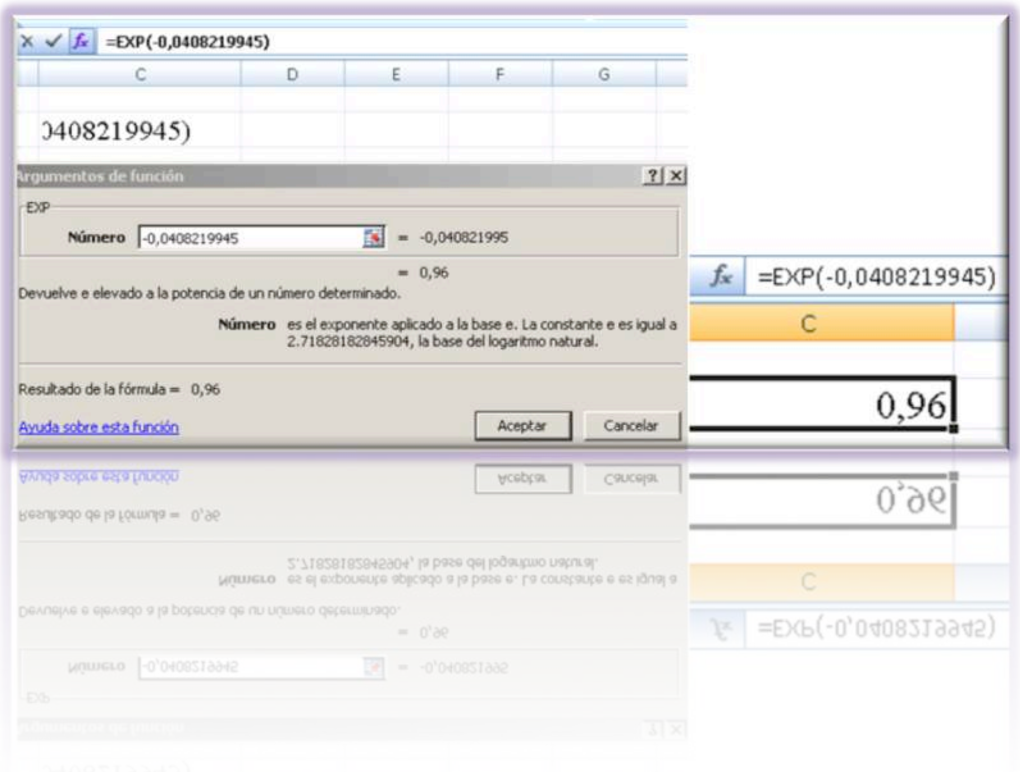
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

CRUSA
Fundación para la cooperación

Modelación matemática con hoja de cálculo para Educación Secundaria



Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.

2013

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos 2

Problemas 3

- **Problema 1: La salud de Ileana** 3
- **Problema 2: Proyección sobre la cantidad de jueces y magistrados** 4

Análisis de los problemas 4

Indicaciones metodológicas 16

Consideraciones finales 18

Bibliografía 20

Créditos 21

Anexos 22

Problemas

Problema 1: La salud de Ileana

Ileana llegó el lunes a clases con mucho dolor de cabeza y de la escuela se comunicaron con su mamá para que la llevara al puesto de salud más cercano. Después de examinarla, la doctora le inyectó 2 miligramos de un anti-inflamatorio a las 9 a.m. y explicó a la madre que su hija tendría que recibir otra dosis de 2 miligramos de la medicina dentro de 3 días, a la misma hora.


Figura 1: Problema 1
Fotos propiedad del MEP

La mamá de Ileana llevó la receta a su casa y consultó en Internet acerca de la medicina aplicada en su hija. Ella descubrió que, después de la aplicación, la droga se metaboliza inmediatamente y empieza a disminuir a una tasa continua de 4% por hora. También, encontró que cuando el nivel de la droga llegue a 0,25 miligramos entonces su hija tendría que recibir la segunda dosis de 2 miligramos de la medicina. Para estar segura si la indicación de la doctora era correcta (3 días de tiempo para la aplicación de la segunda dosis) y no correr riesgos con la salud de su hija, ella pidió a su esposo, quién es un matemático, que calculara el tiempo correspondiente.

Primeramente, el papá de Ileana construyó un modelo matemático para calcular la cantidad de medicina que queda en el cuerpo de su hija, t horas después de aplicada la inyección, y posteriormente calculó cuándo su hija tendría que recibir la segunda dosis de la medicina.

a) ¿Cuál fue el modelo matemático (representación simbólica o algebraica) encontrado por el papá de Ileana?
b) ¿Cuántas horas después de la primera aplicación tenía que ser aplicada la segunda dosis?
c) ¿La doctora tenía la razón o no?

Problema 2: Proyección sobre la cantidad de jueces y magistrados

En la siguiente tabla se presenta el número de jueces y magistrados en Costa Rica, del año 2002 al año 2011 (Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. Informe 18, 2012, p. 360).

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Número de jueces y de magistrados	651	683	720	767	790	813	918	966	995	1041

a) Utilice una hoja de cálculo para encontrar los siguientes modelos matemáticos (línea de tendencia o curva de regresión) para el número de jueces y de magistrados en función del año: polinomial de grado 2, exponencial y potencia. Asigne x = 1 al año 2002, x = 2 al año 2003 y así sucesivamente. Trabaje con 6 o más decimales. Incluya la ecuación del modelo y el coeficiente de determinación.

b) Utilice el "mejor" de los tres modelos encontrados, basándose en el coeficiente de determinación, para predecir el número de jueces y de magistrados para los años 2020 y 2050.

c) Utilice el modelo polinomial de segundo grado, para calcular el año aproximado en que el número de jueces y de magistrados será de 1500.

Análisis de los problemas

Los problemas están planteados para el nivel de undécimo año y pretenden introducir de forma integrada algunas habilidades específicas del área de Relaciones y Álgebra, relacionadas con funciones y modelización.

En las estrategias de resolución de los problemas se mostrará la importancia del uso de tecnología digital para la búsqueda de los modelos matemáticos más eficientes para ajustar los datos del problema y para hacer predicciones futuras.

El software que utilizaremos es una hoja de cálculo, por la facilidad de acceso y flexibilidad. Además, la hoja de cálculo potencializa el análisis, la exploración, la visualización de distintas representaciones y la construcción de modelos matemáticos.

La identificación, la manipulación, el diseño, la construcción y el uso de modelos matemáticos en todos los niveles educativos, es parte fundamental del enfoque de los programas de Matemáticas vigentes, los cuáles proponen trabajar con problemas en contextos reales. La contextualización activa conlleva directamente a la construcción y utilización de modelos matemáticos (MEP, 2012, pp. 13, 17, 31).

En los fundamentos de los programas se explicita que un modelo es, en esencia, un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica, y pueden existir distintos modelos para una situación, con distintos grados de representación de la misma (MEP, 2012, p. 31).

Conocimientos y habilidades específicas a desarrollar

Conocimientos	Habilidades específicas
Funciones y Modelización	**Problema 1** • Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales. • Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales. • Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas • Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas. **Problema 2** 1. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0.$ 2. Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada. 3. Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada. Además de las habilidades 1 y 2 del Problema 1.

Observe que las actividades permiten integrar varias habilidades específicas, con lo que se puede optimizar el tiempo para abarcar el programa de estudios.

Conocimientos y habilidades previas

Conocimientos previos	Habilidades específicas previas
Problema 1 **Concepto de expresión algebraica** **Solución de una ecuación** **Concepto de función y de gráfica de una función** **Funciones exponenciales:** la función a^x, ecuaciones exponenciales **Funciones logarítmicas:** la función $\log_a x$, ecuaciones logarítmicas **Funciones inversas**	**Problema 1** • Determinar el valor numérico de una expresión algebraica. • Comprobar si un número dado es solución de una ecuación. • Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio. • Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales. • Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial. • Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada. • Utilizar distintas representaciones para las funciones involucradas en el modelo.

Problema 2 **Ecuaciones de segundo grado:** raíces, discriminante. **Funciones:** funciones cuadráticas. Además de los conocimientos previos para el Problema 1.	**Problema 2** 1. Trazar la gráfica de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$ Además de las habilidades previas 1,2,6 y 7 del Problema 1.

Estrategias de solución

Problema 1

Sea $C(t)$ la cantidad de la medicina inyectada (miligramos) en el instante *t*. Entonces $C(0) = 2\,\text{mg}$ es la cantidad inicial suministrada. Según el problema, esta cantidad disminuye a una tasa continua de 4%.

Una estrategia para la solución del problema consiste en determinar la cantidad de medicina que queda en el organismo, después de 1, 2, 3 o más horas, e intentar encontrar el patrón de formación para la cantidad. Este tipo de estrategia activa el proceso de *Razonar y argumentar* (MEP, 2012, páginas 24, 56) pues hay que hacer un análisis detallado para encontrar el patrón y justificar el hallazgo con argumentos.

Tiempo (horas)	**Cantidad de la medicina que queda en el cuerpo (miligramos)**
0 (se aplicó la medicina)	2
1 (1 hora después de aplicada)	$2 - 4\% \text{ de } 2 = 2\left(1-\frac{4}{100}\right) = 2\left(1-\frac{1}{25}\right) \text{ mg}$
2	$2\left(1-\frac{1}{25}\right) - 4\% \text{ de } 2\left(1-\frac{1}{25}\right) = 2\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right) = 2\left(1-\frac{1}{25}\right)^2$
3	$2\left(1-\frac{1}{25}\right)^2 - 4\% \text{ de } 2\left(1-\frac{1}{25}\right)^2 = 2\left(1-\frac{1}{25}\right)^3$

El patrón generado con la exploración nos lleva a responder la primera pregunta:
Pregunta a) ¿Cuál fue el modelo matemático (representación simbólica o algebraica) encontrado por el papá de Ileana?

Se observa que la cantidad de medicina que queda en el cuerpo después de *t* horas es

$$C(t) = 2\left(1-\frac{1}{25}\right)^t = 2\left(\frac{24}{25}\right)^t = 2\left(0{,}96\right)^t \text{ mg.}$$

Una segunda estrategia consiste en trabajar con una hoja de cálculo. Utilizaremos las siguientes:

- Microsoft Office Excel 2007 o superior.
- Hoja de cálculo de Apache OpenOffice.

La primera por encontrarse en la mayoría de las computadoras personales y la segunda por ser un software libre de código abierto. El Apache OpenOffice puede ser bajado en la dirección http://www.openoffice.org/es. La idea es que usted utilice cualquiera de las dos hojas de cálculo mencionadas.

Si usted tiene dificultades en utilizar las hojas de cálculo anteriores se recomienda que vea los siguientes videos:

Si usted utiliza la hoja de cálculo Excel 2007 o superior:

- **Líneas de Tendencia con Excel Parte 1**.
  Dirección del video: http://www.youtube.com/watch?v=rYk53Y2xRiQ
- **Líneas de Tendencia con Excel Parte 2**.
  Dirección del video: http://www.youtube.com/watch?v=koIuzZ-V4SQ

Si usted utiliza la hoja de cálculo del Apache OpenOffice:

- **Líneas de Tendencia con Apache OpenOffice Parte 1.**
  Dirección del video: http://www.youtube.com/watch?v=OpmHylb0EHE
- **Líneas de Tendencia con Apache OpenOffice Parte 2**.
  Dirección del video: http://www.youtube.com/watch?v=8FLFf5tfmzc

Cualquier duda adicional acerca del uso de las hojas de cálculo mencionadas, usted puede consultar en Internet en dónde existen muchos documentos y videos que explican el funcionamiento de ambas

Se sugiere hacer una exploración previa con la hoja de cálculo para familiarizarse con las herramientas. Se pueden emplear dos columnas, una para Tiempo (horas) y otra para Cantidad (miligramos). Se ingresa el tiempo inicial en la columna correspondiente al Tiempo y la cantidad inicial (mg) en la columna de la Cantidad. La última información corresponde a la cantidad de medicina que permanece en el cuerpo de Ileana.

En la siguiente fila, en la columna de la cantidad, se define una fórmula que calcula la cantidad que queda después de 1 hora: el dato de la fila anterior menos el 4% del dato, y después se copia y pega la fórmula en las siguientes filas correspondientes a la cantidad de la medicina en el cuerpo.

=C4-0,04*C4

B	C
Tiempo(horas)	Cantidad(miligramos)
0	2
1	=C4-0,04*C4
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

B	C
Tiempo(horas)	Cantidad(miligramos)
0	2
1	1,92
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

=C5-0,04*C5

B	C
Tiempo(horas)	Cantidad(miligramos)
0	2
1	1,92
2	1,8432
3	1,769472
4	1,69869312
5	1,630745395
6	1,565515579
7	1,502894956
8	1,442779158
9	1,385067992

Figura 2

El problema con esta representación tabular es que no muestra el patrón, y por lo tanto se dificulta encontrar el modelo matemático. Pero podemos utilizar la hoja de cálculo, para que ella misma encuentre el modelo, experimentando con distintas líneas de tendencia o curvas de regresión.

Es importante aclarar que no se quiere enseñar curvas de regresión o líneas de tendencia en el ciclo diversificado, ni coeficiente de determinación, sino utilizar la hoja de cálculo para generarlas. Lo que se busca es experimentar con algunos modelos matemáticos para determinar curvas de mejor ajuste, y decidir cuál de ellos es el más eficiente para el problema dado.

Continuando con la solución del problema, una regresión exponencial para la serie de datos anteriores es

$$C(t) \approx 2\left(e^{-0,0408219945}\right)^t$$

Tiempo(horas)	Cantidad(miligramos)
0	2
1	1,92
2	1,8432
3	1,769472
4	1,69869312
5	1,6307453952
6	1,5655155794
7	1,5028949562
8	1,442779158
9	1,3850679916
10	1,329665272
11	1,2764786611
12	1,2254195147
13	1,1764027341
14	1,1293466247
15	1,0841727597

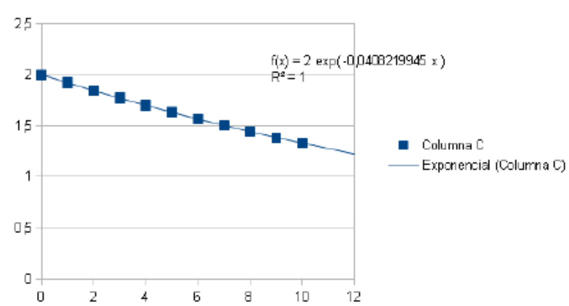


Figura 3

Utilizando la hoja de cálculo se tiene que

$$e^{-0,0408219945} \approx 0,96 \text{ (con 10 decimales)}$$

y por lo tanto

$$C(t) \approx 2(0,96)^t.$$

La ecuación aproximada concuerda con el modelo obtenido mediante la primera estrategia. La regresión, con los 10 decimales utilizados, tiene un coeficiente de determinación $r^2 = 1$, un excelente ajuste a los datos del problema en el dominio dado de la variable predictora.

En los anexos se encuentra un cuadro que explica lo que es una regresión y lo que son las líneas de tendencia.

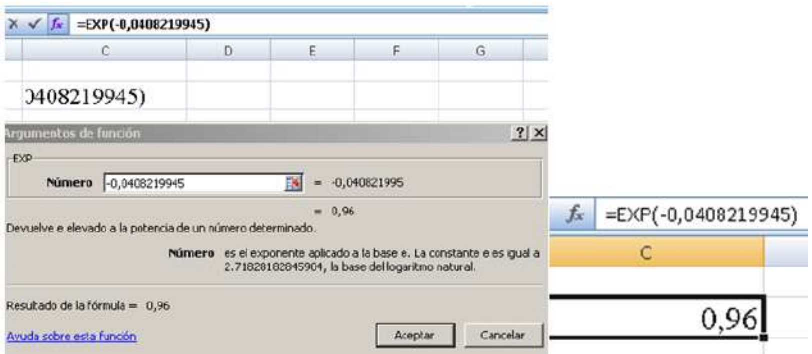


Figura 4

El uso de las representaciones simbólica, tabular y gráfica ayudan a una comprensión más profunda del modelo construido además de activar el proceso *Representar* pues permite articular entre las distintas representaciones de un objeto matemático (ver en los anexos un cuadro acerca de las formas de representación de objetos matemáticos).

Por lo tanto, la representación algebraica del modelo encontrado por el papá de Ileana es:

$$C(t) = 2\left(\frac{24}{25}\right)^t = 2(0,96)^t \text{ mg.}$$

Pregunta b) ¿Cuántas horas después de la primera aplicación tenía que ser aplicada la segunda dosis?

Al tener el modelo matemático, la estrategia para calcular cuánto tiempo después de la primera aplicación tenía que ser aplicada la segunda dosis, consiste en resolver la ecuación

$$0,25 = 2\left(\frac{24}{25}\right)^t$$

Aplicando logaritmos en ambos lados de la ecuación anterior y utilizando propiedades de los logaritmos se tiene

$$\log\frac{0,25}{2} = \log\left(\frac{24}{25}\right)^t = t\log\frac{24}{25}$$

cuya solución aproximada es

$$t \approx 50,93924406 \text{ horas.}$$

Esto puede ser verificado con la hoja de cálculo.

fx	=LN(0,25/2)/LN(24/25)
	C
	50,93924406

Figura 5

Además se puede comprobar que el tiempo encontrado satisface la ecuación dada.

fx	=2*POTENCIA((24/25);50,939244)
C	D
0,250000001	

Figura 6

En esta estrategia se trabaja únicamente dentro de registro de representación algebraica o simbólica mediante una serie de actividades conocidas como tratamiento de la representación.

Una tercera estrategia consiste en utilizar la representación tabular para ver en qué instante se pasa de una cantidad mayor que 0,25 mg a otra menor que 0,25 mg.

45	**0,318592452**
46	**0,305848754**
47	**0,293614804**
48	**0,281870212**
49	**0,270595403**
50	**0,259771587**
51	**0,249380724**

Figura 7

En este caso se observa que la segunda dosis tiene que ser aplicada entre las 50 y las 51 horas posteriores a la primera dosis.

En la representación gráfica se observa el instante en que la curva interseca la recta horizontal que corresponde a la cantidad 0,25 mg dibujada en rojo. La abscisa del punto de intersección es el tiempo aproximado que corresponde a la segunda dosis.

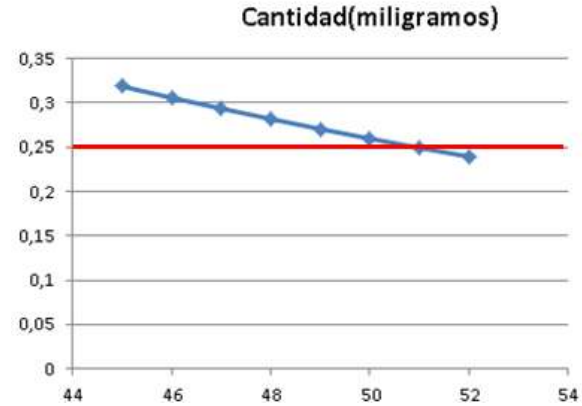


Figura 8

Pregunta c) ¿Tenía razón la doctora o no?

Conforme la indicación de la doctora, la segunda dosis tendría que ser aplicada 72 horas después de la primera aplicación, es decir, el jueves a las 9 a.m., pero el modelo encontrado nos indica que la segunda dosis tendría que ser aplicada aproximadamente 51 horas después de la primera, es decir, el mediodía del día miércoles. En este caso la doctora no tenía la razón.

Problema 2

Abra el archivo actividad2.xls si usted utiliza el Excel o actividad2.ods si utiliza la hoja de cálculo del Apache OpenOffice (ambos ubicados en el site de los cursos bimodales: http://www.cimm.ucr.ac.cr/bimodales2013/course).

Para la pregunta a) Utilice una hoja de cálculo para encontrar los siguientes modelos matemáticos para el número de jueces y de magistrados en función del año: polinomial de grado 2, exponencial y potencia (asigne x = 1 al año 2002, x = 2 al año 2003 y así sucesivamente. Trabaje con 6 o más decimales. Incluya la ecuación del modelo y el coeficiente de determinación), encontramos los tres modelos solicitados con sus respectivas ecuaciones y coeficientes de determinación r^2 (Figuras 10 y 11).

Año		Número de jueces y magistrados
1	1	651
2	4	683
3	9	720
4	16	767
5	25	790
6	36	813
7	49	918
8	64	966
9	81	995
10	100	1041

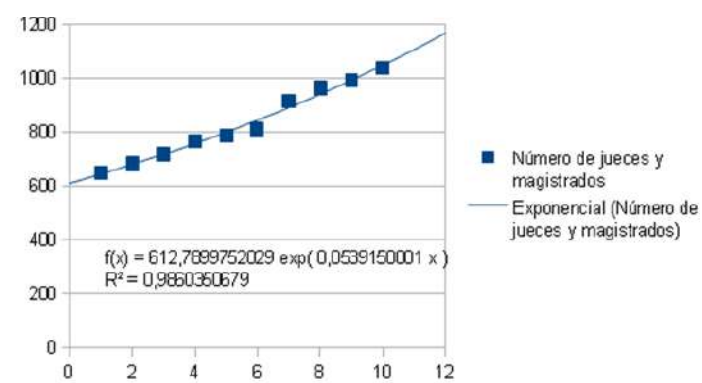
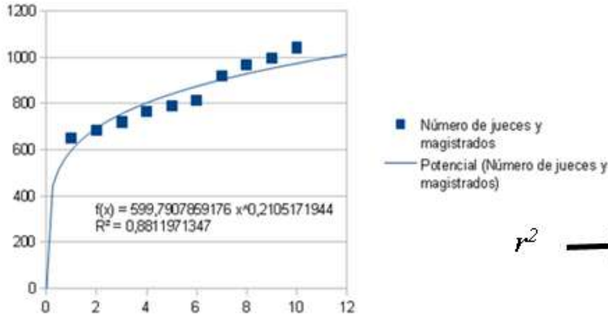


Figura 9



a	b	c
1,34469697	30,0568182	617,3166667
0,82347051	9,29464411	22,2550428
r^2 0,98520505	18,9219118	#N/D
233,067135	7	#N/D
166894,129	2506,27121	#N/D

Figura 10: Modelos construidos con la hoja de cálculo de Apache OpenOffice

El último de los modelos presentados, en forma matricial, corresponde a los coeficientes del polinomio del segundo grado $y = ax^2 + bx + c$.

Pregunta b) Utilice el "mejor" de los tres modelos encontrados, basándose en el coeficiente de determinación, para predecir el número de jueces y de magistrados para los años 2020 y 2050.

El mejor de los tres modelos encontrados es el exponencial, pues tiene el mayor coeficiente de determinación. Al utilizarlo podemos predecir el número de jueces y magistrados para 2020 y el 2050. Es conveniente utilizar la función exponencial (EXP en Apache OpenOffice, exp en Excel) incorporada en las hojas de cálculo.

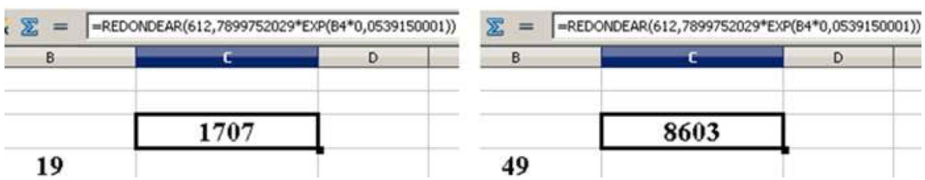


Figura 11

El valor encontrado es de aproximadamente 1707 jueces y magistrados en el 2020 y 8603 en el 2050, lo que responde a la pregunta b).

Pregunta c) Utilice el modelo polinomial de segundo grado, para calcular el año aproximado en que el número de jueces y de magistrados será de 1500.

Para responder la pregunta c) podemos utilizar una calculadora o bien la hoja de cálculo. El problema es que la hoja de cálculo no tiene comandos directos que nos permitan calcular las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, pero podemos definir las fórmulas para las soluciones utilizando los coeficientes del modelo polinomial de grado 2 encontrado. En este caso,

$$a = 1,34469697;\ b = 30,0568182;\ c = 617,3166667 - 1500.$$

Si digitamos los valores de a, b, c, por ejemplo, en las celdas A1, B1 y C1 respectivamente, entonces podemos definir en las celdas D1 y D2 las fórmulas

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

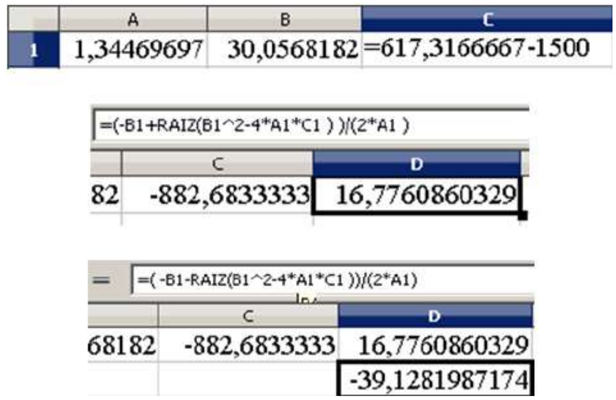


Figura 12: Raíces calculadas con Apache OpenOffice

Para Excel el procedimiento es el mismo, sólo que se utiliza la función raíz( ) en lugar de RAIZ( ).

Aquí la raíz que tiene sentido es la positiva pues representa el tiempo trasladado y se encuentra entre los años 2017 y 2018. El modelo predice que el número de jueces y de magistrados costarricenses será de 1500 aproximadamente a los 9 meses y 9 días del año 2017.

En los planteamientos de los problemas y en las distintas estrategias de soluciones, hemos realizado varias conversiones y tratamientos:

En los problemas planteados las conversiones fueron:

- Del registro de representación verbal (planteamiento del problema) al algebraico o simbólico (la ecuación para el modelo).
- Del registro de representación verbal (planteamiento del problema) al tabular (construcción de las tablas en las hojas de cálculo).
- De la representación tabular a la gráfica y algebraica (línea de tendencia o curva de regresión con la ecuación de la curva).

Algunos tratamientos llevados a cabo en el problema 1 fueron:

- En el registro de representación algebraica, al utilizar el modelo algebraico y hacer una serie de transformaciones para obtener la solución del problema.
- En el registro de representación gráfica al obtener la solución aproximada mediante la intersección de la curva de regresión con la recta horizontal.

Posibles errores u obstáculos

Problema 1

Un posible error en la construcción del modelo matemático para el problema 1 consiste en restar siempre el 4% de la cantidad inicial en lugar de restar el 4% de la cantidad correspondiente a la hora anterior:

$2-4\%\text{ de }2=2\left(1-\frac{4}{100}\right)=2\left(1-\frac{1}{25}\right)$ Mg. 1 hora después de aplicada la medicina.

$2\left(1-\frac{1}{25}\right)-4\%\text{de }2=2\left(1-\frac{1}{25}\right)-\frac{2}{25}=2-\frac{4}{25}$ Mg. 2 horas después de la aplicación.

$2-\frac{4}{25}-4\%\text{ de }2=2-\frac{6}{25}$ Mg. 2 horas después de la aplicación, y así sucesivamente.
Otro posible error es de naturaleza algebraica, al resolver la ecuación

$$0,25=2\left(\frac{24}{25}\right)^t.$$

Se puede aplicar incorrectamente propiedades de los logaritmos, como en los siguientes ejemplos:

$$\log 0,25=t\log\left[2\left(\frac{24}{25}\right)\right]$$

$$\log\frac{0,25}{2}=\log\left(\frac{24}{25}\right)^t, \text{ y por lo tanto } \frac{\log 0,25}{\log 2}=t\log\frac{24}{25}$$

Problema 2

Un posible error en el problema 2 consiste en resolver la ecuación de segundo grado generada por la hoja de cálculo: $ax^2+bx+c=0$ con $a=1,34469697; b=30,0568182;$ $c=617,3166667$, en lugar de $ax^2+bx+c=1500$, o bien $c=617,3166667-1500$ para predecir el año en que el número de jueces y magistrados será 1500.

En cualquiera de las dos situaciones, el rol del docente es fundamental en la detección de los posibles errores mencionados y en la búsqueda de estrategias para corregirlos (preguntas generadores, discusiones en grupos, uso de distintas herramientas para determinar la validez o falsedad de los cálculos, entre otros).

Procesos matemáticos que se activan

En estas actividades se activan todos los cinco procesos, pero principalmente los de *Plantear y resolver problemas* y *Representar* (MEP, 2012, pp. 24-26, 56-58).

El proceso de *Representar* se observa en la utilización de los registros de representación verbal, tabular, gráfico y algebraico, además de la articulación dentro de un mismo registro de representación mediante el tratamiento y entre los registros de representación mediante conversión.

Pero también se activa el proceso *Conectar*, pues existe la conexión de las matemáticas con situaciones de la vida diaria, como por ejemplo las ciencias de la salud en el problema 1, al tratarse del suministro de una medicina para la cura de una dolencia, y con situaciones políticas y sociales, por tratarse con la seguridad en el caso del problema 2.

El proceso *Razonar y argumentar* se activa en la construcción del modelo en su forma algebraica y tabular, en la interpretación de los datos de la tabla, en la asociación de los datos de la tabla con la representación gráfica, entre otros, en el problema 1. En el problema 2 se desarrollan estos procesos, cuando el estudiante tiene que decidir acerca de cuál de los tres modelos es el más eficiente para ajustar las series de datos, en la elección de la solución de la ecuación de segundo grado que tiene sentido para el problema y en la necesidad de utilizar la traslación para determinar el año solicitado.

La argumentación se activa principalmente durante la comunicación con las y los compañeros de aula de las estrategias utilizadas.

Indicaciones metodológicas

1. Para los problemas planteados podemos considerar tres contextos diferentes, dependiendo de los recursos con los que cuente el docente:
   - *Opción 1*: En un laboratorio de informática se le puede proporcinar al estudiante una guía previamente elaborada, que contenga algunas indicaciones técnicas respecto al uso de la hoja de cálculo (si fuera necesario) y una serie de preguntas generadoras que orienten y potencien la toma de decisión del estudiante en cuánto a una curva de mejor ajuste a los datos. En esta opción el estudiante construye la solución del problema. Ésta estrategia fue la que se mostró en el problema 1.
   - *Opción 2:* En un laboratorio de informática el docente presenta a los estudiantes los archivos a utilizar en la hoja de cálculo, con los modelos construídos en varios registros de representación y una guía de tal forma que los estudiantes los analisen para decidir cuál es el modelo más eficiente para los problemas planteados, e infiera por medio de preguntas generadoras los conceptos que se querían desarrollar.
   - *Opción 3:* El docente con una computadora y un proyector podría ir construyendo cada curva de ajuste con su representación tabular, ecuación, coeficiente de determinación y gráfica, y que los estudiantes realicen conjeturas oralmente y paulatinamente construyan sus propios conceptos.

2. Para cualquiera de las opciones anteriores es recomendable:

   Para el problema 1:
   - Empezar con un repaso de las propiedades de los logaritmos, la relación entre la exponencial y el logaritmo, y el uso de logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales.
   - Enfatizar el uso de representaciones simbólicas, tabulares y gráficas de las funciones reales, particularmente con actividades relacionadas con la conversión entre los registros de representación. Por ejemplo, la solución de una ecuación del tipo

$$0,25 = 2\left(\frac{24}{25}\right)^t$$

   representa la intersección de la gráfica de la función $f(t) = 2\left(\frac{24}{25}\right)^t$ con la gráfica de la función constante (recta horizontal) $g(t) = 0,25$.

   Para el problema 2:

   - Empezar con un repaso de las soluciones generales de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Recordar la relación que existe entre las raíces de la ecuación con la intersección de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el eje de las abscisas.

3. Estimule a los estudiantes para que comuniquen las estrategias que utilizaron para resolver el problema, particularmente para encontrar el modelo matemático.

4. Las etapas de la lección pueden ser resumidas en el siguiente esquema:

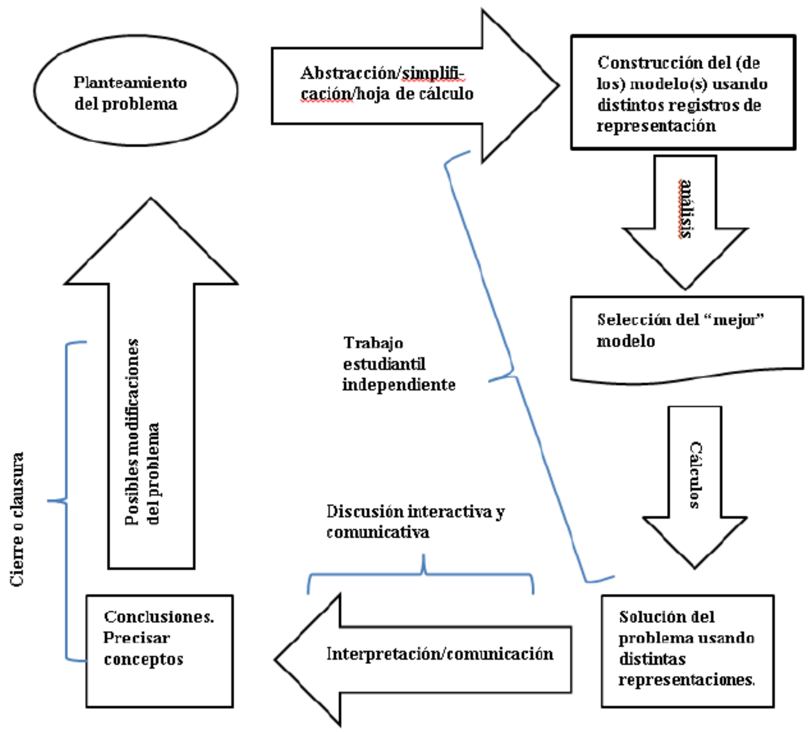


Figura 13: Elaboración propia

En la última etapa, el cierre o la clausura, la docente o el docente enfatiza los distintos momentos entre el planteamiento de los problemas y la etapa de discusión, aclara dudas, trata errores y amplía los conceptos involucrados. Es conveniente retar a los estudiantes, para que intenten modificar los problemas planteados: cambiar los tipos de modelos solicitados, cambiar datos y utilizar contextos diferentes de los que aparecen en las situaciones dadas.

En todo este proceso, el rol del docente o la docente es muy importante. Hay que estar atento a los posibles errores cometidos en el momento de análisis o de los cálculos, o en la interpretación de los resultados. Los errores mencionados permiten detectar dónde hay mayores dificultades de aprendizaje y visualizar mejores formas de abordar un conocimiento específico.

5. Hay que resaltar el potencial de la hoja de cálculo para utilizar distintos registros de representación en el proceso de modelación matemática.

Consideraciones finales

En esta actividad hemos aprendido a utilizar la hoja de cálculo para la modelación matemática de series de datos que representan situaciones reales contextualizadas.

Algunas de las ventajas de la hoja de cálculo utilizada, inferidas del análisis de los problemas planteados son:

- Potencializa el uso de distintos registros de representación en el proceso de modelación matemática. El uso de las representaciones simbólica, tabular y gráfica ayudan a una comprensión más profunda del modelo construido además de activar el proceso *Representar* pues permite articular entre las distintas representaciones de un objeto matemático.
- Al tener rutinas incorporadas para determinar los valores de los parámetros de los modelos, el coeficiente de determinación y la construcción de la representación gráfica, permite experimentar con distintos tipos de curvas de regresión o líneas de tendencia, en un intervalo de tiempo muy corto. Con esto se gana tiempo para concentrarse en conjeturar, verificar, analizar, predecir, interpretar y modificar, conforme el esquema abajo.
- Facilita el trabajo de modelación con grandes cantidades de datos.
- El valor del coeficiente de determinación proporcionado por la hoja de cálculo permite saber si el modelo encontrado es eficiente o no, y nos ofrece elementos para tomar decisiones acerca del modelo a utilizar.
- Facilita el tratamiento dentro de cada registro de representación, y la conversión entre distintos registros de representación, es decir, potencializa la articulación entre los distintos registros de representación del modelo encontrado, coadyuvando el proceso de integración de habilidades específicas.
- Algunas funciones incorporadas, como por ejemplo la ESTIMACION.LINEAL de la hoja de cálculo de Apache OpenOffice, despliega datos estadísticos de interés, además del modelo matemático y el coeficiente de determinación, conectando el área con Probabilidad y Estadística.

De esta forma, la tecnología sirve no solamente para realizar cálculos y comprobar resultados, sino que amplía las capacidades cognitivas del estudiante y genera nuevos tipos de conocimientos que aquellos generados sin este tipo de herramienta.

También encontramos algunas limitaciones al utilizar la hoja de cálculo. En la actividad correspondiente al problema 2, vimos que la hoja no tiene un comando o una función incorporada para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado. Tuvimos que definir las fórmulas para encontrar las raíces, pero el problema es más serio todavía si no existe fórmula para calcular las raíces de una ecuación polinomial, como por ejemplo una ecuación de grado 5 o mayor. En este caso tendríamos que programar algún algoritmo que permita obtener los valores aproximados de las raíces mediante algún método numérico, lo que no es parte de los programas de estudio.

Un problema encontrado con los modelos matemáticos encontrados, y que no constituye en una limitación de la hoja de cálculo, es que las predicciones resultantes pueden ser incorrectas, si la variable predictora se encuentra alejada del intervalo de los datos.

Dentro de los recursos del programa *Profe en c@sa* del MEP, se encuentra una actividad parecida al problema 1, y utiliza un modelo exponencial. El enfoque es un poco distinto al utilizado aquí pues se proporciona el modelo matemático en el video mencionado, sin embargo puede emplearse para fortalecer el trabajo después de desarrollar las actividades aquí planteadas. El nombre del video es *Ecuaciones logarítmicas* y se encuentra en el siguiente link:

http://www.youtube.com/user/profeencasamep.

Bibliografía

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. Annales de Didactique et de SciencesCognitives5.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques etapp rentissages intellectuels. Berna, Peter Lang.

Líneas de Tendencia con Apache OpenOffice Parte 1. http://www.youtube.com/watch?v=OpmHylb0EHERecuperado el 21/04/2013.

Líneas de Tendencia con Apache OpenOffice Parte 2. http://www.youtube.com/watch?v=8FLFf5tfmzcRecuperado el 21/04/2013.

Líneas de Tendencia con Excel Parte 1. http://www.youtube.com/watch?v=rYk53Y2xRiQRecuperado el 21/04/2013.

Línea de Tendencia con Excel Parte 2. http://www.youtube.com/watch?v=koIuzZ-V4SQRecuperado el 21/04/2013.

MEP (2012). Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas.

Perero, M. (1994). Historia e Historias de Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible (2012). Decimoctavo Informe Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. San José, C. R.

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Edison de Faria

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz
Marianela Zumbado
Miguel González

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Modelación matemática con hoja de cálculo para Educación Secundaria.* San José, Costa Rica: autor.

Anexos

Regresión y líneas de tendencia

Se denomina *regresión* al proceso general de ajustar una curva o ecuación a una serie de datos.

Las líneas de tendencia o curvas de regresión son una herramienta de análisis o modelización que permite visualizar puntos en una gráfica que se encuentran entre dos puntos de datos reales (interpolación) o que van más allá de los datos reales (extrapolación), y que representan los posibles valores futuros de acuerdo a su tendencia.

Las hojas de cálculo como las utilizadas aquí tienen distintos tipos de líneas de tendencia (curvas de regresión) que relacionan una variable dependiente *y* (respuesta o salida) con una variable independiente *x* (entrada, variable predictora o explicativa, porque se utiliza para predecir o explicar los valores de la variable respuesta) cuantitativa o cualitativa. Los representaciones algebraicas de los principales modelos en las hojas de cálculo son:

Lineal: $y = m*x + b$
Logarítmico: $y = a*\ln(x) + b$; $x > 0$
Exponencial: $y = b*e^{a*x}$, $y = b*m^{x}$;
Potencia: $y = b*x^{a}$
Polinomial: $y = a + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$

La idea consiste en ajustar la ecuación a los datos, es decir ajustar los valores de los parámetros a, b, m, etc. en las ecuaciones anteriores. Por lo general se utiliza el método de los mínimos cuadrados, que consiste en obtener los valores de los parámetros que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos. Cada residuo es la "distancia vertical" de los puntos de dato a la curva de ajuste.

En las hojas de cálculo mencionadas, la eficiencia de la curva de regresión se mide con lo que se conoce como *coeficiente de determinación*. Este número mide la "bondad del ajuste realizado". La "bondad de predicción o de ajuste" depende de la relación entre las variables. Si dos variables no covarían, no se puede hacer predicciones válidas. La medida de la capacidad del modelo de regresión para obtener buenas predicciones, cuando existe solamente una variable independiente, es el cuadrado del coeficiente de correlación *r*, e indica la proporción de variación de la variable respuesta ***y*** que es explicada por la variable predictora*x*. El *coeficiente de determinación:*

- Es una medida descriptiva de la utilidad de la ecuación de regresión para hacer predicciones. Su valor determina el porcentaje de variabilidad en la variable respuesta *y* que es explicada por su relación con la variable predictora*x*.
- Para una variable predictora, es el cuadrado del coeficiente de correlación *r*, y su valor varia de 0 a 1. Un valor cero indica que la variable predictora tiene capacidad nula para explicar o predecir la variable ***y***. Cuánto más cercano a 1 sea su valor, mejor será la predicción.

Respecto al coeficiente de correlación, Gould (en Perero, página 81) afirma: "Si bien se calcula fácilmente, está plagado por errores de interpretación … Consideremos la relación entre mi edad y el precio de la gasolina en los últimos diez años, la correlación es casi perfecta; sin embargo, a nadie se le ocurre ver una relación de causa y efecto … La suposición, inválida, de que correlación implica causa, es probablemente uno de los dos o tres errores más comunes del razonamiento humano".

Formas de representación de objetos matemáticos

Según Duval (Duval, 1993 páginas 37-65; Duval 1995), existen diversas formas de representación de los objetos matemáticos.

Algunas de las principales ideas de Duval se sintetizan en:

- Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, y por lo tanto se hace necesario tener representaciones de los mismos.
- No hay que confundir el objeto matemático con su representación.
- Debe distinguirse entre imagen mental (preceptos interiorizados), representación semiótica (constituida mediante el empleo de signos) y representación mental (interiorización de una representación semiótica).
- Las representaciones semióticas cumplen diversas funciones: expresión (para otros), objetivación o identificación de un objeto de la realidad (para sí mismo) y tratamiento o movilización de la representación semiótica acorde a ciertas reglas.
- El conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas.
- Las representaciones semióticas muestran y utilizan distintos registros.
- La habilidad para cambiar de registro de representación semiótica es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas.

Duval denomina "semiosis" a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

- Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- Tratamiento de la representación, es decir, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

Conversión de la representación, es decir, la transformación de la representación de un registro a una representación en otro registro. Por lo tanto es una transformación externa a un registro.