Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

www.reformamatematica.net

CRUSA Fundación para la cooperación

Uso de calculadora científica para la Educación Secundaria

imagen cortesía de gubgib at FreeDigitalPhotos.net

Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas. 2013

Introducción

El uso adecuado de la calculadora científica, puede ser un elemento importante durante el desarrollo de las lecciones, especialmente, en lo que respecta a la simplificación de los cálculos durante la resolución de problemas, el facilitar la observación de tendencias que reflejan los números por medio de los cálculos realizados, así como la verificación de resultados.


Imagen cortesía de mrpuen en FreeDigitalPhotos.net

El propósito de este módulo es mostrar diferentes usos de la calculadora científica que se pueden dar en el salón de clase, sin caer en abusos que vayan en detrimento del desarrollo de sus habilidades para realizar cálculos con papel y lápiz o mentalmente.

En este módulo se proponen tres problemas que pretenden mostrar tres diferentes usos que se pueden dar a la calculadora. El primer problema propone un análisis más detallado en comparación a los otros dos, donde se menciona la forma en que la calculadora contribuye al desarrollo de la actividad.

Estos usos orientados al estudio de las diferentes áreas matemáticas, facilitan las labores de cálculo durante la resolución de problemas, pero además permiten al docente desarrollar actividades con alguna intencionalidad didáctica. Esto implica que el uso de la calculadora debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro del aprendizaje, y no de la realización de cálculos sencillos o la implementación de trucos que permitan descartar respuestas en los ítems.

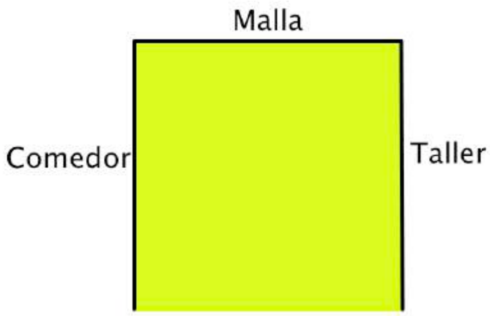
Gran parte de los docentes de secundaria conocen el manejo de una calculadora científica, por lo que en la Unidad virtual de Aprendizaje (UVA) correspondiente a este módulo, no se brindan indicaciones técnicas acerca de su uso. Sin embargo, se introduce una pequeña explicación acerca del uso de las hojas de cálculo en la realización de aproximaciones numéricas pues esto complementa el desarrollo de una de las actividades.

Es importante destacar que las actividades propuestas serán analizadas desde una perspectiva pedagógica. No se brindan elementos técnicos de su uso a menos que así se requiera.

Tabla de contenidos

Problemas

Problema 1



Elaboración propia

En el Colegio de San Juan de Bello Horizonte hay una zona verde donde los estudiantes pueden almorzar y conversar en sus ratos libres. Esta tiene forma cuadrada, posee una superficie de 91 m^2 y se encuentra delimitada por el taller de industriales, el comedor y una malla, según se muestra en la ilustración de la izquierda.

Como al frente delimita con el parqueo del colegio, la Junta de padres desea plantar árboles de la zona en línea recta con el afán de impedir que los vehículos se estacionen dentro de la zona verde. Aunque se sabe que bastaría con tomar una cinta métrica y medir la longitud necesaria para su construcción, la profesora de Matemáticas quiere aprovechar esta situación para introducir un tema matemático y retar a sus estudiantes para que averigüen cuánta distancia disponen para la siembra de dichos árboles. Ganará el que dé una mejor aproximación con la mayor cantidad de cifras decimales que permita la calculadora.

Problema 2

Cada medicamento tiene un rango de efectividad. Existe una dosis mínima efectiva y una dosis máxima. Si un medicamento se toma por debajo del mínimo entonces no va a producir beneficios. Si se toma por encima del máximo no sólo se expone a sufrir los efectos secundarios sino que se puede llegar a situación de toxicidad.

Para la correcta prescripción se toman en cuenta múltiples factores. Uno de ellos es la cantidad de fármaco en el cuerpo. Lea cuidadosamente el siguiente caso:

Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por $\mathrm{A(t)} = 10 \cdot 0{,}8^{\mathrm{t}}$.

a) Calcule la cantidad del fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial.
b) ¿Qué porcentaje de medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora?
c) ¿Después de cuánto tiempo queda en el cuerpo 0,225 mg de medicamento?

Problema 3

Determine la cifra de las unidades del número 2^{2013}.

Análisis de los problemas

Análisis del problema 1

Aquí se analizarán más detalladamente elementos relacionados con las habilidades específicas y conocimientos asociados al problema, estrategias de solución, posibles dificultades o barreras, procesos que se pueden activar y algunas indicaciones metodológicas.

Existe diversidad de recursos tecnológicos que permiten hacer aproximaciones numéricas de una forma rápida, entre ellas las calculadoras (científicas, las presentes en teléfonos celulares y en las computadoras) y las hojas de cálculo. Particularmente, esta actividad está diseñada para que los estudiantes utilicen una calculadora científica, sin embargo, también se propone el uso de una hoja de cálculo.

Las habilidades específicas y conocimientos que se pretenden desarrollar con la actividad son:

Conocimientos	**Habilidades específicas**
Números reales • Números irracionales • Representaciones	1. Identificar números irracionales en diversos contextos. 2. Identificar números con expansión decimal infinita no periódica. 3. Realizar aproximaciones decimales de números irracionales. 4. Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.

Además, es necesario considerar las siguientes habilidades previas:

De primaria:

- ✓ Calcular, utilizando fórmulas, el perímetro y el área de triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios.

- ✓ Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.

Nótese cómo esta actividad permite integrar varias habilidades específicas, con lo que se puede optimizar el tiempo para abarcar el programa de estudios.

- ✓ Calcular potencias cuya base y exponente sean números naturales no iguales a cero simultáneamente.

- ✓ Identificar cuadrados y cubos perfectos de números naturales.

De secundaria

- ✓ Calcular expresiones numéricas aplicando el concepto de potencia y la notación exponencial.

- ✓ Realizar aproximaciones decimales de números racionales.

- ✓ Identificar los números racionales representados con expansión decimal exacta y con expansión decimal periódica.

En este problema se propone el uso de la calculadora con una intencionalidad didáctica, donde la herramienta sirve al estudiante como un recurso que facilita la comprensión de un determinado conocimiento o el desarrollo de una habilidad, en este caso, la noción de número irracional.

El estudiante debe descubrir primero qué criterio permitirá realizar la aproximación. Para ello, es necesario que usen la información que refiere al área de la zona verde, pues a partir de la fórmula que permite calcularla, se puede reconocer que el número buscado es tal que su cuadrado es 91.

$$A = l^2 = 91\, m^2$$

Se realizan aproximaciones iniciales mediante el cálculo mental utilizando números enteros. Esto permitiría al estudiante deducir que el número buscado es mayor que 9 y menor que 10.

Conforme los estudiantes realizan aproximaciones que requieren de una mayor cantidad de decimales, asimismo, se espera que ellos valoren el momento oportuno donde tendrá que hacer uso de la calculadora científica para continuar con los cálculos.

Es importante que el estudiante sea el que defina la pertinencia o no del uso de la calculadora, según lo que le indique su sentido numérico.

Por ejemplo, se comienza realizando aproximaciones utilizando décimas:

$$9{,}1^2 = \frac{8281}{100} = 82{,}81$$

$$9{,}2^2 = \frac{2116}{25} = 84{,}64$$

$$9{,}3^2 = \frac{8649}{100} = 86{,}49$$

$$9{,}4^2 = \frac{2209}{25} = 88{,}36$$

$$9{,}5^2 = \frac{361}{4} = 90{,}25$$ → Aproximación anterior

$$9{,}6^2 = \frac{2304}{25} = 92{,}16$$ → Aproximación posterior

de donde se puede deducir que el valor buscado se encuentra entre 9,5 m y 9,6 m. Luego, lo que compete es buscar una aproximación que tenga dos valores decimales, para lo cual se desarrolla similarmente al procedimiento anterior:

$9{,}51^2 = 90{,}4401$
$9{,}52^2 = 90{,}6304$
$9{,}53^2 = 90{,}8209$
$9{,}54^2 = 91{,}0116$

De ese modo, se puede deducir que el valor buscado se encuentra entre 9,53 y 9,54.

A continuación se resumen los procedimientos para aproximaciones con mayor cantidad de decimales:

Con 3 decimales	*Con 4 decimales*	*Con 5 decimales*
$9{,}531^2 = 90{,}839961$ $9{,}532^2 = 90{,}859024$ $9{,}533^2 = 90{,}878089$ $9{,}534^2 = 90{,}897156$ $9{,}535^2 = 90{,}916225$ $9{,}536^2 = 90{,}935296$ $9{,}537^2 = 90{,}954369$ $9{,}538^2 = 90{,}973444$ $9{,}539^2 = 90{,}992521$ $9{,}540^2 = 91{,}0116$ El número se ubica entre 9,539 y 9,540.	$9{,}5391^2 = 90{,}99442881$ $9{,}5392^2 = 90{,}99633664$ $9{,}5393^2 = 90{,}99824449$ $9{,}5394^2 = 91{,}00015236$ El número se ubica entre 9,5393 y 9,5394. 	$9{,}53931^2 = 90{,}99843528$ $9{,}53932^2 = 90{,}99862606$ $9{,}53933^2 = 90{,}99881685$ $9{,}53934^2 = 90{,}99900764$ $9{,}53935^2 = 90{,}99919842$ $9{,}53936^2 = 90{,}99938921$ $9{,}53937^2 = 90{,}99958$ $9{,}53938^2 = 90{,}99977078$ $9{,}53939^2 = 90{,}99996157$ $9{,}53940^2 = 91{,}00015236$ El número se ubica entre 9,53939 y 9,53940.

Con 6 decimales	*Con 7 decimales*	*Con 8 decimales*
$9{,}539391^2 = 90{,}99998065$ $9{,}539392^2 = 90{,}99999973$ $9{,}539393^2 = 91{,}00001881$ El número se ubica entre 9,539392 y 9,539393.	$9{,}5393920^2 = 90{,}99999973$ $9{,}5393921^2 = 91{,}00000164$ El número se ubica entre 9,5393920 y 9,5393921. 	$9{,}53939201^2 = 90{,}99999992$ $9{,}53939202^2 = 91{,}00000011$ El número se ubica entre 9,53939201 y 9,53939202.

Con 9 decimales	*Con 10 decimales*
$9{,}539392011^2 = 90{,}99999994$ $9{,}539392012^2 = 90{,}99999996$ $9{,}539392013^2 = 90{,}99999998$ $9{,}539392014^2 = 91$ $9{,}539392015^2 = 91{,}\ 00000002$ El número se ubica entre 9,539392014 y 9,539392015. 	$9{,}5393920141^2 = 91$ $9{,}5393920142^2 = 91$ $9{,}5393920143^2 = 91$ $9{,}5393920144^2 = 91$ ¿ ? $9{,}5393920145^2 = 91{,}00000001$

Al representar los resultados en forma fraccionaria y con expansión decimal, los estudiantes toman conciencia poco a poco que estas aproximaciones corresponden a números racionales.

En este momento, se puede apreciar que esta es la mayor aproximación posible que puede brindar la calculadora. Aquí los estudiantes podrían concluir que la distancia requerida para la siembra de los árboles tiene un valor que se ubica entre 9,5393920140 y 9,5393920145.

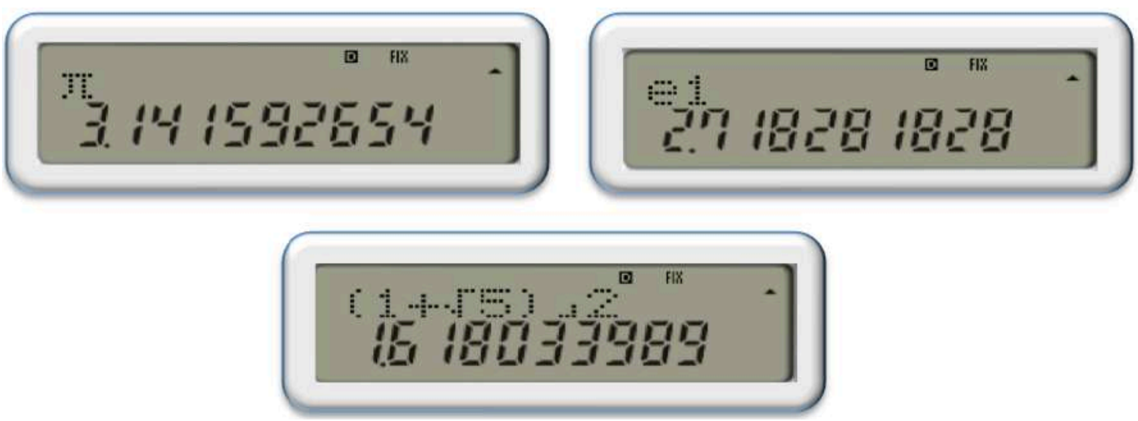
En esta actividad, el símbolo de la igualdad se usa indiferentemente si el cálculo realizado corresponde a una igualdad o a una aproximación.

Es importante tener presente que en un contexto real no consideran medidas con semejante cantidad de decimales. Se trabajó con estas condiciones como pretexto para abordar este tema de aproximaciones de números irracionales.

Una creencia errónea que podría presentarse es que los estudiantes interpreten que el valor que se intenta aproximar es exactamente 9,539392014 ya que según lo obtenido en la calculadora, su cuadrado equivale "exactamente" a 91.

Además, una barrera que se presenta es que si se intenta seguir realizando más aproximaciones, el resultado sigue siendo 91 para algunos valores. Esto se presenta pues las calculadoras científicas tienen un límite de cifras que pueden mostrar a la hora de efectuar los cálculos y suele redondear el resultado de una operación cuando éste excede dicho límite.

Durante esta actividad, el uso de la calculadora permite activar el proceso *Representar* pues permite visualizar las aproximaciones realizadas en su notación decimal. También, durante la etapa de clausura puede ser utilizada para representar algunos números irracionales de formas diferentes -notación radical, mediante letras del alfabeto griego (π, e, ϕ) – y conocer sus respectivas aproximaciones con sólo oprimir las teclas correspondientes:



Elaboración propia

También se activa el proceso *Razonar y argumentar,* ya que la calculadora es un medio que permite al estudiante realizar conjeturas mediante la observación de los resultados de las operaciones que resuelve. En el caso de esta actividad, existen diversos momentos donde puede ser un aliado para generar discusión, por ejemplo, al razonar acerca de qué tipo de números son las aproximaciones realizadas, al justificar la obtención de resultados “extraños” en algunos de los cálculos efectuados y al buscar la idea intuitiva de irracionalidad de un número al no reconocer algún patrón en la expansión decimal de las aproximaciones hechas aunque se utilice una cantidad mayor de decimales.

El proceso *Plantear y resolver problemas,* está implícito durante el desarrollo de esta actividad. *Conectar* se evidencia al observar que este problema tiene relación con el área de *Medidas* y *Geometría*.

Comunicar se evidencia cuando en la interacción grupal el estudiantado comunica sus avances a los demás compañeros u bien comparten las estrategias utilizadas.

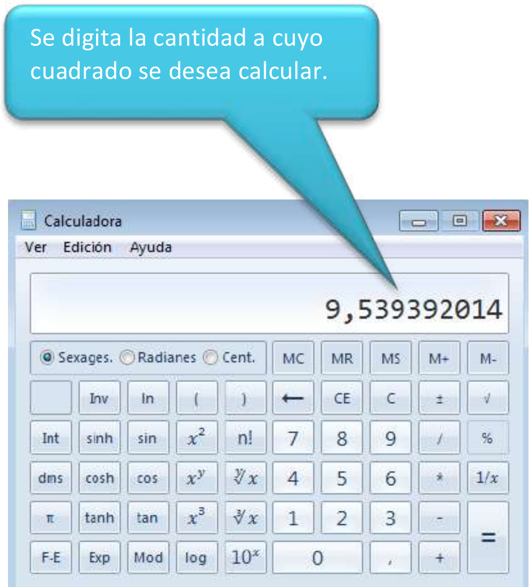
Indicaciones metodológicas

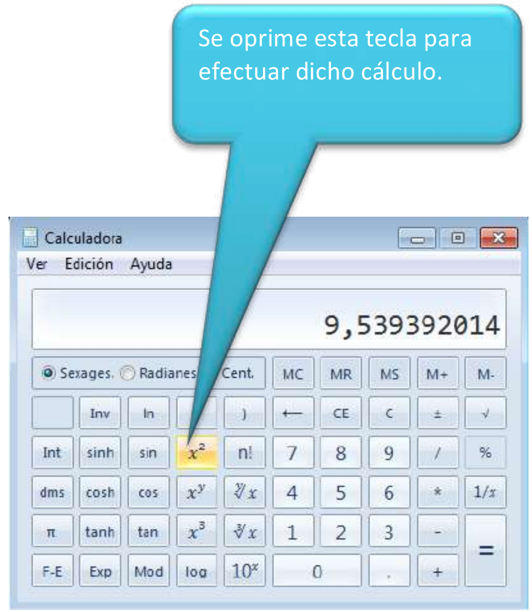
1. Esta actividad puede comenzar con el uso de calculadoras sencillas que tienen capacidad para 7 decimales. Esto podrían ir enfrentando al estudiantado a la limitación de la calculadora para continuar dando aproximaciones. Luego se continúa con una calculadora que tenga la capacidad de mostrar más decimales.

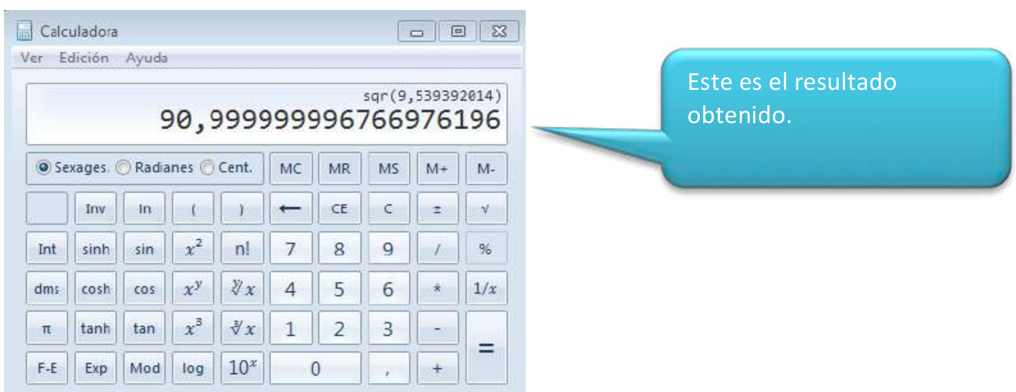
2. Se puede programar una continuación de esta actividad en la cual se use la calculadora científica de las computadoras o bien hojas de cálculo para que los estudiantes puedan realizar aproximaciones con una mayor cantidad de cifras decimales y se discuta por qué la diferencia entre los resultados obtenidos de una herramienta a otra.

   Cada aproximación obtenida por medio de la calculadora representa un número racional, pues su expansión decimal es finita.

   Por ejemplo, en el caso de que se utilice la calculadora de Windows 7 para realizar la aproximación con 9 cifras decimales, se puede apreciar que el valor obtenido no es precisamente 91 (de hecho es un valor menor que 91) y que la aproximación hecha con la calculadora científica no es correcta. Observe:


Se digita la cantidad a cuyo cuadrado se desea calcular.
Calculadora
9,539392014


Se oprime esta tecla para efectuar dicho cálculo.
Calculadora
9,539392014


Calculadora
sqr(9,539392014)
90,99999996766976196
Este es el resultado obtenido.

También se puede utilizar una hoja de cálculo[1]:

Con 9 cifras decimales		Con 10 cifras decimales		Con 11 cifras decimales	
Cantidad	Cuadrado	Cantidad	Cuadrado	Cantidad	Cuadrado
9,539392011	90,9999999395306	9,5393920141	90,9999999986749	9,53939201411	90,9999999988656
9,539392012	90,9999999586094	9,5393920142000	91,0000000005827	9,53939201412	90,9999999990564
9,539392013	90,9999999776882	9,5393920143	91,0000000024906	9,53939201413	90,9999999992472
9,539392014	90,9999999967670	9,5393920144	91,0000000043985	9,53939201414	90,9999999994380
9,539392015	91,0000000158458	9,5393920145	91,0000000063064	9,53939201415	90,9999999996288
9,539392016	91,0000000349246	9,5393920146	91,0000000082143	9,53939201416	90,9999999998196
9,539392017	91,0000000540034	9,5393920147	91,0000000101221	9,5393920141700	91,0000000000106

Con 12 cifras decimales		Con 13 cifras decimales		Con 14 cifras decimales	
Cantidad	Cuadrado	Cantidad	Cuadrado	Cantidad	Cuadrado
9,539392014161	90,9999999998387	9,5393920141691	90,9999999999932	9,53939201416941	90,9999999999991
9,539392014162	90,9999999998577	9,5393920141692	90,9999999999951	9,53939201416942	90,9999999999993
9,539392014163	90,9999999998768	9,5393920141693	90,9999999999970	9,53939201416943	90,9999999999995
9,539392014164	90,9999999998959	9,5393920141694	90,9999999999989	9,53939201416944	90,9999999999997
9,539392014165	90,9999999999150	9,5393920141695	91,0000000000008	9,53939201416945	90,9999999999999
9,539392014166	90,9999999999340	9,5393920141696	91,0000000000027	9,5393920141695	91,0000000000001
9,539392014167	90,9999999999531	9,5393920141697	91,0000000000046	9,53939201416947	91,0000000000003
9,539392014168	90,9999999999722	9,5393920141698	91,0000000000066		
9,539392014169	90,9999999999913	9,5393920141699	91,0000000000085		
9,5393920141700	91,0000000000104				

3. Como se vio anteriormente, cuando los estudiantes realizaron aproximaciones de 10 decimales, la calculadora generó el mismo resultado (91). En este punto, el docente debe estar atento para generar preguntas al estudiantado sobre cómo saber cuál aproximación es anterior y cuál es posterior. Ellos podrían sugerir realizar otra aproximación y calcular 9,53939201452 = 91, 00000002.

4. En la etapa de discusión interactiva y comunicativa, es conveniente generar preguntas al estudiantado que permitan ir construyendo en una idea intuitiva e informal de lo que significa la irracionalidad de un número. Por ejemplo:

- ¿qué tipos de números representan las aproximaciones realizadas y por qué?
- ¿esta será la última aproximación que se puede obtener?
- ¿es posible identificar un patrón numérico presente en la expansión decimal de las aproximaciones realizadas?

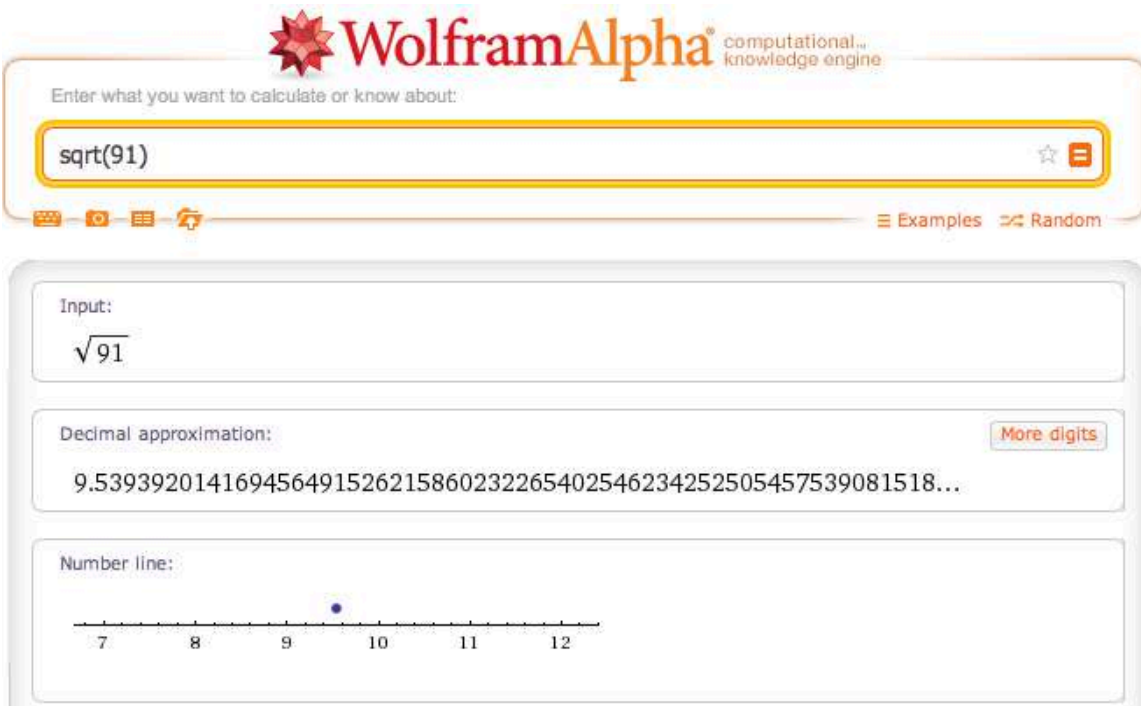
La idea de irracionalidad que se maneja se fundamentará en el hecho de que no es posible reconocer algún patrón en la expansión decimal de las aproximaciones hechas y que esto seguirá presente si se realizan aproximaciones que utilicen una cantidad mayor de decimales.

Algo interesante es que la calculadora científica y la hoja de cálculo tienen algunas limitaciones que provocan el redondeo de algunos resultados. Inclusive, durante el momento de clausura o cierre de la lección se puede afirmar que ninguna herramienta tecnológica puede calcular un número irracional de manera exacta. Como una alternativa, se puede utilizar el software WolframAlpha en la dirección

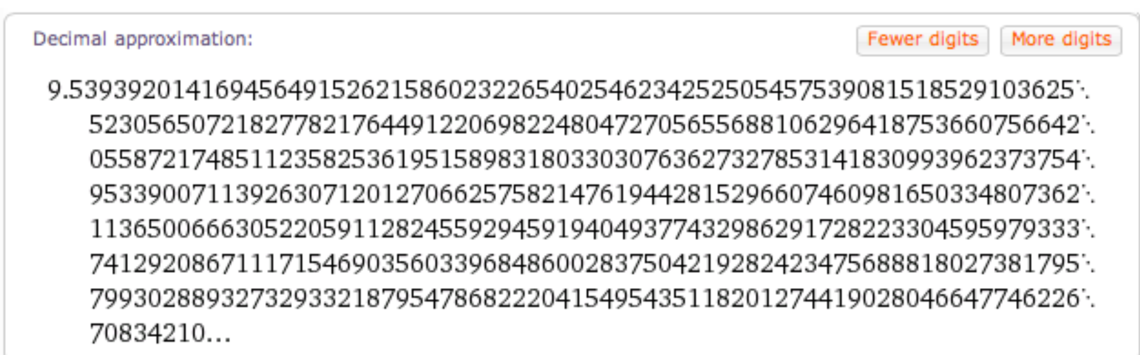
www.wolframalpha.com

[1] No se pueden realizar aproximaciones con 15 decimales pues ése es el límite que maneja este software para la realización de cálculos.

La primera aproximación decimal que da es mucho más precisa que la obtenida, ya sea en la calculadora o en una hoja electrónica. En este caso se muestra 60 dígitos después de la coma decimal:



Puede seguir solicitando más dígitos presionando “more digits” y cada selección muestra más dígitos:



5. Durante la clausura o cierre se formaliza la noción de número irracional y sus formas de representación (decimal, radical o símbolos especiales). Hacer constante referencia a lo discutido durante la actividad. Por ejemplo, hacer alusión a que el número aproximado por los estudiantes se denota mediante $\sqrt{91}$ y resaltar que su expansión decimal es infinita no periódica. También, se puede mencionar al estudiante otras estrategias usadas en la antigüedad para aproximar números irracionales, entre ellas, el método de exhausión, método de bisección, la sucesión de Fibonacci para obtener la razón áurea a partir del cociente de dos de sus términos sucesivos, uso de métodos geométricos, etc.

Un número racional posee expansión decimal finita o infinita periódica. Por ejemplo,
$$\frac{111}{90} = 1{,}233333\ldots$$

También, se puede adaptar el problema de la inconmesurabilidad de $\sqrt{2}$ trabajado por la escuela pitagórica para que los estudiantes puedan encontrar aproximaciones de este número e introducir este tema.

Análisis del Problema 2

En él se pretende hacer referencia al uso de la calculadora para la simplificación de operaciones durante la resolución de problemas. Este uso ha sido frecuente en el desarrollo de actividades de índole matemático. Al comenzar el trabajo con operaciones y cálculos, el docente no hace uso de calculadora para que sus estudiantes comprendan su significado y desarrollen el sentido numérico necesario para aplicarlo en diversas situaciones de su entorno. Sin embargo, cuando se da paso a la resolución de problemas, la realización de operaciones matemáticas –aunque necesarias- toman un rol instrumental pues se privilegia el planteamiento de los datos y la elaboración de estrategias.

Parte a)
Se necesita que el estudiante identifique que se necesita sustituir t = 8 horas en el modelo suministrado y resolver dicha operación:

$$A(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \cong 1{,}6777216 \text{ mg.}$$

Parte b)
Es importante que el estudiante establezca primero la diferencia entre la cantidad de miligramos de medicamento que preserva la persona en el cuerpo en un momento dado y una hora después. Así se conocerá la cantidad de medicamento que elimina en dicho lapso de tiempo:

$$A(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \cong 1{,}6777216 \text{ mg.}$$
$$A(9) = 10 \cdot 0{,}8^9 \cong 1{,}34217728 \text{ mg.}$$
$$\text{A}(9) - \text{A}(8) = 0{,}33554432 \text{ mg.}$$

Ahora, por regla de tres, se determina el porcentaje de medicamento eliminado respecto la cantidad inicial:

$$0{,}33554432 \cdot 100 \div 1{,}6777216 = 20\%$$

Parte c)
Es necesario utilizar el modelo para resolver la ecuación cuando A(t) = 0,225:

$$10 \cdot 0{,}8^t = 0{,}225$$
$$0{,}8^t = \frac{0{,}225}{100}$$
$$0{,}8^t = 0{,}0225$$
$$log_{0,8}0{,}0225 = t$$
$$17\ h = t$$

A manera de recomendación, es importante seguir las indicaciones cuando de tomar medicamentos con prescripción médica se trata. La automedicación puede constituirse en todo un riesgo para la salud. Finalizar con este mensaje permite trabajar con el eje transversal *Educación para la salud.*

¿En qué casos el estudiante puede reconocer necesario el uso de la calculadora? Cuando se resuelven problemas que requieren de cálculos que no se pueden realizar mentalmente o con papel y lápiz, por ejemplo:

- aquellos que involucran razones trigonométricas.
- cuando se trabajan modelos con funciones exponenciales y logarítmicas, donde se necesiten realizar cálculos con el número *e* y los logaritmos.
- involucran operaciones con números radicales, por ejemplo, aquellos asociados al Teorema de Pitágoras.

Análisis del problema 3

Aquí se muestra el uso de la calculadora para validar estrategias y resultados. Aunque para este problema los estudiantes utilicen la calculadora para determinar el resultado directamente, es probable que no puedan hacerlo debido a que existen limitaciones en el alcance de la misma. Esto los obligaría a determinar otra estrategia que permita responder a esta interrogante. Por ejemplo, realizaría algunos cálculos mentales inicialmente o con papel y lápiz:

$2^1 = 2$ $\quad$ $2^2 = 4$ $\quad$ $2^3 = 8$ $\quad$ $2^4 = 16$

$2^5 = 32$ $\quad$ $2^6 = 64$ $\quad$ $2^7 = 128$ $\quad$ $2^8 = 256$

$2^9 = 512$ $\quad$ $2^{10} = 1024$ $\quad$ $2^{11} = 2048$ $\quad$ $2^{12} = 4096$

Algún estudiante podría observar que en la cifra de las unidades de los resultados se repite la secuencia 2 – 4 – 8 – 6 pero necesita estar seguro de que este patrón se sigue cumpliendo para los siguientes cálculos. Aquí la calculadora facilita la obtención de los resultados de las potencias siguientes y permitirá al estudiante reafirmar la veracidad de su suposición:

$$
\begin{aligned}
2^{13} &= 8192 \\
2^{14} &= 16\,384 \\
2^{15} &= 32\,768 \\
2^{16} &= 65\,536 \\
2^{17} &= 131\,072 \\
2^{18} &= 262\,144 \\
2^{19} &= 524\,288 \\
2^{20} &= 1\,048\,576
\end{aligned}
$$

Se espera que al observar estos resultados, los estudiantes puedan identificar en ellos este sentido de agrupamiento en bloques de cuatro y proponer como estrategia de solución la división entre el exponente de la potencia por 4 e interpretar los residuos que se podrían obtener como se muestra a continuación:

Exponente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cifra de las unidades del resultado	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6
Residuos de dividir por 4	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Lo anterior permite ver que si por ejemplo se requiere determinar la cifra de las unidades de la potencia 2^{95} entonces basta con realizar la división de 95 por 4 y observar que al obtener residuo 3 entonces la cifra de las unidades correspondería a 8.

Para ese problema, se debe realizar la división de 2013 por 4 y como en este caso el residuo es 1, entonces se deduce que la cifra de las unidades es 2.

Hay otra posible solución, por ejemplo:

$2^{2013} = 2^{2000+12+1} = 2^{2000} \cdot 2^{12} \cdot 2^1$
$= (2^4)^{500} \cdot (2^4)^3 \cdot 2^1$

Que terminan en 6 · 6 · 2
Que termina en 2

Note que en esta solución el estudiantado reconocería que 2^{4k} con k natural mayor o igual que 1, siempre termina en 6, pues

$$2^{4k} = (2^4)^k = (16)^k$$

que siempre termina en 6.

También, la calculadora científica puede permitir la revisión de los resultados obtenidos en algunos procedimientos por medio de los comandos que permiten resolver ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales. La idea es que los estudiantes puedan desarrollar los procedimientos que consideran pertinentes y al final, cuando se tienen los resultados, poder verificarlos para garantizar que estos sean correctos.

Consideraciones finales

Este módulo pretendió mostrar cómo se puede usar la calculadora científica adecuadamente en la educación secundaria desde diferentes dimensiones:

- para el desarrollo de actividades con intencionalidad didáctica.
- para la realización de operaciones que permiten resolver problemas matemáticos.
- para validar (verificar) estrategias o resultados.

De forma más general: se trata de visualizar la calculadora como:

- un medio para agilizar cálculos, donde el estudiantado y el docente valoran cuándo es pertinente su uso durante la resolución de problemas.
- Un elemento que propicia el desarrollo de actividades cognitivas de mayor nivel en los estudiantes.
- Un recurso que facilita la comprensión de conceptos durante la resolución de problemas matemáticos.

Es esencial que el uso correcto de la calculadora esté en función del aporte que pueda ofrecer al logro de los conocimientos matemáticos, donde el problema propuesto exija – a criterio del docente y del estudiante- su uso de forma auxiliar, como parte del proceso de resolución.

Es conocido que en los últimos años, se han promovido prácticas inapropiadas en cuanto al uso de la calculadora que generan un enfoque equivocado del aprendizaje. Se promueve el facilismo y el uso de trucos que atentan contra el uso de formas de pensamiento más complejas por parte del estudiante.

No obstante, se ha tratado de mostrar diferentes usos de la calculadora científica que aunque algunos son comunes en el ámbito escolar, otros toman relevancia a la luz del cambio metodológico propuesto.

Bibliografía

Barrantes, F. (2001). *Uso de la Calculadora en el Proceso Educativo.* Recuperado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/II/Ponencias/USO%20DE%20LA%20CALCULADORA%20EN%20EL%20PROCESO%20EDUCATIVO/pag1.htm

MEP (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemáticas.* San José: Autor.

Rivel, E. (2011). Comprendiendo los números irracionales mediante aproximaciones numéricas. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/1923/supp/1923-4957-1-SP.pdf

Créditos

Este documento es una unidad didáctica sobre **Uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria** para ser utilizada en el *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*, que forma parte del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autor
Miguel González

Editor
Hugo Barrantes

Editor gráfico
Hugo Barrantes y Miguel González

Revisores
Ángel Ruiz
Marianela Zumbado
Javier Barquero
Lilliam Rojas
Erasmo López

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.
Ángel Ruiz

Imagen de señal de "check" en color verde y de dedo presionando una calculadora cortesía de

"digilart" y "Iamnee" respectivamente, en FreeDigitalPhotos.net

Para referenciar este documento
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Uso de calculadora científica para la Educación Secundaria.* San José, Costa Rica: autor.