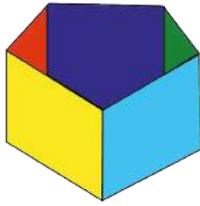


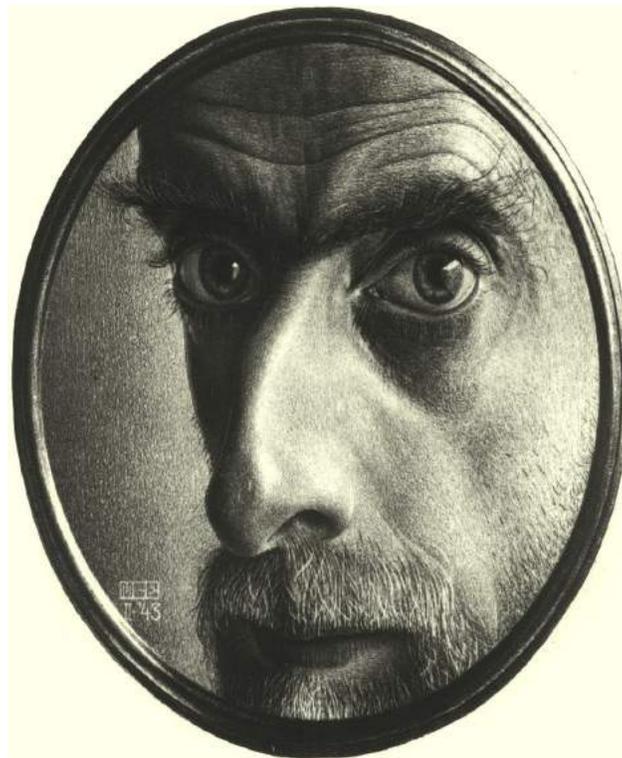
# Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



[www.reformamatematica.net](http://www.reformamatematica.net)



## Escher y la simetría



**Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria:  
Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.**

**2013**

## Tabla de contenido

Escher y la simetría .....	3
Problema .....	4
Análisis del problema .....	5
Indicaciones metodológicas .....	8
Consideraciones finales.....	9
Recursos adicionales .....	10
Bibliografía .....	11
Créditos .....	12

## Escher y la simetría

Maurits Cornelis Escher fue un artista holandés nacido en 1898 en Leeuwarden, Holanda y fallecido en 1972. Gran parte de su trabajo está ligado con la geometría. Estaba interesado en la forma de dividir el plano de manera periódica.

En 1926 estuvo en la Alhambra de Granada en España. Ahí observó los ornamentos presentes que le gustaron mucho. En 1936, Escher volvió a visitar la Alhambra en compañía de su esposa. Asistido por ella, copió durante varios días los ornamentos de la Alhambra, para estudiarlos luego con detenimiento una vez que volviera a casa.



Escher, autorretrato. Tomado de <http://aixa.ugr.es/escher/1280x1024/>  
Autorretrato II.png



Ornamentos de la Alhambra de Granada, España. Tomado de <http://blog.bellostes.com/?p=3834>

De regreso a su país, leyó libros relacionados con ornamentos y libros de matemáticas que no entendió muy bien, pero las ilustraciones de estos últimos - que copiaba o reproducía en esbozo- le fueron de mucha utilidad. Finalmente, se dio cuenta de lo que andaba buscando. En 1937, Escher elaboró a grandes rasgos un sistema bastante práctico que más tarde - entre 1941 y 1942 – pondría por escrito. Mientras tanto, había aplicado mucho sus descubrimientos en dibujos de ciclos y metamorfosis (Ernst, 1994).



Escher, Metamorfosis. Tomado de <http://adriana-burt.blogspot.com/2009/09/las-metamorfosis-en-la-obra-de-maurits.html>

Además de una serie de propiedades matemáticas relacionadas con las figuras en el plano, los dibujos de Escher presentan simetrías. De hecho, si se estudia una figura considerando los movimientos que la hacen coincidir consigo misma (simetrías) se descubre que existen 17 clases de figuras.

Una de las preocupaciones de Escher se refiere a la partición periódica del plano; esto tiene que ver con movimientos (transformaciones) tales como giros, reflexiones y traslaciones.

## Problema

La figura que aparece a continuación es parte de un dibujo de Escher.

a) Si se imprime y recorta la figura, al hacer ciertos dobleces en el papel la figura queda dividida en dos partes, de modo que una es como la imagen en un espejo de la otra. ¿Cuántos de esos dobleces se pueden hacer, en el caso del dibujo, de manera que suceda lo indicado? Trace una línea donde iría cada uno de esos dobleces.



b) Ahora se ha pintado de morado un ojo de una de las ranitas. Pinte de verde cada ojo sobre el que queda el ojo morado al hacer los dobleces realizados en (a).

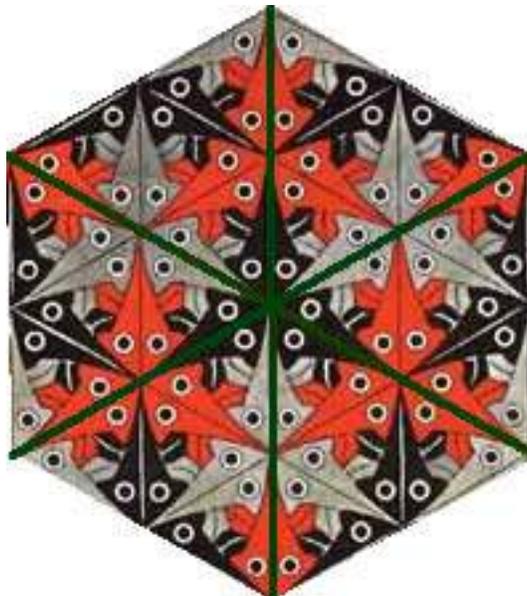


c) Se pintó de morado una de las ranitas, todas las demás se pueden obtener a partir de ella mediante diferentes movimientos, ¿cuántas de ellas se pueden obtener a partir de la morada mediante un movimiento en línea recta? Señálelas en la figura.



## Análisis del problema

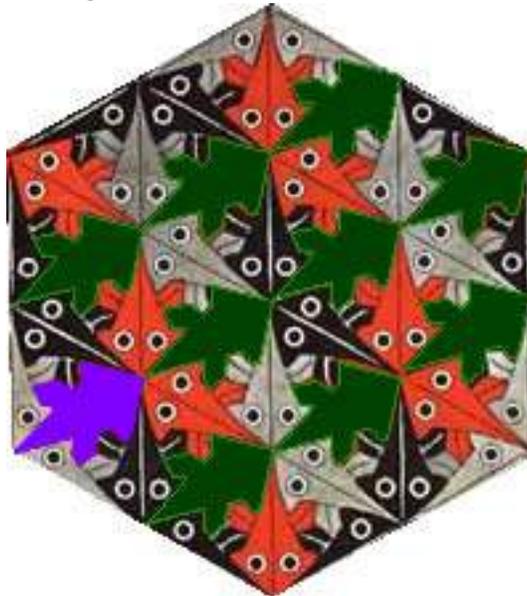
a) Hay tres maneras de doblar la figura de modo que satisfaga lo indicado en el problema. En la siguiente figura, las líneas verdes indican dónde irían esos dobleces.



b) Los puntos verdes en la siguiente figura corresponden al morado al hacer cada doblez.



c) Hay 9 ranitas que se pueden obtener de la morada moviéndola en línea recta, son las ranas verdes en la siguiente figura.



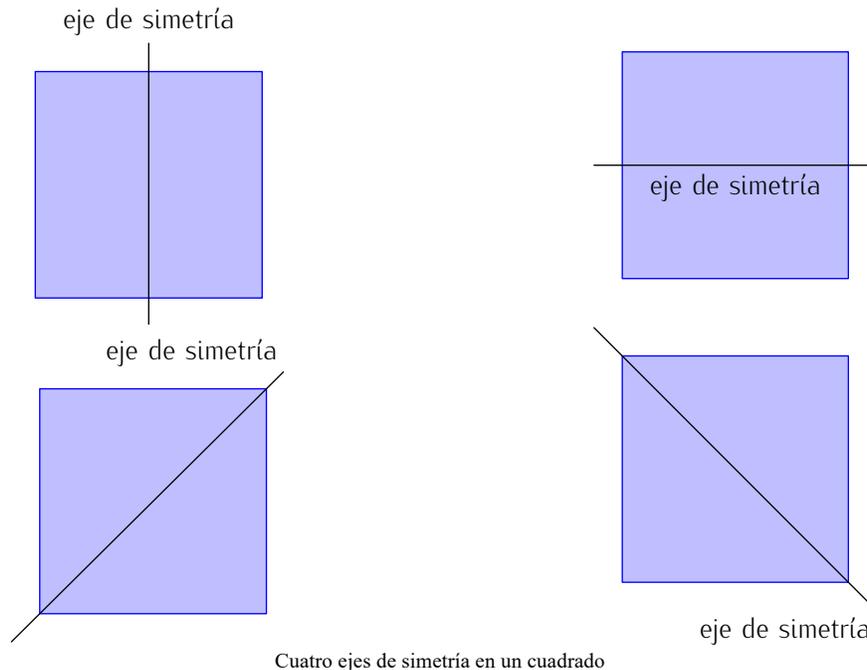
Esta es una actividad que puede ser utilizada en cuarto o quinto grado. En cuarto grado para introducir la simetría (partes a y b del problema):

Conocimientos	Habilidades
<p><b>Simetría</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Figura simétrica</li> <li>• Eje de simetría</li> <li>• Puntos homólogos</li> <li>• Distancia de un punto al eje de simetría</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identificar los ejes de simetría de una figura.</li> <li>2. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta.</li> <li>3. Trazar una figura simétrica a otra respecto a una recta.</li> <li>4. Estimar la distancia de un punto al eje de simetría.</li> </ol>

Las nociones previas están referidas a puntos y segmentos.

La actividad puede servir para introducir los conceptos de simetría, eje de simetría, puntos homólogos. El problema está redactado de manera que se trabaje con estas nociones aún sin conocer los términos involucrados, en el cierre de la actividad se sistematizarán estas nociones.

Durante la clausura, se verá la noción de simetría axial. Por ejemplo, un cuadrado presenta varias simetrías de reflexión con respecto a un eje (simetría axial), esto significa que si se parte un cuadrado mediante uno de sus ejes de simetría, se obtienen dos pedazos idénticos, tal como se ve en la siguiente figura. Escher descubrió por su cuenta todas las 17 clases de figuras que presentan simetrías, a pesar de no poseer los conocimientos matemáticos necesarios para ello.



En el caso del problema propuesto, los ejes de simetría corresponden con los dobles mencionados.

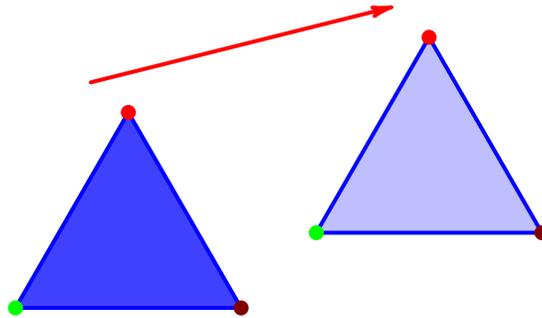
En quinto grado, esta actividad sirve para repasar simetría e introducir traslaciones (parte c del problema).

Conocimientos	Habilidades
<b>Transformaciones</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslaciones</li> </ul>	1. Reconocer figuras que se obtienen mediante traslación de otras.

Las nociones previas están referidas a puntos, segmentos y longitud así como las habilidades generales estipuladas para el I ciclo.

La clausura de la actividad permitirá introducir la noción de traslación. Tome, por ejemplo, un triángulo equilátero (el triángulo azul en la siguiente figura), imagine que los

tres vértices del triángulo, y con ellos los lados, se mueven una misma distancia siguiendo una misma dirección. El vértice rojo se mueve al rojo, el verde al verde y el anaranjado al anaranjado, el nuevo triángulo (color celeste) es una traslación del original. La flecha roja que aparece en la figura determina la distancia y la dirección según la cual se mueven todos los puntos; se llama vector de desplazamiento de la traslación. El uso de software dinámico, puede facilitar la comprensión de esta transformación en la que todos los puntos se trasladan cierta distancia y dirección.



La traslación puede ser fácil de comprender de manera intuitiva; sin embargo puede ser difícil describirla, puesto que está asociada con el concepto de vector. La mejor manera en este caso es ver un vector como un desplazamiento (con una medida, distancia, y una dirección).

## Indicaciones metodológicas

1. Realizar la lectura de manera atenta.
2. Comentar brevemente la lectura en cuanto a sus aspectos matemáticos y extra matemáticos y las relaciones que ahí se encuentran entre arte, historia y matemáticas.
3. Se indaga sobre los conocimientos previos necesarios para abordar el problema.
4. Se pide que se recorte la figura y se experimente doblando el papel para que vean de qué forma se pueden hacer coincidir diferentes elementos de las figuras, por ejemplo, los ojos de las ranas. Esto prepara el camino para indicar que los dobleces corresponden a ejes de simetría, y que los elementos que coinciden en el doblado son homólogos.
5. La figura puede reproducirse en un material transparente, como el acetato, para visualizar mejor las coincidencias. Si se hace en cartulina un alfiler puede ser de utilidad para encontrar puntos homólogos. También se puede utilizar gotas de tinta para luego ver que mancha al realizar el doblado.
6. En cuanto a las traslaciones se les puede pedir que tracen segmentos sobre los que se mueve la rana morada para obtener otras ranas. Tales segmentos pueden equivaler a otros sobre los que se traslada la rana. Si se recrea en lo solicitado en la parte (c) del problema puede resultar muy valioso para el estudiantado.

## Consideraciones finales

Esta actividad propone una situación histórica relacionada con las transformaciones en el plano, que además relaciona las matemáticas con el arte. En ese sentido puede ser muy motivadora. Puede utilizarse como base para plantear el reconocimiento de figuras con simetría axial, provenientes del arte, por ejemplo del arte islámico o de obras de Escher.

Los procesos matemáticos pueden mobilizarse mediante el desarrollo de la actividad, por ejemplo *Razonar y argumentar*, a la hora de que el estudiante explique de qué manera llega a sus conclusiones en la resolución del problema.

## Recursos adicionales

*Sobre Escher y su trabajo artístico:*

Una pequeña biografía en

<http://www.microsiervos.com/archivo/arte-y-diseno/biografia-mc-escher.html>

La web oficial de M. C. Escher

<http://www.mcescher.com/>

Un estudio muy completo sobre el aspecto matemático del trabajo de Escher en

<http://www.ams.org/notices/201006/rtx100600706p.pdf>

*Sobre el arte islámico y Escher:*

El video La geometría se hace arte es muy interesante, describe cómo se elaboraron los mosaicos de la Alhambra que tanto interesaron a Escher, cuyo trabajo es comentado en el video. También hace la relación con la estructura molecular de los cristales. Se puede ver en <http://www.youtube.com/watch?v=fiDfFR108U>

*Sobre transformaciones geométricas:*

Un tratamiento bastante amplio sobre transformaciones en

[http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/mosaicos/Capitulo1\\_Desarrollo%20Teorico\\_GC.pdf](http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/mosaicos/Capitulo1_Desarrollo%20Teorico_GC.pdf)

## Bibliografía

Ernst, B. (1994). *El espejo mágico de M. C. Escher*. Singapur: Evergreen.

## Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Primaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

### Autor

Hugo Barrantes

### Editor

Hugo Barrantes

### Editor gráfico

Hugo Barrantes y Miguel González

### Revisores

Ángel Ruiz

Edison De Faria

Jonathan Espinoza

Javier Barquero

Christiane Valdy

### Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

### Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Escher y la simetría*. San José, Costa Rica: autor.



*Escher y la simetría* por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)