Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

www.reformamatematica.net

CRUSA Fundación para la cooperación

Software de geometría dinámica para Educación Secundaria

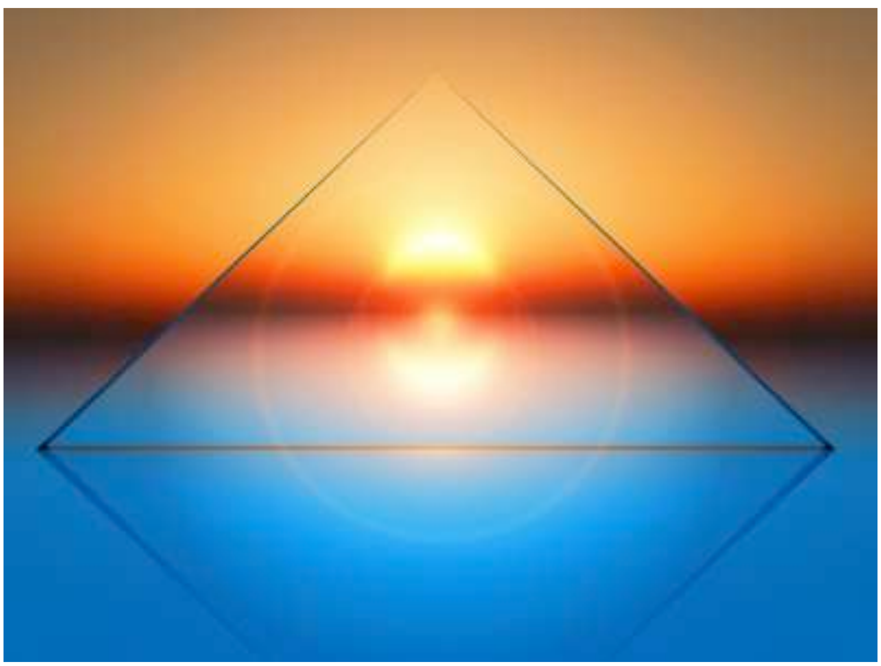


Imagen cortesía de dan en FreeDigitalPhotos.net

Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas. 2013

Introducción

El uso apropiado de la tecnología juega un papel substancial en el enfoque de *Resolución de problemas en contextos reales*, ya que hace posible modelar situaciones y reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema, así como redefinir las estrategias que se pueden diseñar.

El propósito de esta *Unidad* es introducir, mediante este enfoque el uso apropiado del *software de geometría dinámica* en procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Este tipo de software educativos orientados al estudio de la Geometría permiten visualizar dimensiones que de otra manera sería muy difícil de incorporar en la acción educativa, como por ejemplo el movimiento. Estos no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también constituyen recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje.

Sin embargo, si bien es cierto las tecnologías pueden ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático, la utilización de tecnologías **no conduce necesariamente** al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos. Esto implica que el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa.

Estos nuevos retos y escenarios didácticos hacen trascendental una preparación docente basada no sólo en la parte técnica del uso de la herramienta sino potenciar el uso didáctico, ya que muchos de los problemas y tareas educativas que se planteaban antes, se ven transformados cualitativamente y modifican el significado de la labor de aula y la acción docente.

Por lo anterior, es importante aclarar que en la presente *Unidad* se exponen una serie de elementos didácticos y metodológicos bajo una perspectiva pedagógica y no técnica; por lo que la misma debe estudiarse bajo dicha visión. No obstante, se mencionan ciertos elementos técnicos (deslizador, arrastre de objetos, etc.) que serán explicados y desarrollados en la *Unidad Virtual de Aprendizaje UVA* respectiva.

Es por esto que la *Unidad* no se debe estudiar de forma separada a la *UVA*; son materiales complementarios que junto con los ejercicios de autoevaluación forman un módulo de aprendizaje que será evaluado de forma integral.

Tabla de contenidos

Problema

La siguiente imagen es una fotografía de dimensiones 11,5cm × 7,4cm, que corresponde a un terreno en la Esmeralda de Turrialba en Cartago. El mismo está limitado por un camino que lo rodea.

Imagen tomada de Google Map 2013

En él se quiere crear un parque ecológico que ofrezca a sus visitantes una experiencia interactiva con la flora y fauna de Costa Rica. La idea es que el parque cuente con una serie de senderos que permitan apreciar tres tipos de bosques tropicales (Lluvioso, Pre-Montano y Seco). Para el riego diferenciado de estos bosques[1] se necesita ubicar tres tomas de agua representadas en la fotografía por los puntos R, T y H.

1. Emplear un software de geometría dinámica para "construir" un amplificador[2] de fotografías en donde se indique la escala con respecto a la imagen original.

2. Sabiendo que la escala de la fotografía es aproximadamente 1:4000 con respecto al terreno real, utilice el amplificador para elaborar un plano del terreno de tal forma que 1cm equivalga a 10m. Posteriormente, responda las siguientes preguntas:

   a. La ubicación exacta de los puntos R, T y H en el plano es de suma importancia, explique ¿cómo haría para colocarlos?
   b. Indique a qué distancia (en centímetros) estará R de T, H de R y H de T en el plano elaborado.
   c. Explique ¿a qué distancia real (en metros) estarán la toma de agua: R de T, H de R y H de T?

[1] Cada bosque tiene un microclima diferente. Es por esto la importancia del riego diferenciado.
[2] La idea es pensar en un mecanismo que aumente las dimensiones de la fotografía guardando las proporciones originales de las imágenes. Esto servirá como un generador dinámico de planos.

Análisis del problema

El propósito principal de este problema es introducir los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos empleando el conocimiento de homotecia trabajado previamente por los estudiantes según el programa de estudio. Asimismo, se busca que el estudiante explore y realice conjeturas, y éstas generen insumos que ayuden a precisar los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.

La idea es desarrollar las habilidades específicas de semejanza y congruencia de triángulos de forma integral. Con el problema planteado se pueden desarrollar de forma conjunta las ocho habilidades específicas que se muestran en el siguiente cuadro.

Cuadro 1

Conocimientos	Habilidades específicas
Triángulos • Semejanza • Congruencias	1. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1. 2. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1. 3. Identificar figuras semejantes en diferentes contextos. 4. Identificar figuras congruentes en diferentes contextos. 5. Aplicar los criterios de semejanza: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos. 6. Aplicar los criterios de congruencia: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo lado ángulo, para determinar y probar la congruencia de triángulos. 7. Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos. 8. Utilizar software de geometría dinámica para visualizar propiedades relacionadas con la congruencia y semejanza de triángulos.

Hay que recordar que en los programas de estudio de Matemáticas del MEP (2012) se asumen, entre otros, los siguientes ejes específicos de forma transversal: *La resolución de problemas como estrategia metodológica principal* y *el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales*; por lo que el docente debe tener claro que las habilidades específicas 7 y 8 del *Cuadro 1*, se desarrollan simultáneamente en la resolución del problema, **no son complementos posteriores** al desarrollo del tema, por ende no se deben dejar para el final, sino trabajarlas integralmente con las habilidades específicas que las anteceden.

Asimismo, es necesario que los estudiantes hayan estudiado previamente el tema de *homotecia*; ya que será utilizado no sólo en la resolución del problema, sino principalmente en conexión con el conocimiento de *semejanza y congruencia de triángulos*.

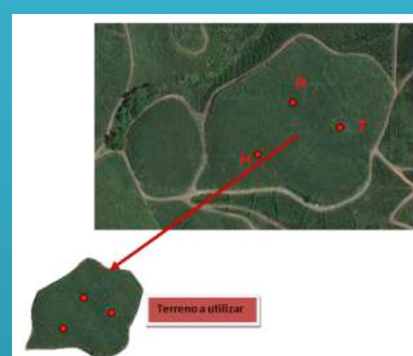
Seguidamente se enlistan las habilidades específicas del programa de estudio que ya han sido estudiadas y tienen relación con el problema:

Cuadro 2

Conocimientos	**Habilidades específicas**
Transformaciones en el plano • Homotecias • Puntos homólogos • Segmentos homólogos	1. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una *homotecia*. 2. Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia. 3. Reconocer pares de figuras homotécicas en el plano de coordenadas.

Debido a que los estudiantes han estudiado previamente el concepto de homotecia, es natural que la mayoría coincida en que la estrategia más adecuada para construir el amplificador de fotografías sea utilizar ésta transformación; y para poder resolver la segunda parte del problema se necesite aplicar una homotecia a la fotografía del terreno, razonando primero cuál sería el valor correcto de la razón *k*.

Elaborar la solución del problema con material concreto e instrumentos geométricos convencionales tiene varias complicaciones. Hay que observar que el diseño del plano no es sencillo debido a que la imagen que se tiene que reproducir (terreno) no es poligonal y el contorno del terreno es muy irregular. Diseñar un plano del terreno, guardando todos sus detalles en la forma, incurriría en mucho tiempo de aula y probablemente no quedaría estrictamente semejante. Además, con una única construcción es difícil obtener inferencias y conclusiones sólidas que permitan precisar un tema.



Para los propósitos didácticos de este problema, el uso apropiado de un *software de geometría dinámica*[3], es muy valioso. Incluso, es posible que las habilidades previas (*Cuadro 2*) hayan sido desarrolladas utilizando este recurso que es ágil y eficiente en el "trazado" de transformaciones geométricas. Además, con él se pueden generar gran cantidad de casos particulares que nutren la elaboración de conjeturas y acelera la solución del problema, dando espacio a procesos matemáticos centrales: *Representar* y *Razonar y argumentar.*

Suministrando al estudiante la fotografía del terreno en formato digital podrá iniciar con la fase *Construcción de la situación geométrica.* Esto se hará mediante un software de geometría dinámica que le permita realizar homotecias de imágenes o que facilite realizarlas. Esto conlleva a una *Matematización* (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) del problema.

[3] Software que permite el "trazado" de figuras dinámicas, o sea que se pueden manipular conservando las relaciones geométricas que estuvieron presentes en su construcción.

Cuidado: Los software de geometría dinámica no trabajan con centímetros o alguna otra medida de longitud, por lo que al insertar la imagen se debe buscar que las dimensiones (en centímetros) de la fotografía coincidan con el valor de las unidades predeterminadas del software. Esto se puede hacer, antes de insertar la imagen, construyendo un marco (segmentos AB y BC perpendiculares) para la misma con las dimensiones de la fotografía que se especifican en el problema. Luego se le asigna a tres esquinas de la fotografía los puntos A, B y C, como se muestra a continuación:

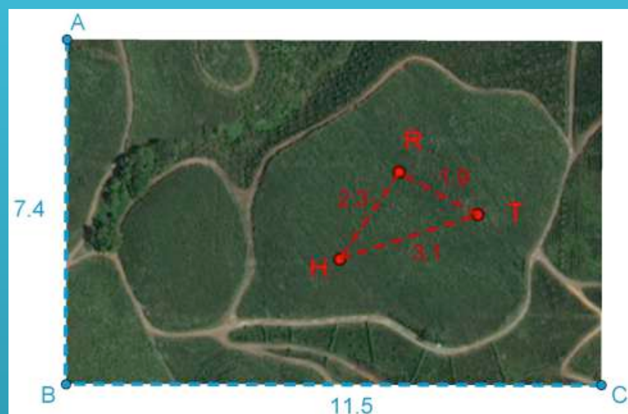


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

En esta misma fase existe un período de exploración donde los estudiantes pueden aplicar varias homotecias con diferentes valores para *k*. Aunque esto no parezca eficiente, es muy significativo en cuanto al desarrollo de un modelo y la construcción de la noción de semejanza entre figuras.

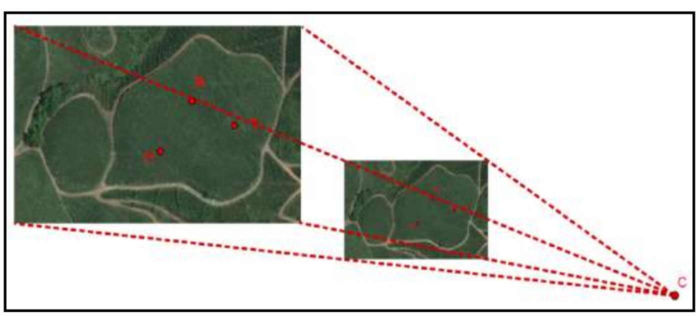
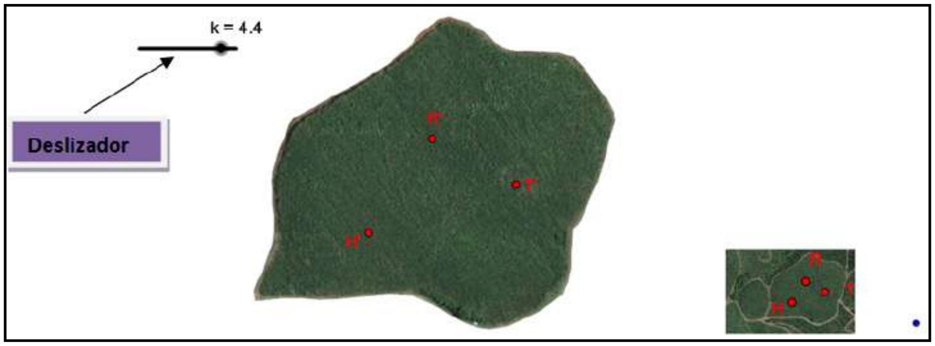


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

El software especializado tiene la ventaja de obtener de forma precisa y rápida la homotecia de la foto del terreno con sus respectivos puntos H, R y T. Esto tiene el beneficio de dejar más tiempo para el razonamiento y la argumentación.

Sin embargo, el estudiante tiene que entender que en este problema no se busca dar un modelo final y acabar la acción allí; se trata de la creación y uso sucesivo de modelos que se refinan, adecúan y amplían su rango de acción. Por esta razón, para crear un amplificador de fotografías ágil y rápido, el valor de *k* tiene que ser dinámico y esto lo puede lograr por medio de un *deslizador* o *barra de desplazamiento*[4]. Esto permitirá visualizar cómo varía la figura homotécica cuando se modifica el valor de *k* mediante el "arrastre" del punto movible del deslizador.



Homotecia realizada con GeoGebra 4.2

Luego de haber construido el amplificador de fotografías dinámico, se puede realizar el análisis de la segunda parte del problema:

Como la escala de la fotografía es aproximadamente 1:4000 con respecto al terreno real, entonces el terreno real es 4000 veces más grande que la fotografía. Además, el plano del terreno tiene que estar hecho de tal forma que 1cm equivalga a 10m, esto corresponde a decir que 1cm equivaldría a 1000cm (10m=1000cm), por lo que el terreno real es 1000 veces más grande que el plano.

Ahora bien, articulando la información anterior, el terreno real es 4000 veces más grande que la fotografía y 1000 veces más grande que el plano que se quiere elaborar, por lo que la razón *k* para la homotecia sería 4000:1000 = 4:1, o sea *k=4*.

Posteriormente, mediante simples cálculos o una construcción se puede obtener las respuestas a las preguntas 2b y 2c del problema:

Fotografía (cm)	**Plano 4:1 (cm)**	**Distancias reales (m)**
RT=1,9	R'T'=7,6	76
TH=3,1	T'H'=12,4	124
RH=2,3	R'H'=9,2	92

Por lo que en el plano elaborado, la distancia en que estará R de T, H de R y H de T son 7,6cm, 9,2cm y 12,4cm respectivamente. Además, se encuentra que la distancia real (en metros) en que estarán las tomas de agua R de T, H de R y H de T son respectivamente 76, 92 y 124.

Hay que tener presente que el propósito principal de la actividad no es sólo construir una homotecia y poder responder a las interrogantes del problema, sino introducir el tema de semejanza y congruencia de triángulos.

[4]Este recurso se explicará y se aprenderá a utilizar en la *UVA* respectiva. También puede conocer más acerca del uso de este recurso en GeoGebra en el sitio http://www.academia.edu/1131388/Uso_de_Deslizadores_en_Geogebra

Se sabe que al dibujar cualquier figura geométrica en la pizarra, ésta es estática. En contraste, debido a que las preguntas del problema giran en torno a las tomas de agua, el docente puede pedir a los estudiantes representar las distancias entre las tomas de agua como los segmentos de un triángulo, y pedir que se muestren las longitudes de los mismos y mostrar la medida de la abertura de los ángulos internos; y por medio de la manipulación de un deslizador para el valor de *k* poder visualizar qué elementos del triángulo R'T'H' varían y cuáles permanecen constantes.

Luego de construir el amplificador de fotografías, se iniciará con la fase de *Manipulación de los objetos dinámicos*, la cual se desarrollará de manera simultánea a la de *Elaboración de conjeturas*[5]. Esto es así debido a que una conjetura puede modificarse o revisarse mediante la orientación del profesor, por lo que exigirá que el estudiante vuelva a la fase de exploración de la situación.

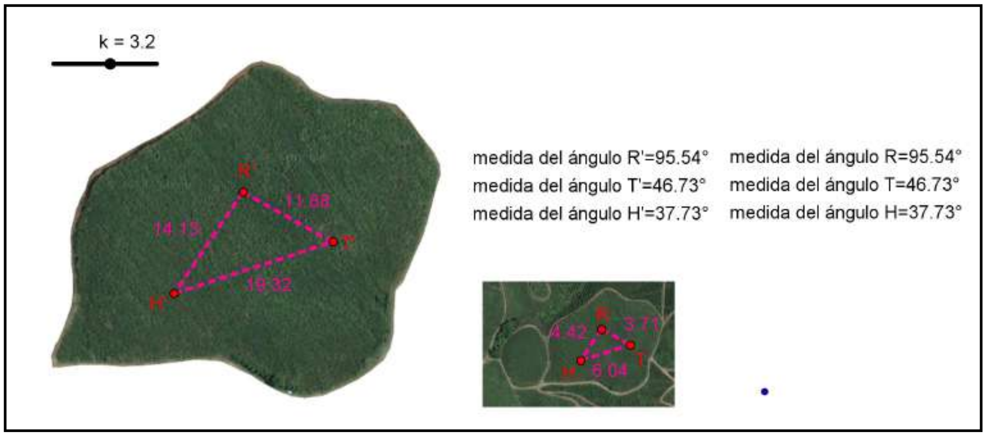


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

El docente debe aprovechar estos recursos dinámicos no sólo para contestar las preguntas del problema; sino, para activar el proceso *Razonar y argumentar* al plantearle al estudiante de forma oral o con una guía escrita las siguientes preguntas generadoras:

- Al mover el deslizador *k*, ¿cuáles medidas del triángulo varían y cuáles permanecen constantes? Explique por qué ocurre esto.
- ¿Qué relación numérica encuentra entre la medida de los lados de los triángulos RTH y R'T'H'? ¿y qué relación tiene con el valor de *k*?

El arrastre de objetos en la pantalla del ordenador es la característica más peculiar del software de geometría dinámica. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo de la pantalla para convertirlo en otro dibujo asociado a la misma figura (realmente lo convierte en una sucesión casi continua de dibujos). La modificación continua como elemento didáctico favorecedor del aprendizaje, que supera las limitaciones del aprendizaje en contextos de lápiz/tiza y papel/pizarra, no es nuevo, pues siempre se han utilizado modelos articulados o deformables para representar determinados conceptos o propiedades matemáticas. Lo que sí es nuevo es la gran libertad de movimientos y transformación que permite el software de geometría dinámica. (Gutiérrez, 2005, p.8)

[5] Itzcovich (2007; p.17) sostiene que la idea de la conjetura "es la producción de una 'sospecha', de un 'parecer', producto de una experiencia de trabajo".

- Al mover algún punto del triángulo RTH, ¿qué ocurre con la medida de los lados y de los ángulos del triángulo R'T'H'?
- ¿Qué ocurre cuando el deslizador *k* tiene el valor de 1? ¿Qué relación numérica encuentra entre la medida de los lados de los triángulos RTH y R'T'H'?

Con las anteriores preguntas, el estudiante tendrá que volver a la etapa de manipulación de objetos y observar que al modificar el valor de *k*, la medida de los lados del triángulo de la imagen homotécica varía mediante una proporción directa *k·lado del ΔRTH*.

Esto puede ser percibido de forma natural por el estudiante debido a su estudio previo de la homotecia; y podría establecer las relaciones entre los lados de los triángulos RTH y R'T'H' mediante una tabla dinámica o como se muestra en la siguiente imagen utilizando los conocimientos de homotecia:

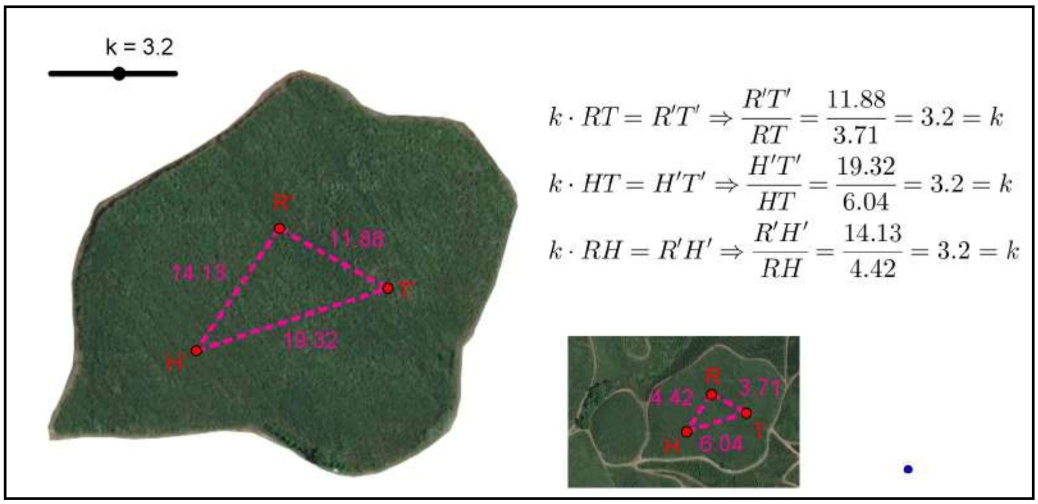


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

En general: Si *A* y *B* son los extremos de un segmento y *A'* y *B'* son las imágenes de *A* y *B* bajo una homotecia, entonces *A'B'*= *k·AB*, donde *k* es una constante llamada razón de la homotecia. Por otra parte, dada una homotecia, si la imagen de cada punto *X* se denota por *X'*, entonces todas las rectas *XX'* son concurrentes en un punto *O* llamado centro de la homotecia. El punto *X'* se llama homólogo del punto *X* y, de la misma manera, el segmento *A'B'* es el homólogo del *AB* y el ángulo *A'B'C'* es el homólogo del *ABC*.

Al mover algún vértice del triángulo RTH este movimiento se realizaría también en el R’T’H’ y mantendrían la forma; además, se debe poder observar que los ángulos homólogos de los triángulos seguirían siendo congruentes y que la proporción entre los lados homólogos se mantiene.

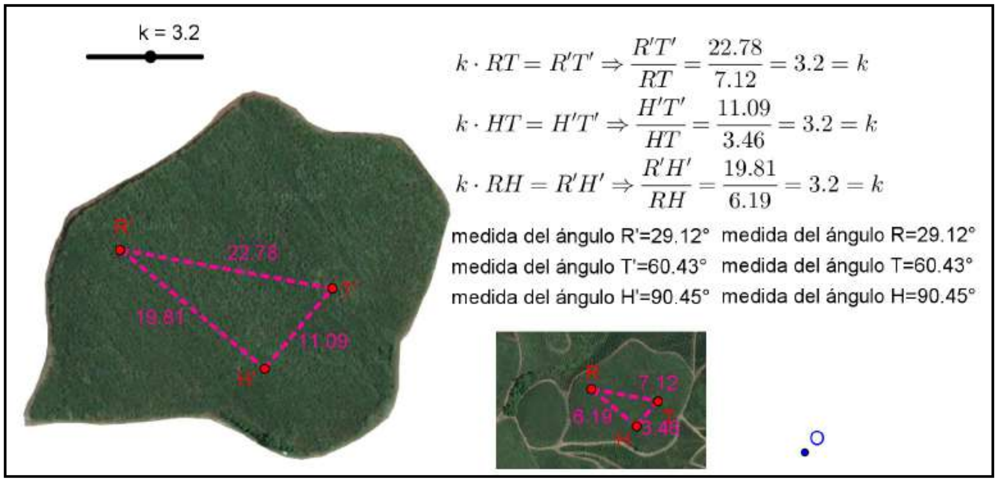


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

Luego de este proceso de exploración y manipulación de objetos geométricos el docente deberá orientar a la producción de conjeturas, en la cual puede ser pertinente plantear las siguientes interrogantes:

Sin importar el movimiento de cualquier vértice del triángulo RTH, los triángulos RTH y R’T’H’ son semejantes,

- ¿Cuáles serían las condiciones necesarias que deberían cumplir dos triángulos para ser semejantes?
- ¿Qué relación existe entre la razón de homotecia *k* y la proporción entre los lados homólogos de ambos triángulos?

Estas mismas interrogantes pueden plantearse con respecto al concepto de congruencia de triángulos.

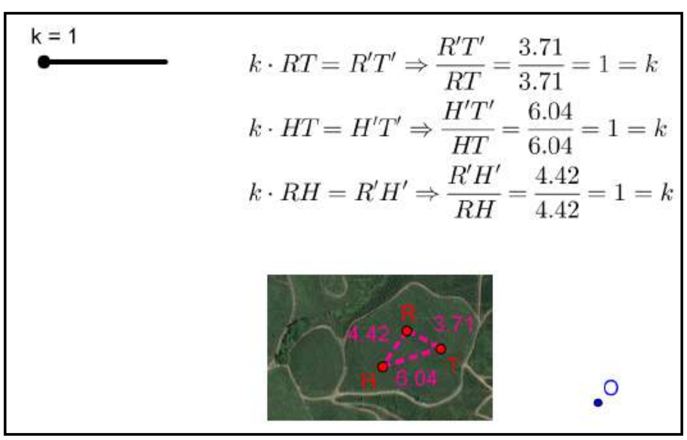


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

Al ubicar el deslizador en k=1, se podrá notar que los triángulos RTH y R’T’H’ se superponen y que las medidas de sus lados homólogos son congruentes y por ende la proporción entre los mismos es igual a 1. Esto se puede utilizar para introducir el tema de congruencia de triángulos como un caso particular de una homotecia de razón igual a 1.

Respecto a las conjeturas e inferencias que surjan, el docente debe verificarlas, o refutarlas mediante el uso de un *contraejemplo*[6]. En esta fase de *Verificación de conjeturas* se pueden deducir al menos los siguientes aspectos:

1. Si un triángulo es el resultado de la homotecia de otro, ambos triángulos se definirán como triángulos semejantes.
2. Por el punto anterior, si dos triángulos son semejantes sus lados homólogos serán proporcionales, con una proporción igual a la razón de la homotecia.
3. Además, los ángulos homólogos permanecerán congruentes sin importar el valor de *k*.
4. Si un triángulo es el resultado de la homotecia de otro con razón k=1, ambos triángulos no sólo se consideran como semejantes sino además se definirán como triángulos congruentes.

Adicionalmente, producto de este análisis, se puede proponer varias preguntas generadoras relacionadas a los criterios de semejanza y de congruencia que pueden ser exploradas por medio del software de geometría dinámica. Algunas preguntas podrían ser:

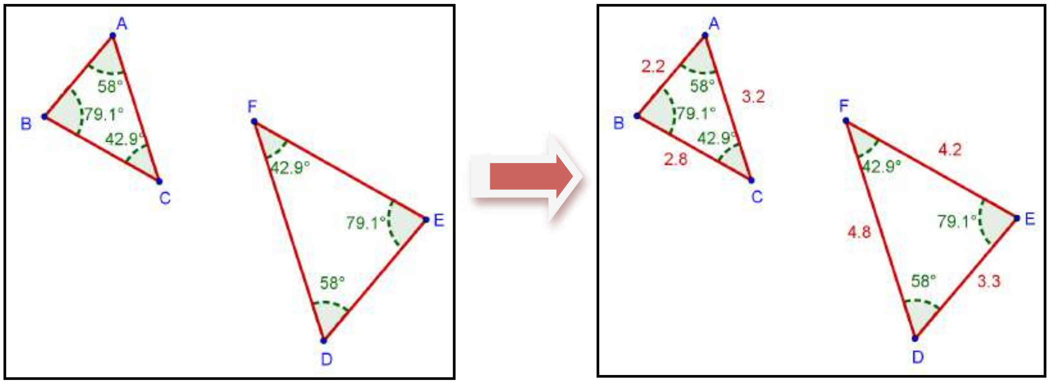
La segunda función del arrastre que descubren los estudiantes cuando empiezan a aprender a manejar un programa de geometría dinámica, después de la función inicial de modificar un dibujo, es la de verificar que la construcción que acaban de realizar es correcta. (Gutiérrez, 2005, p.8)

- Si dos triángulos tienen sus ángulos homólogos congruentes, ¿se podrá concluir con solo esta característica si son semejantes?
- Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, ¿se podrá concluir con solo esta característica si son semejantes?
- ¿Qué características, respecto a la medida de sus lados y ángulos, podrían ser suficientes para concluir que dos triángulos son semejantes?

Utilizando un software de geometría dinámica es fácil y rápido poder construir dos triángulos con características determinadas, y luego modificarlos con los objetos dinámicos manteniendo las características establecidas y así poder hacer inferencias orientadas a contestar las preguntas propuestas anteriormente.

Para la primera pregunta planteada, el estudiante puede construir dos triángulos de tal forma que los ángulos internos homólogos sean congruentes y que uno de los triángulos tenga mayores dimensiones que el otro, y luego por medio de una herramienta del software mostrar las medidas de los lados de ambos triángulos y verificar su proporcionalidad. Hay que tener claro que antes de emitir una conclusión se deben explorar varios casos particulares.

[6] Según afirma Grimaldi (1998; p. 94) el contraejemplo es "un caso que desaprueba algo que podríamos haber considerado como un argumento válido".

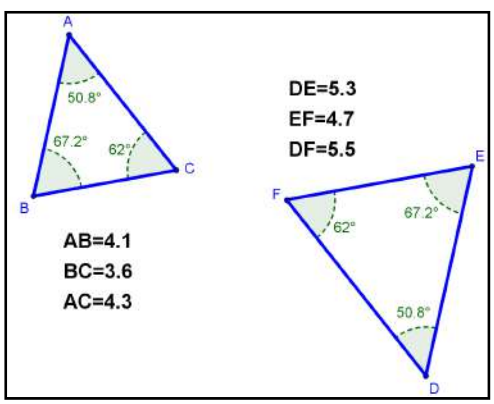


Imágenes elaboradas con GeoGebra 4.2

Cuando se trabaja con un software de geometría dinámica, pueden presentarse errores en la interpretación de la información y generar inferencias equivocadas:

> Las medidas de los lados de los anteriores triángulos fueron redondeadas por el software a un decimal, hay que tener cuidado con esta situación ya que en algunos casos las proporciones entre triángulos pueden no coincidir. Igual puede ocurrir con la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

1. Hay que tener cuidado con el redondeo de medidas, ya que pueden ocasionar distorsiones en la información y confusiones en el estudiante. Por ejemplo, en la siguiente imagen se dan las dimensiones de los lados de dos triángulos que son semejantes por criterio ángulo-ángulo-ángulo, sin embargo, a la hora de calcular las proporciones de las medidas de los lados homólogos no existe una razón exacta en común:



$$\frac{AB}{DE} = \frac{4,1}{5,3} = 0,773584 \ldots$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3,6}{4,7} = 0,765957 \ldots$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{4,3}{5,5} = 0,781818 \ldots$$

En este caso lo que ocurrió es que se construyeron dos triángulos semejantes de razón 0,7, pero al mostrar las medidas de los lados se redondeó a un decimal; esto hace que a la hora de comprobar las proporciones no coincidan. Lo mismo puede ocurrir al redondear la medida de los ángulos; puede que la suma de los ángulos internos del triángulo no sea 180°. Es por esto que hay que tener cuidado y prevenir a los estudiantes de que puede ocurrir esta situación. Además, el software permite cambiar la cantidad de cifras a redondear si fuera necesario o pertinente.

2. También, los software de geometría dinámica no trabajan con centímetros o alguna otra medida de longitud, por lo que al insertar una imagen se debe buscar que las dimensiones (en centímetros) de la fotografía coincidan con el valor de las unidades predeterminadas del software. Si los estudiantes no toman esto en consideración pueden entrar en confusión y cometer errores en la solución del problema. Además, pueden perder credibilidad del software debido a que los datos que encontraron por medio de cálculos no son los mismos que encontraron por medio del software.

3. El estudiante puede establecer conjeturas apresuradas al visualizar la ocurrencia de alguna característica o propiedad en pocos ejemplos realizados. Para esto es importante que el docente esté preparado para efectuar algunas preguntas que cuestionen los supuestos que plantea el estudiante o inclusive contraejemplos que refuten sus afirmaciones.

4. Puede ocurrir que los estudiantes tengan dificultades en el proceso de búsqueda de conjeturas. Para esto el docente debe tener preparado una serie de preguntas generadoras que orienten la acción del estudiante sin brindarle de forma directa las respuestas; las preguntas pueden hacerse de forma oral o mediante la elaboración de una guía escrita donde se deban llenar información referente al problema. Por ejemplo, de acuerdo a la aplicación se puede llenar la siguiente tabla de datos:

Si la medida de	Entonces la medida de	
RT= 3,71	R’T’= _____?	T’H’=____?
k= 2,2	R’T’= _____?	R’H’=____?
m∠T’= 120º	m∠T= _____?	m∠F= ____?
m∠H= 35º	m∠H’= _____?	m∠T= _____?

5. El software de geometría dinámica puede convertirse en un obstáculo para que los estudiantes entiendan la necesidad e importancia de la demostración deductiva, ya que la agilidad y rapidez con que los estudiante observan ejemplos diversos hace que adquieran un grado de convencimiento de la veracidad de las conjeturas tan alto que no la consideran necesaria. Es por esto que este tipo de actividades deben potenciar procesos de argumentación y demostración de las propiedades. Los estudiantes no pueden quedarse con sólo la verificación de las conjeturas por medios inductivos; el profesor debe brindar al estudiante explicaciones con fundamentación y precisión matemática como forma de comprender por qué sus conjeturas son verdaderas.

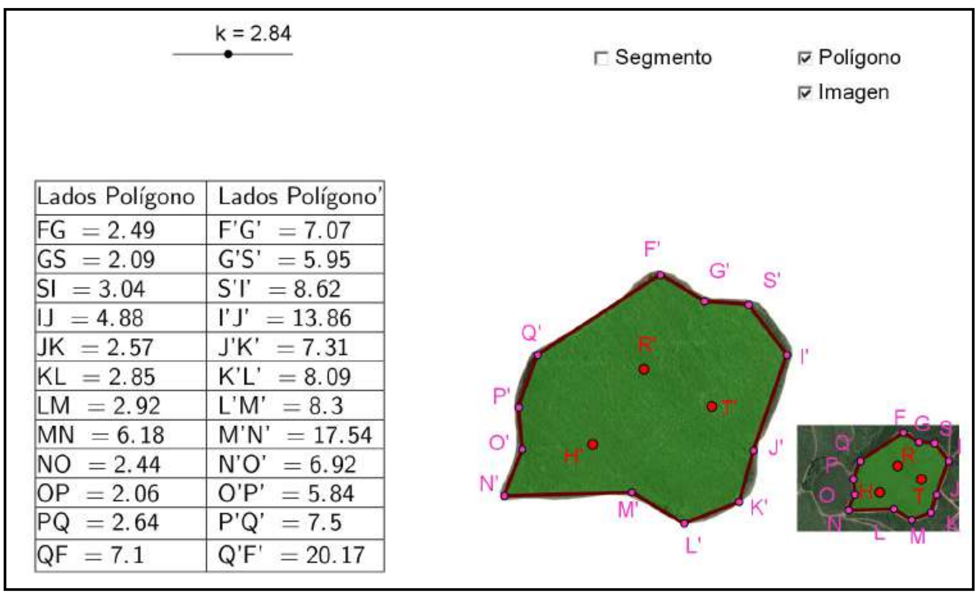
Durante esta actividad, se pueden activar varios procesos matemáticos centrales. Por ejemplo, debido a que el concepto de escalas está explícito en la solución del problema se activa el proceso *Conectar* con el área de *Medidas*.

También, el proceso *Representar* se evidencia al realizar representaciones gráficas tanto del terreno como de la homotecia del mismo. También se activa al modelar las distancias entre las tomas de agua por medio de segmentos que forman un triángulo. Además, se pueden hacer representaciones tabulares que tienen la particularidad de ser sensibles a la manipulación de objetos dinámicos como el *deslizador k* o los vértices del triángulo RTH.

Al ser una actividad de exploración es importante que los estudiantes manifiesten sus hallazgos y suposiciones, para que gradualmente de forma conjunta se vayan construyendo los conceptos matemáticos. Por lo que el proceso *Comunicar* es muy importante ya que con base a éste el docente podrá orientar el proceso de descubrimiento.

Asimismo, cuando se busca la solución al problema, no sólo se pretende dar resultados numéricos, sino argumentar cada supuesto y desarrollo realizado. Esto implica potenciar el proceso *Razonar y argumentar*, ya que los estudiantes no pueden quedarse con sólo la verificación de las conjeturas por medios inductivos; sino también, elaborar sus pruebas empleando argumentos matemáticos.

Como se apreció en el desarrollo de esta actividad, existen muchas oportunidades de activar el proceso *Plantear y resolver problemas*. Por ejemplo, el docente puede pedirle adicionalmente a los estudiantes crear un modelo del terreno utilizando un polígono, con el propósito de evaluar por medio de una tabla dinámica las proporciones entre los lados del modelo del terreno y su homotecia cuando varía *k*.



Lados Polígono	Lados Polígono'
FG = 2.49	F'G' = 7.07
GS = 2.09	G'S' = 5.95
SI = 3.04	S'I' = 8.62
IJ = 4.88	I'J' = 13.86
JK = 2.57	J'K' = 7.31
KL = 2.85	K'L' = 8.09
LM = 2.92	L'M' = 8.3
MN = 6.18	M'N' = 17.54
NO = 2.44	N'O' = 6.92
OP = 2.06	O'P' = 5.84
PQ = 2.64	P'Q' = 7.5
QF = 7.1	Q'F' = 20.17

Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

Indicaciones metodológicas

1. En este tipo de actividades el papel de la conjetura es primordial. Primero, el estudiante realiza una exploración del problema y de la aplicación si está antes elaborada, sino se partirá de la guía de construcción. Posteriormente, con la manipulación de los objetos dinámicos se iniciará con la formulación de conjeturas, para luego proceder con la verificación de las mismas a través de la observación de casos particulares (debe quedar completamente claro que la verificación de casos particulares hace más creíble la conjetura, pero que no demuestra la propiedad que se propone), luego se desarrollará la argumentación y finalmente la demostración de algunas de las conjeturas.

2. Es importante entender que algunas de las conjeturas que se realicen no serán correctas, aquí juega un notable papel el contraejemplo. Es significativo que los estudiantes puedan brindar contraejemplos que permitan rechazar o variar alguna conjetura que no sea acertada en todos los casos; es por esto que el docente debe darle un papel didáctico sustancial al error, ya que permite detectar dónde hay mayores dificultades de aprendizaje y visualizar mejores formas de abordar un conocimiento particular.

3. El docente debe tener claro que no se quiere desarrollar las habilidades de semejanza y congruencia de triángulos por separado, sino más bien hacer la relación y la diferenciación entre ambos conceptos. Es por esto que el problema pretende que los estudiantes logren inferir que si un triángulo es el resultado de la homotecia de otro, ambos triángulos se definirán como semejantes y que en particular si la razón de la homotecia es 1 o -1 entonces los triángulos serán congruentes. Por lo tanto, lo que se quiere es estudiar la congruencia de triángulos como un caso particular de semejanza.

4. Este problema puede ampliarse a un contexto de coordenadas cartesianas, esto enriquece el trabajo y ayuda en la adquisición de las habilidades.

5. El problema planteado puede efectuarse, usando la tecnología, en tres contextos diferentes de aula de acuerdo a la posibilidad de recursos con los que cuente el docente:
   - **Opción 1:** En un laboratorio de informática se le puede proporcinar al estudiante una guía previamente elaborada, que contenga algunas indicaciones técnicas respecto a las construcciones (si fuera necesario) y una serie de preguntas generadoras que orienten y potencien la exploración y la conjetura en el estudiante. En esta opción el estudiante construye creativamente la solución del problema. Ésta estrategia fue la que se mostró en esta actividad.
   - **Opción 2:** En un laboratorio de informática el docente le presenta al estudiante una aplicación terminada y una guía de tal forma que las figuras y elementos dinámicos antes construidos permitan al estudiante explorar mediante la manipulación de objetos la solución del problema e inferir por medio de preguntas generadoras los conceptos que se querían desarrollar. Esta aplicación y la guía debe ser diseñada por el docente con anterioridad y puede presentar elementos que se puedan ocultar y mostrar, y recursos

adicionales como por ejemplo un transportador dinámico para la medición de ángulos.

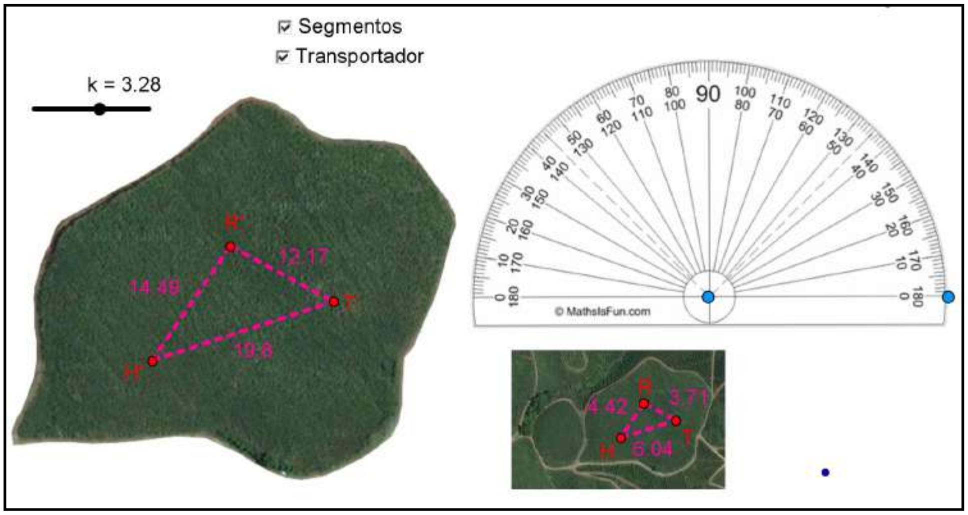
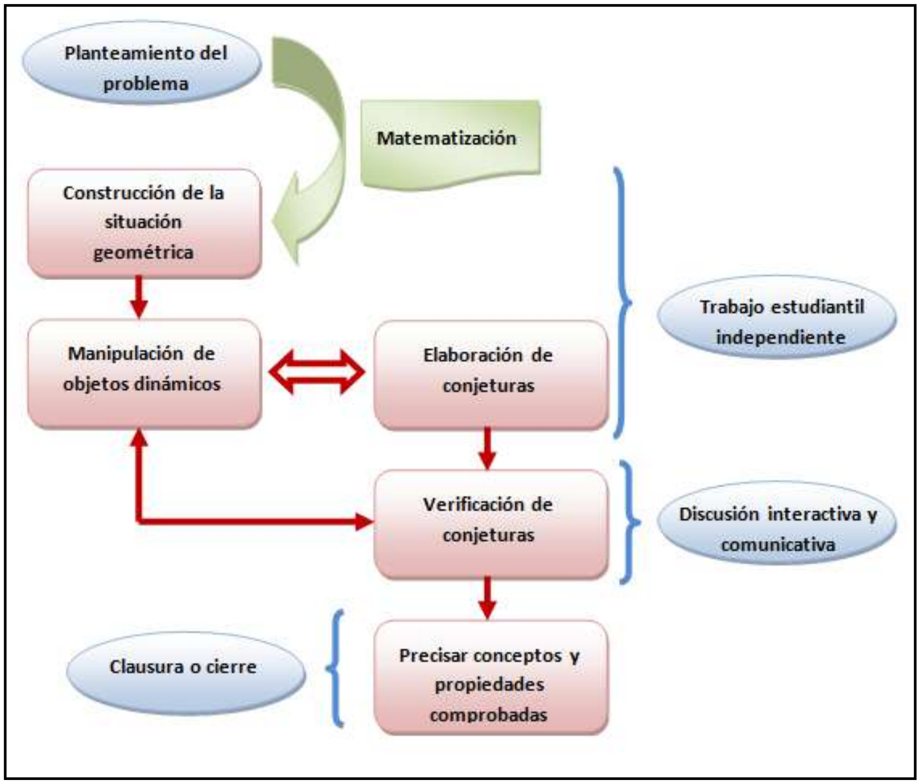


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

- **Opción 3:** Aunque lo deseable sería trabajar en un laboratorio de informática; con una computadora y un proyector de multimedia disponible en el aula se puede realizar un proceso inductivo en donde el docente manipule los objetos dinámicos de tal forma que los estudiantes puedan elaborar y verificar sus propias conjeturas y poder así llegar a una fase de discusión que permita un cierre pedagógico del tema a desarrollar.

Consideraciones finales

Como se expuso en el análisis del problema, el uso de software de geometría dinámica presenta diferentes formas de introducir temas mediante procesos inductivos que abren paso para una evolución de significados; se pasó de la intuición geométrica al proceso deductivo, esto se puede resumir con el siguiente esquema:



Elaboración propia

En este esquema de aprendizaje los estudiantes emprenden una travesía educativa que inicia con una exploración gráfica y dinámica, estudiando el comportamiento de objetos geométricos y de las relaciones existentes entre ellos. Este proceso empírico puede ayudarles a comprender conceptos y procedimientos matemáticos y a sentir la necesidad de realizar justificaciones y así activar el proceso *Razonar y argumentar*.

Además, con este tipo de actividades se toma en cuenta las diferentes características asociadas a la forma y ritmo con que los estudiantes aprenden.

Bibliografía

Grimaldi, R. (1998). Matemáticas Discreta y Combinatoria. México: Addison Wesley Longman.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. Noveno simposio de la sociedad española de educación matemática, SEIEM. Departamento de matemática. Universidad de Valencia.

Itzcovich, H. (coord.) (2007). La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Buenos Aires: Aique

MEP (2012). Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas. San José: Autor.

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Luis Hernández

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Angel Ruiz,
Marianela Zumbado
Miguel González

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Imagen de señal de “check” en color verde cortesía de

“digilart” en FreeDigitalPhotos.net

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Software de geometría dinámica para la Educación Secundaria.* San José, Costa Rica: autor.