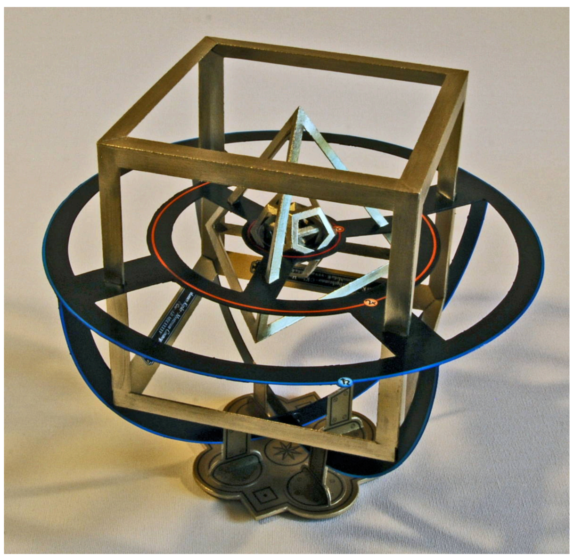
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Cinco sólidos con una historia interesante



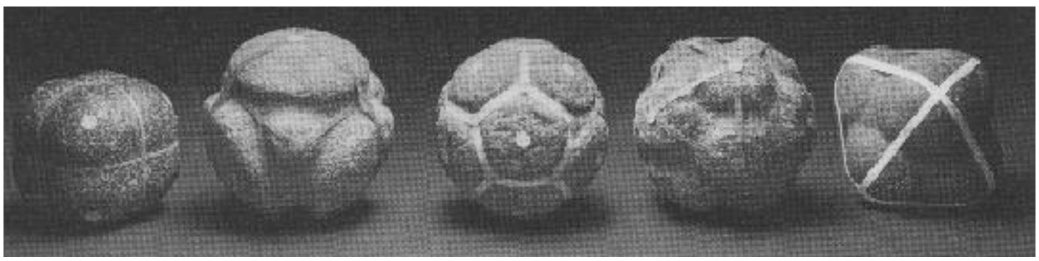
Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.
2013

Tabla de contenido

Cinco sólidos con una historia interesante

Un poliedro o sólido regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí y en cuyos vértices concurren el mismo número de caras. Un cubo es un ejemplo de sólido regular.

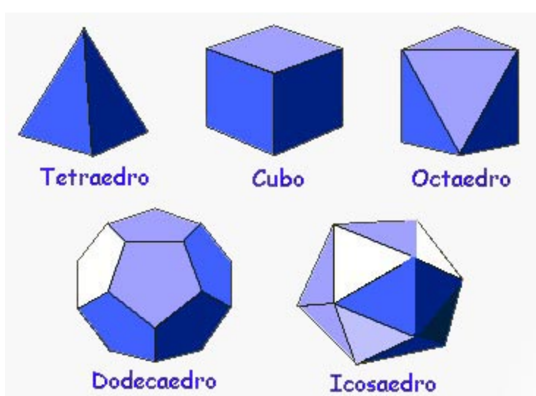
En un yacimiento del neolítico en Escocia se encontraron unas figuras de barro que datan de alrededor del 2000 a. C. Se piensa que estas figuras eran elementos decorativos o que se utilizaban en algún tipo de juego; representan los cinco sólidos regulares existentes.



Los cinco sólidos regulares representados en objetos de barro. Recuperado de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf

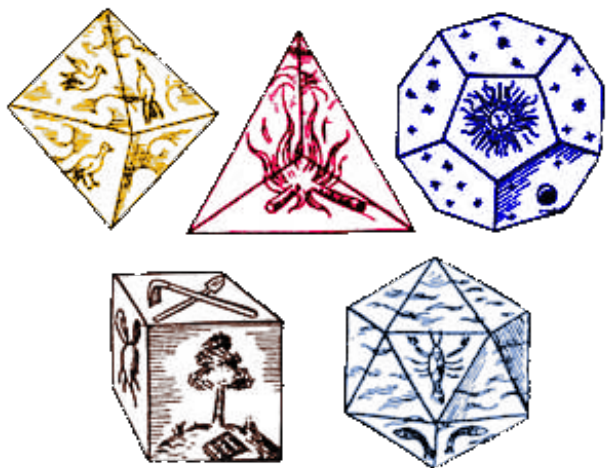
En la proposición XIII.18 de los *Elementos*, Euclides (matemático griego, *ca*. 325 - *ca*. 265 a. C) demuestra que existen exactamente cinco sólidos regulares:

- Tetraedro compuesto por cuatro caras, cada una de ellas es un triángulo equilátero.
- Cubo compuesto por seis caras, cada una de ellas es un cuadrado.
- Octaedro, con ocho caras, las cuales son triángulos equiláteros.
- Dodecaedro con 12 caras que son pentágonos regulares.
- Icosaedro con 20 caras que son triángulos equiláteros.



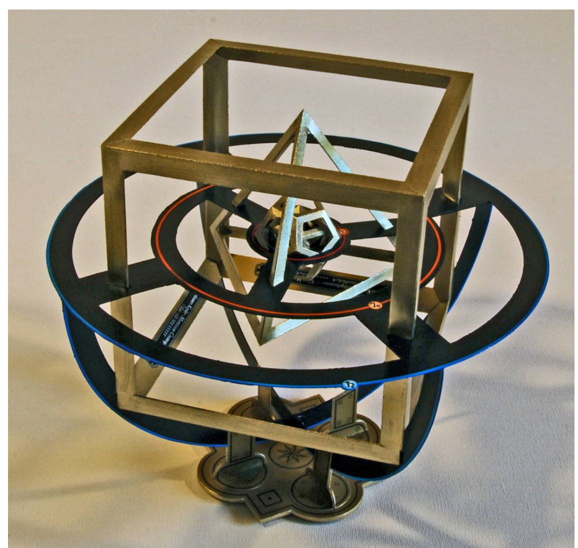
Los cinco sólidos regulares. Recuperado de http://haycomprension.blogspot.com/2012/10/poliedros-naturales-solidos-platonicos.html

La belleza y simplicidad de estos sólidos cautivaron a filósofos y científicos en diferentes épocas. En su libro *Timeo*, Platón (filósofo griego, *ca*. 427 - *ca*. 347 a. C) sugiere que los cuatro elementos de los cuales los griegos creían que estaban constituidas todas las cosas: fuego, aire, agua y tierra, estaban formados por minúsculos sólidos regulares. Así, según él, el fuego está constituido por tetraedros, la tierra por cubos, el agua por icosaedros y el aire por octaedros. Finalmente, la forma del universo entero era la de un dodecaedro. Debido a este razonamiento de Platón, los sólidos regulares también son conocidos como sólidos platónicos.



Los sólidos platónicos representados según el elemento al que corresponden. Tomado de http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/actividades/poliedros/marco_poliedros.htm

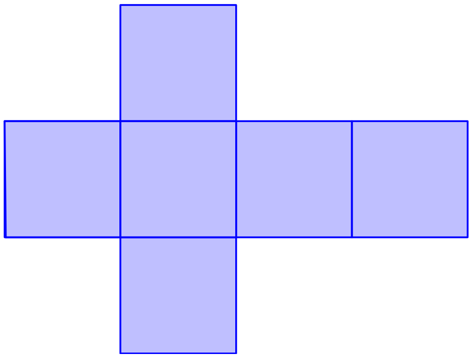
La historia de la fascinación por estos sólidos no acaba ahí. En la época de Kepler (astrónomo alemán, 1571 – 1630) eran conocidos seis planetas en el sistema solar: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Kepler razonó que debido a la distancia entre cada par de planetas adyacentes, estos debían estar conectados con un sólido regular en particular, de los que había justamente cinco. Finalmente encontró un arreglo con seis esferas en cada una de las cuales un planeta tenía su órbita. La esfera exterior correspondía a la órbita de Saturno, esta esfera contenía un cubo y este a su vez una esfera con la órbita Júpiter y así sucesivamente con los demás planetas y sólidos regulares. (Devlin, 2002)

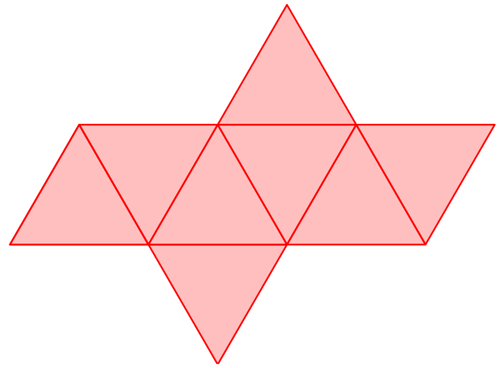


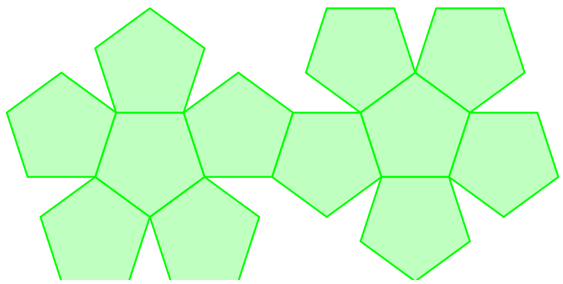
Modelo del sistema planetario de Kepler. Tomado de http://flyhi.de/modellbau/modell_astromedia.html

Problema

1. Observe las siguientes figuras, ¿qué relación encuentra entre ellas y los sólidos regulares de los que habla la lectura?







2. Se construye con cartulina un dodecaedro formado por pentágonos regulares de lado 4 cm, para ello se utiliza una cartulina de 35 cm de largo por 20 cm de ancho, ¿cuál es el porcentaje de cartulina que se desperdicia?

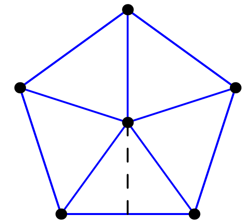
Análisis del problema

1. La figura azul consta de seis cuadrados congruentes, estos corresponden a las caras de un cubo. Si se recorta por los bordes y se dobla por las líneas internas se obtiene un modelo de cubo (se dice que esta figura es un desarrollo plano del cubo).

La figura roja está formada por ocho triángulos equiláteros, correspondiendo con el octaedro. Es un desarrollo plano de dicho sólido.

La figura verde corresponde al desarrollo plano de un dodecaedro.

2. El problema está dirigido a introducir la fórmula del área de un pentágono. En primer lugar se observa que la figura que produce el dodecaedro está compuesta por doce pentágonos regulares congruentes. Para que el estudiante visualice esto deberá guiársele con preguntas generadoras tales como: ¿cuántos polígonos observa en la figura?, ¿qué tipo de polígonos son?, ¿observa alguna relación entre ellos?



Lo que sigue será tratar de determinar el área del pentágono. Puede dividir el pentágono en cinco triángulos congruentes como se observa en la figura adjunta. Para ello deberá determinarse su centro, por ejemplo, inscribiéndolo en una circunferencia.

Ahora el problema se reduce a calcular el área de cada uno de los triángulos congruentes que forman el pentágono; para ello deberán calcular la altura del triángulo. Con los conocimientos de este nivel, esto deberá hacerse por aproximación, midiendo con una regla. La mejor aproximación con dos decimales es $0{,}69 \times \mathrm{l}$, donde l es la medida del lado del pentágono.

En el caso del problema, $\mathrm{l} = 4$, entonces el área aproximada de cada triángulo es $\frac{4\times 0{,}69\times 4}{2} = 5{,}52\ \mathrm{cm}^2$. Cada pentágono está compuesto por cinco de estos triángulos, entonces el área aproximada del pentágono es $5 \times 5{,}52 = 27{,}6\ \mathrm{cm}^2$.

Como el dodecaedro está formado por 12 pentágonos congruentes, entonces el área aproximada de cartulina necesaria para formarlo es $27{,}6 \times 12 = 331{,}2\ \mathrm{cm}^2$.

La cartulina es rectangular por lo que su área es igual a $35 \times 20 = 700\ \mathrm{cm}^2$. De modo que el porcentaje aproximado de cartulina que se desperdicia es $\frac{700-331{,}2}{700} = 52{,}68\%$.

Esta es una actividad que se puede utilizar en VI año en el contexto de la introducción de las habilidades siguientes:

Conocimientos	**Habilidades específicas**
Polígonos regulares • Ángulo central • Radio • Apotema • Área • Perímetro	1. Identificar diversos elementos en un polígono regular. 2. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de diversas figuras relacionadas con polígonos y circunferencias.
Cuerpos sólidos	3. Clasificar cuerpos sólidos por su forma.

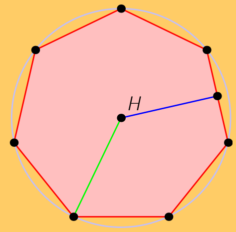
Los conocimientos previos necesarios son los relacionados con el cálculo de áreas de triángulos y el reconocimiento de los polígonos en objetos del entorno.

La clausura de la clase consistirá en la introducción de:

- El concepto de centro de un polígono regular, que corresponde al centro de la circunferencia circunscrita.
- El concepto de apotema, el cual corresponde a la altura de los triángulos que conforman el pentágono.
- La fórmula para calcular el área del pentágono.

Se puede utilizar la actividad para discriminar, entre los sólidos platónicos, cuáles son cubos y pirámides tal como pide el programa de estudios.

El centro de un polígono regular es el centro de la circunferencia circunscrita; el punto señalado con H en la figura.



A cualquiera de los segmentos que une el centro con uno de los vértices se le llama *radio* del polígono regular, también se llama radio a la medida de dichos segmentos. El segmento verde en la figura es un radio.

A cualquiera de los segmentos que va del punto medio de un lado al centro del polígono se le llama apotema, también se llama apotema a la medida de esos segmentos. En la figura, el segmento azul es una apotema.

El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados. En el caso de un polígono regular esto equivale a multiplicar la medida de un lado por el número de lados.

El área del polígono regular está dada por

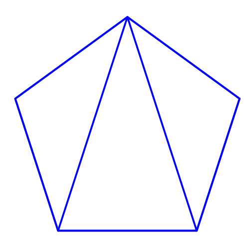
$$A = \frac{Perímetro \times apotema}{2}$$

Indicaciones metodológicas

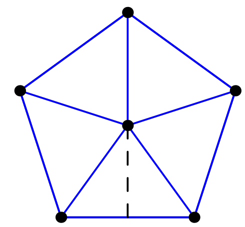
1. La lectura contiene elementos motivadores para el inicio de la clase, y su contenido matemático (la clasificación de los sólidos regulares) puede servir para ejercitar a los estudiantes en la ubicación espacial. Se pueden construir algunos de los sólidos de manera que el estudiante pueda observar relaciones entre la geometría plana y la sólida, en el mismo sentido en que se establece en la primera parte del problema.

2. Esta es una situación apta para la manipulación de material concreto.

3. También, un problema como el segundo puede utilizarse para trabajar con la fórmula para calcular el área de un pentágono y luego la de otros polígonos regulares. La solución de este segundo problema puede abordarse por experimentación. Se puede dibujar uno de los pentágonos regulares de lado cuatro, dividirlo en triángulos, trazar las alturas de estos triángulos, medirlas y aplicar la fórmula para calcular el área de cada triángulo. La suma de estas áreas es el área del pentágono. En principio se puede dejar en libertad para que dividan el pentágono en la forma que deseen. Por ejemplo, lo pueden dividir como muestra la figura adjunta.



Pero se les puede pedir que dividan el pentágono en cinco triángulos iguales, tal como se indicó en el análisis del problema, eso implica la necesidad de ubicar su centro y así, la altura de cada uno de esos cinco triángulos es la apotema del pentágono (línea discontinua en el dibujo).



4. Para establecer una relación entre la medida de la apotema y la medida del lado del pentágono es adecuado trazar diversos pentágonos regulares con lados de distintos tamaños y medir con regla la apotema de cada uno. Puede que los estudiantes lleguen a diversas relaciones muy próximas entre sí; por ejemplo: $0{,}68l$, $0{,}69l$, $0{,}7l$, etc. En la clausura se indicará que la mejor aproximación con dos decimales es $0{,}69l$. Nota: l es la medida del lado del pentágono.

   Se mide la apotema y entonces el área de cada triángulo es $\frac{lado \times apotema}{2}$. El área del pentágono es cinco veces esto o, de modo equivalente: $\frac{perímetro \times apotema}{2}$.

   Debe quedar claro que, en realidad, $0{,}69l$ es una aproximación de la medida de la apotema y por lo tanto, al usarla para calcular el área lo que se obtiene es una aproximación de la misma. Los conocimientos a este nivel no permiten expresar la medida de la apotema, y por lo tanto la del área, de manera exacta.

Consideraciones finales

La información que brinda la lectura es más que todo de tipo anecdótico. Su contenido matemático es la clasificación de los sólidos regulares, esto se puede utilizar para el reconocimiento de figuras planas (polígonos regulares en este caso) presentes en ellos. El texto podría ser utilizado también en IV grado, en el que se establece la habilidad de reconocer polígonos en diferentes contextos.

Esta misma lectura puede también ser utilizada como elemento inicial para introducir el estudio de los volúmenes de sólidos. Para ello deberá plantearse un problema relacionado con volúmenes.

De esta actividad se desprende que una situación histórica, aunque no contenga en sí misma un problema, puede contener conocimientos matemáticos que pueden dar la oportunidad para plantear problemas relacionados con su contenido.

Los procesos matemáticos pueden movilizarse mediante la lectura y la resolución del problema que la misma plantea. Por ejemplo, el segundo problema permite conectar las áreas de *Medidas* y *Números*. También puede conectar las áreas de relaciones y álgebra con *Geometría.*

Recursos adicionales

Sobre los sólidos platónicos:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf

Video: http://www.dailymotion.com/video/xpgi0v_geometria-el-codigo-dehttp://www.dailymotion.com/video/xpgi0v_geometria-el-codigo-de-la-naturaleza-los-solidos-platonicos_school#.UVzkqau50z0-la-naturaleza-los-solidos-platonicos_school#.UVzkqau50z0

Bibliografía

Devli, K. (2002). The language of Mthematics. Making the invisible visible. New York: Holt.

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Primaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Hugo Barrantes

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz,
Edison De Faria
Jonathan Espinoza
Javier Barquero
Christiane Valdy

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Cinco sólidos con una historia interesante.* San José, Costa Rica: autor.