Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Importancia del concepto de equiprobabilidad

Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.

2013

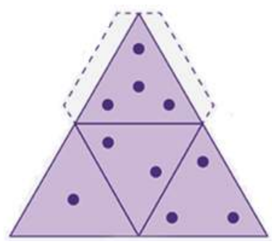
Tabla de contenido

Importancia del concepto de equiprobabilidad

Problemas

Problema 1

Utilice cartulina o cualquier otro material que le permita construir un dado tal como se muestra en la siguiente figura.



Observe que a diferencia de un dado común que tiene seis caras, éste posee cuatro caras.

Dado tradicional
(forma de cubo)

Dado construido
(forma de tetraedro)

Suponga que al lanzar este dado interesa identificar la cara que cae hacia abajo, a diferencia del dado cúbico que regularmente interesa la cara de arriba.

En los juegos con dados, independientemente del número de caras que tengan, se supone que todas las caras son igualmente probables o equiprobables, lo que quiere decir que ninguna de las caras tiene ventaja sobre las otras en un lanzamiento.

Debido a que todavía no se ha analizado el concepto de probabilidad, la idea de eventos igualmente probables o equiprobables es visualizada por los estudiantes con base en ideas intuitivas o en el número de resultados a favor de cada

Cuando se construye un dado, no siempre las caras son equiprobables, pues por defectos de construcción ocurre que unas caras tienen más probabilidad que otras, lo cual se comprueba al observar los resultados obtenidos al lanzar varias veces el dado.

Realice las pruebas necesarias para determinar si existe equiprobabilidad en las caras del dado que usted construyó, en caso negativo responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué cara (o caras) tiene una mayor probabilidad de ocurrencia?
2. ¿A qué se le puede atribuir que no exista equiprobabilidad?

Análisis del problema 1

Una vez construido el dado, para verificar si existe equiprobabilidad se debería lanzar muchas veces el dado, de modo que se puedan comparar las frecuencias de casos favorables a cada posible resultado.

En un número grande de lanzamientos (unos 60 o más) se espera que exista cierta similitud en las frecuencias correspondientes a cada cara. Por ejemplo, al lanzar 60 veces el dado, y debido a que son cuatro caras, la frecuencia promedio para cada cara es de 15; pero, por influencia del azar es de esperar que existan diferencias en estas frecuencias. Sin embargo, en condiciones de equiprobabilidad de las caras, resulta poco probable que alguna de ellas tenga una frecuencia muy baja (7 o menos) o que tenga una frecuencia muy alta (25 o más), por lo que de presentarse resultados de este tipo, podría suponerse que no existe equiprobabilidad y que las caras de menor frecuencias son menos probables que las otras.

Para ello, los estudiantes deben identificar los resultados a favor de cada cara y vincular estas frecuencias con las caras que son más o menos probables de acuerdo con ese experimento práctico o empírico.

Si esto se presentara, significa que el dado es imperfecto.
Sin embargo, el docente debe indicar a los estudiantes que esta es una prueba práctica o empírica, los resultados no son contundentes para verificar que las caras son igualmente probables, pues si se repitiera la experiencia completa se pueden generar resultados completamente diferentes. Solamente una verificación repetida de este tipo de experiencias puede constatar la existencia o no de dicha equiprobabilidad.

Indicaciones metodológicas vinculadas con el problema 1

Para complementar el trabajo realizado, solicite a los estudiantes que realicen la lectura del siguiente fragmento, en el cual se observa la importancia del concepto de equiprobabilidad en el desarrollo histórico de la teoría de probabilidades. Esta lectura fue tomada del texto denominado "Historia de la Probabilidad" y recuperado de la página Web:

http://www.ahepe.es/Documentos/IJornadas-Madrid2001/historia_de_la_probabilidad_y_la_estadistica_I.pdf

> A pesar de la gran afición al juego de los dados entre egipcios, griegos y romanos, estos no advirtieron que en un gran número de jugadas se tendía a obtener el mismo número de veces una cara que las restantes del dado, si éste estaba bien construido. El no advertir la equiprobabilidad de los resultados elementales en dados equilibrados, fue una de las causas de que el desarrollo del cálculo de probabilidades se retrasara durante siglos. Las primeras razones que encontramos por las que no se plantean la equiprobabilidad son: la imperfección del dado y las creencias religiosas; ya que las culturas antiguas, basadas en el determinismo, consideran que no es posible encontrar una causa que permita predecir el resultado de tirar un dado, sino que este resultado se debe a la voluntad divina.

Pida a los estudiantes que comenten la lectura de acuerdo con los resultados obtenidos en el problema que resolvieron previamente.

En este análisis, el docente debe hacer notar en los estudiantes, que aunque existe evidencia de que los juegos con dados existen desde hace miles de años, los pueblos antiguos no asociaban los resultados con el principio de probabilidad de ocurrencia. Esto, en parte, se debía a que no habían podido identificar que al repetir muchas veces un lanzamiento de un dado e identificar las frecuencias correspondientes a cada una de las caras, era posible identificar si existía o no un equilibrio en cuanto a la ocurrencia de esas caras. Cuando se presenta ese equilibrio se puede decir que las caras son equiprobables (todas ellas son igualmente probables).

Debido a que no fueron capaces de identificar este principio, entonces suponían que el resultado generado al lanzar un dado obedecía a una voluntad divina y entonces, el ganar o no con un juego de dados, dependía de dicha voluntad.

Fue muchos años después, hasta que algunos matemáticos lograron identificar este principio de equiprobabilidad en diferentes tipos de juegos, lo que permitió que la teoría de probabilidades comenzara a desarrollarse.

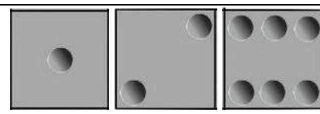
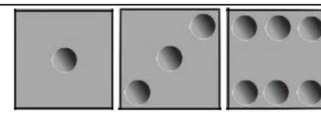
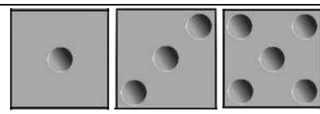
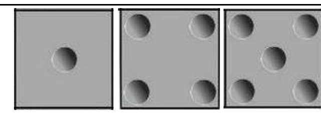
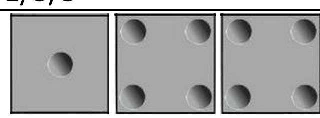
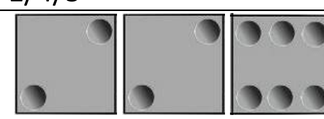
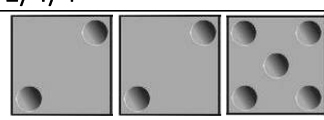
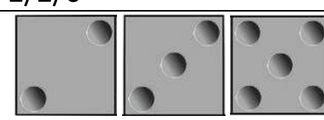
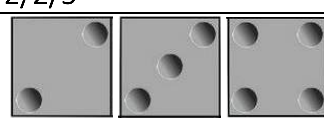
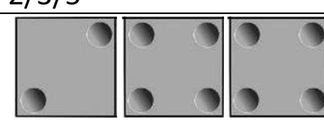
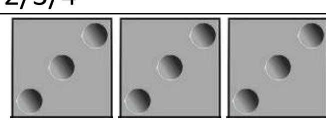
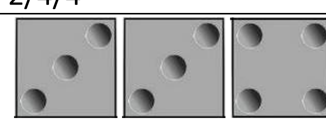
Producto de lo anterior, es fundamental que en el desarrollo del problema, los estudiantes puedan lanzar conjeturas si el dado que construyeron tiene caras equiprobables o no. Posiblemente, entre los dados que construyeron, algunos dados mostraron que sus caras no eran equiprobables por defectos de construcción, mientras que en otros casos podría aceptarse dicho principio. Al repetir muchas veces (se recomendó al menos 60 veces) un lanzamiento y anotar qué cara salió favorecida, los estudiantes deben ser capaces de identificar que si las frecuencias de ocurrencia para cada cara son diferentes entre sí, entonces el principio de equiprobabilidad podría no presentarse para ese dado, lo que significaría que unas caras tienen más probabilidad que otras. Sin embargo, el docente debe hacer notar que esto ocurre solamente cuando las diferencias sean suficientemente grandes, pues es normal que existan diferencias en estas frecuencias, las cuales se deben al azar.

El problema del duque de Toscana

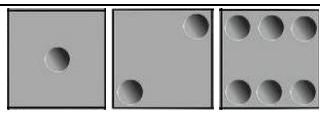
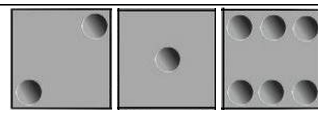
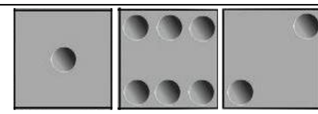
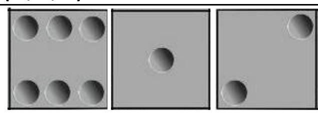
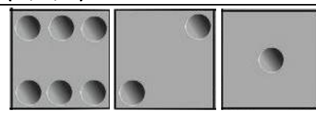
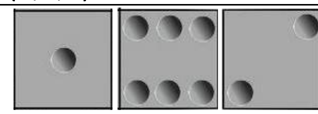
Para continuar con el análisis histórico de las probabilidades proceda a leer el siguiente fragmento histórico, el cual fue adaptado del texto original del libro: Perero, Mariano. Historias e historia de las matemáticas. Editorial Iberoamérica, México. 1994, pp. 88-94. Las adaptaciones hechas tienen fines eminentemente didácticos

El problema del duque de Toscana (1560)

El duque de Toscana fue un jugador empedernido, y había observado que en un juego en el que se lanzan tres dados y se suman los puntos, el 10 aparecía más veces que el 9. Sin embargo, según el duque, ambos números se pueden obtener de las seis maneras que se listan.

Número de posibilidades	Formas de obtener un nueve	Formas de obtener un diez
1	 1/2/6	 1/3/6
2	 1/3/5	 1/4/5
3	 1/4/4	 2/2/6
4	 2/2/5	 2/3/5
5	 2/3/4	 2/4/4
6	 3/3/3	 3/3/4

Un matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) fue consultado y estudió el problema, pero no encontró respuesta satisfactoria. Fue el famoso físico matemático italiano Galileo Galilei (1564-1642) quien encontró la solución 50 años más tarde; para ello contó todos los casos posibles igualmente probables y, por primera vez, presentó los datos en tablas de distribución, que evidencian que, por ejemplo, en realidad existen seis formas distintas igualmente probables de obtener un nueve con los resultados 1/2/6, los cuales se presentan a continuación:

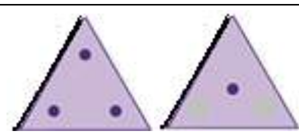
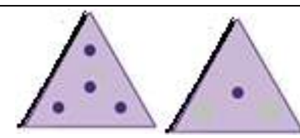
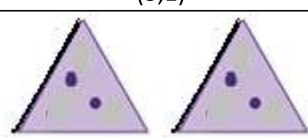
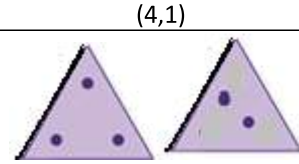
 (1,2,6)	 (2,1,6)	 (1,6,2)
 (6,1,2)	 (6,2,1)	 (1,6,2)

De igual forma se puede demostrar que para cada uno de los resultados analizados por el Duque de Toscana, en realidad existen varios resultados igualmente probables, con excepción del 3/3/3 que solamente hay una forma de obtenerlo. De este modo, Galileo demostró que existían 25 formas igualmente probables de obtener un nueve y 27 formas igualmente probables de obtener un diez, por esta razón, al lanzar tres dados: es más probable obtener un diez que obtener un nueve, tal como lo había observado en la práctica el Duque de Toscana.

Se invita al lector a identificar las 25 formas igualmente probables de obtener un nueve y las 27 formas igualmente probables de obtener un diez.

Problema 2

Con base en lo postulado en la lectura, suponga que se lanzan dos dados con forma de tetraedro, como el que se construyó en el primer problema. Se supone que las cuatro caras son equiprobables, al sumar los puntos de las caras que caen hacia abajo, se puede obtener un cuatro cuando se combina el tres con el uno o el dos con el dos. De la misma manera se puede obtener un cinco cuando se combina el cuatro con el uno o el tres con un dos, tal como se muestra en el siguiente diagrama:

	Obtener un cuatro	Obtener un cinco
1	 (3,1)	 (4,1)
2	 (2,2)	 (3,2)

Esto quiere decir que hay dos formas de combinar resultados en cada caso, entonces ¿son equiprobables los resultados de obtener un cuatro y obtener un cinco para este caso? Debe justificar la respuesta. ¿Cuál es la similitud entre este problema y el que le planteó el Duque de Toscana?

Análisis del problema 2

Para encontrar una solución al problema, según lo demostró Galilei, se requiere analizar cada una de estas combinaciones de números por medio de las cuales se puede generar un cuatro o un cinco al lanzar dos dados de este tipo. Desde un punto de vista teórico, al lanzar cada dado, se tienen cuatro resultados igualmente probables 1, 2, 3 o 4. Por esta razón, al lanzar dos dados de este tipo, los resultados se pueden enumerar, o representar mediante un diagrama o un cuadro tal como el siguiente:

Primer dado	**Segundo dado**			
	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Aunque solamente hay dos alternativas de números para generar un cuatro y un cinco; sin embargo, estos pueden ser combinados de diferentes formas , tal como se muestra en el cuadro anterior. Por ende, las combinaciones para cada uno de estos números son:

- Para obtener un cuatro: (3,1), (2,2) y (1,3)
- Para obtener un cinco: (4,1), (3,2), (2,3) y (1,4)

Por esta razón, debido a que los 16 resultados son igualmente probables, entonces es más probable obtener un cinco que obtener un cuatro al lanzar dos veces este dado. Este resultado es equivalente al que le planteó el Duque de Toscana, solamente que el nivel de complejidad es menor, debido a que en el análisis que hizo Galileo la cantidad de posibles resultados era mucho mayor (216 en total, que implica el número de resultados posibles al lanzar tres dados de seis caras) y en este problema solamente hay 16 posibles resultados.

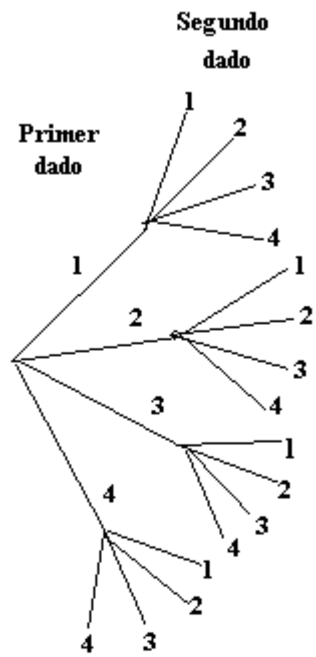
Indicaciones metodológicas vinculadas con el problema 2

El docente debe enfatizar en la importancia del supuesto bajo el cual se plantea este problema, que consiste en el lanzamiento de dos dados en forma de tetraedro, cuyas caras son equiprobables. Además, debido a que cada dado genera cuatro posibles resultados, para los dos dados se tienen 16 resultados posibles. Con esto se pretende que los estudiantes puedan resolver problemas teóricos con dados o monedas, sin necesidad de realizar el experimento.

La clave para la resolución del problema, consiste en que los estudiantes puedan recurrir a representaciones adecuadas que le permitan visualizar todos los posibles resultados obtenidos al lanzar dos dados en forma de tetraedro. Puede ser una representación tabular como la siguiente:

Primer dado	**Segundo dado**			
	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

O bien puede ser algún esquema que ayude a visualizar estos resultados, por ejemplo, los diagramas de árbol



Independientemente del tipo de representación que realice un estudiante, el profesor deber ser vigilante de que el estudiante haga una adecuada lectura de la información que la representación comunica, de modo que pueda ser útil para interpretar el problema.

Por otro lado, el docente debe dejar en evidencia que en los análisis de probabilidades, se debe tener mucho cuidado al realizar conjeturas sin un análisis integral de la situación. Tanto en el problema del Duque de Toscana como el resuelto por los estudiantes, se cometió un error al no contabilizar todos los posibles resultados asociados con un evento. Este tipo de errores era común en la antigüedad, pues no se contaba con los conocimientos matemáticos suficientes y se llegaba a conclusiones falsas debido a malas interpretaciones.

El análisis de estos errores, por medio de connotados matemáticos de la antigüedad, dio origen a la denominada Teoría de Probabilidades.

Indicaciones metodológicas en general

Estos problemas pueden introducirse en quinto o en sexto año antes de introducir el concepto clásico de probabilidad.

Para desarrollar estas actividades en el aula, se propone al docente que:

1. Recomiende a los estudiantes que no avancen en la búsqueda de una solución al problema, antes de que comprendan plenamente los diferentes componentes de cada uno de los problemas.

2. En cuanto a los fragmentos históricos, además de realizar varias lecturas, posiblemente sea conveniente que los estudiantes realicen un esquema del problema para favorecer su comprensión.

3. Si el concepto de equiprobabilidad no hubiese quedado suficientemente claro en los estudiantes, se puede proponer ejemplos adicionales.

En la discusión que se realice, debe estar presente el hecho de que el desarrollo de las probabilidades, así como otras áreas matemáticas, han surgido a partir de controversias o paradojas, cuya solución permite avanzar en el conocimiento del tema. Por esta razón, el docente debe crear las condiciones para que este propósito se logre y motivar hacia la importancia de resolver el problema para comprender esos principios.

En el análisis de este problema se involucran los siguientes conocimientos y habilidades del nivel de quinto año:

Conocimientos	Habilidades específicas
Eventos • Eventos seguros, probables o imposibles • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	1. Determinar eventos seguros, probables o imposibles en situaciones aleatorias particulares. 2. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.

Las habilidades previas son las siguientes:

1) Reconocer situaciones aleatorias en diferentes situaciones del contexto.

2) Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables.

3) Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio.

4) Representar eventos mediante la identificación de sus resultados simples.

5) Identificar el número de resultados favorables de un evento dado.

El problema planteado es de reproducción de conocimientos, pues se supone que los estudiantes ya han adquirido todas las habilidades que se ejercitan en la solución del problema. Se puede trabajar mediante el trabajo individual como en grupos.

Procesos matemáticos que se activan

La actividad propiciará el desarrollo de varios procesos matemáticos (MEP, 2012, páginas 24-26, 56-58)

- *Conectar:* por medido de este problema se logra visualizar la forma en que las probabilidades presentan un carácter eminentemente humano, cuyo desarrollo se conecta directamente con el desarrollo de la humanidad y con las respuestas a los problemas que los mismos seres humanos fueron encontrando dentro de su innata curiosidad. En el primer problema se evidencia también la forma en que se pueden conectar las probabilidades con la geometría, mediante el empleo de ciertos sólidos como el cubo y el tetraedro, que serían abordados en sexto año.

- *Representar:* Los estudiantes deben utilizar diferentes tipos de representaciones en la interpretación del problema y en la búsqueda de una solución. Por ejemplo, el simple empleo de términos tales como (1,1), mediante dibujos, esquemas o el uso de representaciones tabulares, son ejemplos de la forma en que estos procesos se activan en la búsqueda de una solución del problema.
- *Razonar y argumentar:* En el proceso de solución del problema, la discusión y el análisis están presentes en todo momento. Independientemente de la técnica de solución que los estudiantes utilicen, se requiere de un proceso de razonamiento para la búsqueda de una alternativa que conduzca a una solución y luego plantear argumentos sólidos que comprueben que la solución encontrada reúne las condiciones adecuadas.
- *Comunicar:* Los estudiantes que participan en el proceso, requieren mantener una comunicación constante tanto con los compañeros como con el docente, además, deben ser convincentes al comunicar la solución encontrada.
- *Plantear y resolver problemas:* En el desarrollo de las actividades, los estudiantes enfrentan no solamente el proceso de resolución, sino que deben plantearse sub-problemas que surgen en el mismo proceso de resolución.

Consideraciones finales

El docente debe evidenciar a los estudiantes las diferencias entre el análisis realizado en el primer problema respecto a este otro. En el primer caso, el análisis fue eminentemente práctico o empírico, fue el mismo trabajo práctico de los estudiantes el que permitió responder si las caras eran equiprobables o no. Los resultados obtenidos fueron diferentes dependiendo de cada estudiante, pero también podrían ser diferentes si cada estudiante volvía a repetir la experiencia.

El propósito de esta primera parte consistió en mostrar a los estudiantes que los conocimientos sobre probabilidades fueron construyéndose paulatinamente a partir de la observación empírica o práctica, normalmente vinculada con juegos. Por lo que se requirió de muchas observaciones para fundamentar los resultados teóricos que se conocen hoy día.

En la segunda lectura, el Duque de Toscana, evidencia una aparente contradicción entre la teoría y la práctica, que Galilei resuelve teóricamente. En forma análoga, el segundo problema evidencia que a partir del supuesto teórico de que las cuatro caras del dado son igualmente probables, entonces al lanzar dos dados de este tipo es más probable obtener un cinco que obtener un cuatro; pero no fue necesario que los estudiantes llevaran a cabo la práctica, sino que el problema se pudo resolver teóricamente.

Es fundamental que los estudiantes puedan hacer esta diferencia entre los resultados empíricos generados por medio de la práctica y los resultados teóricos que parten de supuestos concretos. Los resultados empíricos no son contundentes pues dependen de una experiencia particular, de modo que si se repite el juego se pueden obtener resultados completamente diferentes. Mientras que al aplicar los mismos supuestos teóricos se espera generar resultados probabilísticos equivalentes.

El concepto de equiprobabilidad, el cual debe construirse de forma paulatina en los estudiantes permite que se valore la teoría de probabilidades como una herramienta para la construcción de modelos, con lo cual se tiene una mejor comprensión de las situaciones aleatorias que se presentan en el entorno estudiantil. Lo que a la postre redunda en un mejor conocimiento para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Recursos adicionales

Historia de la Probabilidad. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia de la probabilidad.pdf, Recuperado 10-02-2013

Mateos, G. y Morales, A. (2002). Historia de la Probabilidad (desde sus orígenes hasta Laplace) y su relación con la Historia de la Teoría de la Decisión. En A.H.E.P.E. (2002). Historia de la Probabilidad y de la Estadística. Madrid: Editorial AC.

Batanero, Carmen; Contreras, José Miguel, Díaz, Carmen y Arteaga, Pedro. Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/TallerParadojas.pdf. Recuperado 09-02-2013

Bibliografía

Historia de la Probabilidad. http://www.ahepe.es/Documentos/IJornadas-Madrid2001/historia de la probabilidad y la estadística I.pdf .
Recuperado 11-02-2013

Perero, Mariano. Historias e historia de las matemáticas. Editorial Iberoamérica, México. 1994, pp. 88-94.

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Primaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edwin Chaves

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz
Edison De Faria
Jonathan Espinoza

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013).*Importancia del concepto de equiprobabilidad.* San José, Costa Rica: autor.