Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

www.reformamatematica.net

CRUSA Fundación para la cooperación

Ecuaciones de segundo grado en la antigüedad

Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las matemáticas.
2013

Tabla de contenido

Introducción

Al-Khwārizmī

La palabra “algebra” proviene de la palabra arábica *al-jabr* que significa “restaurar”, que aparece en el título del libro *Hisāb al-jabr w´al mûqabalah* (Ciencia de la restauración y oposición, o, más matemáticamente, ciencia de la transposición y cancelación), escrito en Bagdad cerca del año 825 por el matemático y astrónomo árabe Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850), un trabajo sobre la solución de ecuaciones. En este contexto, el termino *al-jabr* “restaurar” se refiere a la operación de transposición de una cantidad restada en un lado de una ecuación para el otro lado, donde se convierte en cantidad sumada. La palabra *al-mûqabalah* “cancelar” se refiere a la reducción de un término positivo sustrayendo cantidades iguales de ambos lados de la ecuación, es decir, la simplificación de la expresión resultante mediante la cancelación de términos semejantes de cada lado de la ecuación. La conversión de $2x^2+3x+1=4-2x$ a $2x^2+5x+1=4$ es un ejemplo de *al-jabr*, mientras que la conversión de $2x^2+5x+1=4$ a $2x^2+5x=3$ es un ejemplo de *al-mûqabalah*.

Figura 1: Página de la obra de al-Khwārizmī http://en.wikipedia.org/wiki/Al-Khwarizmi

Inicialmente álgebra significaba el estudio de las ecuaciones y los métodos para resolverlas. En su obra, al-Khwārizmī comenzó señalando que lo que la gente generalmente quiere es calcular un número, la solución de una ecuación, y por lo tanto su texto sería un manual para resolver ecuaciones.

Las cantidades tratadas en las ecuaciones, en la obra de al-Khwārizmī, fueron de tres tipos: el cuadrado (de la incógnita), la raíz del cuadrado (la propia incógnita) y números absolutos (constantes). En este sentido, él notó que existen cinco tipos de ecuaciones de segundo grado que pueden ser escritas con las tres cantidades mencionadas:

1. Cuadrado igual a raíz $\left(ax^2=bx \text{ , en notación moderna}\right)$.
2. Cuadrado igual a número $\left(ax^2=c\right)$.
3. Cuadrado y raíz igual a número $\left(ax^2+bx=c\right)$.
4. Cuadrado y número igual a raíz $\left(ax^2+c=bx\right)$.
5. Raíz y número igual a cuadrado $\left(bx+c=ax^2\right)$.

Los cinco casos considerados anteriormente se deben a que los matemáticos árabes de la época no consideraban los números negativos, y por lo tanto los coeficientes así como las soluciones de ecuaciones, tenían que ser números positivos. La ecuación de segundo grado general en forma estándar $ax^2+bx+c=0$ no tenía sentido para al-Khwārizmī, pues si todos los coeficientes son positivos entonces la ecuación no tiene solución positiva.

Los babilonios

Pero las ecuaciones cuadráticas ya habían sido tratadas por los babilonios varios siglos antes. Existen más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas, que abarcan un período que va desde el año 2100 a. C. hasta el año 300 a. C. y de ellas unas 400 se relacionan con las matemáticas. Las tablillas de interés matemático abarcan temas que incluyen fracciones, contratos, préstamos, interés simple y compuesto, ecuaciones cuadráticas y cúbicas y el teorema de Pitágoras.

Los babilonios utilizaban un sistema numérico sexagesimal (base 60) y la notación posicional. Los problemas algebraicos eran planteados y resueltos en forma verbal (lenguaje coloquial).

Figura 2: Tablilla YBC 7289
La diagonal contiene una aproximación para $\sqrt{2}$ en base 60
http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html

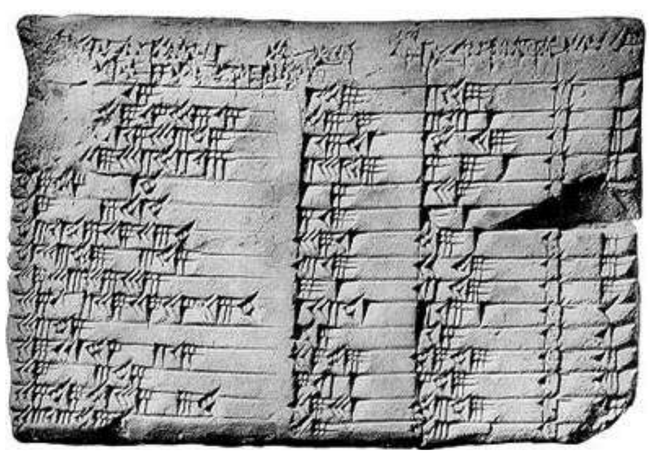

Figura 3: Tablilla Plimpton 322. Columnas con ternas pitagóricas
http://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Muchas de las tablillas babilónicas contienen problemas que se reducen a una ecuación cuadrática. La forma estándar de algunos de los problemas: $x + y = a,\ xy = b$, que es equivalente a una ecuación cuadrática en la variable x (o en la variable y), sugiere que ellos estaban tratando con la relación entre el área y el perímetro de un rectángulo.

A continuación plantearemos algunos problemas históricos relacionados con ecuaciones de segundo grado y buscaremos generalizar los métodos utilizados por los personajes históricos para encontrar las soluciones correspondientes.

Problemas

Problema 1

Uno de los 8 problemas planteados en la tablilla YBC 4663 (YBC son las iniciales de Yale Babylonian Collection, pues esta tablilla se encuentra en la Universidad de Yale) es el siguiente:

> *Sumé la longitud y el ancho (de un rectángulo) y obtuve* $6\frac{1}{2}$*. Multipliqué la longitud por el ancho y obtuve el área* $7\frac{1}{2}$*. ¿Cuál es la longitud y cuál es el ancho?*

Figura 4: Tablilla YBC 4663
http://isaw.nyu.edu//exhibitions/before-pythagoras/

Las instrucciones dadas por el escriba para resolver el problema (aquí utilizaremos el actual sistema numérico decimal en lugar del sexagesimal de los babilonios) fueron las siguientes:

- Tome la mitad de $6\frac{1}{2}$ y obtenga $3\frac{1}{4}$
- Tome el cuadrado de $3\frac{1}{4}$ para obtener $10\frac{9}{16}$
- De este resultado reste $7\frac{1}{2}$, quedando $3\frac{1}{16}$
- Saque la raíz cuadrada para encontrar $1\frac{3}{4}$
- La longitud es $3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}$ que es igual a 5
- El ancho es $3\frac{1}{4}-1\frac{3}{4}$, igual a $1\frac{1}{2}$.

Problema 2

Si x representa la longitud, y el ancho del rectángulo, utilice las instrucciones dadas por el escriba babilónico en la tablilla YBC 4663, para resolver el problema más general

$$\begin{cases} x + y = b \\ xy = c \end{cases}$$

b, c positivos.

Problema 3

Al-Khwārizmī, en su magna obra Hisāb al-jabr w´al mûqabalah, ilustró geométricamente ciertas reglas dadas por él para resolver una ecuación de segundo grado. Para ilustrar su método planteó, utilizando únicamente palabras, el siguiente problema:

Un cuadrado y diez raíces es igual a treinta y nueve dirhems. ¿Cuánto vale la raíz del cuadrado?

La solución dada, en forma verbal, por al-Khwārizmī es:

> Tome la mitad del número de la raíz, que en este caso es cinco. Multiplique este número por él mismo; el producto es veinte y cinco. Sume éste número a treinta y nueve; la suma es sesenta y cuatro. Ahora tome la raíz del resultado, que es ocho, y reste la mitad del número de la raíz que es cinco; el resultado es tres. Este resultado es la raíz del cuadrado que estábamos buscando.

Problema 4

Utilice las instrucciones dadas por al-Khwārizmī, para resolver la ecuación el problema más general: $x^2 + bx = c$, con *b, c* números positivos.

Problema 5

Un punto B (figura abajo) divide el segmento AC en media y extrema razón, si la razón entre el segmento más corto y el más largo es igual a la razón entre el segmento más largo y el segmento completo, es decir,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

Figura 5: División de un segmento en media y extrema razón
Elaboración propia

En los Elementos de Euclides (325-265 a. C.), Libro VI, proposición 30, se plantea el siguiente problema:

Dividir un segmento en media y extrema razón.

Suponga que AB es el segmento más corto y considere $x = \frac{BC}{AB}$. Obtenga la ecuación de segundo grado que resuelve el problema planteado y determine su solución.

Análisis de los problemas

Ambos problemas son presentados en forma retórica (verbal) y utilizan términos que no son usuales o de fácil comprensión. La solución dada por los babilonios o por al-Khwārizmī también aparece en forma verbal, lo que nos da ciertas "pistas" acerca de los términos utilizados en el planteamiento de los problemas.

Conocimientos y habilidades específicas a desarrollar

Las lecturas anteriores pueden servir para desarrollar algunos conocimientos y habilidades específicas relacionadas con ecuaciones de segundo grado para noveno y undécimo año.

Conocimientos	Habilidades específicas
Ecuaciones de segundo grado con una incógnita (noveno año)	1. Expresar $x^2 + px + q$ como $(x+h)^2 + k$. 2. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita. 3. Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
Funciones y modelización (undécimo año)	4. Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Observe que las actividades permiten integrar varias habilidades específicas, con lo que se puede optimizar el tiempo para abarcar el programa de estudios.

Conocimientos y habilidades previas

Conocimientos previos	Habilidades específicas previas
Relaciones (quinto año)	1. Distinguir entre cantidades variables y constantes (quinto grado)
Expresiones algebraicas (octavo año)	2. Utilizar productos notables para desarrollar expresiones algebraicas. 3. Determinar el valor numérico de una expresión algebraica.
Ecuaciones (octavo año)	4. Comprobar si un número dado es solución de una ecuación. 5. Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella.

Estrategias de solución

Problema 1

Si *x, y* representan respectivamente la longitud y el ancho del rectángulo, entonces el problema planteado se escribe (utilizando el lenguaje algebraico actual) como:

(a) $$\begin{cases} x + y = 6\frac{1}{2} \\ xy = 7\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en la primera ecuación y reemplazamos en la segunda, el sistema anterior se reduce a la ecuación de segundo grado,

(b) $$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0$$

La solución del problema es presentada en forma retórica (verbal) pues en la época en que fue escrita la tablilla (entre los siglos 19 y 17 antes de Cristo) no se había desarrollado la notación simbólica (algebraica) que conocemos hoy (en realidad tardaron unos 3500 años para que esto ocurriera).

Los números utilizados en el problema y en la solución están dados en el sistema numérico decimal, y no en el sexagesimal utilizado por los babilonios. Según el algoritmo (instrucciones) presentado por el escriba, se llega a la respuesta del problema: la longitud es 5 y el ancho es $1\frac{1}{2}$. Por lo tanto en la misma tablilla aparece la respuesta a la pregunta:

> *Sumé la longitud y el ancho (de un rectángulo) y obtuve* $6\frac{1}{2}$*. Multipliqué la longitud por el ancho y obtuve el área* $7\frac{1}{2}$*. ¿Cuál es la longitud y cuál es el ancho?*
>
> *Respuesta:* La longitud es 5, el ancho es $1\frac{1}{2}$.

¿Es correcta la solución encontrada? ¿Existen otras soluciones para el problema?

Se puede comprobar que $x + y = 5 + 1\frac{1}{2} = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$, $xy = 5 \times 1\frac{1}{2} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, es decir, la solución encontrada es correcta.

Es claro que, por la simetría del sistema, si intercambiamos la longitud con el ancho entonces encontramos otra solución: La longitud es 1 ½ y el ancho es 5. Esto se debe a que la suma y la multiplicación son conmutativas: $x + y = y + x$, $xy = yx$.

La idea es que el docente haga la lectura relacionada con el aporte matemático de los babilonios antiguos, lea el problema 1 y presente la solución dada por el escriba de la tablilla. Posteriormente solicite que los estudiantes utilicen la representación algebraica para escribir el problema (sistema de ecuaciones) y que verifiquen si la respuesta dada por el escriba es realmente una solución del problema. Además, que analicen si existen otras soluciones que no fueron consideradas por el escriba.

Otras preguntas generadores podrían ser:

- ¿Cuál es una ecuación de segundo grado con una incógnita que es equivalente al sistema de ecuaciones para el problema?
- ¿Será que el método dado por el escriba funciona si cambiamos las cantidades $6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$ por otros números positivos? Por ejemplo, considere el siguiente problema:

Utilice las instrucciones dadas por el escriba babilónico en la tablilla YBC 4663 (problema histórico número 1), para resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 30 \end{cases}$$

x representa la longitud, *y* en ancho del rectángulo.

Hay que dar unos 5 minutos de tiempo para que los estudiantes trabajen individualmente las preguntas planteadas y que posteriormente comuniquen sus hallazgos.

La solución del problema anterior, según las instrucciones dadas por el escriba, se describe abajo:

Solución del sistema $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 30 \end{cases}$ por el método dado por el escriba:

- Tome la mitad de 13 y obtenga $\frac{13}{2}$
- Tome el cuadrado de $\frac{13}{2}$ para obtener $\frac{169}{4}$
- De este resultado reste 30, quedando $\frac{49}{4}$
- Saque la raíz cuadrada para encontrar $\frac{7}{2}$
- La longitud es $\frac{13}{2} + \frac{7}{2}$ que es igual a 10
- El ancho es $\frac{13}{2} - \frac{7}{2}$, igual a 3.

Respuesta: Longitud 10, ancho 3 (también funciona longitud 3, ancho 10).

Con la transición anterior, se espera que el estudiante pueda resolver el problema 2, que es la generalización del método utilizado por el escriba:

Problema 2

Consiste en utilizar las instrucciones dadas por el escriba babilónica en la tablilla YBC 4663 para resolver el problema general

$$\begin{cases} x + y = b \\ xy = c \end{cases}$$

x representa la longitud, y el ancho del rectángulo, *b, c* son números reales positivos.

Siguiendo las instrucciones grabadas en la tablilla tenemos:

Solución del problema 2

1. La mitad de *b*: $\frac{b}{2}$
2. Cuadrado del resultado: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
3. Restar *c* al resultado anterior: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$
4. Tome la raíz cuadrada del resultado: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$
5. La Longitud es $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$
6. El ancho es $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Utilizando notación moderna, podemos notar que el sistema anterior se reduce a una ecuación de segundo grado:

$$x + y = b \Rightarrow y = b - x \Rightarrow x(b - x) = c \Rightarrow bx - x^2 = c \Rightarrow x^2 - bx + c = 0$$

La solución positiva de la ecuación anterior es $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, es decir, coincide con la solución dada por el escriba. De $y = b - x$ obtenemos el ancho del rectángulo encontrado por el escriba.

El método de solución para resolver el problema particular, es equivalente al conocido método de completar cuadrado que será desarrollado posteriormente en la solución geométrica dada por al-Khwārizmī.

Problema 3

Para el problema "*Un cuadrado y diez raices es igual a treinta y nueve dirhems. ¿Cuánto vale la raíz del cuadrado?*" planteado por al-Khwārizmī, se requiere un poco de esfuerzo para entender qué son los datos y cuál es la pregunta.

Primero, un *dirhem* era una unidad monetaria de los Árabes, en los tiempos medievales. Lo que está diciendo al-Khwārizmī es que un cierto número al cuadrado (*un cuadrado*) más diez veces el número (*diez raíces*) es igual a 39 (*treinta y nueve dírhems*), y por lo tanto el problema se puede plantear así:

> *¿Cuál es el cuadrado que al agregar diez veces a su propia raíz (lado) resulta treinta y nueve?*

La ecuación que corresponde al problema, en lenguaje actual, es $x^2 + 10x = 39$. Los pasos propuestos por al-Khwārizmī para obtener la solución son:

- Tome la mitad del número de la raíz, es decir, ½ de 10 que es 5.
- Multiplique el resultado anterior por él mismo, 5×5 o bien 5^2 que es 25.
- Sume el número anterior a 39, para obtener 64.
- Tome la raíz del resultado y se tiene 8.
- Reste la mitad del número de la raíz, 8 – 5, cuyo resultado es 3.
- La solución es el número anterior, es decir, la raíz del cuadrado (valor de *x*) es 3.

La descripción verbal del procedimiento, es esencialmente la misma dada por el escriba babilónico, y es básicamente lo que hoy conocemos como el método de *completar cuadrado*. La justificación geométrica del método dado por al-Khwārizmī para la solución es la siguiente:

Él representó x^2 por un cuadrado de lado *x*, y $10x$ por dos rectángulos de lados *x* y 5 (por lo tanto cada rectángulo tiene área 5*x*), conforme la figura abajo. El cuadrado extra de área 25 *completa el cuadrado* de lado $x + 5$, cuya área será igual a 25 + 39, pues 39 es el valor de $x^2 + 10x$. De esta forma el cuadrado grande tiene área 25 + 39 = 64, y por lo tanto su lado $x + 5 = 8$, la raíz cuadrada de 64, y la solución es $x = 3$.

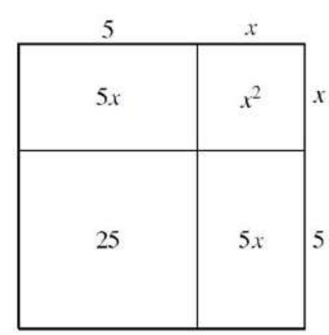

Figura 6: Justificación geométrica para la solución de $x^2 + 10x = 39$
Elaboración propia

Como se procedió en el problema 1, se sugiere que el docente haga la lectura relacionada con el aporte matemático de al-Khwārizmī, lea el problema 3 y presente la solución dada por al-Khwārizmī. Posteriormente solicite que los estudiantes escriban el problema en el registro de representación algebraico ($x^2+10x=39$) y que verifiquen si la respuesta dada es solución del problema, y si es la única solución posible.

Para asegurar que los estudiantes entendieron las instrucciones dadas por al-Khwārizmī, se sugiere que el docente plantee otro problema particular:

Utilice las instrucciones dadas por al-Khwārizmī (en el problema 3), para resolver la ecuación $x^2+5x=15$.

Dé unos 5 minutos de tiempo para que los estudiantes trabajen individualmente las preguntas planteadas y que posteriormente comuniquen sus hallazgos. La solución del problema anterior, según las instrucciones dadas por al-Khwārizmī se describe abajo:

Solución de la ecuación $x^2+5x=15$ por el método de al-Khwārizmī:

- Tome la mitad del número de la raíz, es decir, ½ de 5 que es 5/2.
- Multiplique el resultado anterior por él mismo, $\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$ o bien $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ que es $\frac{25}{4}$.
- Sume el número anterior a 15, para obtener $\frac{85}{4}$.
- Tome la raíz del resultado y se tiene $\frac{\sqrt{85}}{2}$.
- Reste la mitad del número de la raíz, $\frac{\sqrt{85}}{2}-\frac{5}{2}$ cuyo resultado es $\frac{\sqrt{85}-5}{2}$.

La solución es el número anterior, es decir, la raíz del cuadrado (valor positivo de *x*) es $\frac{\sqrt{85}-5}{2}$.

Geométricamente, la solución anterior se obtiene al utilizar la figura que sigue:

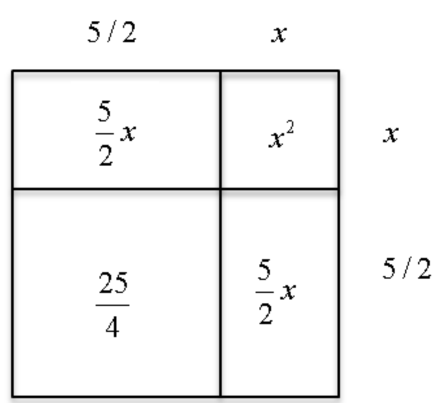

Figura 7
Elaboración propia

Es importante notar que los antiguos babilonios así como al-Khwārizmī no admitían soluciones negativas para las ecuaciones polinomiales por tratarse de longitudes de objetos geométricos. Por ejemplo, se puede verificar que $x = -13$ también es solución del problema 3, es decir, de la ecuación $x^2 + 10x = 39$, pero ésta era descartada por ser negativa. Otra observación, es que para al-Khwārizmī no existía una ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, pues si *a, b, c, x* son todos (reales) positivos entonces $ax^2 + bx + c$ no puede ser cero. Lo interesante es que cada uno de los posibles tipos de ecuaciones cuadráticas tratadas por al-Khwārizmī tenía su propia regla de solución, es decir, no existía una regla general que sirviera para todos los tipos considerados por al-Khwārizmī.

Problema 4

Este problema trata de generalizar las instrucciones dadas por al-Khwārizmī, para resolver la ecuación $x^2 + bx = c$, con b, c números positivos.

Primera solución del problema 4

Utilizando las instrucciones dadas por *al-Khwārizmī* para resolver la ecuación cuadrática $x^2 + bx = c$, tenemos:

1. Mitad del número de la raíz: $\frac{b}{2}$
2. Cuadrado del resultado: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
3. Sume el resultado a *c*: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
4. Tome la raíz cuadrada del resultado: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
5. Resultado menos la mitad del número de la raíz: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Esta es la respuesta o solución (positiva) de la ecuación (lenguaje actual) $x^2 + bx = c$.

Segunda solución del problema 4

Solución obtenida de la representación geométrica algebraica (figura abajo):

El cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$ está formado por un cuadrado de lado *x*, dos rectángulos de área $\frac{b}{2}x$ cada uno, y un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$ que fue agregado para completar el cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$ (de este método es que viene el nombre "completar cuadrado").

Por lo tanto $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+2\left(\frac{b}{2}x\right)+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, pues

$$x^2+bx=c.$$

La solución positiva de $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2+c$ es $x+\frac{b}{2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$, que se escribe como

$$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}=\frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}.$$

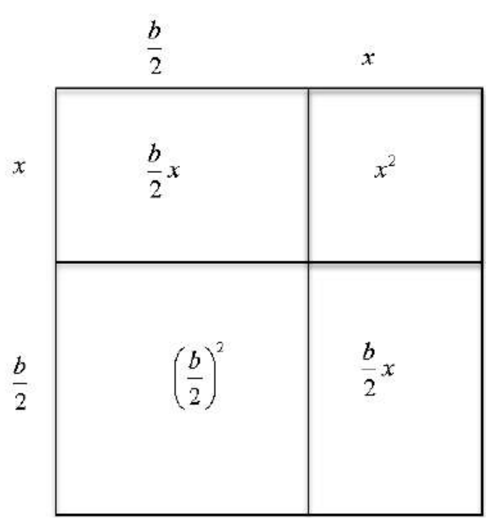

Figura 8
Elaboración propia

Problema 5

Los *Elementos* (en griego: Στοιχεῖα , */stoicheia/*) es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros, escrito por el matemático griego Euclides cerca del 300 a. C. en Alejandría. Es considerado uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas (el primero es la Biblia)

En estos trece libros Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época, representados en un sistema axiomático, conocido como Postulados de Euclides.

Figura 9: Portada de la primera edición de los Elementos de Euclides en inglés (1570)
http://es.wikipedia.org/wiki/Elementos_de_Euclides

En el Libro VI, proposición 30, Euclides planteó el problema: *Dividir un segmento en media y extrema razón*.

Si suponemos que *AB* es el segmento más corto y hacemos $x = \frac{BC}{AB}$ entonces, de la definición de división de un segmento en media y extrema razón, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$, y debido a que *AC* = *AB* + *BC* entonces $AB + BC = \frac{BC}{AB} \times BC$, o bien $1 + \frac{BC}{AB} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$.

Esta es la Figura 5 vista anteriormente

Reemplazando $\frac{BC}{AB}$ por *x*, obtenemos la ecuación cuadrática $1 + x = x^2$, que en forma estándar se escribe como $x^2 - x - 1 = 0$

La solución positiva de la ecuación, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se representa por la letra ϕ (phi), y es conocida como número de oro o la razón áurea. Es un número que aparece en famosas pinturas, esculturas y obras arquitectónicas. La solución negativa no tiene sentido pues *x* representa la longitud de un segmento.

Los estudiantes podrían investigar en Internet informaciones relacionadas con el número de oro y comunicar los resultados de la búsqueda en la siguiente lección.

Es importante que el docente esté atento a lo que hacen los estudiantes durante la etapa de trabajo estudiantil independiente, y que los motive para que comuniquen las estrategias utilizadas para resolver cada problema y sus hallazgos, durante la etapa de discusión interactiva y comunicativa. Hay que poner especial atención a los posibles errores u obstáculos encontrados.

Posibles errores u obstáculos

Problemas 2 y 4

No es fácil partir de un caso particular y generalizar el problema mediante el reemplazo de las constantes por parámetros. Algunos estudiantes pueden creer que necesitan utilizar los valores constantes dados en la lectura (o bien otras constantes inventadas por ellos) en lugar de los parámetros. Por esto es importante resolver casos particulares antes para asegurarse de que el estudiantado comprendió bien el algoritmo de solución dado en las lecturas.

Otro aspecto importante consiste en reemplazar la expresión $x^2 + bx$ por el parámetro *c* en el desarrollo de la generalización (problema 4) o $x^2 + 10x$ por 39 en la solución geométrica algebraica del problema 3.

En ambas situaciones, el rol del docente es fundamental. Hay que estar atento a los posibles errores cometidos por los estudiantes y dar las orientaciones pertinentes para las correcciones, sin dar las respuestas. El docente debe darle un papel didáctico sustancial al error, ya que esto permite detectar dónde hay mayores dificultades de aprendizaje y visualizar mejores formas de abordar un conocimiento particular.

Procesos matemáticos que se activan

Los problemas planteados permiten activar varios procesos matemáticos (MEP, 2012, páginas 24-26, 56-58).

Potencializa la *conexión* de las matemáticas con la historia de civilizaciones y de personajes de la antigüedad ligados al desarrollo de las matemáticas, utiliza la *representación* verbal en el planteamiento de los problemas y en las soluciones y la *representación* geométrica en la solución dada por *al-Khwārizmī*, haciendo la *conexión* del álgebra con la geometría y activa la *comunicación*, por ser una actividad de generalización, lo que cataliza el compartir estrategias, hallazgos, suposiciones y cálculos realizados.

Indicaciones metodológicas

1. Las situaciones históricas y los problemas planteados pueden efectuarse en el aula, en dos contextos distintos, según las posibilidades de recursos con los que cuente el docente:

   - *Opción 1:* El docente con una computadora y un proyector podría empezar pasando un video histórico que habla del aporte matemático de la civilización babilónica, y del aporte de los árabes, particularmente de *al-Khwārizmī*.
     Posteriormente presenta algunas preguntas generadores para que los estudiantes perciban la ausencia de los números negativos en las ecuaciones planteadas, la falta de generalización y la ausencia de simbolismo matemático moderno. El docente presenta inicialmente casos particulares, para verificar si los estudiantes entendieron bien los algoritmos dados en las lecturas, comenta aspectos matemáticos relacionados y plantea como problema las generalizaciones correspondientes.

   - *Opción 2:* El docente distribuye a los estudiantes materiales con los personajes históricos de interés, con los problemas y las soluciones dadas por dichos personajes, se comenta brevemente las lecturas, en cuánto a sus aspectos matemáticos y extra matemáticos, y las relaciones que ahí se encuentran entre historia y matemáticas. La idea es asegurarse de que los estudiantes hayan comprendido la lectura, y relacionar el quehacer matemático con aspectos de la cultura general. Como se mencionó en la opción 1, hay que enfatizar el proceso de generalización y el uso de símbolos para representar las variables y los operadores (suma, potencia, multiplicación, igualdad). Posteriormente plantea las generalizaciones correspondientes.

2. En cualquiera de las opciones, los estudiantes trabajan individualmente o en pequeños grupos para resolver los problemas planteados, bajo la atenta supervisión del docente.

3. El cierre o clausura de la clase consistirá en la definición de parámetros en una ecuación polinomial, en particular en una ecuación cuadrática. Se enfatizará la importancia del uso de los parámetros para generalizar casos particulares de un problema.

4. Se retoman las técnicas de completar cuadrado utilizadas en la lectura, para completar cuadrado en la expresión algebraica $ax^2 + bx + c$, y a partir de este proceso, deducir la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Completando cuadrados para resolver la ecuación ax^2 + bx + c

Considerando los procedimientos dados por los babilónicos y por *al-Khwārizmī*, podemos escribir:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0$$

por lo que

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Si $a\neq 0,\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, lo que implica

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

y por lo tanto $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que es la fórmula conocida para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

Hay que recordar que $\sqrt{a^2}=|a|$ valor absoluto de *a*, pero que la presencia de los signos $\pm$ antes de la raíz nos permite escribir como lo hicimos en el cuadro anterior.

5. Sería conveniente utilizar algún software, por ejemplo Excel o Geogebra, para construir las gráficas de funciones cuadráticas, para analizar el rol de cada uno de los parámetros en la función $f(x)=ax^2+bx+c$, y recordar que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$son representadas geométricamente por las intersecciones de la función cuadrática con el eje de las abscisas.

Consideraciones finales

En esta actividad hemos aprendido vimos que la historia de las matemáticas es muy rica para trabajar conocimientos y habilidades de forma integrada.

El uso de la historia de las matemáticas proporciona un rostro más humano a las matemáticas, y el proceso de generalización de los problemas presentados permite valorar el uso de símbolos para representar las variables y los operadores relacionados con las ecuaciones que permiten resolver los problemas propuestos.

Al finalizar es recomendable que el estudiantado pueda ver algún video o lectura relacionada con las situaciones históricas matemáticas presentadas. Algunos de estos recursos se encuentran abajo.

Recursos adicionales

Videos

Álgebra. http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra. Recuperado el 14-04-2013.

Historia de las ecuaciones. http://www.youtube.com/watch?v=6AOaT2DOoHg. Recuperado el 14-04-2013.

HM.1 El lenguaje del Universo. http://www.youtube.com/watch?v=Lq67Ob7Y8F8. Recuperado el 14-04-2013.

Más por Menos-01-El Número de Oro-Parte01. Recuperado el 14-04-2013 del site http://www.youtube.com/watch?v=fGAkCg6bLqE

Más por Menos-01-El Número de Oro-Parte02. Recuperado el 14-04-2013 del site http://www.youtube.com/watch?v=vv1wUqOzZEE

Matemáticas El Legado Científico del Mundo Árabe. Recuperado del site http://www.youtube.com/watch?v=VFS0Dchk1ds el 14-04-2013.

Bibliografía

Katz, Víctor (1998). *A History of Mathematics: An introduction*. Second edition. New York, Addison Wesley. Capítulo 1.9 Quadratic Equations; Capítulo 7.2 Algebra (Islam)

MEP (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas.*

NCTM (2004). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Capítulo V: The History of Algebra.

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemáticas*. S. A. de C. V. Grupo Editorial Iberoamérica.

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edison de Faria

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz
Jonathan Espinoza

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Ecuaciones de segundo grado en la antigüedad.* San José, Costa Rica: autor.