Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

CRUSA Fundación para la cooperación

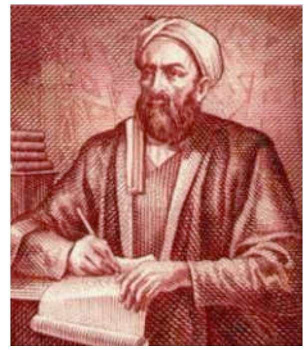
Al-Bĩrũni y la medida del diámetro de la Tierra

Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.

2013

Tabla de contenidos

Al-Bĩrũni y la medida del diámetro de la Tierra

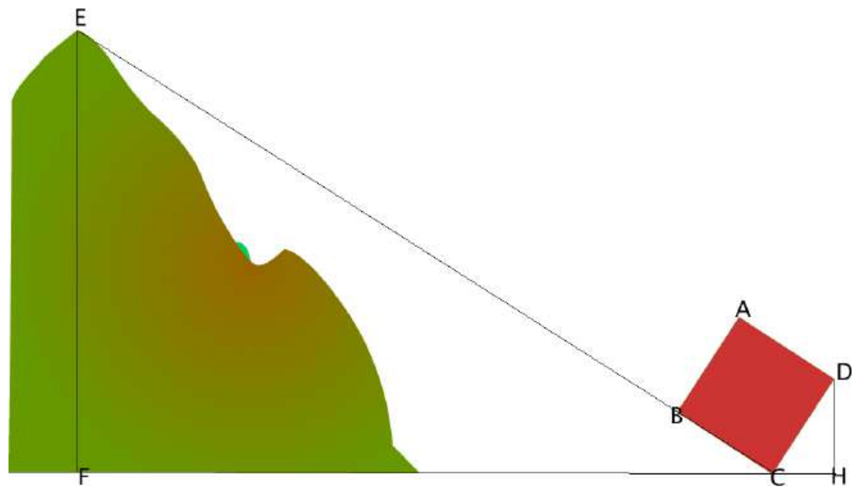


Al-Bĩrũni (973 – 1048)

Abũ Rayhãn Muhammad ibn Ahmed al-Bĩrũni nació en Jorasam, actual Jiva en Uzbekistán, en el año 973 y murió en 1048, posiblemente en Ghazni en lo que actualmente es Afganistán. Fue uno de los grandes científicos y eruditos de la historia; filósofo, matemático, astrónomo, geógrafo, antropólogo y enciclopedista. Viajó extensamente por Asia Central y escribió en árabe y persa. Hizo muchas contribuciones originales en astronomía y matemáticas, es famoso por medir el tamaño de la Tierra con mayor precisión que cualquiera otra realizada con anterioridad. Obtuvo un valor cercano a los valores modernos, estimó el radio terrestre en 6 339,9 km, tan solo 16,8 km menos que el valor moderno de 6 356.7 km.

La siguiente lectura es tomada del libro *The House of wisdom, how arabic science saved ancient knowledge and gave us the renaissance* de Jim al-Khalili (2011, pp. 183 – 188).

> El logro mejor conocido, y quizá el más importante, de al-Bĩrũni fue su famosa determinación de la circunferencia de la Tierra a partir de la ingeniosa medida de la altura de una montaña. Su experimento se realizó entre el 1020 y el 1025 durante uno de sus viajes con el sultán Mahmud en el noroeste de la India.
>
> Durante su estancia en una fortaleza en un lugar llamado Nandna, en el actual Pakistán y cerca de 60 millas al sur de Islamabad, observó una alta montaña, al oeste. Era exactamente lo que había estado buscando, ya que esta montaña da a la llanura plana del Punjab que se extiende hasta donde alcanza la vista, lo que le permite fijar el ángulo de la línea de visión hacia el horizonte con mucha precisión cuando se mira desde la parte superior de la montaña.
>
> Describiremos su técnica en detalle porque no requiere más que geometría elemental y, sin embargo, es sorprendentemente ingeniosa. En su *Determinación de las coordenadas de las ciudades*, al- Bĩrũni inicia la descripción de su método haciendo referencia a las medidas famosas realizadas por primera vez por Eratóstenes y más tarde repetida por los astrónomos de al-Mamun. Luego, con su agudo ingenio legendario, escribe estas líneas inmortales: 'He aquí otro método para la determinación de la circunferencia de la Tierra. No requiere caminar en el desierto.' Su primer paso fue determinar con precisión la altura de la montaña mientras estaba de pie en la llanura cerca de su base. Tiene un tablero cuadrado de lado un codo (aproximadamente 20 pulgadas) pautado con divisiones iguales a lo largo de sus bordes.
>
> Denote el tablero cuadrado con ABCD y colóquelo verticalmente sobre el vértice C según el diagrama. Desde D, cuelgue una regla que pueda girar libremente. Primero asegúrese que el lado BC está alineado con el pico de la montaña (punto E) y entonces fije el cuadrado en esa posición. (…)



Elaboración propia

Problema

El texto continúa con la explicación de cómo se mide la altura de la montaña, pero vamos a dejar de lado la lectura, momentáneamente y cada uno va a determinar la altura de la montaña y justificar cómo lo realizó.

Análisis del problema

La forma en que se calcula la altura de la montaña con base en lo propuesto en la lectura es la siguiente. Se traza el segmento de recta DE, se denota, digamos con G, el punto intersección de los segmentos DE y AB.

(a) Se tiene que EFC y CHD son semejantes; en efecto:

1. Ambos son triángulos rectángulos.
2. Ángulo FCE es congruente a Angulo HDC pues

$$\sphericalangle FCE + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DCH = 180°$$
$$\sphericalangle FCE + 90° + \sphericalangle DCH = 180°$$
$$\sphericalangle FCE + 90° + (90° - \sphericalangle HDC) = 180°$$

de donde $\sphericalangle \mathrm{FCE} = \sphericalangle \mathrm{HDC}$. Los triángulos son semejantes.

(b) Se tiene que $\Delta \mathrm{ADG}$ y $\Delta \mathrm{CED}$ son semejantes; en efecto:

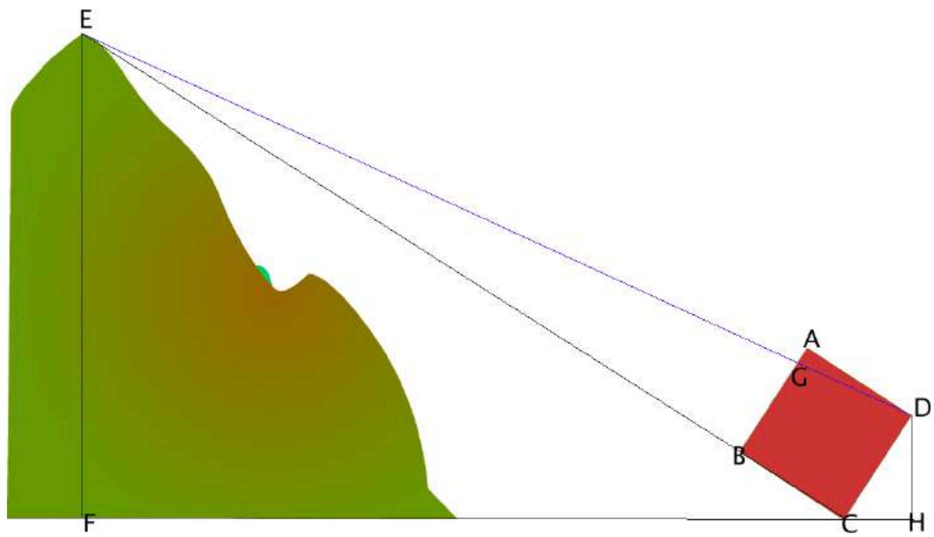
1. Ambos son triángulos rectángulos.
2. Como $\triangle \mathrm{FCE} \sim \triangle \mathrm{HDC}$, entonces $\sphericalangle \mathrm{FEC} = \sphericalangle \mathrm{HCD}$. Como $\overline{\mathrm{FE}} \parallel \overline{\mathrm{HD}}$, entonces

$$\sphericalangle FED = \sphericalangle \mathrm{EDT} \quad (\mathrm{T\ es\ un\ punto\ tal\ que\ H - D - T})$$
$$\sphericalangle FEC + \sphericalangle CED = \sphericalangle \mathrm{GDA} + \sphericalangle \mathrm{ADT}$$
$$\sphericalangle FEC + \sphericalangle CED = GDA + \sphericalangle DCH$$

Como $\sphericalangle\mathrm{FEC} = \sphericalangle\mathrm{HCD}$, entonces $\sphericalangle\mathrm{CED} = \sphericalangle\mathrm{GDA}$. Los triángulos son semejantes.

De (a) se tiene que $\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EC}}$. De (b) se tiene que $\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CE}}$. Como AG, AD, CD se pueden medir directamente sobre el tablero, entonces se obtiene CE. Como CE se calculó antes y CH y CD se pueden medir directamente, se obtiene, de lo anterior, EF que es la altura de la montaña.

Una pregunta generadora interesante, es la de consultar al estudiantado, por qué no se da la respuesta en forma directa, utilizando el hecho que los triángulos DCH y CEF son semejantes por lo tanto $\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HD}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}}$.



Elaboración propia

La lectura anterior puede servir para introducir algunas habilidades relacionadas con semejanza de triángulos. Específicamente, para VIII año:

Conocimientos	**Habilidades**
Triángulos • Semejanza • Congruencias • Teorema de Thales	1. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos. 2. Aplicar los criterios de semejanza: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-ángulo-ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos. 3. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.

Previamente se habrá introducido el concepto de semejanza a través de las homotecias, tal como lo establece el programa. La idea de esta actividad es ir hacia las habilidades que se acaban de mencionar. Otros conocimientos previos necesarios: los ángulos de un cuadrado son rectos, la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180^{o} y ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes, ángulos complementarios, ángulos consecutivos.

Conocimientos	**Habilidades**
De VII **Triángulos** • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos • Cuadriláteros • Suma de medidas de ángulos internos	1. Aplicar la desigualdad triangular. 2. Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. 3. Determinar medidas de ángulos internos y externos de un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos. 4. Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo.
De VIII **Triángulos** • Semejanza • Congruencias	1. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1. 2. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1. 3. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.

El cierre o clausura de la clase consistirá en el establecimiento y demostración de los criterios L-L-L, L-A-L y A-A-A, para la verificación de semejanza de triángulos.

Criterios de semejanza de triángulos

- Lado – Lado – Lado (L – L – L): Dados dos triángulos ABC y DEF, si $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$, entonces se tiene que $\Delta ABC\sim\Delta DEF$.
- Lado – Ángulo – Lado (L – A – L): Dados dos triángulos ABC y DEF, si $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ y $m\measuredangle B=m\measuredangle E$, entonces se tiene que $\Delta ABC\sim\Delta DEF$.
- Ángulo – Ángulo – Ángulo (A – A – A): Dados dos triángulos ABC y DEF, si $m\measuredangle A=m\measuredangle D$, $m\measuredangle B=m\measuredangle E$ y $m\measuredangle C=m\measuredangle F$, entonces se tiene que $\Delta ABC\sim\Delta DEF$.

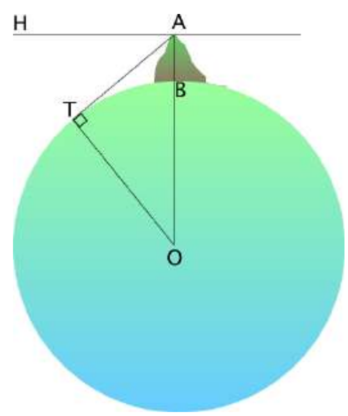
Indicaciones metodológicas

1. Se realiza la lectura de manera atenta.
2. Se comenta brevemente la lectura en cuanto a sus aspectos extra matemáticos y las relaciones que ahí se encuentran entre historia y matemáticas. Por ejemplo, es importante destacar que la matemática medieval se desarrolló particularmente fuera de occidente.
3. Se indaga sobre los conocimientos previos necesarios para abordar el problema; si es necesario se hace un repaso.
4. Se les propone que traten de resolver el problema planteado.
5. Es conveniente proponer la situación antes de introducir los criterios de semejanza para, con el desarrollo de la actividad y los intentos por resolver el problema, llegar a ellos.

Consideraciones finales

Esta actividad pone de manifiesto cómo un hecho histórico puede utilizarse para generar un problema importante que puede ser resuelto con métodos elementales y que por lo tanto sirve para introducir conceptos y resultados matemáticos.

Como se dijo al principio, Al-Bĩrũni utilizó la altura de la montaña para medir el radio de la Tierra, de ahí la frase 'He aquí otro método para la determinación de la circunferencia de la Tierra. No requiere caminar en el desierto'. La siguiente figura es un esquema del método que el utilizó.



Elaboración propia

Se traza un triángulo uno de cuyos vértices corresponde a la cúspide de la montaña, otro es el centro de la Tierra y el tercero es el punto en el que una recta que pasa por la cúspide es tangente a la Tierra; la recta HA es la línea perpendicular a la recta que pasa por el centro de la Tierra y la cúspide de la montaña.

Este es un complemento a la lectura que puede utilizarse para introducir otras habilidades. Es decir, se puede completar la misma con la propuesta del problema de la medición del radio de la Tierra. Se puede, para ello dar plantear algunas preguntas generadoras tales como ¿qué tipo de ángulos están involucrados en el esquema?, ¿qué relación tiene el ángulo recto en T y la recta AT, en el contexto del problema?, ¿cuál es el objetivo de la recta HA?, ¿para qué le sirve haber determinado la altura de la montaña?, ¿cuál era la importancia de la planicie en los alrededores de la montaña?

Algunos procesos matemáticos pueden movilizarse mediante la lectura y la resolución del problema que la misma plantea. Por ejemplo, hay conexiones con otras disciplinas en lo que se refiere a la medición de la montaña y la medida de la Tierra.

Recursos adicionales

Sobre Al-Bĩrũni:

http://www.libreria-mundoarabe.com/Boletines/n%BA49%20May.07/AlBiruni.html

http://unesdoc.unesco.org/images/0007/000748/074875so.pdf

Sobre homotecia y semejanza:

Video: http://www.youtube.com/watch?v=p8FZBjhyzEw

Bibliografía

Al-Khalili, J. (2011). *The House of wisdom, how arabic science saved ancient knowledge and gave us the renaissance*. New York: The Penguin Press.

MEP (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas.* San José: Autor

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Hugo Barrantes

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz
Edison De Faria
Jonathan Espinoza
Javier Barquero
Erasmo López

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Imagen de señal de "check" en color verde cortesía de
digilart en FreeDigitalPhotos.net

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Al-Bĩrũni y la medida del diámetro de la Tierra.* San José, Costa Rica: autor.