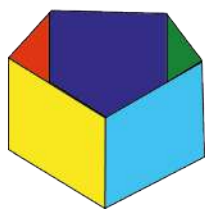


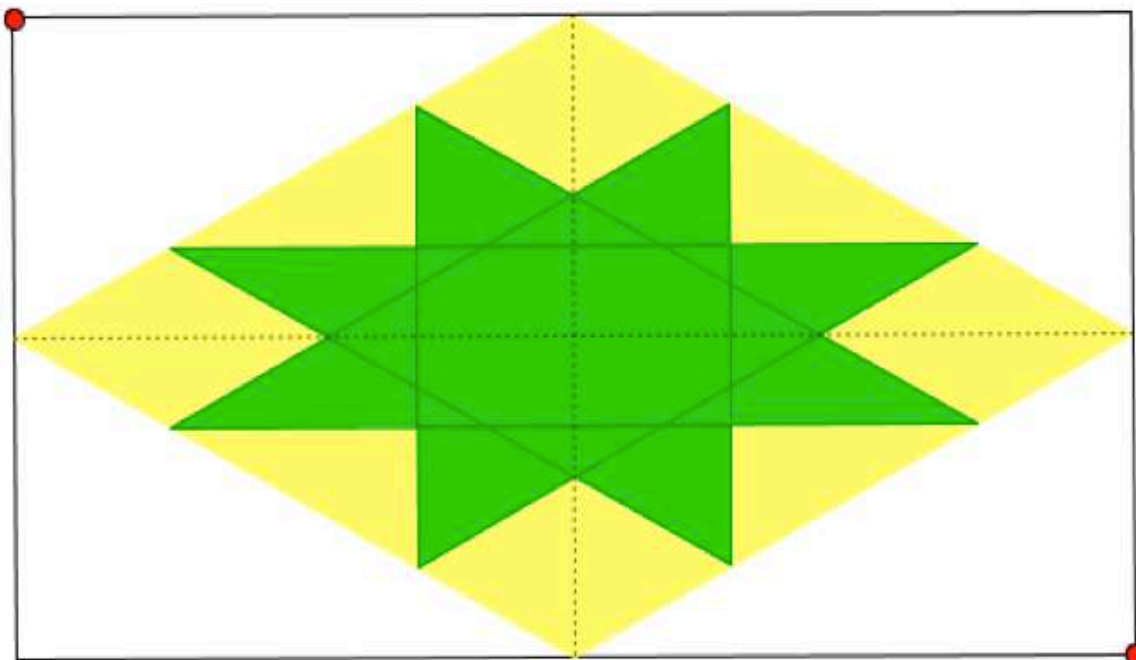
# Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica



[www.reformamatematica.net](http://www.reformamatematica.net)



## Software de geometría dinámica para Educación Primaria



Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria:  
Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.

2013

## Introducción

El uso apropiado de la tecnología juega un papel substancial en el enfoque de *Resolución de problemas en contextos reales*, ya que hace posible modelar situaciones y reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema, así como redefinir las estrategias que se pueden diseñar.

El propósito de esta *Unidad* es introducir, mediante este enfoque el uso apropiado del *software de geometría dinámica* en procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con el estudio de este tipo de software se quiere incorporar en la acción educativa una geometría en movimiento. Esto no sólo favorece la representación matemática múltiple, sino también constituye recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje.

Sin embargo, si bien es cierto que las tecnologías pueden ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático, la utilización de tecnologías **no conduce necesariamente** al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos.

Esto implica que el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados. No debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa. En la Educación Primaria parece primordial priorizar la manipulación: construir, recortar, medir, pegar, colorear a mano. No se puede prescindir de estas etapas necesarias para la formación del estudiante.

Estos nuevos retos y escenarios didácticos hacen trascendental una preparación docente basada no sólo en la parte técnica del uso de la herramienta sino en el uso didáctico que se ve potencializado, ya que muchos de los problemas y tareas educativas que se planteaban antes, se ven transformados cualitativamente y modifican el significado de la labor de aula y la acción docente.

Por lo anterior, es importante aclarar que en la presente *Unidad* se expone una serie de elementos didácticos y metodológicos bajo una perspectiva pedagógica y no técnica; por lo que la misma debe estudiarse bajo dicha visión. No obstante, se mencionan ciertos elementos técnicos que serán explicados y desarrollados en la *Unidad Virtual de Aprendizaje UVA* respectiva.

Es por esto que la *Unidad* no se debe estudiar de forma separada a la *UVA*; son materiales complementarios que junto con los ejercicios de autoevaluación forman un módulo de aprendizaje que será evaluado de forma integral.

## Tabla de contenidos

Introducción .....	2
Problema .....	4
Análisis del problema .....	4
Indicaciones metodológicas .....	16
Consideraciones finales.....	19
Bibliografía .....	20
Créditos .....	21

## Problema

Sebastián y un grupo de compañeros van a participar con un partido político en las elecciones estudiantiles de su escuela. Ya tienen el nombre de su partido: PECES que significa Partido Estudiantil con Conciencia Ecológica y Solidaridad; también tienen definido dos colores y el diseño de su bandera. Los colores que escogieron son el verde que simboliza su propuesta ecológica y el amarillo la solidaridad que tendrá su gobierno. La bandera es un rectángulo verde con un rombo interior que tiene sus vértices en los puntos medios de los lados del rectángulo. Vea la figura representativa:



Para la campaña política se elaborarán con cartulina satinada banderas de diferentes tamaños, pegando sobre un rectángulo verde el rombo amarillo. Pensando en el mejor aprovechamiento de los materiales, se quiere comprar la cantidad adecuada de material verde y amarillo de acuerdo a las proporciones de la bandera. De acuerdo a la descripción de la bandera y tomando en cuenta que la bandera puede tener diferentes dimensiones, ¿cuánto material amarillo se debe comprar con respecto al verde?

## Análisis del problema

El propósito principal de este problema es construir, mediante un proceso inductivo de manipulación de objetos dinámicos, la fórmula del área de la superficie de un rombo a partir de la del rectángulo.

Adicionalmente, y de forma simultánea el docente puede incorporar en la discusión del problema la importancia de las elecciones estudiantiles, el impacto positivo que puede tener una comunidad estudiantil con conciencia ecológica y explicar en qué consiste el valor de la solidaridad y su importancia en la sociedad. Con esto se logran potenciar los siguientes ejes transversales:

- Cultura Ambiental para el Desarrollo Sostenible
- Vivencia de los Derechos Humanos para la Democracia y la Paz

Para esto se quiere desarrollar integralmente las habilidades específicas de quinto año de educación primaria, concernientes a la estimación y cálculo de áreas de cuadriláteros, específicamente de paralelogramos. Por lo que se puede trabajar de forma conjunta las cinco habilidades específicas que se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 1.

Conocimientos	Habilidades específicas
<b>Área</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Triángulos</li> <li>• Paralelogramos</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Estimar perímetros y áreas de figuras en conexión con objetos del entorno.</li> <li>2. Calcular, utilizando fórmulas, el perímetro y el área de triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios.</li> <li>3. Reconocer figuras simples dentro de una más compleja.</li> <li>4. Calcular perímetros y áreas de figuras planas compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios.</li> <li>5. Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.</li> </ol>

Hay que observar que el problema planteado permite trabajar de forma integral las cinco habilidades propuestas, esto se logra al realizar las siguientes acciones: en la etapa de exploración, el estudiante debe hacer un reconocimiento de figuras simples (rectángulo, rombo) dentro de una compleja (la bandera) e intuitivamente puede iniciar realizando estimaciones referentes a la proporción entre el área del rombo y el área del rectángulo. También, es claro que para la solución del problema es necesario calcular áreas de figuras planas compuestas por triángulos y paralelogramos.

Asimismo, hay que recordar que en este nuevo currículo se asume como eje específico de las Matemáticas *La resolución de problemas como estrategia metodológica principal*; por lo que el docente debe tener claro que la habilidad específica 5 del *Cuadro 1*, se desarrolla simultáneamente en el tratamiento de la actividad, no es un complemento posterior al desarrollo del tema; por ende no se debe dejar para el final, sino trabajarla conjuntamente con las habilidades específicas que las anteceden.

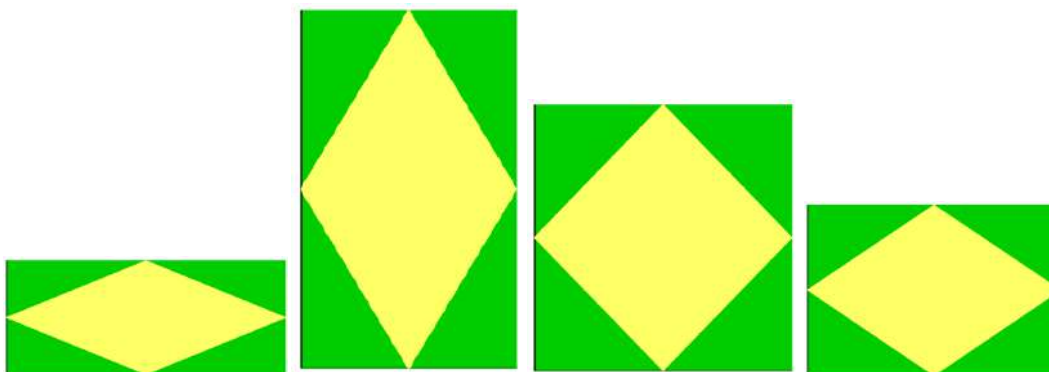
Hay que tener presente que los estudiantes ya han estudiado en cuarto año conceptos básicos de cuadriláteros. Seguidamente se enlistan las habilidades específicas del programa de estudio que ya han sido estudiadas y tienen relación con el problema:

**Cuadro 2**

Conocimientos	Habilidades específicas
<b>Cuadriláteros</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lado</li> <li>• Vértice</li> <li>• Ángulo</li> <li>• Base</li> <li>• Altura</li> <li>• Diagonal</li> <li>• Paralelogramos                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rectángulo</li> <li>- Rombo</li> <li>- Romboide</li> <li>- Cuadrado</li> </ul> </li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identificar diversos elementos de los cuadriláteros (lado, vértice, ángulo, base, altura, diagonal).</li> <li>2. Clasificar cuadriláteros en paralelogramos y no paralelogramos.</li> <li>3. Clasificar paralelogramos en cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.</li> <li>4. Trazar cuadriláteros que cumplan características dadas.</li> <li>5. Reconocer propiedades de cuadriláteros referidas a los lados, los ángulos y las diagonales.</li> <li>6. Resolver problemas que involucren el trazado de diversos tipos de cuadrilátero.</li> </ol>

Para este problema, es necesario que el estudiante conozca previamente la fórmula del área de la superficie del rectángulo. A partir de esta, se pueden definir otras, como la del rombo y la del romboide.

El primer escenario a tomar en cuenta es que las banderas serán elaboradas de diferentes tamaños y proporciones, observe las siguientes imágenes representativas:



Intuitivamente, los estudiantes pueden percibir que hay que comprar más cartulina verde que amarilla, ya que se puede apreciar que el rectángulo tiene mayor superficie que el rombo. No obstante, esto no es suficiente ya que se quiere hacer una compra eficiente de materiales, por lo que hay que saber qué parte de la superficie del rectángulo representa la superficie del rombo y así poder adquirir en esas proporciones los materiales.

El docente, luego de discutir esta situación, puede aprovechar y proponer la siguiente pregunta generadora: *¿Cuánto más de material verde **estiman** que hay que comprar con respecto al material amarillo?*

Con esta pregunta se trabaja la *habilidad específica 1* del cuadro 1, ya que los estudiantes realizan la estimación de una superficie con respecto a otra. Esto además, desarrolla intuitivamente la noción de dependencia e independencia que es muy útil en el área de *Relaciones y Álgebra*. En el trabajo pueden surgir estimaciones como “hay

que comprar el doble de material verde que de amarillo” o “hay que comprar cuatro veces más material verde que de amarillo”. En esta etapa de comprensión del problema se puede potenciar la activación de procesos matemáticos como *Razonar* y *argumentar* y *Comunicar*.

Hay que tener presente que el propósito principal de la actividad no es sólo responder a la interrogante del problema, sino construir la fórmula del área del rombo a partir de la fórmula del rectángulo.

**A considerar:**

Se sabe que es difícil dibujar cualquier figura geométrica en la pizarra, y además, ésta sería estática. También, es posible trabajar con material concreto utilizando dobleces de papel, pero la construcción de varias banderas haría un poco extenso el proceso, dejando poco tiempo para el análisis.

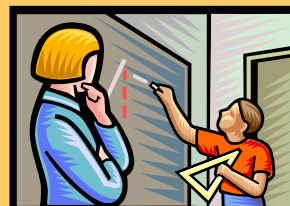


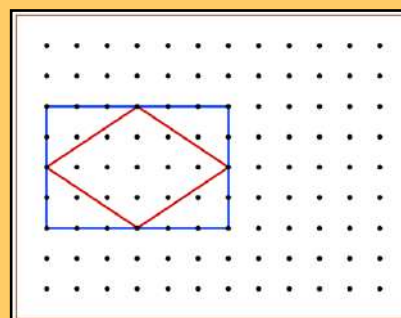
Imagen prediseñada de Microsoft Word 2007

Para las anteriores opciones, la construcción correcta de la bandera requiere de un buen manejo de instrumentos geométricos e invertir gran cantidad de tiempo en ello; ya que hay que considerar que para la obtención de inferencias para la deducción de una fórmula matemática es necesario analizar gran cantidad de casos particulares.



Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Otra opción es el *geoplano* o también con *trama de puntos* (geoplano de papel). Aunque es un recurso deformable, no presenta tantas ventajas como el software especializado. Sin embargo, el que previamente hayan calculado las áreas con la trama de puntos o geoplano es un excelente punto de partida.



Elaboración propia

Aunque las anteriores opciones proponen la formulación de un *modelo matemático*<sup>1</sup> de la bandera, es necesario que éste sea ágil y rápido; esto quiere decir que se puedan variar las dimensiones de la bandera de forma sencilla, inmediata y conservando sus características geométricas.

Por otra parte, la gran cantidad de casos particulares que se pueden generar mediante un *software de geometría dinámica*<sup>2</sup> nutren la elaboración de conjeturas y agiliza la solución

<sup>1</sup>Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de cierta forma, un fenómeno estudiado o un problema o situación real. (MEP, 2012, p. 474)

<sup>2</sup> Software que permite el “trazado” de figuras dinámicas, o sea que se pueden manipular conservando las relaciones geométricas que estuvieron presente en su construcción.

del problema que para los propósitos didácticos es muy valioso, ya que dan espacio para la activación de procesos de *Representar*, *Razonar* y *argumentar* y *Comunicar*.

A continuación se describen las etapas de un proceso de aprendizaje inductivo utilizando como recurso el software de geometría dinámica.

Primero el o los estudiantes deberán realizar la *Construcción de la situación geométrica* planteada en el problema utilizando el software de geometría dinámica. Esto implica un proceso de *Matematización* (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) del problema.

En esta fase existe un período de exploración donde puede ser que los estudiantes no hagan construcciones con el rigor matemático que exige el problema. Aunque esto no parezca eficiente, es muy significativo en cuanto al desarrollo de un modelo geométrico y al repaso de propiedades de los paralelogramos.

Sin embargo, en algún momento de esta fase, el estudiante deberá “trazar” un rectángulo (cuadrilátero con sus ángulos internos de  $90^\circ$ ) de tal forma que sin importar la manipulación de la figura se guarden sus características. Esto se puede hacer por medio del recurso destinado para el trazado de rectas perpendiculares:

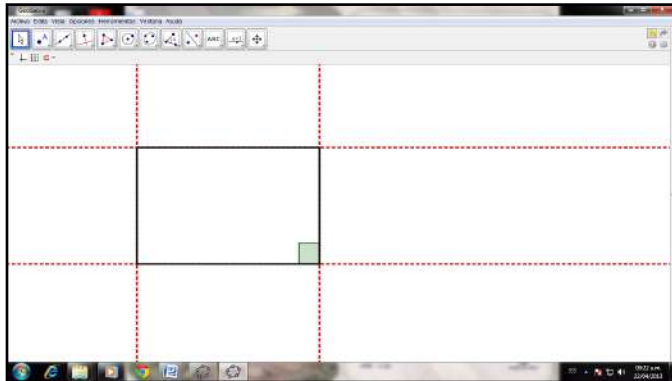


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

El software especializado tiene la ventaja de obtener de forma precisa y rápida la construcción de rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto medio de un segmento, etc.

Además, al construir el rombo, no es acertado ubicar sus vértices aproximando el punto medio de cada lado del rectángulo. Los software de geometría dinámica tienen este recurso y hacen que sin importar el arrastre de objetos el punto siempre buscará estar situado en el medio del segmento.

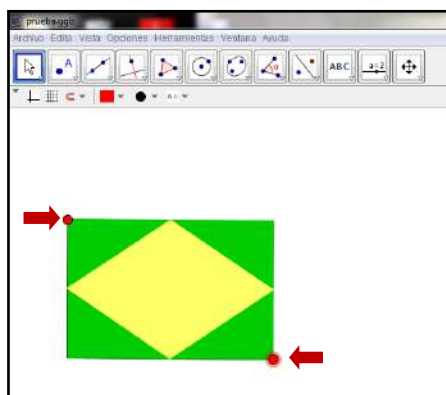
También, hay que entender que no se busca trabajar con un modelo estático; por lo que hay que buscar un mecanismo donde se puedan variar las dimensiones de la bandera conservando sus características y con base a esto elaborar algunas conjeturas. El estudiante debe verificar que la construcción que acaba de realizar es correcta sin importar el arrastre.

La segunda función del arrastre que descubren los estudiantes cuando empiezan a aprender a manejar un programa de geometría dinámica, después de la función inicial de modificar un dibujo, es la de verificar que la construcción que acaban de realizar es correcta. (Gutiérrez, 2005, p.8)



Si la construcción de la situación geométrica es rigurosa, no importa el arrastre. Uno de los mecanismos que se puede utilizar es que dos de los vértices del rectángulo tengan libertad de movimiento, y así permitan variar el largo y el ancho del rectángulo (esto se aprenderá en la UVA respectiva).

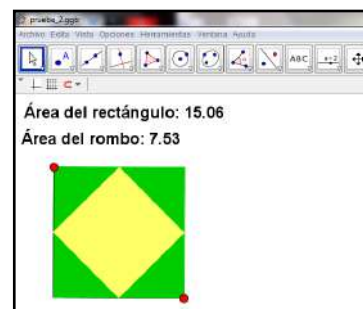
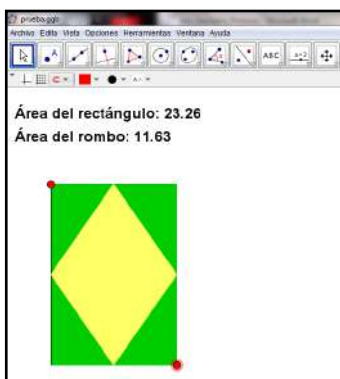
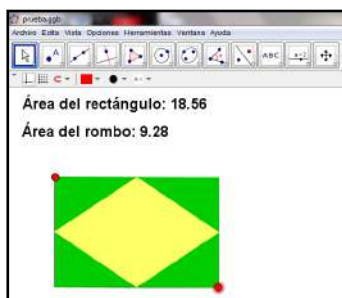
En la imagen de la derecha se identifican por los puntos rojos.



La fase de *Manipulación de los objetos dinámicos* se desarrolla de manera simultánea a la de *Elaboración de conjeturas*; debido a que una *conjetura*<sup>3</sup> puede modificarse o revisarse mediante la orientación del profesor, lo que exigirá que el estudiante vuelva a la etapa de exploración de la situación.

El arrastre de objetos en la pantalla del ordenador es la característica más peculiar del software de geometría dinámica. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo de la pantalla para convertirlo en otro dibujo asociado a la misma figura (realmente lo convierte en una sucesión casi continua de dibujos). La modificación continua como elemento didáctico favorecedor del aprendizaje, que supera las limitaciones del aprendizaje en contextos de lápiz/tiza y papel/pizarra, no es nuevo, pues siempre se han utilizado modelos articulados o deformables para representar determinados conceptos o propiedades matemáticas. Lo que sí es nuevo es la gran libertad de movimientos y transformación que permite el software de geometría dinámica. (Gutiérrez, 2005, p.8)

No obstante, muchas veces el arrastre de objetos no es suficiente para la elaboración de conjeturas. En este caso, es necesario conocer la medida del área de la superficie del rectángulo y del rombo para poder intuir algún patrón de comportamiento entre la proporción entre áreas. En las siguientes imágenes se muestra algunos ejemplos que pueden darse con la manipulación de las dimensiones de la bandera:



Imágenes elaboradas con GeoGebra 4.2

<sup>3</sup>Itzcovich (2007; p.17) sostiene que la idea de la conjetura “es la producción de una ‘sospecha’, de un ‘parecer’, producto de una experiencia de trabajo”.

Luego de manipular dinámicamente el modelo matemático de la bandera, y así poder analizar gran variedad de casos, el estudiante puede conjeturar que el área de la superficie del rectángulo es el doble de la del rombo o que el área de la superficie del rombo es la mitad de la del rectángulo.

Las medidas del área de las superficies del rectángulo y el rombo fueron redondeadas por el software a dos decimales. Hay que tener cuidado con esta situación ya que algunas veces esto puede obstaculizar la elaboración de conjeturas puesto que distorsiona los datos.

Si el estudiante presentara dificultades para elaborar conjeturas, el docente puede proporcionarle una tabla como la siguiente que le puede servir para orientar su aprendizaje. Tomando los ejemplos de las imágenes anteriores se tiene:

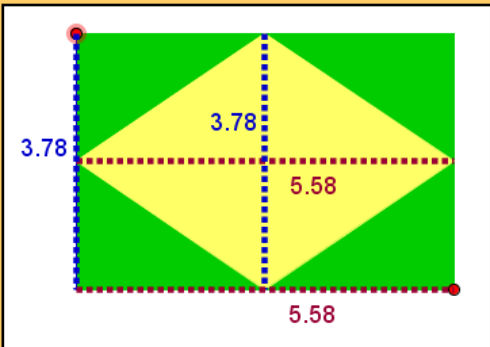
Área del rombo <i>a</i>	Área del rectángulo <i>b</i>	Razón <i>a/b</i>
9,28	18,56	1/2
11,63	23,26	1/2
7,53	15,06	1/2
...	...	...

Debido a que el área de la superficie del rombo es la mitad del área de la superficie del rectángulo; entonces se puede plantear la siguiente pregunta generadora:

*Si el área del rectángulo es Largo × Ancho entonces, ¿cuál sería una fórmula para el área de la superficie del rombo de la bandera, conociendo el largo y ancho del rectángulo?*

Se espera que el estudiante pueda hacer el siguiente análisis: Si el área del rombo es la mitad de la del rectángulo y la fórmula del área del rectángulo es *Largo × Ancho* entonces el área del rombo sería  $(Largo \times Ancho) \div 2$ .

Seguidamente, se puede precisar la fórmula del área del rombo definiendo sus diagonales y relacionándolas con el largo y el ancho del rectángulo. Utilizando el software es sencillo mostrar que la medida de un lado del rectángulo es congruente con el segmento paralelo que representa la diagonal del rombo.



**Fórmula del área de un rombo**

Área del rombo con vértices en los puntos medios de los lados de un rectángulo es igual a la mitad del área del rectángulo:

**Área del rombo =  $(L \times A) \div 2 = (D \times d) \div 2$** ; donde *D* es la diagonal mayor y *d* es la diagonal menor.

Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

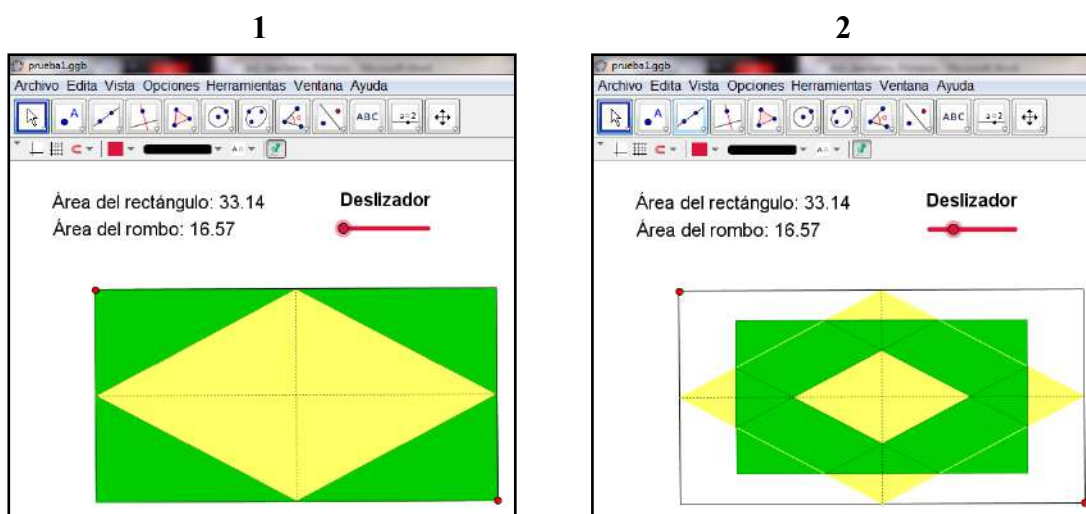
Para lograr el anterior razonamiento el docente debe pedirles a los estudiantes “trazar” las diagonales del rombo y mostrar sus medidas. Posteriormente, se le pide enunciar la fórmula del área de la superficie del rombo en términos de sus diagonales.

Con la manipulación de objetos dinámicos surgirán una serie de conjeturas e inferencias que deben ser verificadas, o refutadas mediante el uso de *contraejemplos*<sup>4</sup>. En esta fase de *Verificación de conjeturas* se le puede pedir al estudiante una prueba visual de la fórmula, o el docente la puede facilitar luego de haber obtenido los resultados esperados.

Seguidamente se le presentará una secuencia de imágenes que representan una prueba visual.

Aquí se utiliza como recurso el *deslizador* o *barra de desplazamiento*<sup>5</sup>, el cual se emplea, en este caso, para trasladar los cuatro triángulos rectángulos verdes hasta superponerlos al rombo.

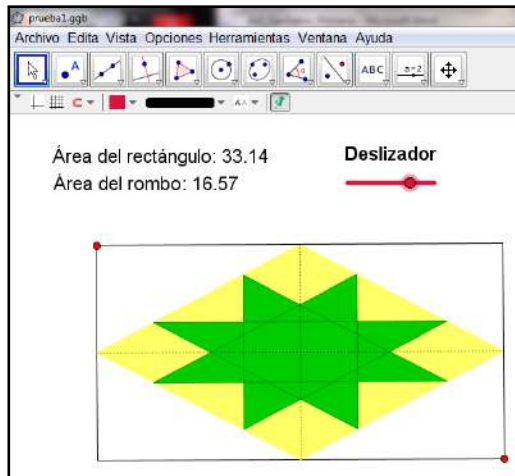
Por ejemplo, observe que el triángulo verde ubicado en la esquina superior izquierda del rectángulo, con forme se arrastra el punto rojo del deslizador hacia la derecha, este se desplaza o traslada de forma diagonal hasta ubicarse en la parte inferior derecha del rombo (el vértice del ángulo recto del triángulo se ubica en el centro del rombo). Al mismo tiempo, el triángulo verde ubicado en la esquina inferior izquierda del rectángulo se desplaza de forma diagonal hasta ubicarse en la parte superior derecha del rombo.



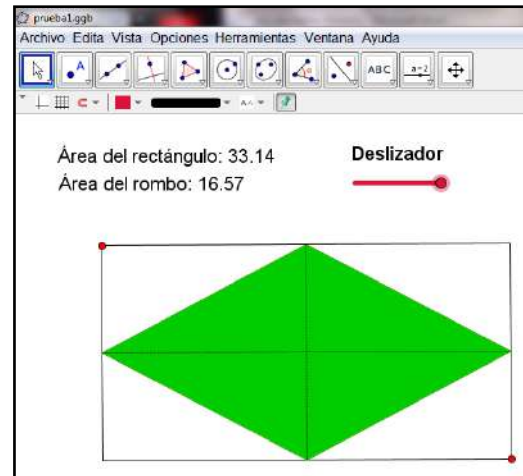
<sup>4</sup>Según afirma Grimaldi(1998; p. 94) el contraejemplo es “un caso que desaprueba algo que podríamos haber considerado como un argumento válido”.

<sup>5</sup>Puede conocer más acerca del uso de este recurso en GeoGebra en el sitio [http://www.academia.edu/1131388/Uso\\_de\\_Deslizadores\\_en\\_Geogebra](http://www.academia.edu/1131388/Uso_de_Deslizadores_en_Geogebra)

3



4



Imágenes elaboradas con GeoGebra 4.2

Otra prueba visual que se podría exponer consiste en dividir el rombo en cuatro triángulos manipulables y arrastrar las piezas (trasladándolas) formando el rectángulo. Se apreciará que con dos rombos congruentes, el original y el otro dividido en 4 triángulos se obtiene el rectángulo.

Al trabajar con algún software de geometría dinámica puede ocurrir que los estudiantes al observar gran cantidad de casos particulares adquieran un grado de convencimiento de la veracidad de las conjeturas tan alto que no consideren necesaria una demostración o explicación matemática del porqué de las mismas.

Por lo anterior, es necesario que el docente aproveche estos recursos dinámicos no sólo para contestar las preguntas del problema sino para activar el proceso *Razonar y argumentar*.

✓ Otra prueba visual que se podría exponer consiste en dividir el rombo en cuatro triángulos manipulables y arrastrar las piezas (trasladándolas) formando el rectángulo. Se apreciará que con dos rombos congruentes, el original y el otro dividido en 4 triángulos se obtiene el

Los estudiantes no pueden quedarse con sólo la verificación de las conjeturas por medios inductivos; el profesor debe brindar al estudiante explicaciones con fundamentación y precisión matemática como forma de comprender por qué sus conjeturas son verdaderas. Por ejemplo, una explicación matemática es que dividan el rombo de la bandera en cuatro triángulos rectángulos y calculen el área de uno de los triángulos y luego la multipliquen por cuatro:

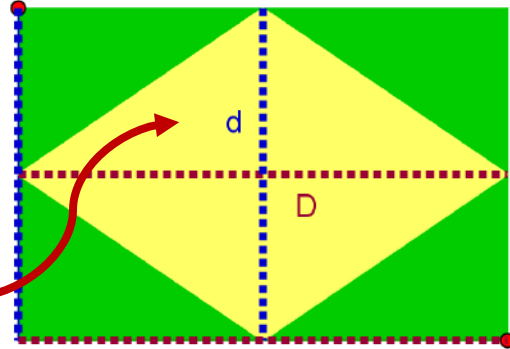
Si  $D$  representa la medida de la diagonal mayor y  $d$  la medida de la diagonal menor entonces la base de uno de los triángulos rectángulos amarillos es  $D/2$  y su altura  $d/2$ .

El área de uno de los triángulos rectángulos amarillos es:

$$\left(\frac{D}{2} \times \frac{d}{2}\right) \div 2$$

$$\frac{D \times d}{4} \div 2 = \frac{D \times d}{4} \div \frac{2}{1}$$

$$\frac{D \times d \times 1}{4 \times 2} = \frac{D \times d}{8}$$



Ahora como el rombo está compuesto por cuatro triángulos congruentes entonces la fórmula del área de su superficie es:

$$A = 4 \times \frac{D \times d}{8} = \frac{4 \times D \times d}{8} = \frac{D \times d}{2}$$

Otra estrategia es observar los dos pares de triángulos isósceles y de ahí calcular el área del rombo.

Por ejemplo

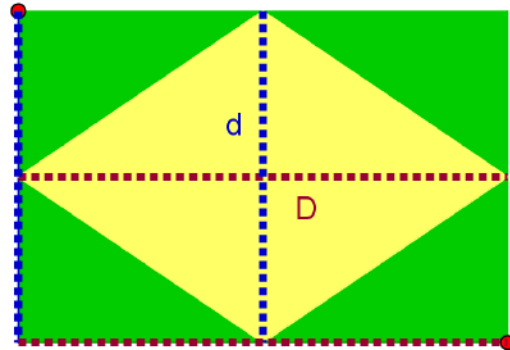
$$\left(D \times \frac{d}{2}\right) \div 2$$

$$A = 2 \times \frac{D \times d}{4} = \frac{2 \times D \times d}{4} = \frac{D \times d}{2}$$

O bien

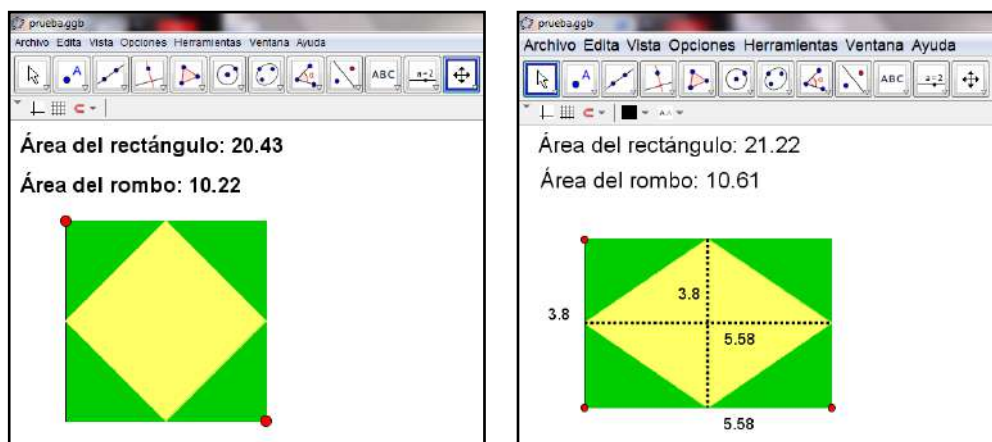
$$\left(d \times \frac{D}{2}\right) \div 2$$

$$A = 2 \times \frac{d \times D}{4} = \frac{2 \times d \times D}{4} = \frac{D \times d}{2}$$



Cuando se trabaja con un software de geometría dinámica, pueden presentarse errores en la interpretación de la información y generar inferencias equivocadas:

1. El principal error que puede ocurrir utilizando este tipo de software es que el estudiante saque conjeturas apresuradas al visualizar la ocurrencia de alguna característica o propiedad en pocos ejemplos realizados. Para esto, es importante que el docente esté preparado para efectuar algunas preguntas que cuestionen los supuestos que plantea el estudiante o inclusive contraejemplos que refuten sus afirmaciones erróneas.
2. Hay que tener cuidado con el redondeo de medidas, ya que ocasionan distorsiones en la información y pueden confundir al estudiante. Por ejemplo, en la imagen de la izquierda se puede notar que el doble del área del rombo no coincide exactamente con el área del rectángulo y en la imagen de la derecha el área del rectángulo no coincide exactamente con el producto de sus dimensiones.



Imágenes elaboradas con GeoGebra 4.2

En ambos casos lo que ocurrió es que el software redondeó a dos decimales; esto no quiere decir que el software tenga problemas o que la construcción sea incorrecta. Es por esto que hay que tener cuidado y prevenir a los estudiantes que puede ocurrir esta situación. Además, el software permite cambiar la cantidad de cifras a redondear si fuera necesario o pertinente.

3. Puede ocurrir que los estudiantes tengan dificultades en el proceso de búsqueda de conjeturas. Para esto el docente debe tener preparado una serie de preguntas generadoras que orienten la acción del estudiante sin brindarle de forma directa las respuestas; las preguntas pueden hacerse de forma oral o mediante la elaboración de una guía escrita donde se debe llenar información referente al problema. La pregunta generadora oral tiene la ventaja que se utilizará con los estudiantes que la requieran sin quitar libertad de pensamiento al que no la requiere. Con la guía todos reciben las mismas orientaciones la requieran o no.
4. El software de geometría dinámica puede convertirse en un obstáculo para que los estudiantes entiendan la necesidad e importancia de probar matemáticamente sus hallazgos, ya que la agilidad y rapidez con que observan

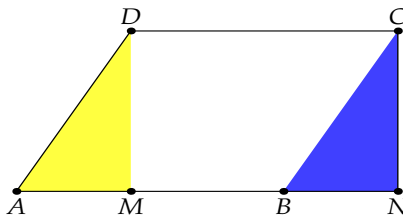
ejemplos diversos hace que adquieran un grado de convencimiento de la veracidad de las conjeturas tan alto que no la consideran necesaria. Por lo que para este tipo de actividades se deben potenciar los procesos matemáticos centrales *Razonar* y *argumentar* y *Comunicar*.

Durante esta actividad, se pueden activar varios *procesos matemáticos centrales*. Por ejemplo, hay que tomar en cuenta que no sólo se hará una representación gráfica de la bandera, se hará un modelo geométrico dinámico de ella, el cual potenciará el proceso *Representar*.

Del mismo modo, al estudiar el comportamiento del área del rombo en función del área del rectángulo y variar las dimensiones de la bandera, se introduce intuitivamente la noción de dependencia e independencia que es muy útil en el área de *Relaciones y álgebra*, esto evidencia la activación del proceso *Conectar*. También se crea conexión con la asignatura de Estudios Sociales en el tema de elecciones estudiantiles y en temas tan importantes como la conciencia ecológica y la solidaridad.

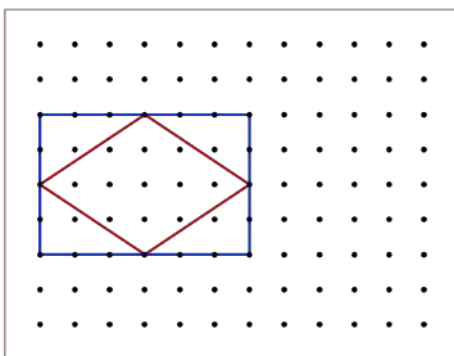
Al ser una actividad de exploración, es importante que los estudiantes manifiesten sus hallazgos y suposiciones, para que gradualmente de forma conjunta se vayan construyendo los conceptos matemáticos. Este proceso *Comunicar* es muy importante ya que con base a éste, el docente podrá orientar el proceso de aprendizaje. No obstante, es necesario que el proceso *Comunicar* esté vinculado al proceso *Razonar* y *argumentar*, ya que cuando se busca la solución al problema, no sólo se pretende indicar la respuesta a lo que se pregunta, sino justificar cada supuesto y desarrollo realizado. Los estudiantes deben elaborar y comunicar sus argumentos de tal forma que tengan sustento matemático.

Asimismo, la actividad posibilita activar el proceso *Plantear y resolver problemas*. Por ejemplo, con base a esta se le puede proponer a los estudiantes encontrar la fórmula del área del romboide a partir de un rectángulo con igual base y altura.



## Indicaciones metodológicas

1. En este tipo de actividades el papel de la conjetura es primordial. Primero, en la exploración del problema se realiza una estimación de la razón del área del rectángulo con respecto a la del rombo. Posteriormente, con la manipulación de los objetos dinámicos y estudio de casos particulares se formularán una serie de conjeturas; para luego proceder con la verificación de las mismas a través de la discusión y argumentación. Debe quedar claro que la verificación de casos particulares hace más creíble la conjetura, pero que no la demuestra.
2. En caso de no contar con tecnología disponible, se puede replantear la actividad para utilizar otros materiales, como el *geoplano*. Por ejemplo, utilizando el geoplano y ligas de colores se le pide al estudiante que construya, con una liga, un rectángulo de 6 unidades de largo y 4 unidades de ancho. Luego con una liga de otro color, construya un cuadrilátero cuyos vértices estén en los puntos medios (clavos) de los lados del cuadrilátero. Considere la siguiente figura ilustrativa:



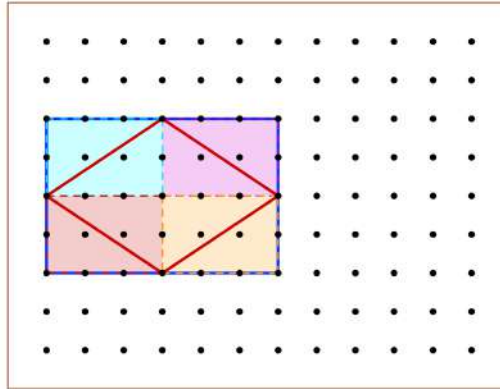
Para orientar el trabajo estudiantil se pueden plantear las siguientes preguntas generadoras:

- a. ¿Qué características presenta la figura formada por la liga roja?
- b. ¿Qué fracción representa la superficie encerrada por el cuadrilátero de liga roja con respecto a la superficie que encierra el rectángulo de liga azul? Argumente su respuesta.
- c. Si un cuadro completo representa una unidad de superficie, ¿cuántas unidades de superficie tiene el rectángulo de liga azul y cuántas tiene el cuadrilátero de liga roja?
- d. Si  $L$  representa la longitud del largo del rectángulo y  $A$  la longitud del ancho, entonces represente una fórmula para el área de la superficie encerrada por la liga roja.

Analizando y discutiendo la información brindada pueden surgir estrategias que sorprenden por su originalidad; por ejemplo en la siguiente imagen se muestra como con otras cuatro ligas de diferentes colores se divide el rectángulo en cuatro rectángulos de iguales dimensiones. Esto ayuda a visualizar que el rombo está compuesto por cuatro mitades de los rectángulos menores que conforman el rectángulo mayor. Luego al razonar, cuatro mitades de un



rectángulo menor son equivalentes a dos rectángulos menores, y estos a su vez, son equivalentes a la mitad del rectángulo mayor.



Lo importante es que siempre se logre desarrollar el propósito de la actividad, que en este caso es concluir que la superficie del rombo es la mitad de la superficie del rectángulo, y poder construir la fórmula del área del rombo a partir de la fórmula del rectángulo. Para esto se necesita analizar más casos como este y realizar una buena discusión de los resultados.

3. Es importante entender que algunas de las conjeturas que se realicen no serán correctas, aquí juega un notable papel el contraejemplo. Es significativo que los estudiantes puedan brindar contraejemplos que permitan rechazar o variar alguna conjetura que no sea acertada en todos los casos; es por esto que el docente debe darle un papel didáctico sustancial al error, ya que permite detectar dónde hay mayores dificultades de aprendizaje y visualizar mejores formas de abordar un conocimiento particular.
4. El problema planteado puede efectuarse, usando la tecnología, en tres contextos diferentes de aula de acuerdo a la posibilidad de recursos con los que cuente el docente:
  - **Opción 1:** En un laboratorio de informática se le puede proporcionar al estudiante una guía previamente elaborada, que contenga una serie de preguntas generadoras que orienten y potencien la exploración y la conjetura en el estudiante. En esta opción el estudiante construye creativamente la solución del problema. Ésta estrategia fue la que se mostró en esta actividad.
  - **Opción 2:** En un laboratorio de informática el docente le presenta al estudiante una aplicación terminada y una guía de tal forma que las figuras y elementos dinámicos estén antes construidos, con el propósito de que el estudiante explore, mediante la manipulación de objetos, la solución del problema e infiera por medio de preguntas generadoras los conceptos que se querían desarrollar. Esta aplicación y la guía deben ser diseñadas por el docente con anterioridad, presentando elementos que se puedan ocultar y mostrar (diagonales del rombo) así como recursos de movimiento como un deslizador.

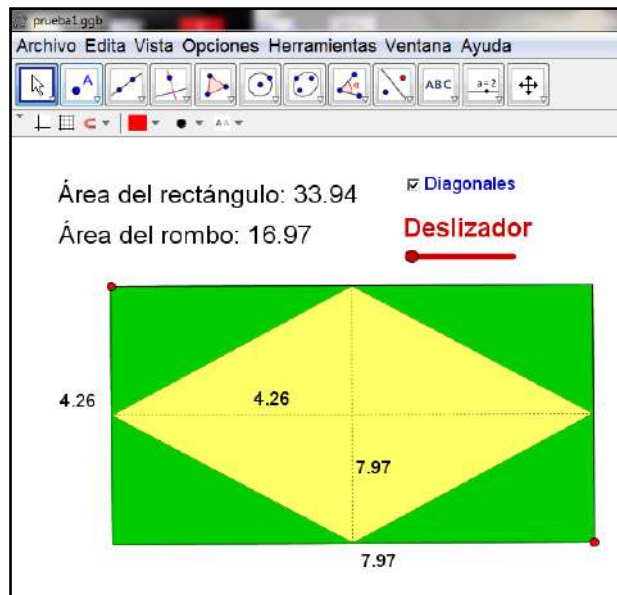
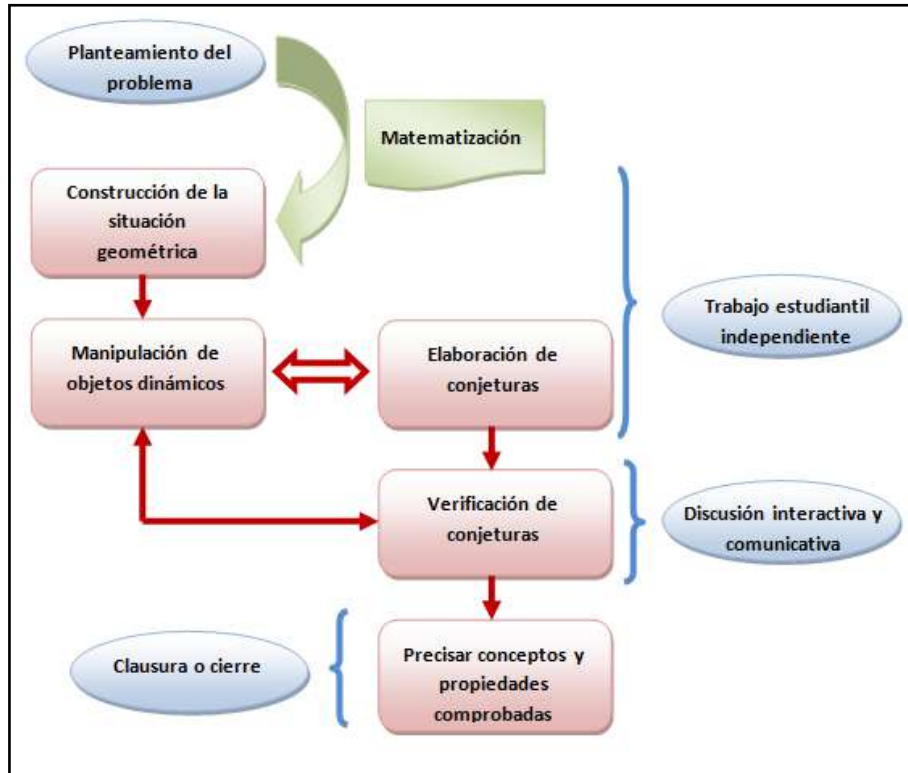


Imagen elaborada con GeoGebra 4.2

- **Opción 3:** Aunque lo deseable sería trabajar en un laboratorio de informática; con una computadora y un proyector de multimedia disponible en el aula se puede realizar un proceso inductivo en donde el docente manipule los objetos dinámicos de tal forma que los estudiantes puedan elaborar y verificar sus propias conjeturas y puedan así llegar a una fase de discusión que permita un cierre pedagógico del tema a desarrollar.

## Consideraciones finales

Como se expuso en el análisis del problema, el uso de software de geometría dinámica presenta diferentes formas de introducir temas mediante procesos inductivos que abren paso para una evolución de significados; se pasó de la intuición geométrica al proceso deductivo, esto se puede resumir con el siguiente esquema:



Elaboración propia

En este esquema de aprendizaje los estudiantes emprenden una travesía educativa que inicia con una exploración gráfica y dinámica, estudiando el comportamiento de objetos geométricos y de las relaciones existentes entre ellos. Este proceso empírico puede ayudarles a comprender conceptos y procedimientos matemáticos y a sentir la necesidad de realizar justificaciones y así activar el proceso *Razonar y argumentar*.

Además, con este tipo de actividades se toma en cuenta las diferentes características asociadas a la forma y ritmo con que los estudiantes aprenden.

## Bibliografía

Grimaldi, R. (1998). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley Longman.

Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica*. Noveno simposio de la sociedad española de educación matemática, SEIEM. Departamento de matemática. Universidad de Valencia.

Iztcovich, H. (coord.) (2007). *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique

MEP (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas*. San José: Autor.

## Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Primaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

### Autor

Luis Hernández

### Editor

Hugo Barrantes

### Editor gráfico

Hugo Barrantes y Miguel González

### Revisores

Ángel Ruiz,  
Marianela Zumbado  
Miguel González  
Javier Barquero  
Grace Vargas  
Christiane Valdy  
Susanne Blais

### Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Ángel Ruiz

### Imagen de señal de “check” en color verde cortesía de

digilart en FreeDigitalPhotos.net

### Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Software de geometría dinámica para Educación Primaria*. San José, Costa Rica: autor.



*Software de geometría dinámica para Educación Primaria* por Ministerio de Educación Pública de Costa Rica se encuentra bajo una Licencia [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)