitadores de los aprendizajes en sus estudiantes, abarcando los enfoques cognitivos-constructivistas, el aprendizaje colaborativo, en comunidades de práctica, el uso de materiales concretos y juegos instruccional, el uso de la historia de la matemática como motivación hacia el aprendizaje de la disciplina, entre otras cuestiones remarcables.

En investigaciones sobre procesos matemáticos seguimos los pasos de Structchen et al. (2011) quienes los agrupan en dos dimensiones: resolución de problemas y modelación y razonamiento matemático y demostración. Sobre resolución de problemas como esencia misma del quehacer matemático hay una inclinación indagativa en los ámbitos de formación disciplinar, pedagógica e investigativa. Se aprecian investigaciones en torno a la resolución de problemas con el uso de tecnología; la vinculación entre la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático con sus manifestaciones de creatividad, flexibilidad, originalidad y fluidez; y, el planteamiento, reformulación y solución de problemas como catalizadores del aprendizaje. Sobre modelación solo se presenta una comunicación que aborda el tema de los poliedros en un escenario de modelación como actividad propia del quehacer matemático.

En el tema del razonamiento matemático se encuentran trabajos dentro de la formación disciplinar que tienen que ver con procesos propios de la matemática como la validación de las ideas matemáticas a través de la argumentación y la demostración y con el significado de la demostración matemático en una comunidad de práctica.

Contrario a lo reportado por Cardeñoso, Flores, y Azcárate (2001) y por Sánchez (2011), las concepciones y creencias de los docentes en formación sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje no ocupan un lugar destacado en la investigación en la formación inicial docente en el marco de esta CIAEM. Solo tres trabajos se refieren a estos constructos; dos de ellos que tratan sobre las concepciones de los practicantes docentes en cuanto a su formación para el ejercicio de una docencia investigativa y a su rol como docentes investigadores y el otro, a las concepciones de los futuros profesores sobre una enseñanza de la Matemática inclusiva.

Precisamente, las inquietudes sobre la atención de estudiantes con necesidades o capacidades especiales y su integración al aula regular es temática para la búsqueda de opciones. Ocupa en esta línea la formación de docentes para enseñar Matemática a estudiantes con discalculia, capacidades diferenciadas, deficiencia intelectual, trastorno bipolar, Síndrome de Down, deficiencias auditivas.

En los informes sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática derivados de CANP-2 y CANP-5 se pulsa la vinculación entre la formación teórica y la formación práctica por una parte y, por otra, se cuestiona hasta qué punto esa formación que recibe el futuro docente en su estancia en la universidad realmente lo prepara para un ejercicio eficiente de su profesión. Como punto común a ellos se denuncia una falta de interrelación entre lo teórico y lo práctico y un desfase entre lo que hace la universidad en los programas de formación y la realidad escolar. Varios trabajos presentados en la XV CIAEM, con énfasis en la formación práctica, atienden esa problemática y la articulación entre la formación inicial y la formación continua. Dentro de las comunicaciones escritas en portugués emerge una línea sobre las pasantías o prácticas profesionales (Programa de Estagio Supervisionado) mirándolas como una posibilidad para una real integración escuela-universidad y no solamente como aquel momento para demostrar el logro de los conocimientos y competencias para que el docente en formación pueda ser enviado al campo laboral.

4. Conclusiones

Los planteamientos anteriores posicionan los intereses investigativos sobre la formación del docente de matemática divulgados en el marco de la XV CIAEM en consonancia con el estado del arte mostrado en reportes sobre el tema.

Para continuar la reflexión, valga apuntar que dos de las líneas señaladas por Sánchez como tendencias en la materia (formación on-line y justicia social) y la de identidad profesional del profesor de Matemática, resaltada por Schrutchen, et al, se echan de menos en esta panorámica, aun cuando se reconocen como puntos de interés indagativo en la región. Bastaría con ampliar un poco el foco de búsqueda para percatarnos de esto. Muestra de ello lo encontramos en los trabajos propuestos al VIII CIBEM, realizado en Madrid en 2017, al tema IV: Formación del Profesorado en Matemáticas. Aquí se presentaron comunicaciones sobre la formación on-line de profesores en ambientes colaborativos, la formación continua mediante diversidad de propuestas de cursos en línea y el tipo de conocimientos que en ellos se ponen en juego, la tecnología y la educación a distancia y reflexiones sobre la virtualidad en la formación de profesores de Matemática, entre otras. Además, se comunicaron trabajos sobre la construcción de la identidad del profesor de Matemática, el papel que en ello ocupan las experiencias vivenciadas por los profesores en formación al inicio de la carrera; la forma como los modos de sentir, pensar y actuar, o sea la identidad profesional, inciden en las decisiones que toma el profesorado en cuanto a la docencia que ejerce, entre otros aspectos vinculados a esta tendencia en la investigación en la formación docente en Matemática.

No obstante, hay que develar la preocupación manifiesta sobre hasta qué punto en nuestra región, en materia de investigación, se está copiando lo que se hace en otros lugares. En este sentido, se precisa contextualizar e incentivar la gestión social de la investigación respondiendo a las interrogantes: ¿qué queremos hacer nosotros? ¿Cuáles son nuestros intereses y campos investigativos propios?

Como producto de la reflexión surge entonces la necesidad de profundizar la investigación sobre: nuevos modelos de formación que integren lo disciplinar, lo didáctico y lo pedagógico a la vez que conjugan la formación teórica con la formación práctica; una enseñanza de la matemática inclusiva que atienda las necesidades especiales y los talentos de los estudiantes, la diversidad étnica y la discriminación de género, entre otras líneas de interés.

Los trabajos aprobados en la XV CIAEM sobre la formación inicial (CIAEM, 2019) y los informes sobre la situación de la formación inicial y continua de países como Colombia, República Dominicana, Venezuela, Costa Rica (Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática (2013, noviembre)), Perú y Ecuador (Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática (2017, febrero)), en el marco de los seminarios internacionales sobre Construcción de capacidades en matemáticas y educación matemática (CANP) de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), son puntos para tomar en cuenta en el devenir investigativo en este campo de estudio.

Referencias y bibliografía

Cardeñoso, J. M.; Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de Matemática como campo de investigación. En P. Gómez y L. Rico (eds), *Iniciación a la investigación em didáctica de la matemática*, Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada, Universidad de Granada.

Baldin Y. y Malaspina, U. (eds.) (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*. Springer Brief in Education, Switzerland.

Ball, D. L., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, J., Phelps, G., Thames, M. y Zopf, a. D. (2005). Conceptualizing mathematical knowledge for teaching. Trabajo presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, Montréal, Quebec.

CIAEM (2019). *Memorias XV CIAEM. Medellín*, Colombia: autor. Descargado de **https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations**

Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática (2013, noviembre). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 8, Número especial. Descargado de **https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1281**.

Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática (2017, febrero). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 12, Número 16. Descargado de **https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2317**

Cruz-Márquez, G. y Montiel G. (2019). De Ptolomeo a la formación inicial docente en matemáticas. En CIAEM (2019): *Memorias XV CIAEM*. Medellín, Colombia: autor. Descargado de **https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations**

Guacaneme, E. y Mora, L. (2012). La educación del profesor de Matemática como campo de investigación. *Revista papeles, 4*(9), 102-109.

Jacobs, V. R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Ruiz, A (ed) (2017). *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean*. Springer Briefs in Education, Switzerland.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Shulman, L. (1986), "Those who understand: Knowledge growth in teaching", *Educational Research, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22

Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P. D., Cyrino, M. C. D. C. T., y Zbiek, R. M. (2017). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer Open.

Tatto, M. T., Ingvarson, L., Schwille, J., Peck, R., Senk, S. y Rowley, G. (2008). Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics. Conceptual Framework. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. *Aprendizaje, significado e identidad*. Ediciones Paidós: Barcelona, España.

Revisores de los artículos de este número

Carlos Sánchez

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

Claudia Groenwald

Universidade Luterana do Brasil, Brasil

Edison de Faria

Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, Costa Rica

Edwin Chaves

Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, Costa Rica

Hugo Barrantes

Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, Costa Rica

Hugo Parra

Universidad del Zulia, Venezuela

José Chamoso

Universidad de Salamanca, España

Jhony Villa

Universidad de Antioquia, Colombia

María José Cáceres

Universidad de Salamanca, España

Martha Iglesias

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

Nelly León

Profesora de Matemática jubilada del Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela

Patrick Scott

Representante Internacional del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), Estados Unidos de América

Ricardo Poveda

Universidad Nacional, Costa Rica

Ronnys Vicent

Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela

Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación didáctica, Universidad de Alicante, España

Walter Beyer

Instituto Pedagógico de Caracas, Venezuela

Ángel Ruiz

Universidad de Costa Rica, Costa Rica

CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Consejo científico internacional (2017-2021)

Luis Carlos Arboleda
Expresidente, Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología,
Universidad del Valle, Colombia.

Michèle Artigue
Expresidenta, International Commission on Mathematical Instruction,
Université Paris-Diderot, Francia.

Bill Barton
Expresidente, International Commission on Mathematical Instruction, University of Auckland,
Nueva Zelanda.

Carmen Batanero
Expresidenta, International Association for Statistical Education,
Universidad de Granada, España.

María Salett Biembengut
Expresidenta, Comité Interamericano de Educación Matemática,
Brasil

José María Chamoso
Universidad de Salamanca,
España.

Ubiratan D'Ambrosio
Expresidente, Comité Interamericano de Educación Matemática,
Brasil.

Juan Díaz Godino
Universidad de Granada, España

Claudia Groenwald
Universidade Luterana do Brasil,
Brasil.

Bernard Hodgson
Ex Secretario General, International Commission on Mathematical Instruction,
Université Laval, Canadá.

Eduardo Mancera
Vicepresidente Comité Interamericano de Educación Matemática,
México.

Luis Moreno Armella
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Carlos Sánchez
Universidad de la Habana, Cuba.

Patrick Scott
Vicepresidente, Comité Interamericano de Educación Matemática,
Estados Unidos.

Michael Shaughnessy
Expresidente, National Council of Teachers of Mathematics, University of Portland, Estados Unidos.

Carlos Vasco
Expresidente, Comité Interamericano de Educación Matemática,
Colombia.

Consejo Editorial (2017-2021)

Angel Ruiz
Universidad de Costa Rica,
Costa Rica

Edison De Faria
Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática,
Costa Rica

Hugo Barrantes
Comité Interamericano de Educación Matemática, Costa Rica

Edwin Chaves
Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática,
Costa Rica

Jhony Alexander Villa
Universidad de Antioquia,
Colombia

Nelly León
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela

Ricardo Poveda
Universidad Nacional,
Costa Rica

Sarah González
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra,
República Dominicana

Director (2017-2021)

Angel Ruiz
Universidad de Costa Rica, Costa Rica

CIAEM
IACME
desde - since 1961

CIFEMAT
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Comité Interamericano de Educación Matemática
Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe
www.cifemat.org