Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

René Descartes y la Geometría Analítica

Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria:
Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.
2013

Tabla de contenidos

René Descartes y la Geometría Analítica

Se considera que la geometría analítica es la asociación de tres factores: la expresión de una realidad geométrica, el uso de coordenadas y el principio de representación gráfica. Algunos de estos elementos pueden encontrarse en el trabajo de matemáticos previos a Descartes. Por ejemplo, las observaciones astronómicas de la antigüedad condujeron al uso de coordenadas en el espacio; los griegos Arquímedes y Apolonio realizaron trabajos con dos variables que utilizaron para estudiar las cónicas; en el siglo XVI, Oresme realizó representaciones gráficas de ciertos fenómenos. (Simard, 2008)

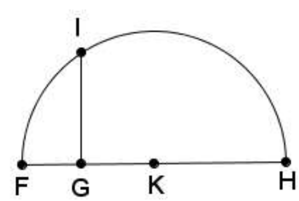
René Descartes (1596 – 1650)

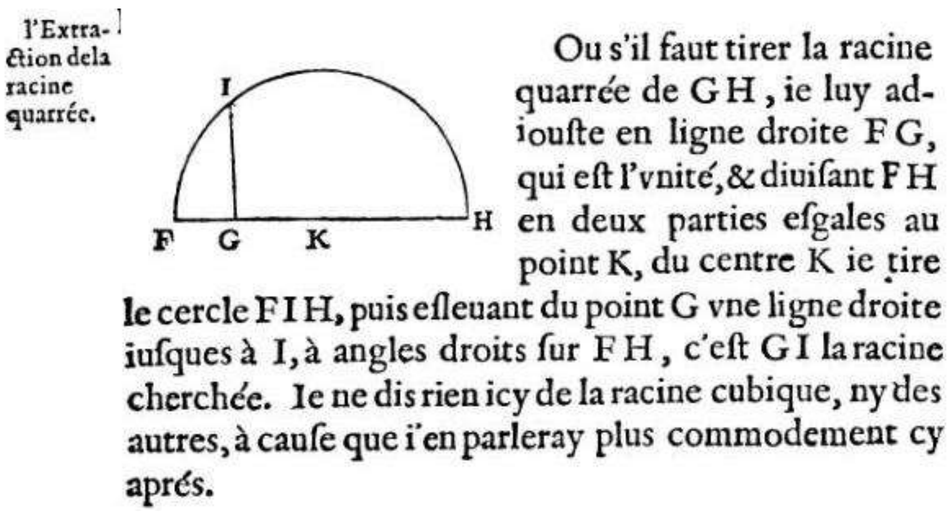
Sin embargo es en los trabajos de los franceses René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) en los que se aprecian los factores que dan origen a la geometría analítica. Por ello son considerados los padres de ella.

El trabajo de Descartes, en el que se reconocen los orígenes de la geometría analítica, se publicó en 1637 como un apéndice, titulado *La géométrie*, en su obra *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et cherecher la vérité dans les sciences* (Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias), mejor conocido como *Discurso del método*.

Al comienzo del libro I de *La géométrie,* Descartes establece que las operaciones aritméticas (se refiere a operaciones con números positivos) adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces se pueden realizar de manera geométrica utilizando segmentos de recta, cuyas longitudes representan los números a operar, y un segmento de longitud 1, colocados de manera apropiada. Para la extracción de la raíz cuadrada, Descartes establece lo siguiente:

Si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo $\overline{FH}$ en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre $\overline{FH}$, hasta I, es GI la raíz buscada. (Traducido de *La géométrie* de Descartes, Proyecto Gutemberg, 2008 sobre la edición de A. Hermann de 1886).




l'Extra-
ction de la
racine
quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Facsímil de parte de la página 298 de la edición de 1637 de *La géométrie* de Descartes, en la que aparece la manera geométrica de extraer la raíz cuadrada de un número. Tomado de http://debart.pagesperso-orange.fr/geometrie/geom_descartes.html

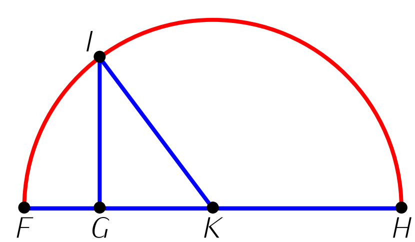
Problema

Pruebe la afirmación que hace Descartes, es decir, con las condiciones dadas verificar que $\mathrm{GI} = \sqrt{\mathrm{GH}}$.

Análisis del problema

El problema propuesto tiene una gran riqueza puesto que su solución puede ser abordada desde al menos tres perspectivas, según los intereses didácticos y los conocimientos previos que se posean.

I. *Mediante el uso del Teorema de Pitágoras*: Se trata de establecer la igualdad $GI = \sqrt{GH}$, es decir $GI^2 = GH$, para el caso $GH > 1$.



Para ello se considera el triángulo rectángulo GIK , según el teorema de Pitágoras $GI^2 = KI^2 - KG^2$. Dada la notación de la figura se tiene:

1. $\overline{KF}$, $\overline{KH}$ y $\overline{KI}$ son radios, entonces

$$KF = KH = KI = r.$$

2. $KF = KG + 1$, luego $KG = 1 - KF$, luego $KG = |r - 1|$.

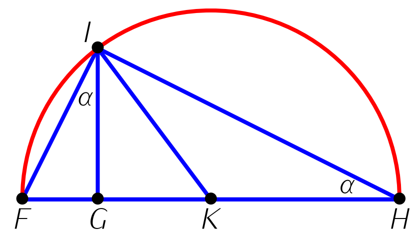
3. De (1) y (2): $\mathrm{HG} = 2\mathrm{r} - 1$.

4. Como $GI^2 = KI^2 - KG^2$, entonces $GI^2 = (r)^2 - (r-1)^2 = 2r - 1 = HG$.

También se puede primero probar el derivado del teorema de Pitágoras, como en el siguiente apartado (II) y luego utilizarlo para resolver lo propuesto:

$$GI^2 = FG \cdot GH \Rightarrow GI^2 = 1 \cdot GH = GH.$$

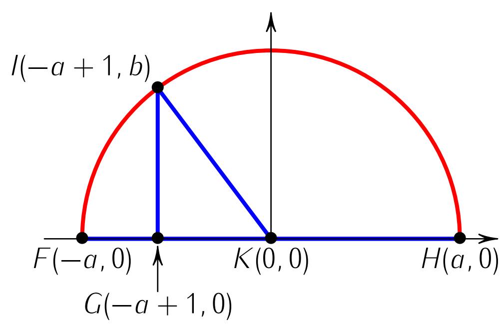
II. *Mediante semejanza de triángulos*: El ángulo FIH es recto (para probar esto se utiliza que los triángulos IFK y IKH son isósceles). Si $\measuredangle GHI = \propto$, entonces $\measuredangle HIG = 90 - \propto$, por lo que $\measuredangle GIF = \propto$. Esto implica que $\Delta GIF \sim \Delta GHI$ y, por lo tanto, $\frac{GI}{FG} = \frac{GH}{GI}$ y como $FG = 1$, se obtiene $GI^2 = GH$.



De hecho, dada la forma en que está expuesto el material en el trabajo de Descartes, la semejanza de triángulos es lo que tenía en mente al hacer la afirmación.

Observe que de $\frac{GI}{FG} = \frac{GH}{GI}$ se obtiene que $GI^2 = FG \cdot GH$, es decir, se ha probado el derivado del teorema de Pitágoras que establece que la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa.

III. *Mediante el uso de coordenadas (y el teorema de Pitágoras)*: Este es el caso $GH > 1$. Se establece un sistema de coordenadas rectangulares con origen en el punto K, es decir K es el punto $(0,0)$. En ese caso H es un punto $(a, 0)$ y F sería, por lo tanto $(-a, 0)$. Como $GF = 1$, entonces G es el punto $(-a + 1,0)$. En ese caso, I es el punto $(-a + 1, b)$ para algún $b > 0$. De esto se tiene que $GI = b$ y que $GH = 2a - 1$. Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔKGI y como $GK = |-a + 1|$, $KI = a$ (es un radio de la semicircunferencia) y $GI = b$ se tiene $b^2 = a^2 - (-a + 1)^2 = 2a - 1$. Es decir $GI^2 = GH$.



Observe que esta solución es, en esencia, la misma que en I, solo se ha empleado otra técnica para determinar las longitudes de los lados del triángulo GIK. De hecho, una vez establecidos los diferentes puntos y distancias de modo analítico, se puede también aplicar semejanza como en II.

Esta es una actividad que se puede utilizar en diferentes oportunidades según los conocimientos previos y las habilidades que quieran desarrollarse. Puede utilizarse en VIII, IX o X año, según se comenta a continuación.

Para VIII año

En VIII año puede servir para introducir algunas habilidades relacionadas con semejanza de triángulos:

Conocimientos	Habilidades
Triángulos • Semejanza • Congruencias • Teorema de Thales	1. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos. 2. Aplicar los criterios de semejanza: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos. 3. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.

En este caso debe previamente haberse visto el concepto de semejanza a través de las homotecias, tal como lo establece el programa. Repasar los conocimientos previos relacionados con la caracterización de los triángulos isósceles. La idea de esta actividad es ir hacia las habilidades que se acaban de mencionar. Otros conocimientos previos necesarios: la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180^{o} y deducir que un triángulo como el FHI que aparece en la actividad es recto en I. En resumen, los conocimientos y habilidades previas serán:

Conocimientos	Habilidades
De VII **Triángulos** • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos	1. Aplicar la desigualdad triangular. 2. Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. 3. Determinar medidas de ángulos internos y externos de un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos.
De VIII **Triángulos** • Semejanza • Congruencias	4. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1. 5. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1. 6. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.

Es conveniente proponer la situación antes de introducir los criterios de semejanza para, con el desarrollo de la actividad y los intentos por resolver el problema, llegar a ellos. Las preguntas generadoras que realice el docente deben estar dirigidas a la consecución de estos conocimientos.

El cierre o clausura de la clase consistirá en el establecimiento y demostración de los criterios L-L-L, L-A-L y A-A-A, para la verificación de semejanza de triángulos.

Para IX año

En este nivel puede servir para introducir la habilidad relacionada con el teorema de Pitágoras:

Conocimientos	Habilidades
Triángulos • Teorema de Pitágoras	1. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos.

Previamente deberán repasarse conceptos básicos relacionados con la circunferencia: diámetro, radio y la relación entre ellos.

Es conveniente proponer la situación antes de introducir el teorema de Pitágoras con el objeto de llegar a este conocimiento. Existe la posibilidad de que algunos estudiantes resuelvan el problema utilizando semejanza dado que es un conocimiento adquirido en el nivel anterior. En este caso la discusión se verá enriquecida porque habrá al menos dos formas de resolver el problema mediante conocimientos diferentes, se podrán comparar y comentar las ventajas de una u otra.

La clausura de la clase consistirá en el enunciado y comprobación del teorema de Pitágoras y su recíproco.

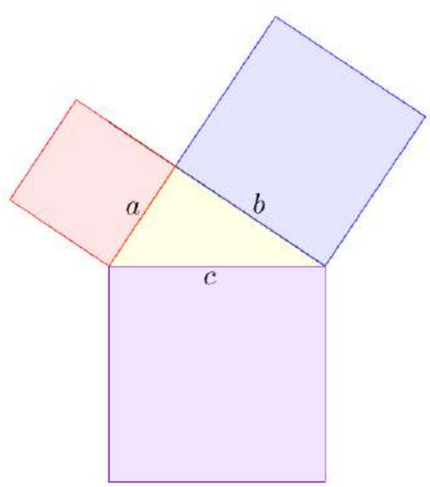
Teorema de Pitágoras: Dado un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, entonces

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

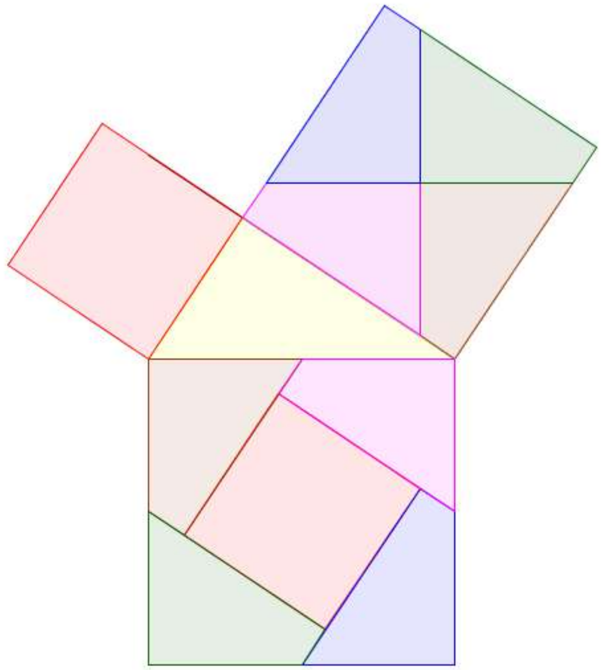
Recíproco: Dado un triángulo ABC en el que se cumple $BC^2 = AB^2 + AC^2$, entonces ΔABC es rectángulo con ángulo recto en A.

Existe una gran cantidad de pruebas del teorema de Pitágoras. Muchas de ellas son muy visuales, por ejemplo la realizada por Henry Perigal (1801-1898), utilizando una técnica denominada disección. Ofreció dos maneras de hacerlo: por traslación de las partes componentes y mediante dos cuadrados que se convierten en uno. Se ilustra a continuación la primera de ellas.

Se traza un triángulo rectángulo y se construyen los cuadrados que tienen por lado los lados del triángulo.



Por el centro del cuadrado de lado el cateto mayor (el azul en la figura anterior), se traza una recta paralela y otra perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Por los puntos medios de los lados del cuadrado de lado la hipotenusa se trazan rectas paralelas a los catetos del triángulo. Se obtiene lo siguiente:



No entramos en los detalles de la prueba, pero la idea es que los cuadrados rojos son congruentes entre sí, los mismo que los cuadriláteros de otros colores son congruentes entre sí. De hecho, el cuadrilátero verde que es parte del cuadrado sobre el cateto mayor es una traslación del cuadrilátero verde que es parte del cuadrado sobre la hipotenusa; del mismo modo sucede con los otros tres cuadriláteros, el de un color determinado es traslación del otro del mismo color. De este modo, la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa; esto es $a^2 + b^2 = c^2$. Se verifica así el teorema de Pitágoras.

Para X año

En este nivel la actividad permite introducir habilidades relacionadas con la circunferencia desde el punto de vista analítico, tales como:

Conocimientos	**Habilidades**
Geometría Analítica • Circunferencia - Centro - Radio - Recta secante - Recta tangente	1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio. 2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio. 3. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.

Para este nivel se requiere como conocimientos previos el uso de coordenadas para representar puntos, el cálculo de distancias usando coordenadas y el teorema de Pitágoras o los criterios de semejanza de triángulos. Esto es:

Conocimientos	**Habilidades**
De VII **Geometría analítica** • Ejes cartesianos • Representación de puntos • Representación de figuras	1. Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.
De VIII **Triángulos** • Semejanza	2. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos. 3. Aplicar los criterios de semejanza: lado-lado-lado, lado ángulo lado y ángulo-ángulo-ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos.
De IX **Triángulos** • Teorema de Pitágoras	4. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos. 5. Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras.

Al proponer el problema en este nivel se debe tener presente que la idea es utilizar un método de solución que consiste en el uso de la geometría analítica, por este motivo, al plantear el problema se les puede dar como indicación general que utilicen coordenadas. A partir del aparato analítico utilizado en la solución se puede introducir la ecuación algebraica de una circunferencia.

Para esto se pueden proponer algunas preguntas generadoras tales como:
a. Si una circunferencia tiene centro en (0,0) y radio 2, ¿cuál es la distancia de cualquier punto (x,y) en la circunferencia al centro de la misma?
b. En general, ¿cuál es la distancia de (x,y) a (0,0)?
c. Según, (a) y (b), ¿cómo se pueden describir los puntos (x,y) que están en dicha circunferencia?
d. ¿Qué sucede si el radio de la circunferencia es r?
e. ¿Qué sucede si el centro es un punto cualquiera (a, b)?

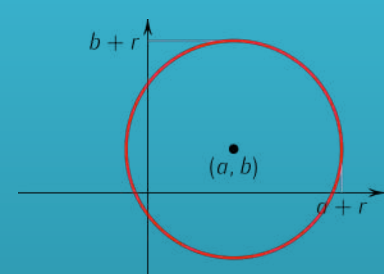
Durante la discusión se puede comparar el método sintético con el analítico y ver las ventajas de uno u otro.

La clausura de la clase consistirá en la representación gráfica y la algebraica, y la relación entre ellas, de una circunferencia.

Si una circunferencia en un sistema de coordenadas cartesianas tiene radio r y centro en un punto (a, b), entonces se representa algebraicamente mediante la ecuación

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Su representación gráfica es:



Indicaciones metodológicas

1. Leer atentamente la situación planteada.
2. Comentar brevemente la lectura en cuanto a sus aspectos extra matemáticos y las relaciones que ahí se encuentran entre historia y matemáticas. Es importante destacar el hecho de que con Descartes y Fermat inicia la geometría analítica como tal, aunque en sus trabajos no se encuentran propiamente sistema de coordenadas en la forma en que se utilizan hoy en día.
3. Se indaga sobre los conocimientos previos necesarios para abordar el problema; si es necesario se hace un repaso, mediante una ambientación del problema en cada una de las soluciones propuestas.
4. Debe asegurarse de que el contenido matemático de la lectura queda claro, tanto como lo que el problema pretende establecer.
5. Se les propone que traten de resolver el problema planteado y se les guía mediante preguntas generadoras.
6. El trabajo estudiantil con el problema, la discusión posterior de las soluciones o intentos de solución y la clausura dependerán del nivel en el que se proponga la situación.

Consideraciones finales

En esta actividad se hace una introducción histórica relacionada con el desarrollo de la geometría analítica con el propósito de contextualización. Luego se expone un breve texto clásico con contenido matemático con el propósito de plantear un problema que puede utilizarse para introducir y generar algún tipo de conocimiento. Este es uno de los usos de la historia de la matemática en la enseñanza de la misma.

El texto presentado en este caso tiene, además, la ventaja de que puede ser utilizado en diferentes niveles y para distintos enfoques. Incluso podría ser utilizado en VII año para introducir habilidades como:

- Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.
- Determinar algebraicamente el punto medio de un segmento.
- Ubicar puntos en el interior y en el exterior de figuras cerradas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.

Desde luego, en este caso habría que plantear un problema algo distinto del propuesto en esta actividad.

Los procesos matemáticos pueden movilizarse mediante la lectura y la resolución del problema que la misma plantea. Por ejemplo, el de representar gráfica y algebraicamente una circunferencia.

Recursos adicionales

Sobre Descartes:

http://www.buscabiografias.com/bios/biografia/verDetalle/597/Rene%20Descartes

Historia de la geometría analítica:

http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf

Sobre geometría analítica:

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesbajoguadalquivir/mat/cuartob/Geo_analitica/

Bibliografía

Descartes, R. (2008). *La géométrie.* The Project Gutenberg EBook, sobre la edición de 1886 de A. Hermann. Disponible en http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf

MEP (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas.* San José: Autor

Simard, J. F. (2008). L'histoire de la géométrie analytique. Disponible en http://mathshistoire.blogspot.com/2008/03/lhistoire-de-la-gomtrie-analytique.html

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Hugo Barrantes

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz,
Edison De Faria
Jonathan Espinoza
Javier Barquero
Erasmo López

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Imagen de señal de "check" en color verde cortesía de

digilart en FreeDigitalPhotos.net

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *René Descartes y la Geometría Analítica.* San José, Costa Rica: autor.

René Descartes y la Geometría Analítica por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported