REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Curso MAT∑PJA en línea

GEOMETRÍA

Material de consulta

Costa Rica

2020

Índice

Contenido

Introducción

Este documento fue elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (https://www.reformamatematica.net).

La primera versión de este documento fue ofrecida en el 2016 como apoyo a un curso virtual con la modalidad MOOC denominado *Preparación Matemáticas Bachillerato*. Varias de sus partes también fueron usadas en 2017 y 2018 para cursos Mini-MOOC ofrecidos por el Proyecto. La presente versión está dirigida especialmente a apoyar el curso **Curso MAT∑PJA en línea** ofrecido por el Ministerio de Educación Pública para estudiantes que desean obtener su Bachillerato por Madurez.

Se describen diferentes conocimientos vinculados con la geometría: conceptos básicos de geometría, estudio de polígonos, circunferencias, transformaciones en el plano y visualización espacial, para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudio de Matemáticas para la Educación Diversificada.

Al inicio del documento se le proporciona un índice alfabético en el que se da un listado, en orden alfabético, de los temas o contenidos con el número de página donde aparecen. Si usted hace clic sobre dicho número, será remitido a la página donde se proporciona el concepto, tema o contenido correspondiente. Se puede regresar al índice alfabético desde cualquier página haciendo clic sobre la palabra "índice" que aparece en el encabezado de todas ellas.

Es importante aclarar que el presente documento no es un libro de texto y tampoco es exhaustivo. Procuramos que sea autosuficiente pero no está pensado para ser utilizado como un medio para organizar la acción de aula.

Más materiales educativos se pueden acceder en el sitio web **Recursos Libres de Matemáticas** (https://recursoslibres.reformamatematica.net).

1. Algunos conocimientos previos

Puntos colineales

Tres o más puntos en el plano son colineales si pertenecen a la misma recta. Si A, B, C son colineales y el punto B pertenece al segmento de extremos A y C, entonces se dice que B está entre A y B y se denota por $A - B - C$.

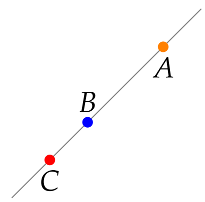


Figura 1: Los puntos A, B y C son colineales y se tiene $A - B - C$.

Punto medio

Si A, B son dos puntos distintos en el plano, su punto medio es un punto M tal que $A - M - B$ y $AM = MB$. También se dice que M es el punto medio de $\overline{AB}$.

Mediatriz de un segmento

La mediatriz de $\overline{AB}$ en el plano es la recta l que interseca al segmento perpendicularmente en su punto medio.

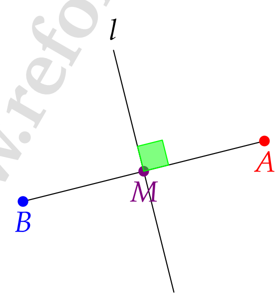


Figura 2: La recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.

Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

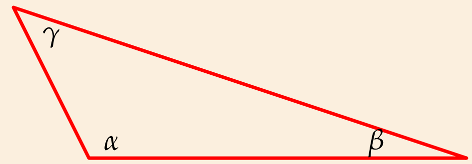


Figura 3: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Ejemplo 1

En un triángulo rectángulo la razón entre las medidas de los ángulos agudos es $1 : 2$. Â¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo?

Solución

Si x es la medida de un ángulo agudo, entonces la media del otro es $2x$ pues están en razón $1 : 2$. Por otra parte, el triángulo tiene un ángulo recto; es decir, mide 90°. Se concluye que $x + 2x + 90 = 180$. Al resolver esta ecuación se obtiene que $x = 30$.

Las medidas de los ángulos del triángulo son 30°, 60° y 90°.

Desigualdad triangular

Si a, b, c corresponden a las medidas de los lados de un triángulo, entonces:
$a + b > c$,
$a + c > b$,
$b + c > a$.

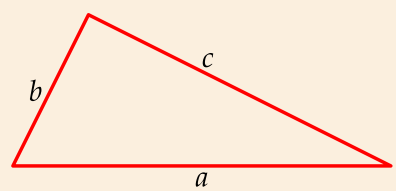


Figura 4: $a + b > c, a + c > b, b + c > a$.

Ejemplo 2

Los valores 2 cm, 3 cm, 5 cm, no pueden corresponder a las medidas de los lados de un triángulo puesto que $2 + 3 = 5$ y por lo tanto no se cumple la desigualdad triangular.

Ejemplo 3

Las siguientes ternas de números representan las medidas de tres segmentos. Indique en cuáles casos es posible formar un triángulo.

a) 4, 6, 9 b) 2, 5, 3 c) 10, 3, 5.

Solución

a) $4 + 6 = 10, 10 > 9$

$6 + 9 = 15, 15 > 4$
$4 + 9 = 13, 13 > 6$
Por lo tanto, es posible formar un triángulo.

b) $2 + 5 = 7 , 7 < 3$
$5 + 3 = 8, 8 > 2$
$3 + 2 = 5, 5 = 5$ Luego, no se cumple la desigualdad triangular.

c) $10 + 3 = 13 , 13 > 5$
$10 + 5 = 15, 15 > 3$
$5 + 3 = 8, 8 < 10$ Entonces, no se cumple la desigualdad triangular.

Para determinar si tres valores dados corresponden a las medidas de los lados de un triángulo basta tomar los dos menores, efectuar su suma y comparar con el valor mayor.

Por ejemplo, 5, 7 y 10, dados los tres en la misma unidad, corresponden a las medidas de los lados de un triángulo pues $5 + 7 = 12 > 10$.

Congruencia

Dos polígonos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes (miden los mismo) y sus ángulos correspondientes son congruentes. Si el polígono P y el polígono P' son congruentes escribimos $P \cong P'$.

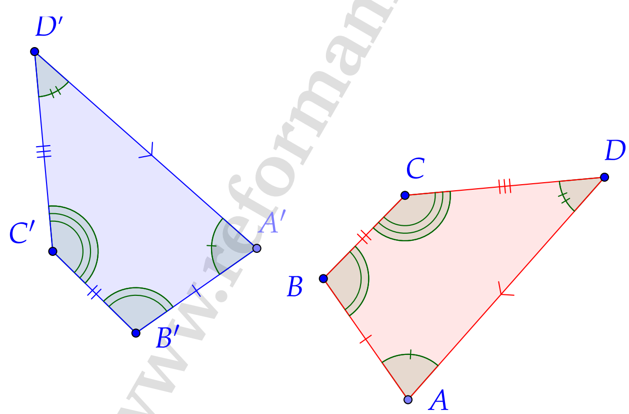


Figura 5: Los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes. Se tiene $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, $m(\angle C) = m(\angle C')$, $m(\angle D) = m(\angle D')$. El número o tipo de marcas en los lados y en los ángulos en la figura indica las congruencias correspondientes.

Semejanza

Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales. Si dos polígonos P y P' son semejantes se escribe $P \sim P'$.

La proporcionalidad entre los lados significa que si, por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son lados de un polígono P y $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ son lados respectivamente correspondientes de un polígono semejante a P, entonces se cumple que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Ejemplo 4

En la siguiente figura la medida del lado de cada cuadrito de la cuadrícula es 1, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{C'E} \perp \overline{A'B'}$

Observe que $\tan(\angle A) = \frac{4}{2} = 2$ y $\tan(\angle A') = \frac{6}{3} = 2$. Como ambos ángulos son agudos se tiene que $\angle A \cong \angle A'$. Del mismo modo se puede ver que $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$.

También $\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$ y $\frac{CA}{C'A'} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$, por lo que los lados correspondientes son proporcionales. Por lo tanto, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Para calcular las medidas BC, CA, $B'C'$ y $C'A'$ se utilizó el teorema de Pitágoras. Por ejemplo $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$. Para este caso se consideró el triángulo ACD, donde D es el pie de la altura de $\triangle ABC$ trazada sobre $\overline{AB}$.

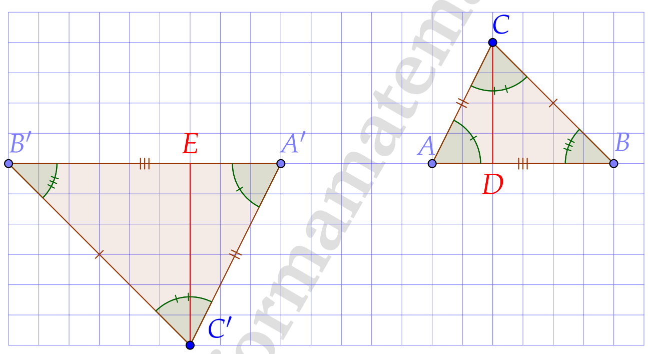


Figura 6: Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Criterio de semejanza $A - A - A$

El criterio de semejanza ángulo – ángulo – ángulo ($A - A - A$) establece que basta con verificar que los ángulos correspondientes de dos triángulos tienen la misma medida para asegurar que los triángulos son semejantes.

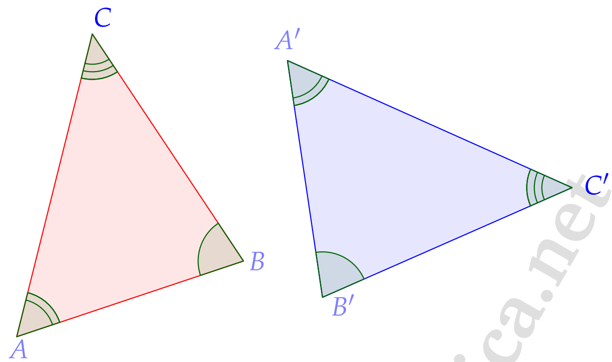


Figura 7: Se tiene que $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, $m(\angle C) = m(\angle C')$, luego, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, por $A - A - A$.

Criterio de semejanza $L - L - L$

El criterio Lado–Lado–Lado ($L - L - L$) establece que si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales entonces los triángulos son semejantes.

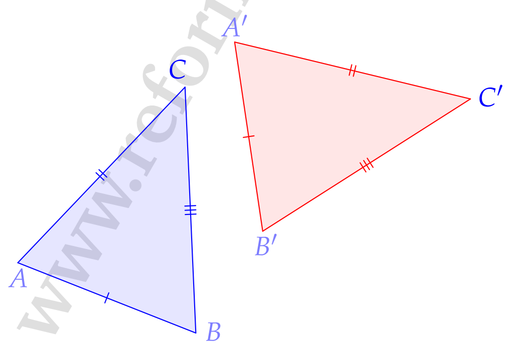


Figura 8: Se tiene que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, luego, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, por $L - L - L$.

Criterio de semejanza ($L - A - L$)

El criterio Lado–Ángulo–Lado ($L - A - L$) Establece que, dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos por estos lados son congruentes, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

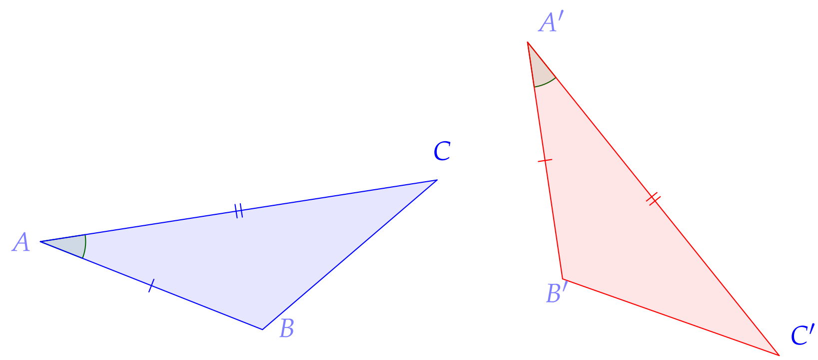


Figura 9: Se tiene que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $m(\angle A) = m(\angle A')$, luego, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, por $L - A - L$.

Ejemplo 5

Dos triángulos cualesquiera que sean isósceles y rectángulos a la vez, son semejantes. En efecto, puesto que al ser rectángulos ambos tienen un ángulo de 90° y al ser isósceles, sus ángulos agudos miden 45° grados cada uno, entonces tenemos las congruencias correspondientes entre los ángulos. El criterio $A - A - A$, asegura entonces que estos triángulos son semejantes.

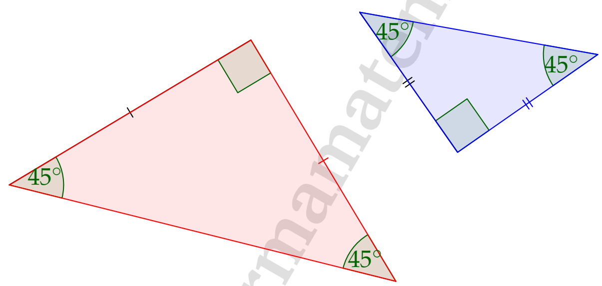


Figura 10: Cualesquiera dos triángulos rectángulos e isósceles son semejantes entre sí.

Ejemplo 6

Si un triángulo tiene como medidas de sus lados 2 cm, 5 cm y 6 cm y otro tiene las medidas de los lados 3 cm, 7,5 cm y 9 cm, probar que son semejantes.

Solución

Efectivamente, tenemos que

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3},$$

luego, por $L - L - L$, se tiene que los triángulos son semejantes.

Ejemplo 7

Considere el $\triangle ABC \sim \triangle AED$, donde $AB = 20$, $EB = 15$ y $BC = 21$. Determine la longitud de $\overline{DE}$.

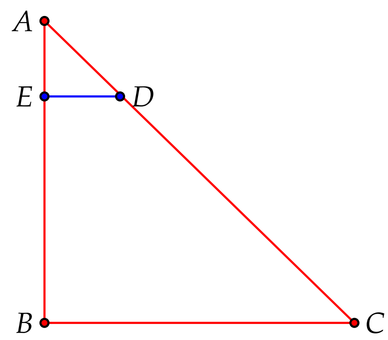


Figura 11: $\triangle ABC \sim \triangle AED$

Solución

Como $\triangle ABC \sim \triangle AED$ se tiene que

$$\frac{20}{5} = \frac{21}{DE}$$
$$DE = 5,25$$

Ejemplo 8

En la siguiente figura se tiene que D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de BC. Probar que $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

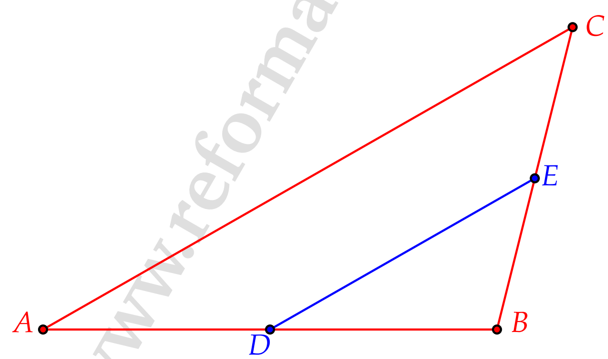


Figura 12: Los triángulos ABC y DBE son semejantes.

Solución

Como D es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $AB = 2DB$. Por una razón semejante $BC = 2BE$. Por lo tanto

$$\frac{AB}{DB} = 2 = \frac{BC}{BE},$$

luego estos lados son proporcionales. Además los triángulos comparten el ángulo que forman estos lados proporcionales. Por $L - A - L$ son semejantes.

Teorema de Pitágoras

Si en un triángulo rectángulo las medidas de los catetos son a y b y la medida de la hipotenusa es c, entonces, se cumple que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Esto es, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la medida de su hipotenusa.
A la inversa, si a, b y c son valores tales que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

entonces corresponden a las medidas de los lados de un triángulo rectángulo en el cual c es la hipotenusa (el lado más largo).

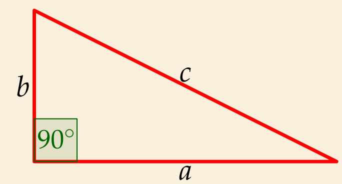


Figura 13: $a^2 + b^2 = c^2$ si y solo si el triángulo es rectángulo.

Ejemplo 9

En la figura, $ABCD$ es un rectángulo; su lado $\overline{AB}$ mide 4 cm y su lado $\overline{AD}$ mide 8 cm. Â¿Cuánto mide su diagonal?

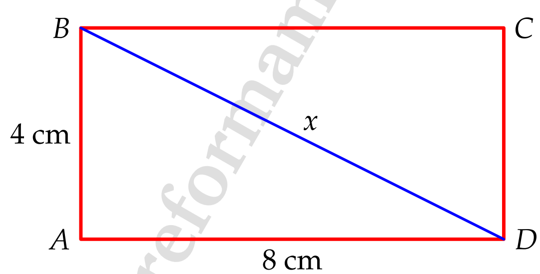


Figura 14: $\overline{BD}$ es una diagonal del rectángulo; ambas diagonales tienen la misma medida. Los cuatro ángulos del rectángulo son rectos.

Solución

Calculemos la diagonal $\overline{BD}$. Supongamos que $BD = x$.

Puesto que la figura es un paralelogramo entonces $\angle BAD$ es recto y de acuerdo con el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= 4^2 + 8^2 \\ x^2 &= 16 + 64 \\ x^2 &= 80 \\ x &= \sqrt{80}. \end{aligned}$$

La diagonal del paralelogramo mide $\sqrt{80} \approx 8,94$ cm.

Razones trigonométricas

Dado un triángulo rectángulo, con θ uno de sus ángulos agudos, c su hipotenusa, a el cateto opuesto a θ y b el cateto adyacente a θ, se define:

- **seno del ángulo** θ : $\sin\theta = \dfrac{a}{c}$.
- **coseno del ángulo** θ : $\cos\theta = \dfrac{b}{c}$.
- **tangente del ángulo** θ: $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$.

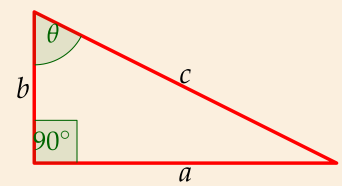


Figura 15: La medida de la hipotenusa es c, la del cateto opuesto a θ es a y la del cateto adyacente a θ es b.

Ejemplo 10

Considere el triángulo rectángulo que aparece en la figura, con la información dada. Determinar las tres razones trigonométricas, definidas previamente, para el ángulo α y las tres para el ángulo β.

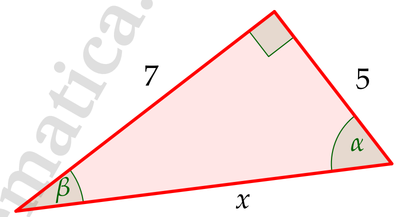


Figura 16: El triángulo es rectángulo

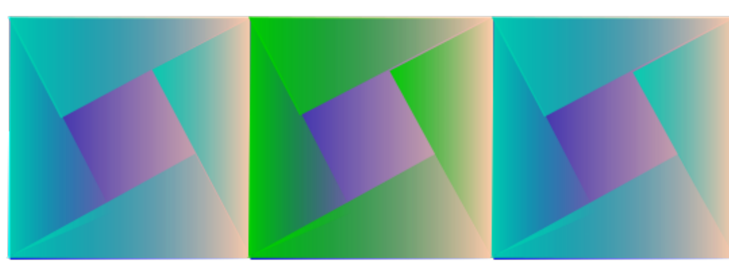
Solución

- Podemos calcular la hipotenusa mediante el uso del Teorema de Pitágoras. Sea x la longitud de la hipotenusa tenemos: $x^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74 \Rightarrow x = \sqrt{74}$.
- El cateto opuesto a α tiene longitud 7 y su cateto adyacente tiene longitud 5, esto nos permite decir que

$$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}, \quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \tan\alpha = \frac{7}{5}.$$

- El cateto opuesto a β tiene longitud 5 y el cateto adyacente a β tiene longitud 7, entonces:

$$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{74}}, \quad \tan\beta = \frac{5}{7}.$$



Altura de un triángulo equilátero

En un triángulo equilátero la altura h mide

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell,$$

donde ℓ es la medida del lado.

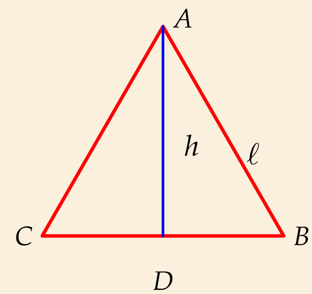


Figura 17: $\triangle ABC$ es equilátero, $\triangle ABD$ es rectángulo, $BD = \frac{\ell}{2}$; luego, por el teorema de Pitágoras se obtiene que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$.

Ejemplo 11

La altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm es $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3}$ cm.

Ejemplo 12

Calcular la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 8 cm.

Solución

Si ℓ es el lado, de acuerdo con lo anterior tenemos que $8 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$, es decir, $\ell = \frac{16}{\sqrt{3}}$ cm.

Altura de un triángulo isósceles

En un triángulo isosceles se llama ápice al vértice que forman los dos lados congruentes. Si α es la medida del ángulo en el ápice, se puede calcular la altura trazada desde el ápice mediante

$$h = \ell\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \tag{1}$$

donde ℓ es la medida de cada uno de los lados congruentes.

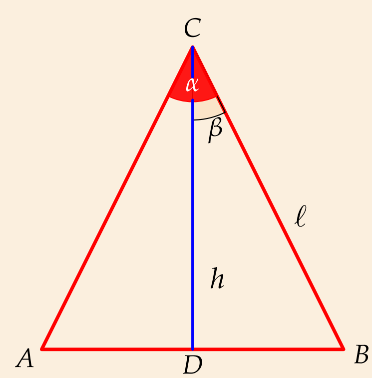


Figura 18: C es el ápice, $\triangle CBD$ es rectángulo, $\beta = \frac{\alpha}{2}$; luego, mediante trigonometría se obtiene que $h = \ell\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ejemplo 13

El ángulo del ápice de un triángulo isósceles mide 40° y sus lados congruentes miden 10 cm. Determinar la altura del triángulo trazada desde el ápice.

Solución

Haciendo referencia a la notación de la figura 5 se tiene que $\alpha = 40^\circ$, entonces $\beta = 20^\circ$. Además, $\ell = 10$, por lo tanto, si h es la altura trazada desde el ápice tenemos

$$h = 10\cos 20^\circ \approx 10 \cdot 0,93969 = 9,3969 \text{ cm}.$$

Recta numérica

A cada número real se le puede asignar un único punto de una recta y viceversa: a cada punto de la recta se le puede asignar un único número real.

En una recta, se selecciona un punto O al cual se le asigna el número 0. Luego, a una unidad de medida, predeterminada de antemano, se selecciona un punto al cual se le hace corresponder el número 1. A una unidad de medida del 0, al lado contrario del 1 se ubica el -1. De esta forma se van ubicando los diferentes números positivos y negativos en los puntos de la recta. Se obtiene así lo que se denomina **recta numérica**.

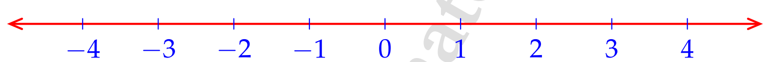


Figura 19: La recta numérica: se establece una relación uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta.

Sistema cartesiano de ejes en el plano

Los puntos del plano se representan mediante parejas de números reales. Para ello se toman dos copias de la recta numérica que se corten perpendicularmente.

Para cada una el 0 corresponde al punto en que se cortan y se denomina **origen**. La recta horizontal se denomina **eje de abscisas** (o eje x) del sistema y la vertical se llama **eje de ordenadas** (o eje y) del sistema.

Esta representación se conoce como **sistema cartesiano de ejes** y sirve para representar los puntos del plano.

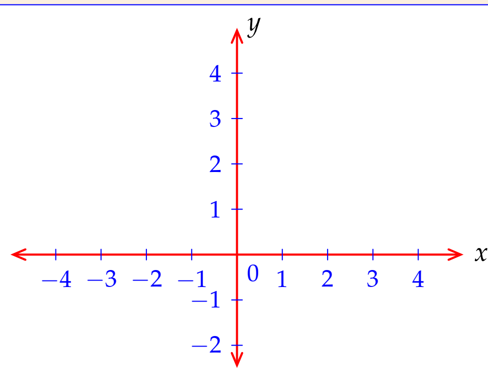


Figura 20: Sistema cartesiano de ejes en el plano.

Para representar un punto P en un sistema de ejes cartesianos:

- Se dibuja en el plano un sistema cartesiano de ejes y el punto P que se quiere representar.
- Luego se traza una recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje x. El punto en que esta recta corta al eje x corresponde a un número real, digamos a.
- Se traza otra recta que también pasa por P y corta perpendicularmente al eje y. Hay un número real que corresponde a la intersección entre estas rectas; llamemos b a este número.
- De este modo, el punto P puede representarse mediante el par de números (a, b).
- Se dice que los valores de a y b son las **coordenadas** del punto P y se escribe $P(a, b)$. La coordenada a se llama **abscisa** del punto y la coordenada b se llama **ordenada** del mismo.
- El punto donde se cortan los ejes, origen del sistema de coordenadas, es $O(0, 0)$.

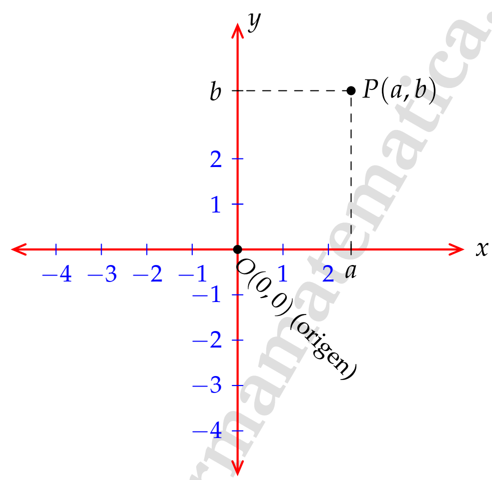


Figura 21: Mediante un sistema de coordenadas cartesianas se establece una relación uno a uno entre los pares de números reales y los puntos de un plano.

Ejemplo 14

En la siguiente figura se tiene un sistema de ejes coordenados y se representan los puntos $P(2, 3)$, $Q(-2, 3)$, $R(4, -2)$, $S(-3, -3)$, $U(0, 1)$, $V(-4, 0)$.

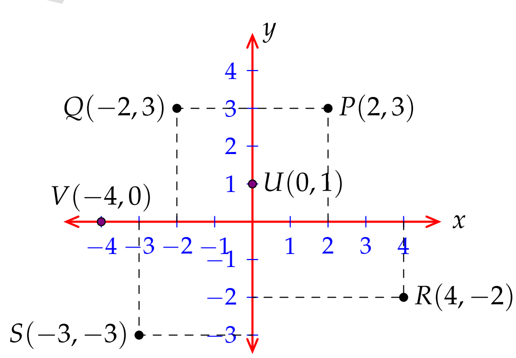


Figura 22: Representación de varios puntos en un sistema de coordenadas cartesianas.

Ejemplo 15

Dibujar el polígono cuyos vértices son $A(-2,0)$, $B(3,-2)$, $C(5,2)$, $D(3,4)$ y $E(-2,3)$.

Solución:

Al dibujar los vértices y los segmentos de recta correspondientes obtenemos la figura que aparece a continuación.

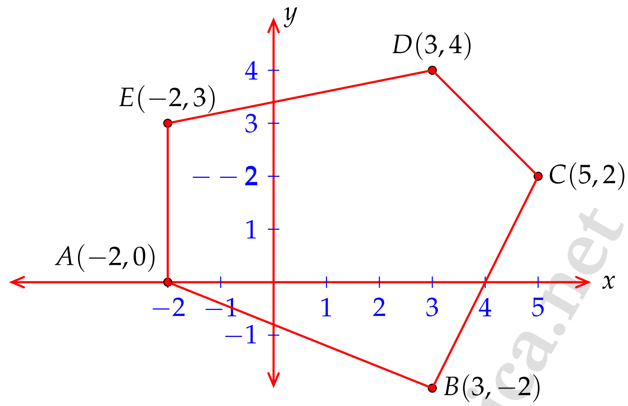


Figura 23: Polígono $ABCDE$.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

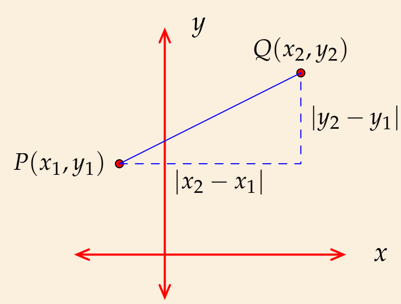


Figura 24: Mediante el teorema de Pitágoras se establece la distancia entre P y Q.

Ejemplo 16

Calcular $d(P,Q)$ donde $P(-3,1)$ y $Q(2,-2)$.

Solución

Según lo anterior se tiene

$$d(P,Q) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$$

Se tomó: $x_1 = -3$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = -2$.

Ejemplo 17

Dibujar el triángulo ABC, donde $A(-1,2)$, $B(-3,8)$, $C(2,3)$ y probar que es rectángulo.

Solución

El triángulo mencionado se muestra a continuación.

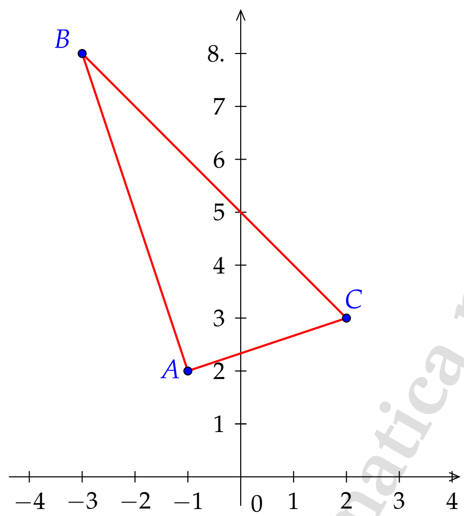


Figura 25: Triángulo ABC.

Se puede probar que es un triángulo rectángulo verificando que las medidas de sus lados satisfacen la relación que establece el teorema de Pitágoras. En efecto:

$$\begin{aligned} AB &= d(A,B) = \sqrt{(-3+1)^2+(8-2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}, \\ AC &= d(A,C) = \sqrt{(2+1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, \\ CB &= d(C,B) = \sqrt{(-3-2)^2+(8-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}. \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, que

$$\begin{aligned} CB^2 &= 50, \\ AB^2+AC^2 &= 40+10 = 50, \end{aligned}$$

y, entonces, $CB^2 = AB^2 + AC^2$. Así, el triángulo es rectángulo con hipotenusa $\overline{CB}$.

Punto medio, coordenadas

Utilizando coordenadas, el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, con $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ es el punto

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Ejemplo 18

En la siguiente figura se muestran los puntos $A(6,4)$ y $B(2,2)$.

Su punto medio es $M\left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = M(4,3)$.

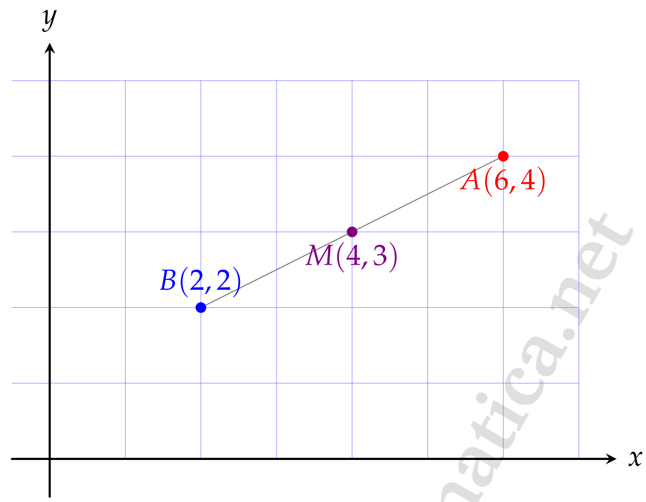


Figura 26: $M(4,3)$ es el punto medio de $A(6,4)$ y $B(2,2)$.

Ejemplo 19

Dado el triángulo ABC, donde $A(-1,2)$, $B(-3,8)$ y $C(2,3)$, determinar la longitud de la mediana trazada desde el vértice B.

Solución

La mediana es el segmento de recta que va desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

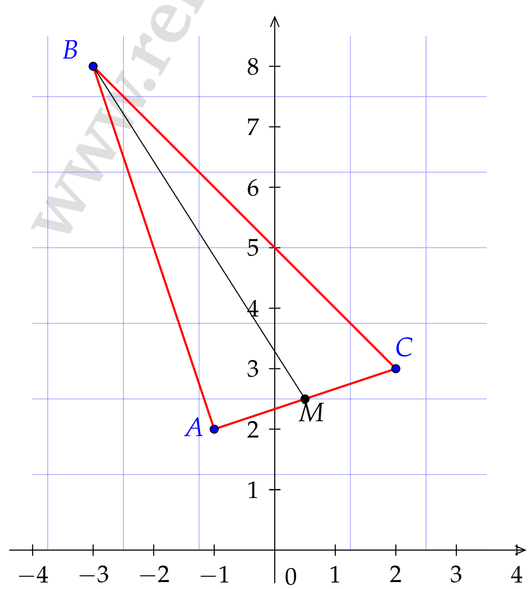


Figura 27: $\overline{BM}$ es la mediana sobre el lado $\overline{AC}$

En este caso, puesto que parte del punto B, llega al punto medio de $\overline{AC}$ que es

$$M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

De este modo, la mediana es el segmento $\overline{BM}$ y su longitud es

$$BM = d(B, M) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+3\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-8\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{121}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{170}.$$

2. Circunferencias y rectas

Rectas

La recta en el plano

En el plano, una recta es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son números reales constantes tales que A y B no son iguales a 0 simultáneamente.
En el caso de que $B \neq 0$, se puede despejar y en la ecuación anterior y se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

de tal manera, la ecuación de la recta tiene la forma $y = mx + b$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.
El número m se llama **pendiente** de la recta.

Ejemplo 20

Trazar la recta de ecuación $y = 2x - 1$.

Solución

Naturalmente existe un número infinito de puntos que pertenecen a la recta. Sin embargo, dado que es imposible trazar todos los puntos tomamos unos cuantos que nos permitan imaginar la apariencia de la gráfica. Tomamos en forma arbitraria valores para "x" y luego calculamos el valor de "y" que corresponde, para ello se construye la siguiente tabla:

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-3	-7	$(-3, -7)$
-2	-5	$(-2, -5)$
-1	-3	$(-1, -3)$
0	-1	$(0, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	3	$(2, 3)$
3	5	$(3, 5)$

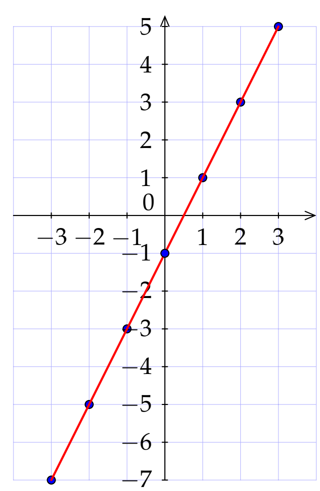


Figura 28: Recta de ecuación $y = 2x - 1$.

Nótese que cada par ordenado (x, y) satisface la ecuación $y = 2x - 1$. Además, observe que dado que una recta está determinada por dos puntos, si queremos dibujar la gráfica que corresponde a la ecuación de dicha recta, es suficiente dibujar dos puntos cualesquiera y trazar la recta correspondiente.

Ejemplo 21

Trazar la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.

Solución

Se puede obtener puntos particulares de una recta mediante la estrategia de dar un valor a la x y, a partir de ahí, obtener el valor correspondiente de y.

Digamos que $x = 1$, entonces, al sustituir en la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 2(1) - 3y + 4 &= 0 \\ 2 - 3y + 4 &= 0 \\ -3y + 6 &= 0 \\ -3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-3} = 2. \end{aligned}$$

Esto significa que el punto $(1, 2)$ pertenece a la recta.

El punto $(-2, 0)$ también pertenece a la recta puesto que

$$2(-2) - 3(0) + 4 = -4 - 0 + 4 = 0.$$

Por lo tanto, la gráfica de la recta de $2x - 3y + 4 = 0$ se obtiene al colocar los puntos $(1, 2)$ y $(-2, 0)$ y trazar la recta que pasa por ellos, tal como se hace en la siguiente figura.

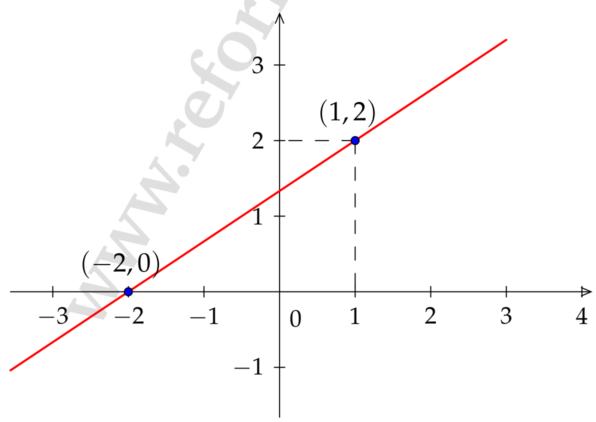


Figura 29: Recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.

Ejemplo 22

Determinar si el punto $(1, 4)$ pertenece o no a la recta de ecuación $2x + y - 5 = 0$.

Solución

Tenemos $2(1) + 4 - 5 = 1 \neq 0$, entonces el punto dado no pertenece a la recta indicada.

Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

Para que la ecuación
$$Ax + By + C = 0,$$
corresponda a una recta, A y B no pueden ser 0 al mismo tiempo; sin embargo, uno de ellos puede ser 0:

- Si $A = 0$, se tiene una ecuación de la forma $y = a$ que corresponde a una recta paralela al eje x.
- Si $B = 0$, se tiene una ecuación de la forma $x = b$ que corresponde a una recta paralela al eje y.

Ejemplo 23

En la siguiente figura se representan las rectas de ecuaciones $-x + 2y + 4 = 0$, $y = 3$, $x = -2$.

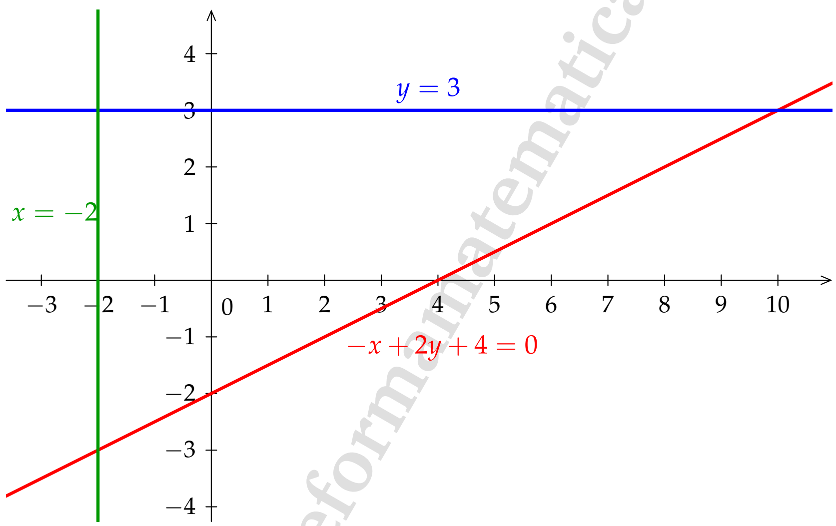


Figura 30: Gráficas de las rectas: $-x + 2y + 4 = 0$, $y = 3$, $x = -2$.

Pendiente de una recta

Si una recta pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, entonces su pendiente es igual a
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

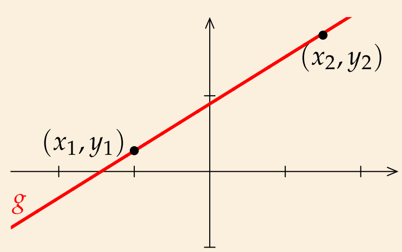


Figura 31: La pendiente de g es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo 24

La recta que pasa por $A(-1,4)$ y por $B(3,2)$ tiene como pendiente $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Aquí se tomó $x_1 = -1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 2$.

Rectas paralelas

Dos rectas de ecuaciones $y = mx + b$ y $y = nx + d$ son paralelas si y solo si $m = n$; es decir, tienen la misma pendiente.

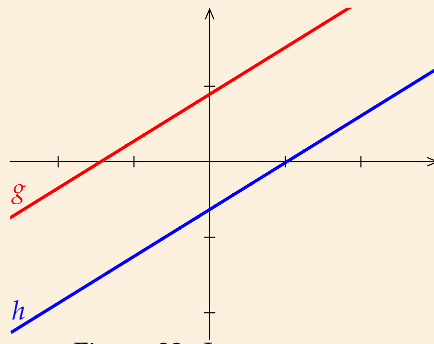


Figura 32: Las rectas g y h son paralelas; tienen la misma pendiente.

Ejemplo 25

Determinar si las rectas $3y - 5x - 3 = 0$; $3y - 5x + 21 = 0$ son paralelas.

Solución

La pendiente de la recta $3y - 5x - 3 = 0$ es $\frac{5}{3}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta $3y - 5x + 21 = 0$ es $\frac{5}{3}$.

Por lo tanto, dado que las pendientes de ambas rectas tienen el mismo valor, son paralelas.

Ejemplo 26

Probar que el cuadrilátero de vértices $A(5,4)$, $B(3,0)$, $C(-2,-2)$ y $D(0,2)$ es un paralelogramo.

Solución

Basta probar que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas entre sí y que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ también son paralelas entre sí.

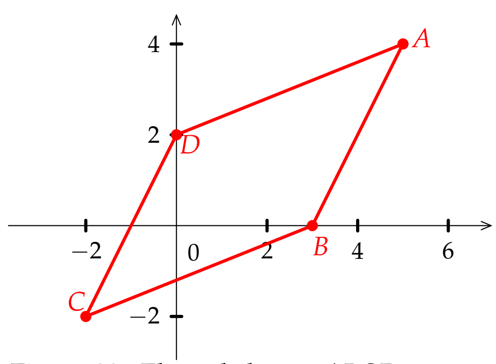


Figura 33: El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

La recta $\overleftrightarrow{AB}$ tiene pendiente $m_1 = \dfrac{0-4}{3-5} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

La recta $\overleftrightarrow{CD}$ tiene pendiente $m_2 = \dfrac{-2-2}{-2-0} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

Luego, estas rectas son paralelas y por lo tanto lo son los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

La recta $\overleftrightarrow{AD}$ tiene pendiente $m_3 = \dfrac{2-4}{0-5} = \dfrac{-2}{-5} = \dfrac{2}{5}$.

La recta $\overleftrightarrow{CB}$ tiene pendiente $m_4 = \dfrac{0-(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{2}{5}$.

Luego, estas rectas son paralelas y por lo tanto lo son los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Como los lados son paralelos dos a dos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Rectas perpendiculares

Dos rectas de ecuaciones $y = mx + b$ y $y = nx + d$ son perpendiculares si y solo si $m \cdot n = -1$; es decir, $n = -\dfrac{1}{m}$.
Todas las rectas de ecuación $y = a$ (con a constante) son perpendiculares a todas las rectas de ecuación $x = b$ (con b constante).

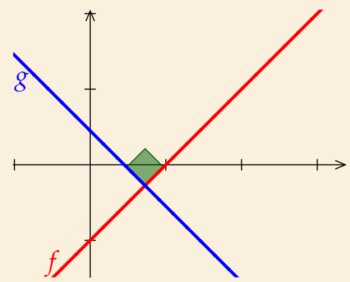


Figura 34: Las rectas g y h son perpendiculares; el producto de sus pendiente es -1.

Ejemplo 27

Determine si las rectas $5y - 2x - 15 = 0$; $2y + 5x - 2 = 0$ son perpendiculares.

Solución

La pendiente de la recta $5y - 2x - 15 = 0$ es $\frac{2}{5}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta $2y + 5x - 2 = 0$ es $-\frac{5}{2}$ Por lo tanto, dado que $\frac{2}{5} \cdot -\frac{5}{2} = -1$, las rectas son perpendiculares.

Ejemplo 28

Determinar si el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,0)$, $B(4,-3)$ y $C(6,0)$ es o no rectángulo.

Solución

Se tiene que:

- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es $m_1 = \dfrac{-3-0}{4-0} = \dfrac{-3}{4}$.
- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ es $m_2 = 0$.
- La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ es $m_3 = \dfrac{0-(-3)}{6-4} = \dfrac{3}{2}$.

Se observa que $m_1 \cdot m_2 = 0$, $m_3 \cdot m_2 = 0$ y $m_1 \cdot m_3 = -\dfrac{9}{8}$. Como todos estos productos son diferentes a -1 se tiene que no hay dos de estas rectas que sean perpendiculares, por lo tanto el triángulo no es rectángulo.

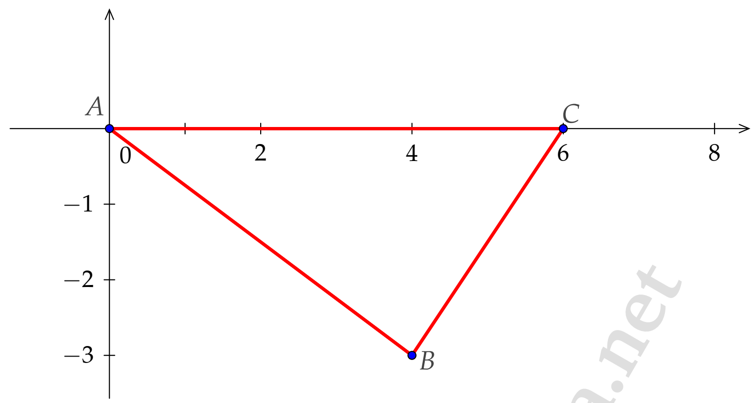


Figura 35: $\triangle ABC$ no es rectángulo.

Circunferencias

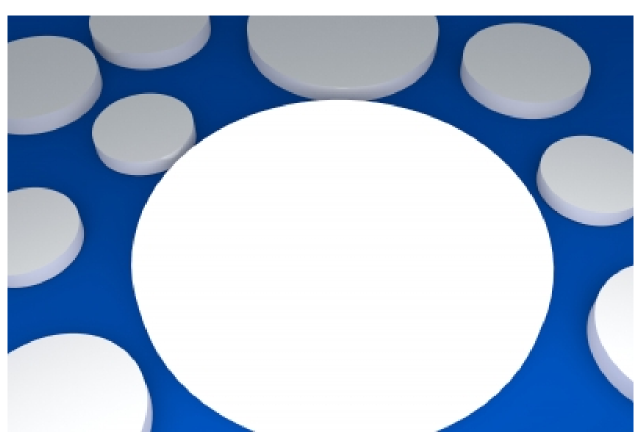
Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado centro.

Suponga que el centro es $C(h,k)$ y $P(x,y)$ cualquier punto de la circunferencia. La distancia de todos esos puntos al centro es la misma, digamos r (se llama radio). Se debe cumplir entonces que $d(P,C) = r$, o sea

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Si se eleva al cuadrado ambos miembros en la ecuación anterior, se obtiene la forma normal de la ecuación de la circunferencia.



Cortesía de sumetho en FreeDigitalPhotos.net

Ecuación de la circunferencia

Si el centro de una circunferencia en el plano es $C(h,k)$ y su radio es r, entonces la ecuación canónica de la circunferencia es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

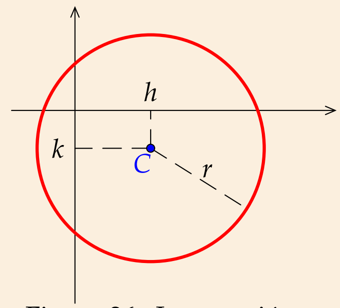


Figura 36: La ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

Ejemplo 29

La ecuación $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ corresponde a una circunferencia de radio 4 y centro $(2,1)$.

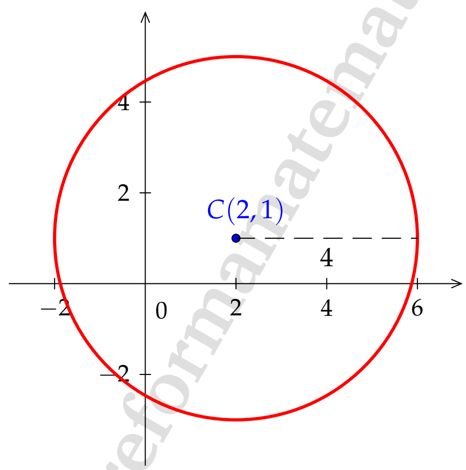


Figura 37: Circunferencia de radio 4 y centro $(2,1)$.

Ejemplo 30

Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 5. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia: $A(2,4)$, $B(4,3)$, $C(\sqrt{5},2\sqrt{5})$.

Solución

De acuerdo con la fórmula dada, la ecuación sería $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$, o sea $x^2+y^2=25$.

Veamos si A pertenece a la circunferencia.

Como $2^2+4^2=4+16=20\neq 25$; entonces A no pertenece a la circunferencia.

Ahora para B: $4^2+3^2=16+9=25\Rightarrow B$ sí pertenece a la circunferencia.

Por otra parte, $\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=5+20=25\Rightarrow C$ también pertenece a la circunferencia.

Otra estrategia para determinar si los puntos dados están o no en la circunferencia consiste en representar gráficamente la circunferencia y los puntos. Dependiendo de los valores dados para las coordenadas del centro y de los puntos o el valor del radio, esta estrategia puede ser muy sencilla o puede complicarse un poco y no ser tan eficiente como la algebraica. Si los valores son racionales es fácil representarlos, particularmente en el caso de que sean enteros.

En este ejemplo es sencillo representar la circunferencia y los puntos A y B. Para representar C, se debe representar $\sqrt{5}$ en el eje x y $2\sqrt{5}$ en el eje y. Para representar $\sqrt{5}$ se puede trazar el punto $(1,2)$ y luego se traza la circunferencia con centro $(0,0)$ y que pase por $(1,2)$. Dado que la distancia entre estos puntos es $\sqrt{5}$, el radio de la circunferencia tiene ese valor y entonces el punto en que se cortan tal circunferencia y el eje x corresponde al número $\sqrt{5}$. Para representar $2\sqrt{5}$ se escoge un punto, por ejemplo $(4,2)$ tal que la distancia de ese punto a $(0,0)$ sea $2\sqrt{5}$ y se procede como antes; esto garantiza que la circunferencia de centro $(0,0)$ y que pasa por $(4,2)$ corta al eje y en $2\sqrt{5}$. Observe la construcción auxiliar en la siguiente figura.

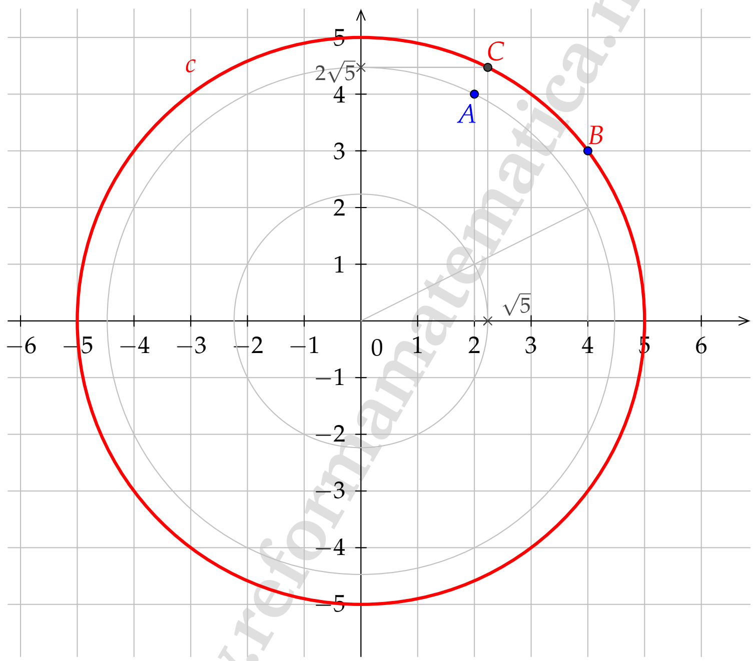


Figura 38: Los puntos B y C pertenecen a la circunferencia c. El punto A no pertenece a dicha circunferencia.

Ejemplo 31

¿ Cuál es la ecuación de la circunferencia que aparece en la siguiente figura?

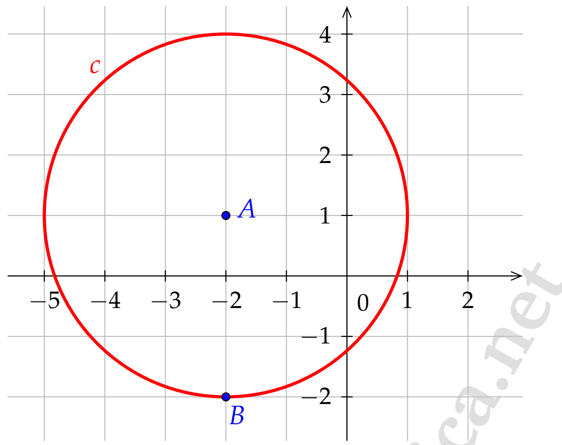


Figura 39: A es el centro de la circunferencia c y B pertenece a la circunferencia.

Solución

Se observa que el centro es el punto $A(-2, 1)$. El punto $B(-2, -2)$ pertenece a la circunferencia y $d(A, B) = 3$; esto significa que el radio de la circunferencia es igual a 3. Por lo tanto, la ecuación de c es $(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 3^2$. Es decir, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Lo que define si un punto pertenece a una circunferencia es que su distancia al centro sea igual al radio de la circunferencia. Si la distancia de un punto P al centro de la circunferencia es menor que el radio, entonces el punto P está en el interior de la circunferencia. Si la distancia de P al centro es mayor que el radio entonces P está en el exterior de la circunferencia.

Puntos interiores y exteriores a una circunferencia

Si el centro de una circunferencia en el plano es $C(h, k)$ y su radio es r y se tiene un punto $P(a, b)$ entonces:

- P es interior a la circunferencia si
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$
- P es exterior a la circunferencia si
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2.$$

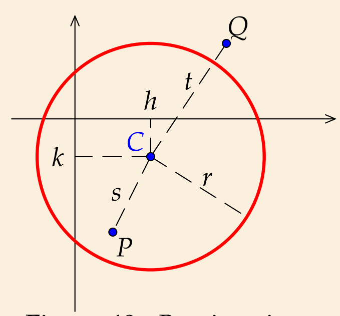


Figura 40: P es interior a la circunferencia ($s < r$). Q es exterior a la circunferencia ($t > r$).

Ejemplo 32

El punto $A(-2,3)$ es exterior a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=20$, pues $(-2-2)^2+3^2=16+9=25>20$.

El punto $B(0,3)$ es interior a esa circunferencia pues $(0-2)^2+3^2=4+9=13<20$.

Relaciones de posición entre rectas y circunferencias

Dadas una recta y una circunferencia en el plano, se puede presentar alguna de las situaciones que se dan en la siguiente figura.

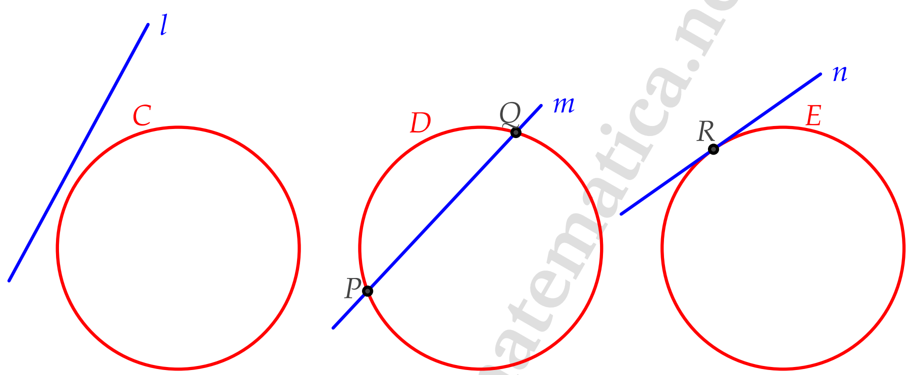


Figura 41: Posiciones relativas entre una circunferencia y una recta en el plano.

Posición relativa de una recta con respecto a una circunferencia

En la figura anterior:

- la recta l y la circunferencia C no se cortan (no se intersecan), se dice que la recta es **exterior** a la circunferencia.
- La recta m y la circunferencia D se cortan (o intersecan) en dos puntos P y Q, en este caso se dice que la recta es **secante** a la circunferencia.
- La recta n y la circunferencia E se cortan (o intersecan) en un único punto R, en este caso se dice que la recta es **tangente** a la circunferencia.

Ejemplo 33

En la siguiente figura se tiene que la recta f es tangente a las circunferencias c y d, la recta g es tangente a la circunferencia c y secante a la circunferencia d, la recta h es secante a la circunferencia c y exterior a la circunferencia d.

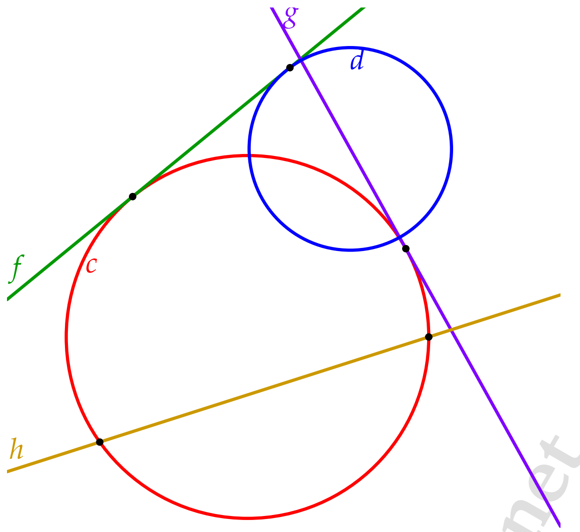


Figura 42: Las rectas f y g son tangentes a c, h es secante a c, g es secante a d, f tangente a d y h exterior a d.

Si se tiene la ecuación de una recta y la ecuación de una circunferencia y se quiere determinar la posición relativa entre ellas, lo que se debe averiguar es si no tienen puntos en común, o tienen solo un punto en común o tienen dos puntos en común.

Algebraicamente esto significa que debe determinarse si no hay pares de números reales, o hay solamente uno o hay dos de ellos que satisfacen simultáneamente la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia. Esto conlleva a resolver una ecuación de segundo grado, que, como sabemos, puede no tener soluciones reales o tener solo una o tener dos, lo cual depende del valor del discriminante de la ecuación.

Relación rectas – circunferencias – discriminante

Si $y = mx + b$ es la ecuación de una recta y $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia, para determinar, algebraicamente, si la recta es tangente, secante o exterior a la circunferencia, se puede sustituir la y de la ecuación de la circunferencia por $mx + b$ y resolver la ecuación resultante:

$$(x-h)^2 + (mx+b-k)^2 = r^2.$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es Δ. Se tiene que:

- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto la recta es exterior a la circunferencia.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene solo una solución real y por lo tanto la recta es tangente a la circunferencia.
- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y por lo tanto la recta es secante a la circunferencia.

Ejemplo 34

Determine la posición relativa de la recta f de ecuación $y = 2x - 1$ con respecto a la circunferencia c de ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

La solución algebraica consiste en resolver la ecuación $(x-2)^2 + (2x-1-1)^2 = 4$. Esta ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (2x-2)^2 &= 4\\ x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 8x + 4 &= 4\\ 5x^2 - 12x + 4 &= 0\end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 144 - 100 = 44$. Como es positivo, entonces la recta es secante a la circunferencia.

La solución gráfica consiste en trazar la circunferencia c y la recta f en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Para trazar la recta se obtienen dos puntos que pertenezcan a ella y se traza la recta que pasa por esos dos puntos; por ejemplo $B(0,-1)$ y $C(1,1)$ pertenecen a la recta.

Para trazar c observamos que su centro es el punto $A(2,1)$ y su radio es $r = \sqrt{4} = 2$.

Se obtiene la gráfica que aparece en la siguiente figura.

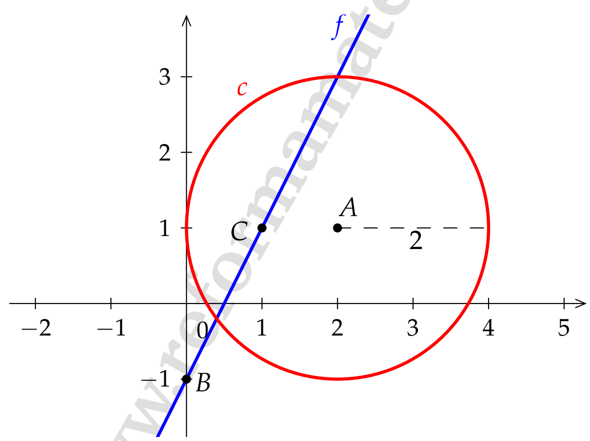


Figura 43: La recta f es secante a la circunferencia c.

Ejemplo 35

Una recta f pasa por los puntos $A(4,0)$ y $B(2,6)$, Â¿será secante, tangente o exterior a la circunferencia c de ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 10$?

Solución

Algebraicamente: La pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $m = \dfrac{6-0}{2-4} = \dfrac{6}{-2} = -3$. Luego, como pasa por el punto $A(4,0)$, su ecuación es $\dfrac{y-0}{x-4} = -3$ que es equivalente a $y = -3x + 12$.

Al sustituir en la ecuación de c se obtiene $x^2 + (-3x + 12 - 2)^2 = 10$. Al desarrollar y simplificar se obtiene $x^2 - 6x + 9 = 0$. El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.

La ecuación solo tiene una solución, por lo tanto solo hay un punto en común entre la recta y la circunferencia. La recta es tangente a la circunferencia.

Gráficamente: Se traza la recta que pasa por los dos puntos dados y la circunferencia de centro en $C(0,2)$ y radio $r = \sqrt{10}$.

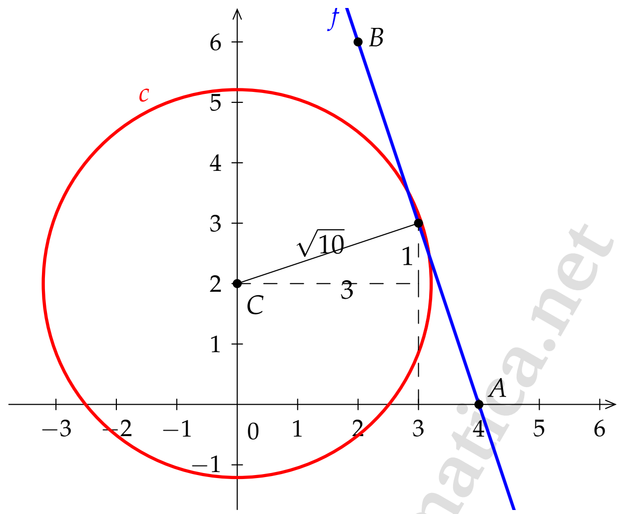


Figura 44: La recta f es tangente a la circunferencia c.

Relación radio – recta tangente a una circunferencia

Si c es una circunferencia de centro C y l una recta tangente a c en el punto A, entonces, el radio $\overline{CA}$ de la circunferencia el perpendicular a la recta l.

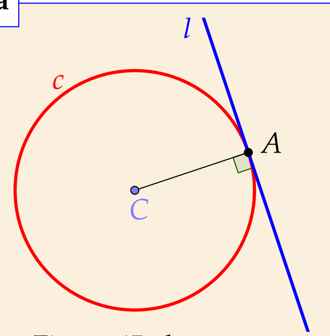


Figura 45: l es tangente a c en A, $\overline{CA} \perp l$.

Ejemplo 36

Una recta l es tangente a la circunferencia de ecuación $(x-3)^2 + y^2 = 9$ en el punto $A(2, 2\sqrt{2})$. Determinar la ecuación de l.

Solución

El centro de la circunferencia es $C(3,0)$, luego, la pendiente de $\overleftrightarrow{CA}$ es $m = \dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-3} = -2\sqrt{2}$.

Como $\overleftrightarrow{CA}$ es perpendicular a l, entonces la pendiente de l es $n = -\dfrac{1}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

La ecuación de l es $\dfrac{y-2\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Simplificando se obtiene: $\sqrt{2}x - 4y + 6\sqrt{2} = 0$.

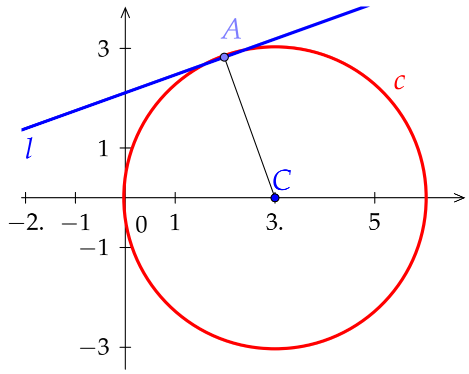


Figura 46: La ecuación de la recta l es $\sqrt{2}x - 4y + 6\sqrt{2} = 0$.

Cortesía de Suriya Kankliang en FreeDigitalPhotos.net

3. Polígonos

Área de algunas figuras básicas

Área del rectángulo

Si la dimensiones de un rectángulo son l y a, entonces su área es

$$A = l \cdot a.$$

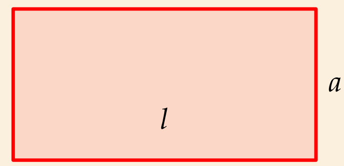


Figura 47: El área del rectángulo es $A = l \cdot a$.

Ejemplo 37

En la siguiente figura, los cuadriláteros ABCD, ECGF, HGJI, son rectángulos, E es punto medio de $\overline{CD}$, H es punto medio de $\overline{FG}$, $\overline{CG}$ mide el doble de $\overline{JG}$ y $\overline{BC}$ mide el doble de $\overline{CG}$.

Si $AB = 6$ cm y $BJ = 7$ cm. Â¿Cuál es el área de la figura completa?

Solución

Sea $GJ = x$. Se tiene que $CG = 2x$ y $BC = 2 \cdot CG = 2 \cdot 2x = 4x$. Luego:

$$\begin{aligned} BJ &= BC + CG + GJ \\ BJ &= 4x + 2x + x \\ 7 &= 7x. \end{aligned}$$

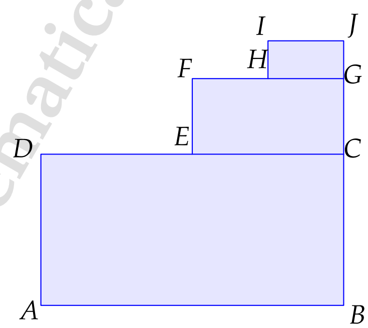


Figura 48: Las dimensiones del rectángulo mediano son el doble que las del pequeño y las del grande son el doble que las del mediano.

Por lo que $x = 1$.

Las dimensiones de $ABCD$ son 6 cm y 4 cm por lo que su área es $6 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2$.

Las dimensiones de $ECGF$ son 3 cm y 2 cm por lo que su área es $3 \cdot 2 = 6\,\text{cm}^2$.

Las dimensiones de $ABCD$ son 1,5 cm y 1 cm por lo que su área es $1,5 \cdot 1 = 1,5\,\text{cm}^2$.

El área total de la figura es $24 + 6 + 1,5 = 31,5\,\text{cm}^2$.

Área del cuadrado

Si el lado de un cuadrado mide l entonces su área es

$$A = l \cdot l = l^2.$$

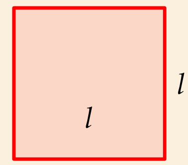


Figura 49: Como en el cuadrado $a = l$, entonces su área es $A = l \cdot l = l^2$.

Ejemplo 38

En la siguiente figura, todos los cuadriláteros que se observan son cuadrados. Los dos más pequeños tienen área igual a $1\,\text{cm}^2$. Â¿Cuál es el área de la figura completa?

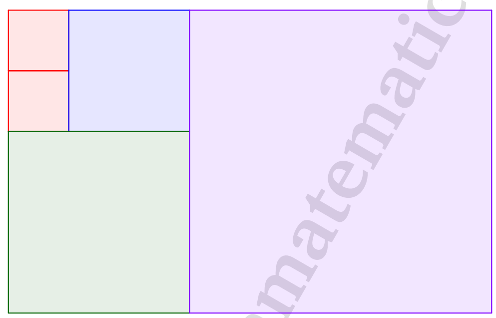


Figura 50: A partir del tercer cuadrado, el lado es igual a la suma de los lados de los dos anteriores.

Solución

Como el área de cada cuadrado rojo es $1\,\text{cm}^2$, entonces su lado mide 1 cm. Luego:

El lado del cuadrado azul mide 2 cm y su área es $2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}^2$.

El lado del cuadrado verde mide 3 cm y su área es $3 \cdot 3 = 9\,\text{cm}^2$.

El lado del cuadrado violeta mide 5 cm y su área es $5 \cdot 5 = 25\,\text{cm}^2$.

El área de la figura completa es $1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40\,\text{cm}^2$.

Área de un paralelogramo

Si b es la base de un paralelogramo y h es la altura sobre esa base entonces el área del paralelogramo es

$$A = b \cdot h.$$

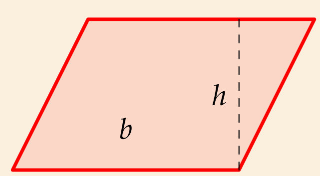


Figura 51: El área del paralelogramo es $A = b \cdot h$.

Ejemplo 39

La siguiente figura está formada por un cuadrado y dos paralelogramos congruentes. El área total de la figura es 20 y se tiene que $AF = 7$. Determinar el área de cada paralelogramo.

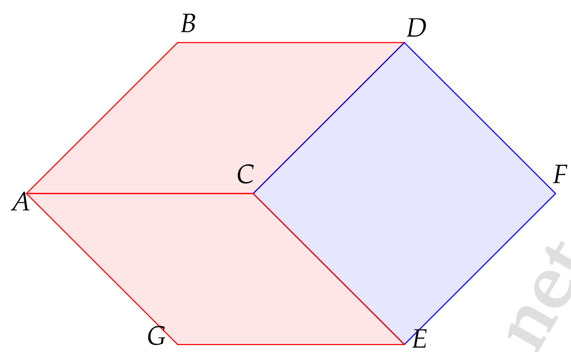


Figura 52: La figura completa está formada por un cuadrado (azul) y dos paralelogramos congruentes (rojos).

Solución

Sea h la altura y b la base de cada paralelogramo. Los triángulos AGB y FDE son congruentes por lo que la figura completa tiene la misma área que el rectángulo $GHIB$ que se da en la siguiente figura.

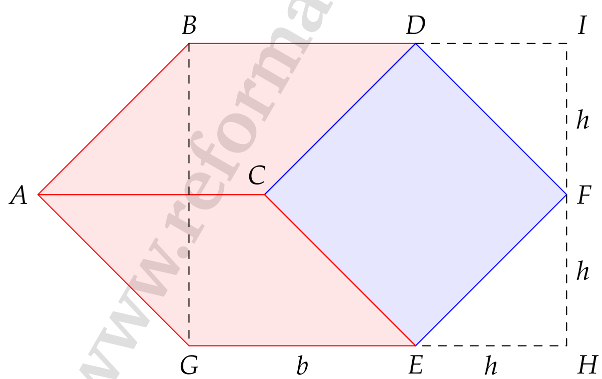


Figura 53: El área de la figura $AGEFDB$ es igual a la del rectángulo $GHIB$.

El largo del rectángulo $GHIB$ es $b + h$ y la altura es $2h$. Por lo que su área es $2h(b + h)$. Como el área total de la figura es 20, entonces $2h(b + h) = 20$ (*).

Por otra parte, $AF = 7$, es decir $b + 2h = 7$; luego, $b = 7 - 2h$. Sustituyendo en (*) se tiene que $h(7 - h) = 10$. De aquí se obtiene que $h = 2$ y por lo tanto $b = 3$. El área de cada paralelogramo es $2 \cdot 3 = 6$.

Área del triángulo

Si b es la base de un triángulo y h es la altura sobre esa base entonces el área del triángulo es

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

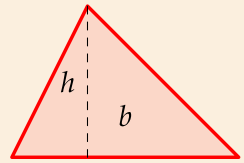


Figura 54: El área del triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Ejemplo 40

En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo, E es el punto medio de $\overline{AC}$ y F es el punto medio de $\overline{EC}$. Determinar la razón del área de $\triangle ABC$ y el área de $\triangle DCF$.

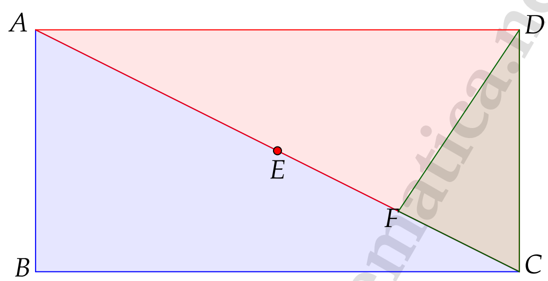


Figura 55: $ABCD$ es un rectángulo, E es punto medio de $\overline{AC}$ y F es punto medio de $\overline{EC}$.

Solución

Como $ABCD$ es un rectángulo entonces $\angle B$ es recto y se tiene que la base de $\triangle ABC$ es $BC = a$ y la altura es $AB = b$. Su área es $\frac{1}{2}ab$. Trace la altura desde F hasta el lado $\overline{CD}$ en el $\triangle DCF$.

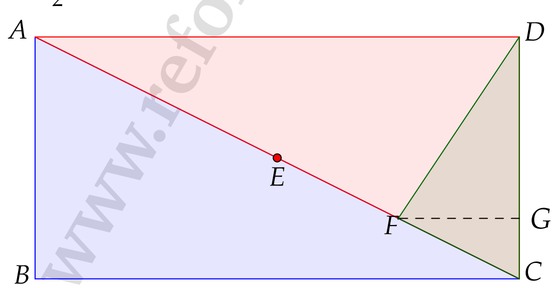


Figura 56: $\overline{FG}$ es la altura desde F sobre el lado $\overline{CD}$ en $\triangle DCF$.

Dado que F es punto medio de $\overline{EC}$ y E punto medio de $\overline{AC}$ se tiene que esa altura es igual a $\frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}a$. Por otra parte, $DC = AB = b$. Luego, el área de $\triangle DCF$ es igual a

$$\frac{b \cdot \frac{1}{4}a}{2} = \frac{1}{8}ab.$$

La razón entre ambas áreas es

$$\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{1}{8}ab} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 41

Determinar el área de un triángulo equilátero que mide 12 cm de lado.

Solución

Considere el triángulo equilátero de la figura que aparece a continuación. Se ha trazado la altura sobre uno de los lados.

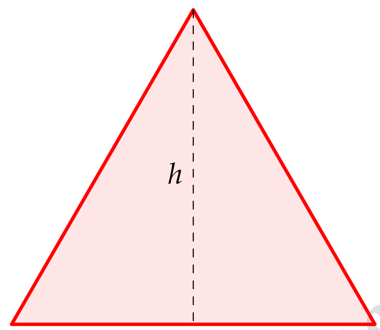


Figura 57: El triángulo es equilátero, h es la altura.

La altura divide la base a la mitad, entonces, según el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

De esta forma, el área del triángulo es

$$A = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Área del rombo

Si D y d son respectivamente las medidas de las dos diagonales del rombo entonces su área es

$$A = \frac{D \cdot d}{2}.$$

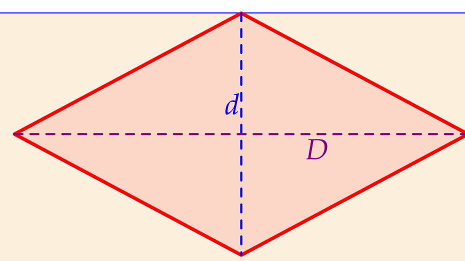


Figura 58: El área del rombo es $\frac{D \cdot d}{2}$.

Ejemplo 42

El lado de un rombo mide 5 y una de sus diagonales mide el doble de la otra. Determinar el área del rombo.

Solución

Suponga que una diagonal mide x, entonces la otra mide $2x$. Considere la siguiente figura:

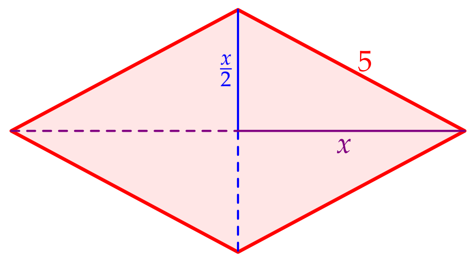


Figura 59: Se considera el triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $\frac{x}{2}$ y cuya hipotenusa mide 5.

Se tiene que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = 5^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 + x^2 &= 25 \Rightarrow \tfrac{5}{4}x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow \\ x &= \sqrt{20} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

En conclusión, una diagonal mide $2\sqrt{5}$ y la otra el doble: $4\sqrt{5}$. Así, tenemos que el área del rombo es

$$A = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20.$$

Área del trapecio

El área de un trapecio es igual a la suma de sus bases multiplicada por su altura, dividido entre dos. Si la base mayor es B, la base menor es b y la altura es h, entonces:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

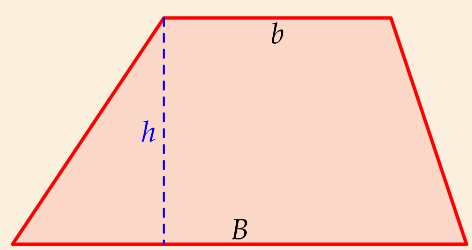


Figura 60: El área del trapecio es $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

Ejemplo 43

En la siguiente figura el área de $\triangle AGD$ es 1, el área de $\triangle HBC$ es 2, G es el punto medio de $\overline{DC}$ y H es el punto medio de $\overline{AB}$. Determinar el área del trapecio $ABCD$.

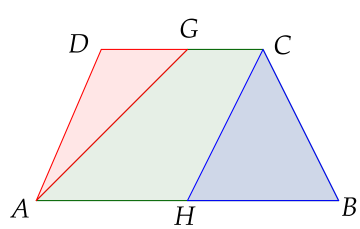


Figura 61: Área de $\triangle AGD$ es 1, área de $\triangle HBC$ es 2, G es el punto medio de $\overline{DC}$ y H es el punto medio de $\overline{AB}$ Â¿cuál es el área del trapecio $ABCD$?

Solución

Sea $DG = b$ base de $\triangle AGD$ y a su altura que coincide con la altura del trapecio. Se tiene $\dfrac{ab}{2} = 1$.

Sea $HB = c$ base de $\triangle HBC$, su altura es a. Se tiene $\dfrac{ac}{2} = 2$.

La base mayor del trapecio es $2c$ (pues H es punto medio de tal base) y la base menor es $2b$ (pues G es punto medio de tal base). El área del trapecio es igual a

$$\begin{aligned}\frac{(2b+2c)a}{2} &= \frac{2ba+2bc}{2}\\ &= \frac{2ba}{2} + \frac{2ca}{2} = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 2+4 = 6.\end{aligned}$$

Conceptos básicos sobre polígonos

Polígono

Un **polígono** de n (con entero mayor que 2) lados consta de n puntos de modo que tres de ellos consecutivos no son colineales y de los segmentos que unen puntos consecutivos.
Elementos básicos de un polígono:

- **vértices**, los puntos comunes a dos de los segmentos que constituyen el polígono,
- **lados**, cada uno de los segmentos que constituyen el polígono,
- **diagonales**, los segmentos de recta que unen dos vértices no consecutivos,
- **ángulos internos**, los ángulos cuyos vértices son vértices del polígono y sus lados son lados del polígono,
- **ángulos externos**, los ángulos adyacentes y suplementarios a los ángulos internos.

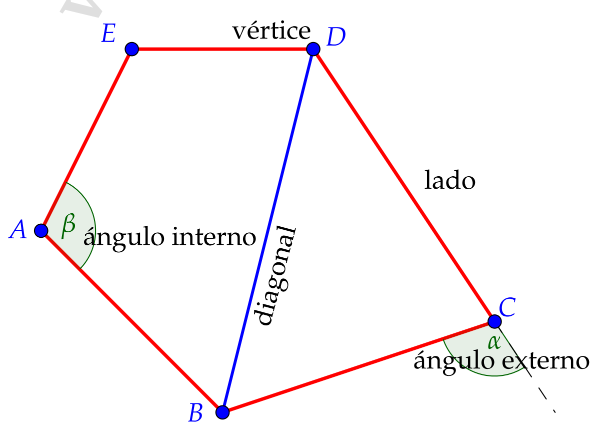


Figura 62: Elementos básicos de un polígono: A, B, C, D y E son los vértices, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son los lados, $\overline{BD}$ es una diagonal, β es un ángulo interno, α es un ángulo externo.

Clasificación de los polígonos

Los polígonos reciben nombres especiales de acuerdo con el número de sus lados (o de sus ángulos, que es lo mismo). Por ejemplo:

- **triángulo**, *tres* lados,
- **cuadrilátero**, *cuatro* lados,
- **pentágono**, *cinco* lados,
- **hexágono**, *seis* lados,
- **heptágono**, *siete* lados,
- **octágono**, *ocho* lados,
- **nonágono**, *nueve* lados,
- **decágono**, *diez* lados,
- **undecágono**, *once* lados,
- **dodecágono**, *doce* lados.

Polígono convexo

Un polígono es **convexo** si todas sus diagonales están contenidas en el interior del polígono.

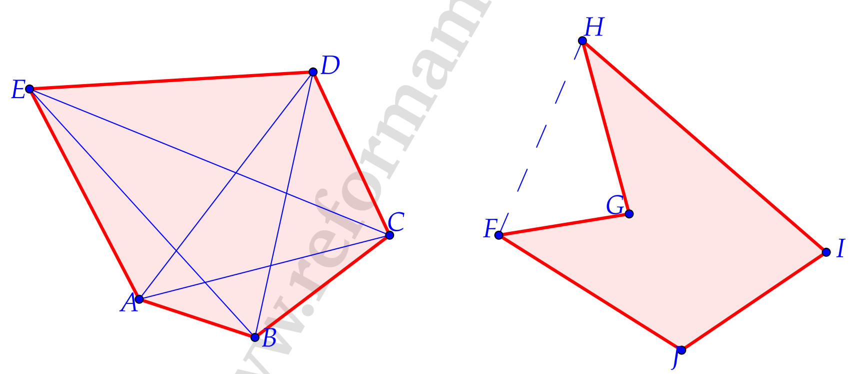


Figura 63: El polígono $ABCDE$ es convexo, todas sus diagonales están en el interior. El polígono $FGHIJ$ no es convexo, la diagonal $\overline{FH}$ no está en el interior.

Polígono regular

Un polígono es **regular** si es convexo y todos sus lados son congruentes entre sí y todos sus ángulos son congruentes entre sí.

Ejemplo 44

a) En la siguiente figura el polígono $ABCDE$ es regular: $AB = BC = CD = DE = EA$ y $\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E$. El polígono $FGHIJ$ no es regular; por ejemplo, $GH > FG$, $m(\angle F) < m(\angle J)$.

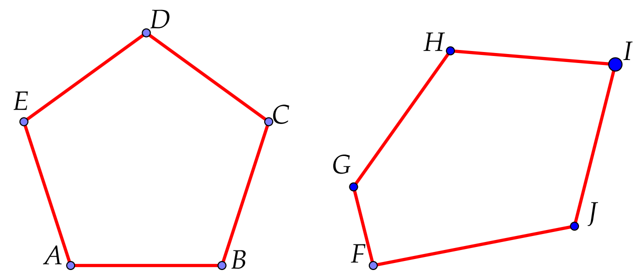


Figura 64: El polígono $ABCDE$ es regular, el polígono $FGHIJ$ no es regular.

b) Un triángulo equilátero es un polígono regular de tres lados.

c) Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados.

Centro, radio, ángulo central, apotema

En un polígono regular:

- Su **centro** es el punto que equidista de los vértices del polígono.
- Un **radio** es un segmento que une el centro con un vértice, también se llama **radio** a la medida de ese segmento.
- Un ángulo cuyos lados contienen radios consecutivos se llama **ángulo central**.
- Una **apotema** es un segmento que une el centro de un polígono regular con el punto medio de alguno de sus lados.

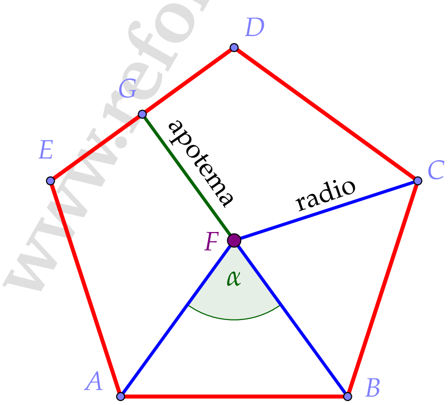


Figura 65: El polígono $ABCDE$ es regular, F es el centro, $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$ son radios, $\overline{FG}$ es una apotema, α es un ángulo central.

Medida del ángulo central

En un polígono regular de n lados, cada uno de los ángulos centrales mide $\dfrac{360^o}{n}$.

Ejemplo 45

Cada ángulo central de un polígono regular de 8 lados mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

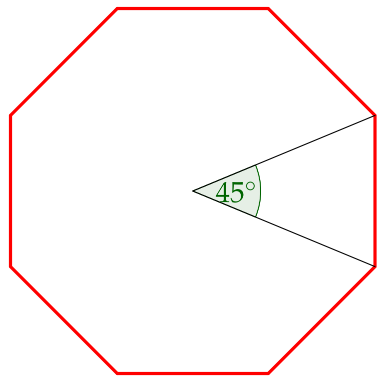


Figura 66: Cada uno de los ocho ángulos centrales del octágono regular mide 45°.

Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo

En un polígono convexo de n lados, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a

$$180^\circ \cdot (n-2).$$

Ejemplo 46

Determinar la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de 12 lados.

Solución

Se tiene que $n = 12$, entonces, las suma de los ángulos internos del polígono es igual a

$$180^\circ(n-2) = 180^\circ(12-2) = 180^\circ \cdot 10 = 1800^\circ.$$

Medida del ángulo interno de un polígono regular

En un polígono regular de n lados, cada uno de los ángulos internos mide

$$\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}.$$

Ejemplo 47

A continuación se dan las medidas de los ángulos internos de algunos polígonos regulares:

Polígono	Suma de ángulos internos	Medida del ángulo interno
Triángulo equilátero	$180^\circ \cdot (3-2) = 180^\circ$	$\frac{1}{3} \cdot 180^\circ \cdot (3-2) = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$
Cuadrado	$180^\circ \cdot (4-2) = 360^\circ$	$\frac{1}{4} \cdot 180^\circ \cdot (4-2) = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
Pentágono regular	$180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$	$\frac{1}{5} \cdot 180^\circ \cdot (5-2) = \frac{1}{5} \cdot 540^\circ = 108^\circ$
Hexágono regular	$180^\circ \cdot (6-2) = 720^\circ$	$\frac{1}{6} \cdot 180^\circ \cdot (6-2) = \frac{1}{6} \cdot 720^\circ = 120^\circ$

Ejemplo 48

La medida de cada uno de los ángulos internos de cierto polígono regular es $156°$, ¿cuántos lados tiene?

Solución

Suponga que tiene n lados, luego:

$$\begin{aligned}\frac{180°(n-2)}{n} &= 156° \\ 180°(n-2) &= n \cdot 156° \\ 180° \cdot n - 360° &= 156° \cdot n \\ 180° \cdot n - 156° \cdot n &= 360° \\ 24° \cdot n &= 360° \\ n &= \frac{360}{24} \\ n &= 15.\end{aligned}$$

Esto es, el polígono tiene 15 lados.

Ejemplo 49

En la siguiente figura considere el heptágono $DCBEHGF$

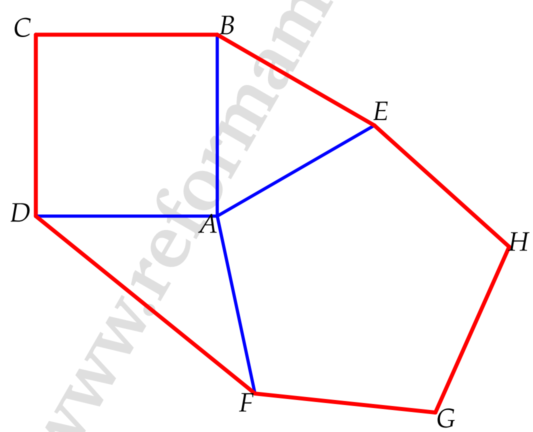


Figura 67: Heptágono $DCBEHGF$.

Dicho heptágono está compuesto por el cuadrado $ABCD$, el triángulo equilátero ABE, el pentágono regular $AFGHE$ y el triángulo no equilátero DAF. Â¿Cuánto mide $\angle DFA$? *Solución*

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces $m(\angle DAB) = 90°$.

Puesto que $\triangle ABE$ es equilátero, entonces $m(\angle BAE) = 60°$.

Como $AFGHE$ es un pentágono regular, entonces $m(\angle FAE) = 108°$.

Se concluye que $m(\angle DAF) = 360° - 90° - 60° - 108° = 102°$.

Como los lados del cuadrado, el triángulo equilátero y el pentágono son todos congruentes, entonces el triángulo DAF es isósceles. Esto significa que $m(\angle DFA) = m(\angle FDA)$.

La suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo es igual a 180°, entonces

$$\begin{aligned} 2 \cdot m(\angle DFA) &= 180^\circ - m(\angle DAF) \\ 2 \cdot m(\angle DFA) &= 180^\circ - 102^\circ \\ 2 \cdot m(\angle DFA) &= 78^\circ \\ m(\angle DFA) &= 39^\circ \end{aligned}$$

Ángulos externos

La suma de los ángulos externos de un polígono convexo siempre es igual a 360°. Además, si el polígono es regular, entonces cada ángulo externo mide $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Ejemplo 50

Cada uno de los ángulos externos de un polígono convexo mide 24°, determinar cuántos lados tiene.

Solución

En esta situación, $24^\circ = \frac{360^\circ}{n}$, luego, $n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15$. El polígono tiene 15 lados.

Considere ahora un polígono regular de n lados ($n > 3$) en el que cada lado mide l, Â¿cuánto medirá su apotema?

Se puede descomponer el polígono en n triángulos isósceles, según se muestra en la siguiente figura.

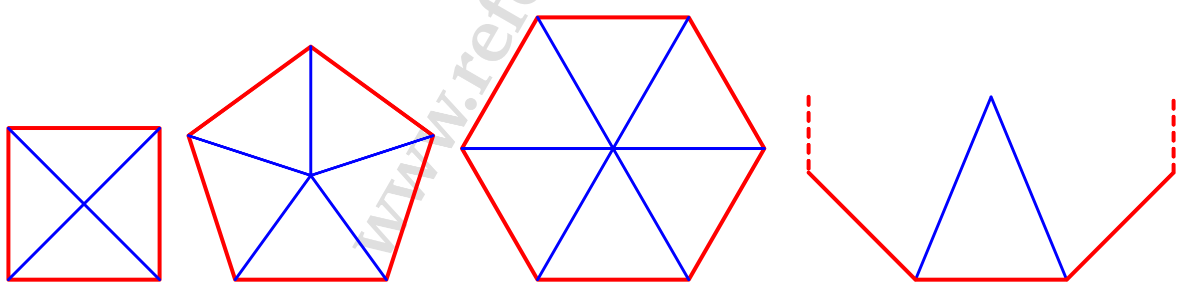


Figura 68: Cada polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles congruentes.

La apotema del polígono corresponde a la altura trazada desde el ápice de uno de esos triángulos. El ángulo en el ápice es un ángulo central del polígono, entonces mide $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

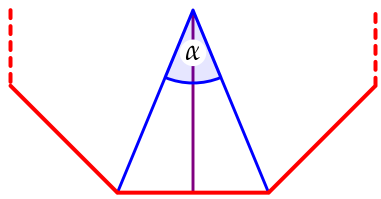


Figura 69: La altura del triángulo corresponde a la apotema del polígono. El ángulo en el ápice del triángulo es $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Se tiene lo siguiente.

Medida de la apotema de un polígono regular de n lados

En un polígono regular de n lados, la medida de la apotema es igual a:

$$a = r\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right), \tag{2}$$

donde r es la medida del radio del polígono.

Ejemplo 51

El radio de un pentágono regular mide 12 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución Un pentágono tiene 5 lados, además, la medida del radio es igual a 12 cm. Luego, según (2) la apotema del pentágono es igual a

$$\begin{aligned} a &= 12 \cdot \cos\left(\frac{180}{5}\right) \\ a &= 9{,}7082cm \end{aligned}$$

Ejemplo 52

El lado de un nonágono regular mide 8 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución Se determina la medida del radio del nonágono, la medida del ángulo central es de 40°:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 20^\circ &= \frac{\frac{8}{2}}{r} \\ r &= \frac{4}{\operatorname{sen} 20^\circ} \\ r &= 11{,}6952 \end{aligned}$$

Un nonágono tiene 9 lados, además, la medida del radio es igual a 11,6952. Luego, según (2) la apotema del nonágono es igual a:

$$a = 11,6952 \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{9}\right)$$
$$a = 11,6952 \cdot \cos 20^\circ$$
$$a = 10,9899$$

Otra estrategia de solución se proporciona enseguida.

El ángulo central del nonágono mide $\dfrac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. En la siguiente figura se muestra el nonágono con una apotema, la cual es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y cuyo otro cateto es la mitad del lado, es decir, mide 4. El ángulo destacado es la mitad del ángulo central del nonágono, es decir, mide 20°.

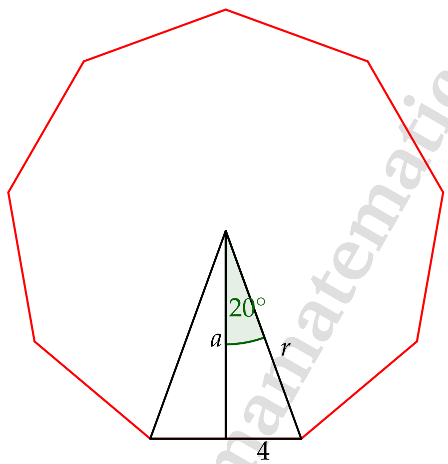


Figura 70: Nonágono con una de sus apotemas

De acuerdo con esto:

$$\tan 20^\circ = \frac{4}{a}$$
$$a = \frac{4}{\tan 20^\circ}$$
$$a = 10,9899$$

Ejemplo 53

El lado de un hexágono regular mide 10 cm; determinar la longitud de su apotema.

Solución

En un hexágono regular, la medida del radio es igual a la medida del lado, por lo tanto, el radio mide 10 cm. Luego, según (2) la apotema del hexágono es igual a

$$a = 10\cos\left(\frac{180^\circ}{6}\right) \text{ cm} = 10\cos 30^\circ \text{ cm} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Perímetros y áreas

Perímetro

El **perímetro** de un polígono es la suma de las medidas de sus lados. Si el polígono es regular de n lados, entonces su perímetro es

$$P = n \cdot l,$$

donde l es la medida del lado.

Ejemplo 54

En la siguiente figura se muestra un octágono $ABCDEFGH$ no regular.

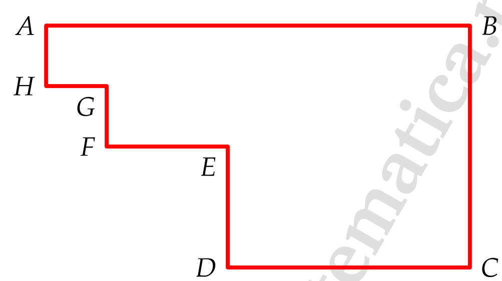


Figura 71: Octágono $ABCDEFGH$.

El polígono fue formado pegando cuatro cuadrados; el más pequeño es de lado 1, el segundo tiene el lado el doble que el primero y el tercero el lado el doble que el segundo. Determinar el perímetro del octágono.

Solución

El lado del cuadrado menor es 1, el del mediano es el doble; es decir, 2 y el del mayor es el doble del mediano es decir 4. De acuerdo con esto: $AB = 7$, $BC = 4$, $CD = 4$, $DE = 2$, $EF = 2$, $FG = 1$, $GH = 1$ y $HA = 1$.

Luego, el perímetro es igual a $7 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 22$.

Ejemplo 55

En la siguiente figura, $ABCDE$ es un pentágono regular de lado 2 cm. Determinar el perímetro del hexágono no regular $ABFCDE$.

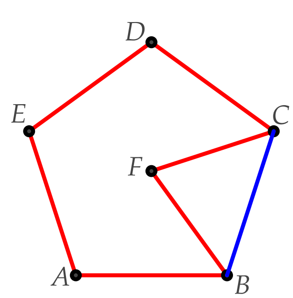


Figura 72: $ABCDE$ es un pentágono regular de lado 2 cm.

Solución

En el hexágono $ABFCDE$, 4 lados coinciden con los lados del pentágono $ABCDE$, por lo que cada uno de ellos mide 2 cm. Los otros dos lados del hexágono, a saber: $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$ corresponden a radios del pentágono.

Considere el triángulo isósceles BFC, el ángulo en el ápice corresponde a un ángulo central del pentágono por lo que mide 108°. Trace la altura desde el ápice y sea G el pie de esa altura.

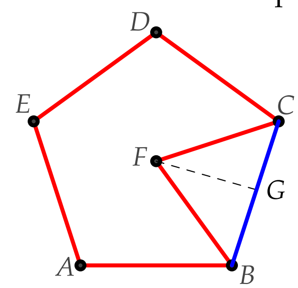


Figura 73: $GC = 1$ cm, $m(\angle GFC) = 54°$.

Como $m(\angle BFC) = 108°$, entonces $m(\angle GFC) = 54°$, por otra parte, $GC = 1$ (pues G es el punto medio de $\overline{BC}$). Luego se tiene:

$$FC = FB = \frac{1}{\operatorname{sen} 54°} \approx 1,236.$$

El perímetro del hexágono $ABFCDE$ es igual a $2 + 2 + 2 + 2 + 1,236 + 1,236 = 10,472$ cm.

Área de un polígono regular

Si un polígono es regular con n lados entonces su área es

$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2},$$

donde l es la medida de su lado y a es la medida de su apotema.

Ejemplo 56

En la figura, el octágono es regular y el cuadrado tiene diagonal 12 cm. Determinar el área de la región coloreada con rojo.

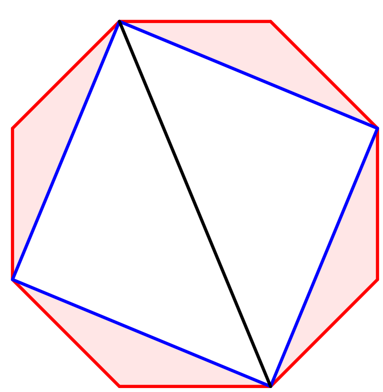


Figura 74: El octágono es regular, la diagonal del cuadrado mide 12 cm.

Solución

Se observa que la diagonal del cuadrado es igual a dos radios del octágono. El ángulo central del octágono mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

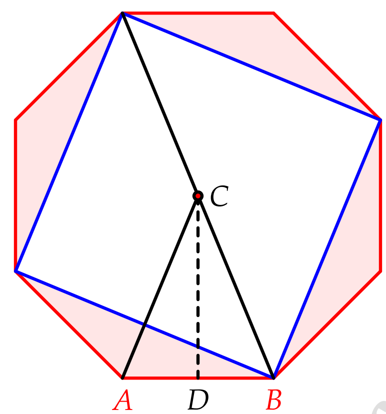


Figura 75: $\triangle ABC$ es isósceles, $m(\angle ACB) = 45^\circ$, $\overline{CD}$ es la altura desde el ápice, $CB = 6$, $m(\angle DCB) = 22,5^\circ$ cm.

Si l es la medida del lado del octágono, entonces, con la notación de la figura anterior, $\operatorname{sen}(22,5^\circ) = \dfrac{l/2}{6}$. Despejando l se obtiene

$$l = 12 \cdot \operatorname{sen}(22,5^\circ) \approx 4,5922.$$

Según el teorema de Pitágoras, se obtiene que la apotema del octágono es $CD = \sqrt{6^2 - 2,3^2} = 5,5433$.

El área del octágono es

$$A = \frac{8 \cdot 4,6 \cdot 5,54}{2} = 101,8238 \text{ cm}^2.$$

Como la diagonal del cuadrado es 12 cm, entonces, si el lado del cuadrado es L, entonces, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$2L^2 = 144 \Rightarrow L^2 = 72 \text{ cm}^2.$$

El área sombreada es igual a $101,1 \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 29,82 \text{ cm}^2$.

Área de polígonos no regulares

Si el polígono no es regular, para calcular su área se puede descomponer en figuras básicas como triángulos, trapecios, cuadrados, etc., y sumar el área de estas figuras. También se puede inscribir en una figura básica, calcular el área de esta y luego sustraer el área de otras figuras básicas.

Ejemplo 57

En la figura siguiente se tiene que las rectas $\overleftrightarrow{GE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas y la distancia entre ellas es 2 cm. Por otra parte las rectas $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{EC}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{BC}$, D es es el punto medio de $\overline{GE}$ y G es es el punto medio de $\overline{AF}$. Si $d(B,F) = 2$ cm y $d(F,C) = 6$ cm, determinar el área del pentágono $ABCED$.

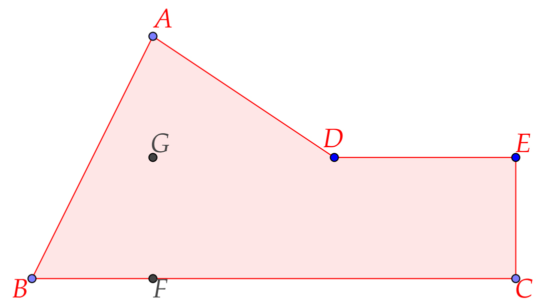


Figura 76: Pentágono $ABCED$.

Solución

Tracemos los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{GD}$.

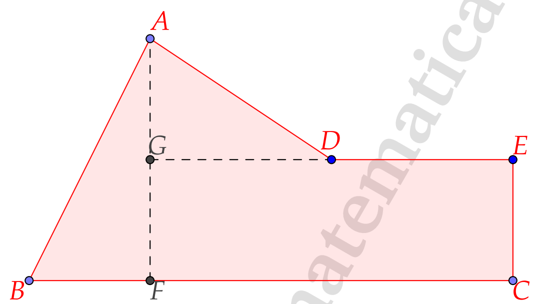


Figura 77: El pentágono $ABCED$ se puede subdividir en dos triángulos ABF, ADG y un rectángulo $CEGF$.

El polígono queda dividido en dos triángulos y un rectángulo.

Como $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$, si se toma como base de $\triangle ABF$ el lado $\overline{BF}$ entonces la altura es $\overline{FA}$. Nos dicen que $BF = 2$ cm y, por otra parte, $FA = 4$ cm pues $FG = 2$ cm y G es punto medio de $\overline{FA}$. Luego, se tiene

$$a(\triangle ABF) = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ cm}^2.$$

También $\triangle AGD$ es rectángulo con ángulo recto en G. Se tiene que $GA = 2$ y como D es punto medio de $\overline{GE}$, entonces $GD = 3$. Luego:

$$a(\triangle AGD) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

Finalmente, el cuadrilátero $FCEG$ es un rectángulo pues los lados opuestos están en rectas paralelas y los lados consecutivos son perpendiculares. La base es $FC = 6$ cm y la altura es $CE = 2$ cm, por lo que su área es 12 cm^2.

El área del polígono considerado es $4 + 3 + 12 = 19$ cm^2.

Ejemplo 58

En la siguiente figura se tiene que $DE = EF = FA = BC = 2$ cm, $m(\angle BAF) = m(\angle AFE) = m(\angle FED) = m(\angle ABC) = 120°$ y $AB = 6$ cm. Calcular el área del polígono $ABCDEF$.

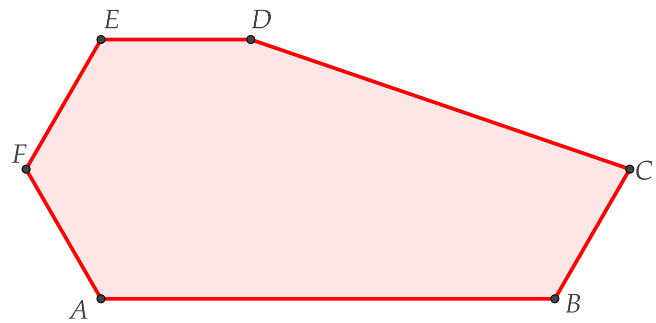


Figura 78: Polígono $ABCDEF$.

Solución

Trace dos puntos: un punto G en $\overline{AB}$ tal que $AG = 2$ cm y un punto H en el interior del polígono tal que $GH = 2$ cm y $m(\angle AGH) = 120°$. Además, $\overline{GH}$, $\overline{HD}$, $\overline{CH}$.

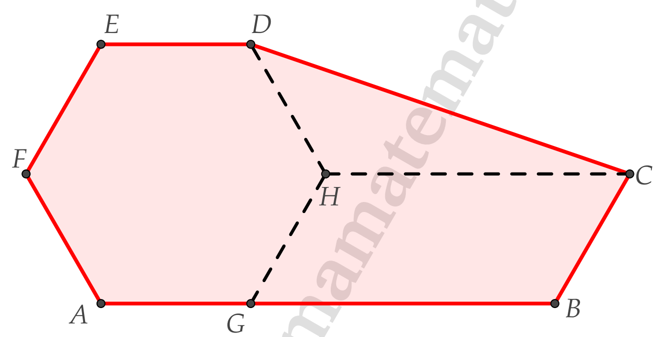


Figura 79: El polígono $ABCDEF$ queda dividido en un hexágono regular, un triángulo y un paralelogramo.

El polígono queda dividido en un hexágono regular de lado igual a 2 cm, un triángulo de base 6 cm y altura igual a la apotema del hexágono y un paralelogramo de base 6 cm y, también, altura igual a la apotema del hexágono.

Puesto que el lado y el radio de un hexágono son congruentes, por (2), la apotema del hexágono es igual a

$$a = 2\cos 30° = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ cm} \approx 1,732\text{ cm}.$$

De tal modo:

El área del hexágono es $\dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1,732}{2}$ cm^2 = 10,392 cm^2.

El área del paralelogramo es $6 \cdot 1,732$ cm$^2 = 10,392$ cm^2.

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramos, es decir, 5,196 cm^2.

Así, el área del polígono $ABCDEF$ es $10,392 + 10,392 + 5,196 = 25,98$ cm^2.

Ejemplo 59

En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo, el $\triangle HAI$ es isósceles, $AH = HG = GD = BE$, $AB = 4 \cdot BI$ y $BI = FD$. Si $BC = 9$ cm, determinar el área del polígono $EFGHI$.

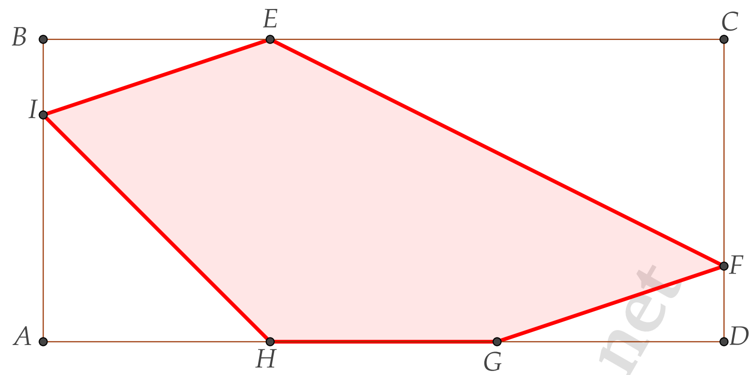


Figura 80: El polígono $EFGHI$ está inscrito en el rectángulo $ABCD$.

Solución

Como $BC = 9$ cm y $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AD = 9$ y puesto que $AH = HG = GD = BE$ entonces $AH = HG = GD = BE = 3$ cm.

Como $\triangle HAI$ es isósceles, entonces $AI = 3$ cm. Como $AB = 4 \cdot BI$ entonces:

$$\begin{aligned} AB &= 4BI \\ AI + BI &= 4BI \\ 3 + BI &= 4BI \\ 3 &= 4BI - BI \\ 3 &= 3BI \\ 1 &= BI. \end{aligned}$$

Como $BI = FD$, entonces, $FD = 1$ cm. De esto también se obtiene que $AB = 4$ cm.

El área del polígono $EFGHI$ se puede obtener restando al área del rectángulo en el que está inscrito, las áreas de los cuatro triángulos que se forman en la figura.

Tenemos:

$$\begin{aligned} a(ABCD) &= 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2 \\ a(\triangle HAI) &= \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ cm}^2 \\ a(\triangle IBE) &= \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5 \text{ cm}^2 \\ a(\triangle ECF) &= \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2 \\ a(\triangle FDG) &= \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Se concluye que el área del polígono $EFGHI$ es $36 - (4,5 + 1,5 + 9 + 1,5) = 19,5 \text{ cm}^2$.

Polígonos en un sistema de coordenadas

El uso de coordenadas para representar polígonos puede simplificar el cálculo de perímetros y área. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 60

La unidad de medida utilizada en el siguiente sistema de ejes cartesianos es 1 cm (cada uno de los cuadrados que constituye la cuadrícula tiene como lado 1 cm). Determinar el área del polígono $ABCDEF$.

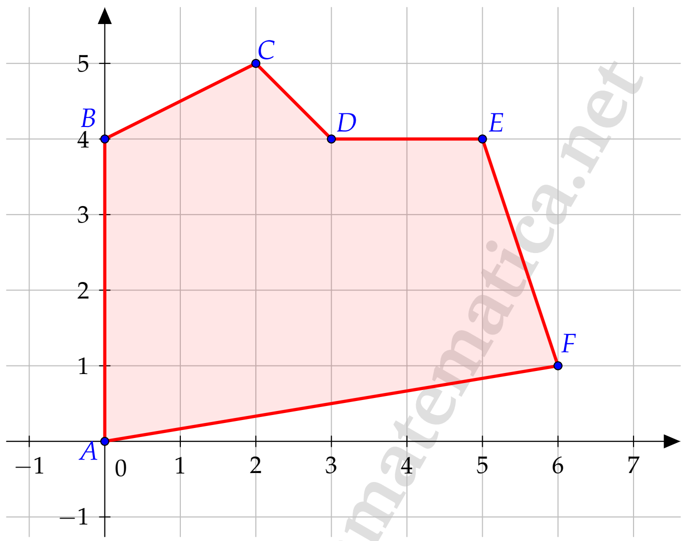


Figura 81: Polígono $ABCDEF$.

Solución

Se puede dividir el polígono en dos triángulos y un trapecio, tal como lo muestra la siguiente figura.

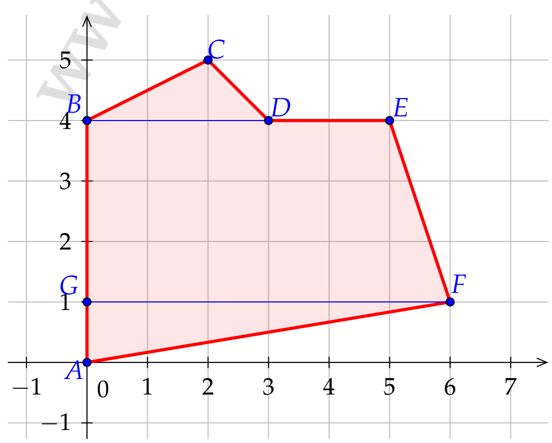


Figura 82: El polígono $ABCDEF$ se divide en el triángulo AFG, el triángulo BCD y el trapecio $BEFG$.

Se tiene que:

$$a(\triangle BCD) = \frac{3\cdot 1}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$$
$$a(\triangle AFG) = \frac{6\cdot 1}{2} = 3 \text{ cm}^2$$
$$a(BEFG) = \frac{(6+5)\cdot 3}{2} = 16,5 \text{ cm}^2$$

Luego, el área del polígono $ABCDEF$ es $a(ABCDEF) = 1,5+3+16,5 = 21 \text{ cm}^2$.

Ejemplo 61

En un sistema de coordenadas cartesianas considere el polígono de vértices $A(-2,2)$, $B(1,0)$, $C(5,1)$, $D(4,3)$ y $E(0,5)$. Dibujarlo, calcular su perímetro y calcular su área.

Solución

El polígono $ABCDE$ aparece en la siguiente figura.

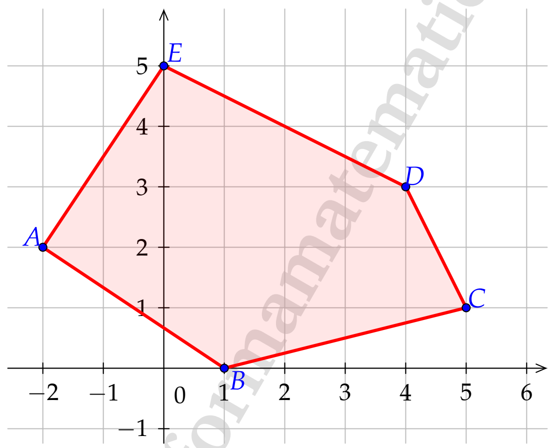


Figura 83: Polígono $ABCDE$.

Para calcular el perímetro se determina la distancia entre cada dos vértices consecutivos y se suman tales distancias:

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$d(B,C) = \sqrt{(1-5)^2+(0-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$d(C,D) = \sqrt{(5-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$d(D,E) = \sqrt{(4-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$
$$d(E,A) = \sqrt{(0--2)^2+(5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Luego, el perímetro del polígono es

$$\sqrt{13}+\sqrt{17}+\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{13} \approx 18,042.$$

Para calcular el área se puede proceder de alguna de las dos manera en que se hizo anteriormente. En este caso lo más sencillo es inscribir el polígono en un rectángulo, calcular el área de ese rectángulo y restarle el área de algunos triángulos particulares. El esquema de lo que decimos se presenta en la siguiente figura.

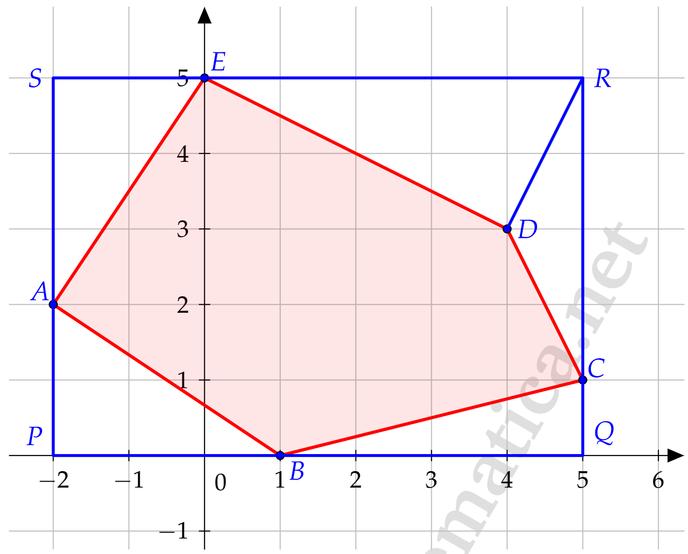


Figura 84: El área del polígono $ABCDE$ se obtiene al restar del área del rectángulo $PQRS$, las áreas de $\triangle APB$, $\triangle BQC$, $\triangle CRD$, $\triangle RDE$ y $\triangle ASE$.

En la figura quedan especificadas las dimensiones del rectángulo y de los triángulos correspondientes. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a(PQRS) &= 7 \cdot 5 = 35 \\ a(\triangle APB) &= \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \\ a(\triangle BQC) &= \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \\ a(\triangle CRD) &= \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \\ a(\triangle RDE) &= \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \\ a(\triangle ASE) &= \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \end{aligned}$$

Se concluye que $a(ABCDE) = 35 - (3 + 2 + 2 + 5 + 3) = 20$.

Ejemplo 62

La unidad de medida utilizada en el siguiente sistema de ejes cartesianos es 1 cm. Determinar el área del trapecio $ABCD$.

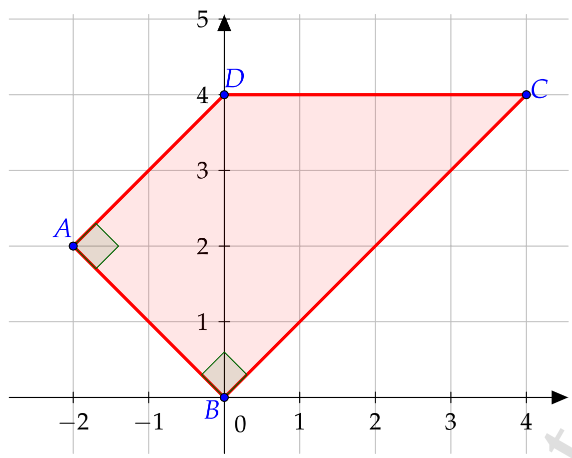


Figura 85: Trapecio $ABCD$.

Solución

Observamos que la base mayor del trapecio es $\overline{BC}$, la base menor es $\overline{AD}$ y la altura es $\overline{AB}$.

Se tiene que:

- $BC = d(B, C) = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ cm.
- $AD = d(A, D) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm.
- $AB = d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm.

El área del trapecio es

$$a(ABCD) = \frac{(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Aproximación de perímetros y áreas

El perímetro y el área de regiones no poligonales se pueden estimar mediante el cálculo de perímetros y áreas de polígonos. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 63

La curva que aparece en la siguiente figura recibe el nombre de cardioide. Si cada uno de los cuadrados que constituye la cuadrícula tiene como lado 1 cm, estime, con un error no mayor del 10 %, el área de la superficie que encierra el cardioide.

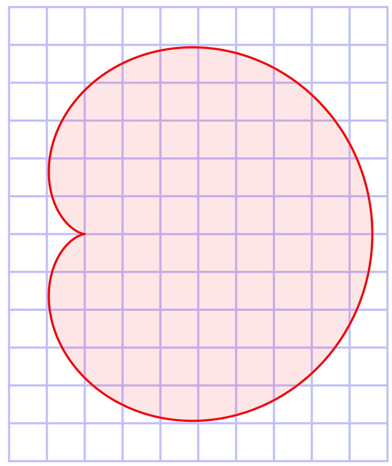


Figura 86: Un cardioide.

Solución

Se puede aproximar el área del cardioide mediante el área de un polígono según se muestra en la siguiente figura. En este caso, se observa que el área del polígono es mayor que la del cardioide; se dice que la aproximación es por exceso.

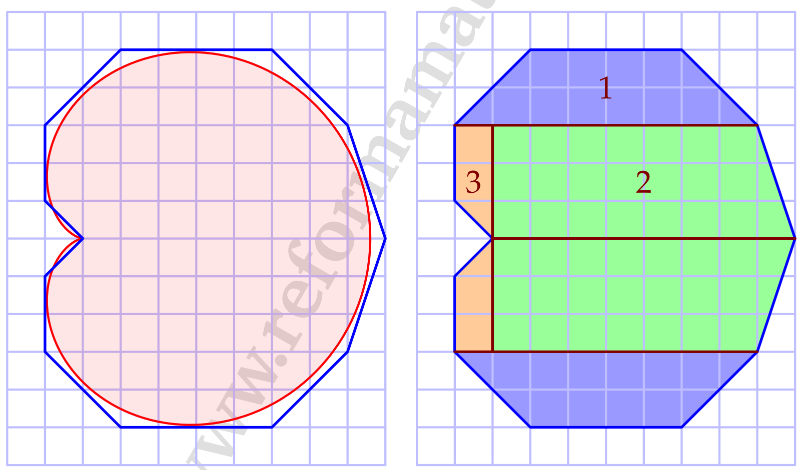


Figura 87: El polígono aproxima por exceso el área del cardioide. A la derecha se muestra solamente el polígono.

Se puede dividir el polígono en la forma que se muestra a la derecha en la figura anterior: en 6 trapecios. Dada la simetría de la figura, los dos trapecios azules tienen la misma área, lo mismo que los dos verdes y los dos anaranjados. Luego, basta calcular la suma de las áreas de los trapecios 1, 2 y 3 y luego multiplicar por 2.

El área del trapecio 1 es $\dfrac{(8+4)\cdot 2}{2} = 12\ \text{cm}^2$.

El área del trapecio 2 es $\dfrac{(8+7)\cdot 3}{2} = 22,5\ \text{cm}^2$.

El área del trapecio 3 es $\dfrac{(3+2)\cdot 1}{2} = 2,5\ \text{cm}^2$.

La suma de estas áreas es $12 + 22,5 + 2,5 = 37\ \text{cm}^2$.

Luego, el área del polígono es $27 \cdot 2 = 74\ \text{cm}^2$.

También se puede aproximar el área del cardioide por defecto, mediante un polígono de área menor, según se muestra en la siguiente figura.

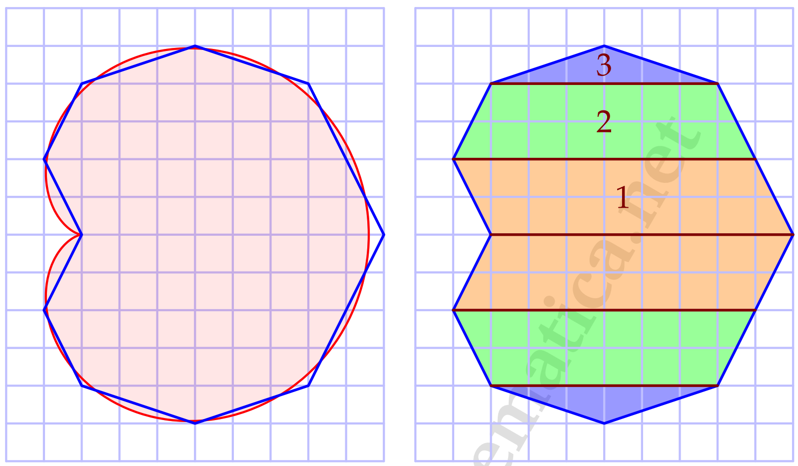


Figura 88: El polígono aproxima por defecto el área del cardioide. A la derecha se muestra solamente el polígono.

Se puede dividir el polígono en la forma que se muestra a la derecha en la figura anterior: 2 trapecios (verdes), dos triángulos (azules) y dos paralelogramos (anaranjados). Dada la simetría de la figura, basta calcular la suma de las áreas del triángulo 1, el trapecio 2 y el paralelogramo 3 y luego multiplicar por 2.

El área del triángulo 1 es $\dfrac{6\cdot 1}{2} = 3\ \text{cm}^2$.

El área del trapecio 2 es $\dfrac{(8+6)\cdot 2}{2} = 14\ \text{cm}^2$.

El área del paralelogramo 3 es $8 \cdot 2 = 16\ \text{cm}^2$.

La suma de estas áreas es $3 + 14 + 16 = 33\ \text{cm}^2$.

Luego, el área del polígono es $33 \cdot 2 = 66\ \text{cm}^2$.

Se puede tomar como aproximación del área del cardioide el promedio del área por defecto y el área por defecto; es decir, el área del cardioide es aproximadamente igual a

$$\frac{74+66}{2}\ \text{cm}^2 = 70\ \text{cm}^2.$$

La diferencia entre la aproximación y el área por defecto nos permite conocer qué porcentaje de error se cometió en el cálculo:

$$\frac{70-66}{66}\cdot 100 = \frac{4}{66}\cdot 100 \approx 0,06 \cdot 100 = 6.$$

Por lo que el error en la aproximación es menor que el 10 %.

Ejemplo 64

Utilice la escala que presenta el mapa en la siguiente figura para aproximar el área de la región delimitada con trazos de color azul.

Figura 89: Se trata de aproximar el área de la región de color blanco.

Solución

Consideremos una cuadrícula sobre el mapa, donde cada lado de los cuadros de la cuadrícula representa 25 km, según la escala del mapa. Podemos aproximar el área mediante la de un polígono, tal como muestra la figura.

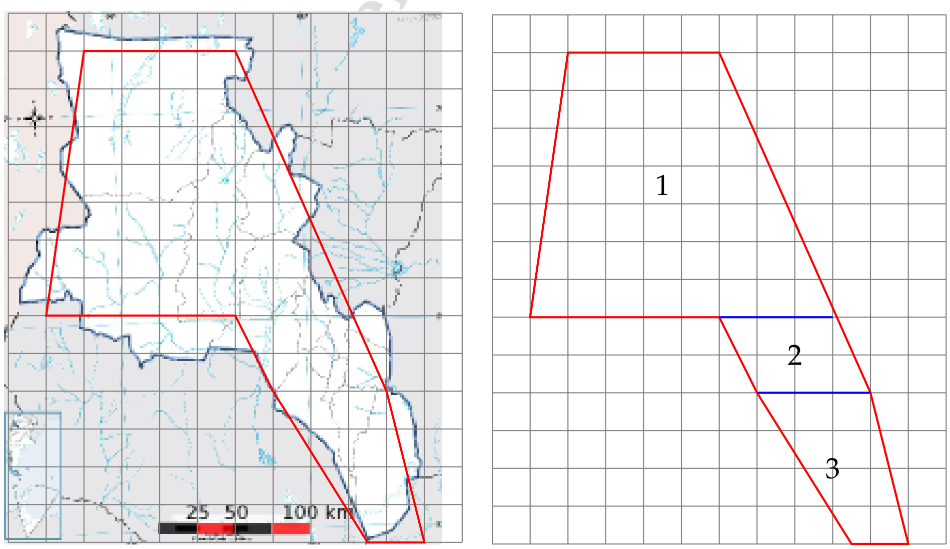


Figura 90: El polígono de contorno rojo aproxima la región considerada.
A la derecha se muestra el polígono y de indica una forma de partirlo para facilitar el cálculo de su área.

Hay porciones de la región que quedan dentro del polígono y otras que quedan fuera, de modo que se compensan en alguna medida.

Recuerde que el lado de cada cuadradito de la cuadrícula corresponde a 25 km. Se tiene entonces que:

El área del polígono 1 es: $\dfrac{(8 \cdot 25 + 4 \cdot 25) \cdot 7 \cdot 25}{2} = 26\,250 \text{ km}^2$.

El área del polígono 2 es: $(3 \cdot 25) \cdot (2 \cdot 25) = 3\,750 \text{ km}^2$.

El área del polígono 3 es: $\dfrac{(3 \cdot 25 + 1{,}5 \cdot 25) \cdot 4 \cdot 25}{2} = 5\,625 \text{ km}^2$.

Una aproximación del área de la región es $26\,250 + 3\,750 + 5\,625 = 35\,625 \text{ km}^2$

Una mejor aproximación se obtiene mediante un polígono de mayor número de lados que se ajusten mejor a al contorno de la región.

4. Transformaciones en el plano

Algunos conceptos básicos

Transformación en el plano

Una **transformación en el plano** es una correspondencia uno a uno del conjunto de puntos del plano en sí mismo.

Imagen bajo una transformación, homólogos

Si la transformación T mueve el punto X al punto X', entonces se dice que X' es la imagen de X bajo T y se escribe $T(X) = X'$. También diremos que X' es homólogo de X.

Ejemplo 65

Si se considera en el plano un sistema de ejes coordenados, la correspondencia tal que a cada punto (x, y) le asocia el punto $(x, y + 3)$ es una transformación.

Una transformación puede verse como un movimiento que se aplica a todos los puntos del plano. En el ejemplo anterior, al considerar el sistema de coordenadas en la forma usual, la transformación lo que hace es mover todos los puntos 3 unidades "hacia arriba", puesto que lo que hace es sumar tres unidades a la ordenada de cada punto. En la siguiente gráfica se observa que al aplicarles la transformación a los puntos que pertenecen a la recta $y = 1$, se mueven todos a la recta $y = 4$.

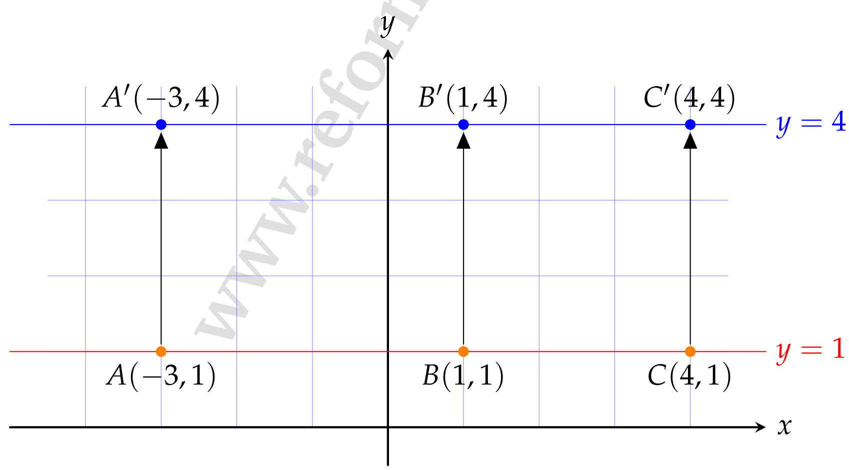


Figura 91: Al aplicar la transformación $T(x, y) = (x, y + 3)$, todos los puntos de la recta $y = 1$, se mueven a la recta $y = 4$

Ejemplo 66

Para la transformación tal que a cada punto (x, y) le asocia el punto $(x, y + 3)$ se escribe $T(x, y) = (x, y + 3)$. Para esta transformación, por ejemplo, el homólogo de $(2, 5)$ es $T(2, 5) = (2, 5 + 3) = (2, 8)$.

Transformación de una figura

La transformación mediante T de una figura X en el plano es la figura que se obtiene al aplicar la transformación T a todos los puntos de la figura. La transformación de la figura X se denota por $T(X)$ o por X'.

Ejemplo 67

En el caso de la transformación del ejemplo 2, la transformación mediante T de la recta $y = 1$ es la recta $y = 4$ (vea la figura 5).

Isometría

Una transformación T es una isometría si preserva las medidas de los segmentos y las medidas de los ángulos. Preservar la medida de los segmentos significa que si A y B son dos puntos y $T(A) = A'$ y $T(B) = B'$ entonces la medida de $\overline{AB}$ es igual a la medida de $\overline{A'B'}$. Si C es otro punto con $T(C) = C'$ y los puntos A, B y C no son colineales, entonces la medida de $\angle ABC$ es igual a la medida de $\angle A'B'C'$.

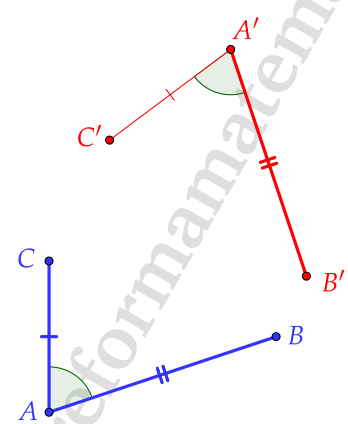


Figura 92: Si los puntos A', B' y C' se obtienen respectivamente de los puntos A, B y C mediante una isometría, entonces $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $m(\angle CAB) = m(\angle C'B'A')$

Ejemplo 68

La transformación $T(x, y) = (x - 1, y + 1)$ es una isometría.

Por ejemplo, considere los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 5)$, la medida de $\overline{AB}$ es

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Se tiene que:

$$T(A(1,2)) = A'(1-1, 2+1) = A'(0,3)$$
$$T(B(3,5)) = B'(3-1, 5+1) = B'(2,6)$$

La medida de $\overline{A'B'}$ es

$$A'B' = \sqrt{(0-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Con lo cual se tiene que $AB = A'B'$.

Sea $C(4,2)$, entonces, $T(C(4,2)) = C'(4-1, 2+1) = C'(3,3)$.

la recta que contiene a A y a C es la recta $y = 2$. La que contiene a A' y C' es $y = 3$, de modo que ambas recta son paralelas.

La recta que contiene a A y a B es una recta de pendiente $m = \dfrac{5-2}{3-1} = \dfrac{3}{2}$. La recta que contiene a A' y a B' es una recta de pendiente $m' = \dfrac{6-3}{2-0} = \dfrac{3}{2}$. Por lo tanto, son paralelas.

Luego, los ángulos $\angle CAB$ y $\angle C'A'B'$ son congruentes.

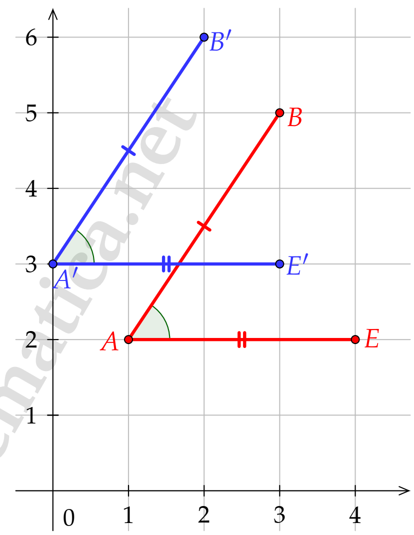


Figura 93: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$.

Traslaciones

Vector

Un vector v en el plano se puede ver como un desplazamiento con dos componente, una horizontal y una vertical, por lo tanto se puede describir mediante un par ordenado $v = (a, b)$, donde a es el desplazamiento horizontal ($a > 0$ si es "hacia la derecha", $a < 0$ si es "hacia la izquierda" o $a = 0$ si no hay desplazamiento horizontal) y b es el desplazamiento vertical ($b > 0$ si es "hacia arriba", $b < 0$ si es "hacia abajo" o $b = 0$ si no hay desplazamiento vertical).

Ejemplo 69

En la figura $v = (-3, 2)$ representa un desplazamiento de 3 unidades hacia la izquierda y de 2 unidades hacia arriba.

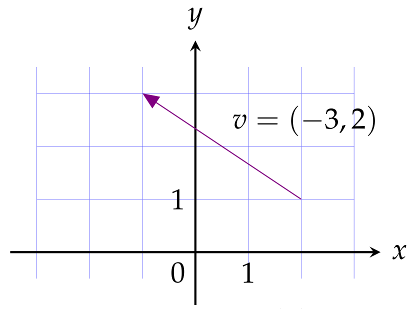


Figura 94: Representación del vector $v = (-3, 2)$.

Ejemplo 70

Un vector se puede representar en cualquier lugar del plano. En la figura, todas las flechas de color violeta representan el mismo vector.

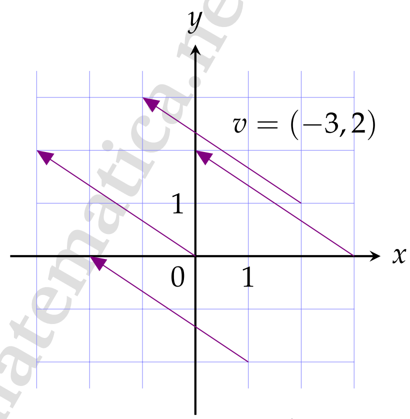


Figura 95: Un vector se puede representar en cualquier lugar del plano.

Traslación

Una traslación de vector v es una transformación que a cada punto P del plano le asocia un punto P' tal que el segmento $\overline{PP'}$ es paralelo a v y tiene la misma longitud que v. Dado que v es un segmento dirigido (uno de sus extremos es el punto inicial y otro es el punto final), $\overline{PP'}$ es un segmento con la misma dirección de v.

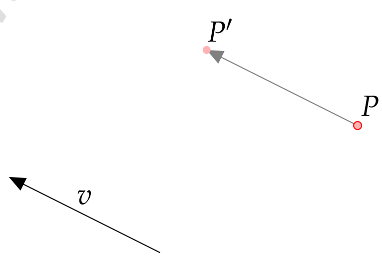


Figura 96: El punto P se traslada hasta el punto P' según el vector v

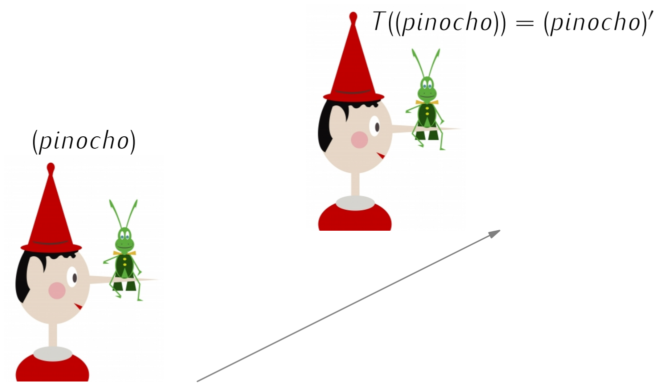


Figura 97: La imagen completa de Pinocho se traslada a otra posición, según el vector que se da en la figura. La imagen de Pinocho es cortesía de FreeDigitalPhotos.net.

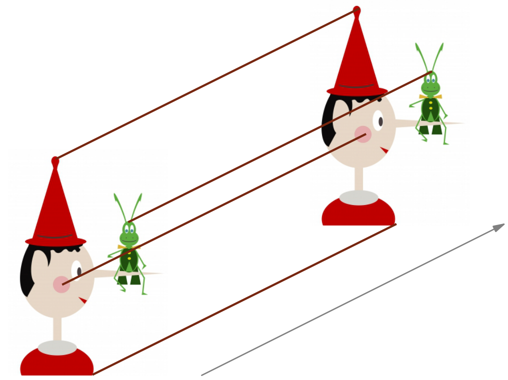


Figura 98: Todos los segmentos que unen puntos homólogos en la figura inicial y su imagen mediante la traslación son del mismo tamaño y paralelos al vector de la traslación.

Propiedades

- Toda traslación es una isometría.
- Si A, B, C son puntos distintos tales que $A - B - C$ y T es una traslación entonces $T(A) - T(B) - T(C)$.
- La traslación de un segmento de recta es un segmento de recta paralelo al original.

Lo que dice la segunda propiedad es que si tres puntos son colineales entonces sus imágenes también lo son. Y, además, el que está entre los otros dos tiene su imagen entre las imágenes de los otros.

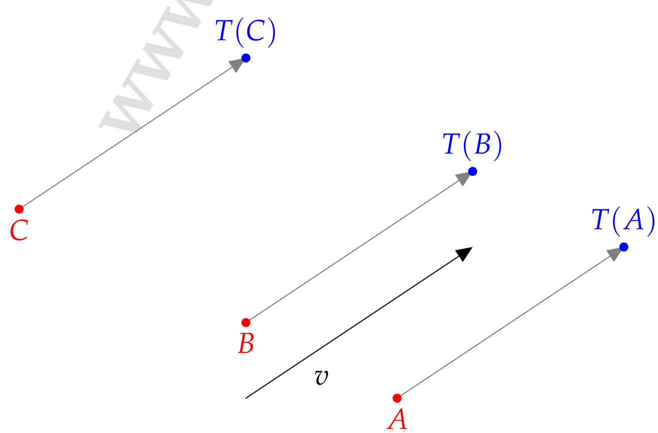


Figura 99: Si $A - B - C$ y T es una traslación, entonces $T(A) - T(B) - T(C)$.

Una situación que se puede observar cuando se traslada una figura es que la original y su imagen son congruentes y están orientadas de la misma manera. Esto proviene de las propiedades mencionadas anteriormente.

Traslación de un polígono

Las propiedades dadas arriba implican que si se va a aplicar una traslación a un polígono, basta con aplicarla a sus vértices para obtener el polígono imagen.

Ejemplo 71

Suponga que se va a trasladar el triángulo de vértices $O(0,0)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$ según el vector $v = (-3,2)$. Se trasladan sus vértices y luego se trazan los lados para obtener el triángulo resultante. El punto traslación de $O(0,0)$ se obtiene al trasladarlo tres unidades a la izquierda y dos hacia arriba; se obtiene $O'(-3,2)$, del mismo modo se obtiene $B'(-4,4)$ y $C'(-1,5)$.

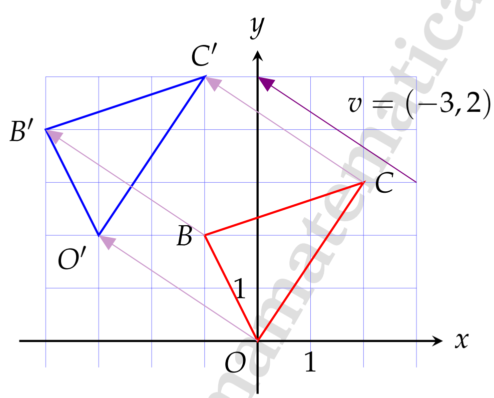


Figura 100: El triángulo $O'B'C'$ es la imagen del triángulo OBC según la traslación de vector $v = (-3,2)$. Podemos escribir $T_v(\triangle OBC) = \triangle O'B'C'$.

Homólogo bajo una traslación

Si T_v es una traslación según el vector $v = (a,b)$, entonces el homólogo de $P(x,y)$ es $P'(x+a, y+b)$; es decir $T_v(x,y) = (x+a, y+b)$.

Ejemplo 72

Si $v = (-2,4)$, entonces al aplicar al punto $P(2,5)$ la traslación de vector v se obtiene el punto $P'(2+-2, 5+4) = P'(0,9)$.

Reflexiones

Reflexión

Una reflexión en el plano, con respecto a una recta l, es una transformación que aplica a cada punto P del plano un punto P' tal que la recta l es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. El punto P' se llama homólogo de P bajo la reflexión. La recta l se llama eje de la reflexión.

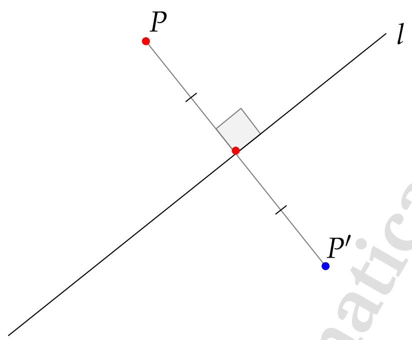


Figura 101: El punto P' es homólogo de P bajo la reflexión con respecto a la recta l. Esto significa que l es mediatrz de $\overline{PP'}$; es decir $l \perp \overline{PP'}$ y $MP = MP'$ (M es el punto medio de $\overline{PP'}$).

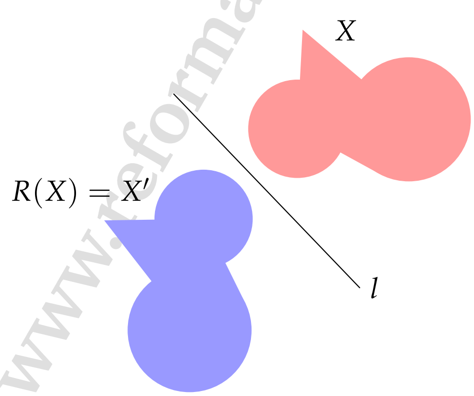


Figura 102: La figura azul X' es la imagen bajo la reflexión con respecto a la recta l de la figura roja X.

Propiedades

- Toda reflexión con respecto a una recta es una isometría.
- Los puntos del eje de la reflexión son invariantes; esto es, si Q es un punto en el eje y Q' es su homólogo, entonces $Q' = Q$.

Homólogo bajo una reflexión

Es fácil ver que el homólogo de $P(x,y)$ mediante una reflexión con respecto al eje x es $P'(x,-y)$.

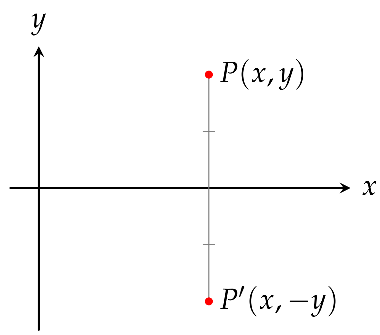


Figura 103: El homólogo de (x,y) bajo la reflexión con respecto al eje x es $(x,-y)$

Ejemplo 73

Considere el triángulo de vértices $A(1,4)$, $B(3,2)$, $C(0,-2)$; entonces su homólogo bajo la reflexión con respecto al eje x es el triángulo de vértices $A'(1,-4)$, $B'(3,-2)$, $C'(0,2)$. Esto se observa en la siguiente figura.

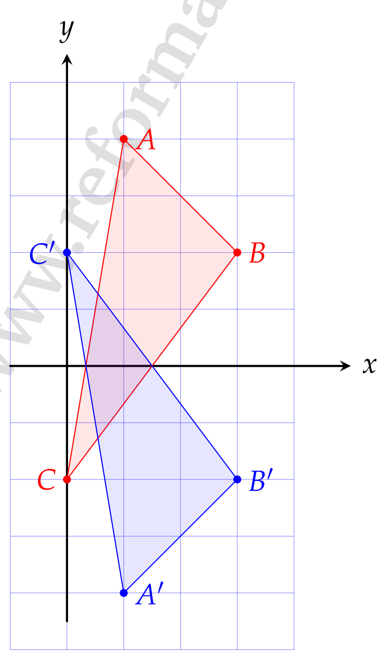


Figura 104: El triángulo rojo ABC tiene como imagen el triángulo azul $A'B'C'$ bajo la reflexión con respecto al eje x.

Homólogos bajo reflexiones

- El homólogo de $P(a, b)$ bajo la reflexión con respecto a una recta horizontal $y = k$ es $P'(a, 2k - b)$.
- El homólogo de $P(a, b)$ mediante una reflexión con respecto a una recta vertical $x = t$ es $P'(2t - a, b)$.
- El homólogo de $P(a, b)$ bajo una reflexión con respecto a la recta $y = x$ es $P'(b, a)$ (se intercambian las coordenadas)

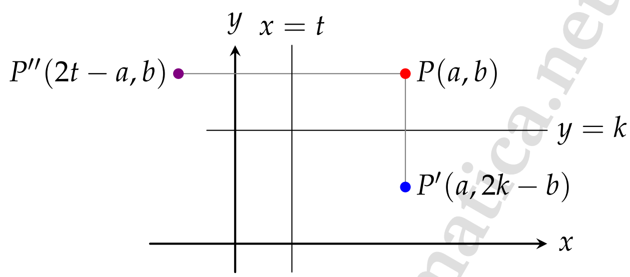


Figura 105: Si $P(a, b)$ entonces su homólogo bajo una reflexión con respecto a la recta $y = k$ es $P'(a, 2k - b)$ y su homólogo con respecto a la recta $x = t$ es $P''(2t - a, b)$

Ejemplo 74

El cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-2, 2)$ se transforma en el cuadrado de vértices $A'(0, 0)$, $B'(2, 2)$, $C'(4, 0)$, $D'(2, -2)$ cuando se le aplica la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

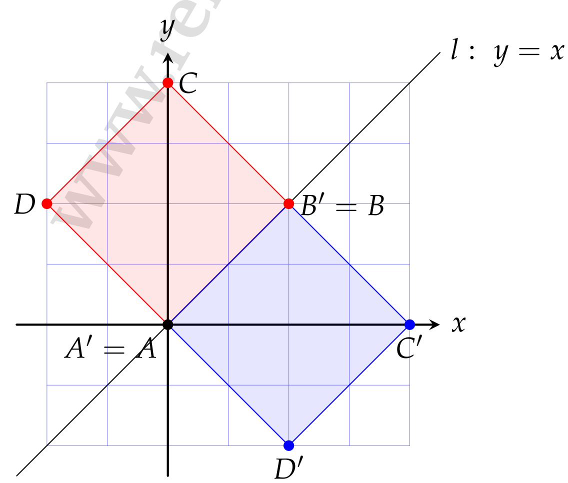


Figura 106: El cuadrado azul $A'B'C'D'$ es el homólogo del cuadrado rojo $ABCD$ bajo la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

Simetría axial

Simetría axial

En algunas ocasiones al reflejar una figura sobre una recta se obtiene la misma figura original; es decir, si X es una figura y R una reflexión con respecto a una recta l, puede suceder que $R(X) = X$. En este caso, se dice que la figura X es simétrica y que la recta l es un eje de simetría de la figura.

La figura que se da a continuación es simétrica con eje de simetría l. Al reflejarla sobre l se tiene que el homólogo de A es B, el de B es A y el de C es C mismo.

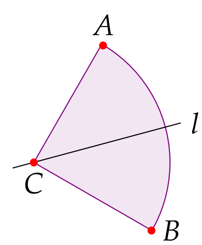


Figura 107: La figura es simétrica con respecto a la recta l

.

Una figura puede tener más de un eje de simetría.

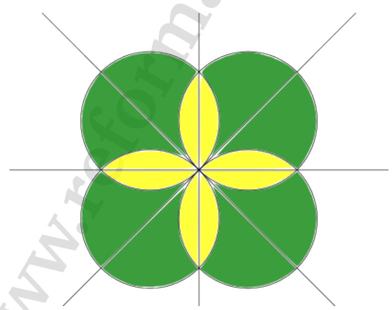


Figura 108: Esta figura tiene cuatro ejes de simetría.

Rotaciones

Rotación

Una **rotación** en el plano, con centro en el punto A y amplitud θ, es una transformación que aplica a cada punto P del plano un punto P' tal que el arco $\widehat{PP'}$, de la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AP}$, mide θ. El punto P' se llama homólogo de P bajo la rotación.

La rotación de una figura X en el plano es la figura que se obtiene al aplicar la rotación a todos los puntos de la figura. Si la rotación se denota por R, entonces la rotación de la figura es $R(X)$ o X'.

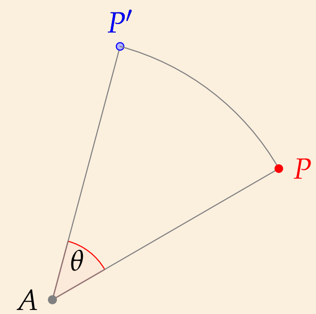


Figura 109: El punto P' es el homólogo de P bajo la rotación de centro en A y amplitud θ.

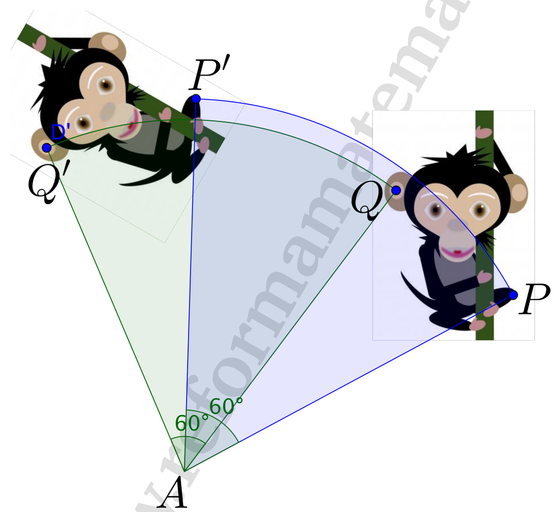


Figura 110: El monito fue rotado 60° con centro en A. Cada uno de sus puntos junto con sus homólogos son extremos de arcos de 60° con centro en A. Imagen del monito cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Propiedades

- Las rotaciones son *isometrías*.
- El centro A de una rotación es invariante (permanece fijo); esto es $A' = A$.

Homólogo bajo una rotación

Si R es una rotación con centro en el origen de coordenadas $O(0,0)$ y amplitud θ, entonces el homólogo de $P(x,y)$ es

$$R(P(x,y)) = P'\big((\cos\theta)x - (\operatorname{sen}\theta)y, (\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y\big).$$

Ejemplo 75

Una rotación de centro $O(0,0)$ y amplitud $45°$ aplica el punto $P(x,y)$ en el punto $P'\big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\big)$. Así, si al triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(3,3)$ se le aplica dicha rotación se obtiene el triángulo de vértices:

$$A'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(2-0), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(2+0)\right) = A'\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \quad B'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(4-0), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(4+0)\right) = B'(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$
$$C'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(3-3), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(3+3)\right) = C'(0, 3\sqrt{2}).$$

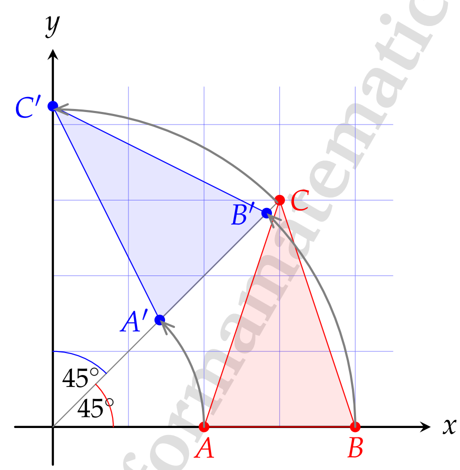


Figura 111: El triángulo $A'B'C'$ es la imagen del triángulo ABC bajo la rotación de centro $O(0,0)$ y ángulo $45°$.

Homotecias

Homotecia

Una **homotecia** con centro en el punto A de razón k (con $k \neq 0$) es una transformación que a cada punto P del plano le asocia un punto P' tal que:

- Si k es positivo: $A - P - P'$ (P está entre A y P') si $k > 1$ o $A - P' - P$ si $k < 1$, y la distancia de A a P' es k veces la distancia de A a P.
- Si k es negativo: $P' - A - P$ (A está entre P' y P) y la distancia de A a P' es $-k$ veces la distancia de A a P.

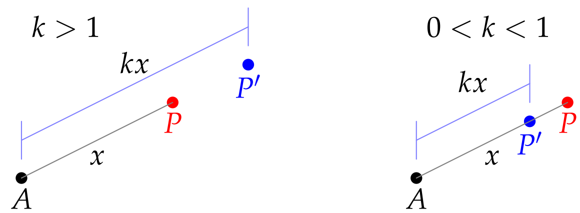


Figura 112: En cada caso, P' es el homólogo de P bajo la homotecia de centro A y razón k, según sea $k > 1$ o $0 < k < 1$.

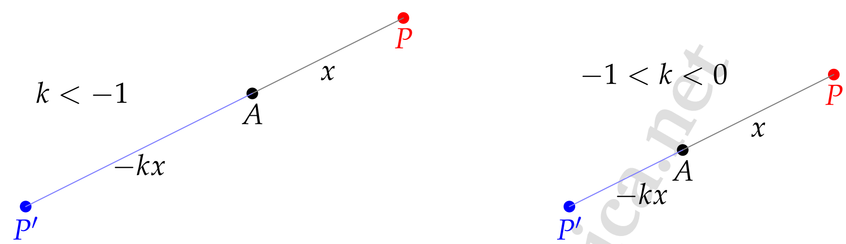


Figura 113: En cada caso, P' es el homólogo de P bajo la homotecia de centro A y razón k, según sea $k < -1$ o $-1 < k < 0$.

Si la imagen de X mediante una homotecia H es X' se escribe $H(X) = X'$. En la ilustración siguiente, la figura violeta es una homotecia de la figura roja de razón $k' = 3,5$ y la figura azul es una homotecia de la roja de razón $k'' = -0,75$.

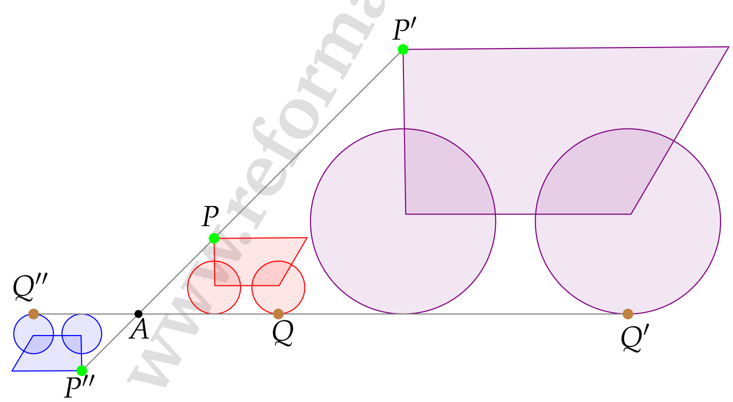


Figura 114: La figura violeta se obtiene de la figura roja mediante una homotecia de razón $k' = 3,5$ y centro en A. La figura azul se obtiene de la figura roja mediante una homotecia de razón $k'' = -0,75$ y centro en A. .

Observe que cuando se aplica una homotecia de razón negativa a una figura entonces la imagen cambia su orientación con respecto a la figura original.

Por otra parte, las homotecias conservan las medidas de los ángulos pero no conservan las medidas de los segmentos. De hecho, si $|k| < 1$, el segmento que se obtiene a partir de un segmento dado, es de menor longitud, mientras que si $|k| > 1$ entonces el segmento que se obtiene es de mayor longitud.

Dicho de otra manera, Una homotecia de razón $|k| > 1$ dilata o expande las figuras (las hace más grandes), mientras que una de razón $|k| < 1$ las contrae (las hace más pequeñas).

Propiedad

Si una figura X' se obtiene de la figura X mediante una homotecia entonces X y X' son semejantes. Esto implica que las medidas de los ángulos se preservan.

Teorema

Si H es una homotecia de centro $O(0,0)$ y razón k entonces el homólogo de $P(a,b)$ es $P'(ka,kb)$; es decir $H(a,b) = (ka,kb)$.

Ejemplo 76

Dada la homotecia H de centro $O(0,0)$ y razón $-1,5$, el homólogo del triángulo de vértices $O(0,0)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$ es el triángulo de vértices:
$O' = O$,
$B'(-1,5 \cdot (-1), -1,5 \cdot 2) = B'(1,5,-3)$,
$C'(-1,5 \cdot 2, -1,5 \cdot 3) = C'(-3,-4,5)$.

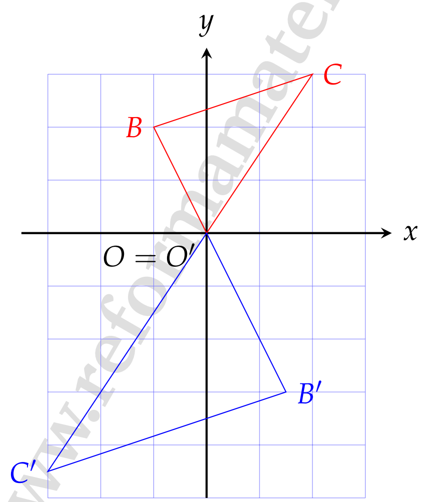


Figura 115: El triángulo $O'B'C'$ es la imagen del triángulo OBC bajo la homotecia de centro en O y razón $-1{,}5$.

Observe que, como la razón es negativa y de valor absoluto mayor que 1 entonces la imagen es de mayor tamaño que la original y tiene una orientación diferente de la de ella.

Teorema

Sea $A(a,b)$ un punto y H una homotecia de centro A y razón k, el homólogo de $P(x,y)$ es $P'(k(x-a)+a, k(y-b)+b)$. Esto significa que

$$H(x,y) = (k(x-a)+a, k(y-b)+b).$$

Ejemplo 77

Al aplicar la homotecia de centro $A(2,1)$ y razón $\frac{1}{2}$ al triángulo de vértices $P(-7,13)$, $Q(-1,13)$, $R(-4,1)$ se obtiene el triángulo de vértices:
$P'(\frac{1}{2}(-7-2)+2, \frac{1}{2}(13-1)+1) = P'(-\frac{5}{2},7)$,
$Q'(\frac{1}{2}(-1-2)+2, \frac{1}{2}(13-1)+1)) = Q'(\frac{1}{2},7)$,
$R'(\frac{1}{2}(-4-2)+2, \frac{1}{2}(1-1)+1)) = R'(-1,1)$.

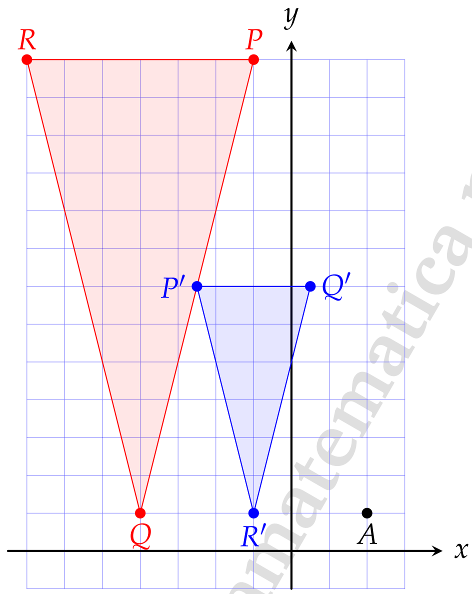


Figura 116: El triángulo $P'Q'R'$ es la imagen del triángulo PQR bajo la homotecia de centro en A y razón $\frac{1}{2}$.

Observe que, como la razón es positiva y de valor absoluto menor que 1 entonces la imagen es de menor tamaño que la original y tiene la misma orientación de ella.

Composición de transformaciones

Se puede aplicar a un punto o una figura una transformación y a la que resulta de ello otra transformación y así sucesivamente cuantas veces se requiera. Sin embargo hay que tener cuidado porque el orden en que se apliquen las transformaciones es importante (esto significa que la composición de transformaciones no es conmutativa).

Considere, por ejemplo, la siguiente imagen:

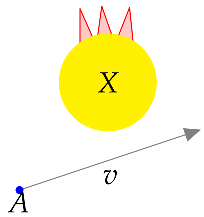


Figura 117: Una imagen para trabajar.

Si se aplica una traslación a la figura X, según el vector v se obtiene lo siguiente:

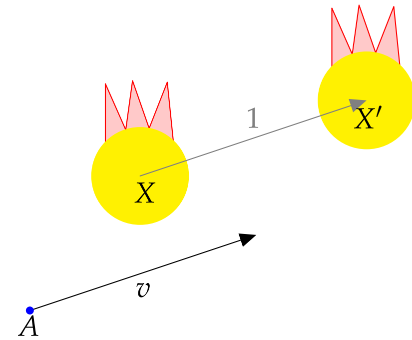


Figura 118: X' se obtiene al aplicar a X una traslación de vector v.

Al aplicar a X' una traslación con centro en el punto A y amplitud $50°$ se obtiene:

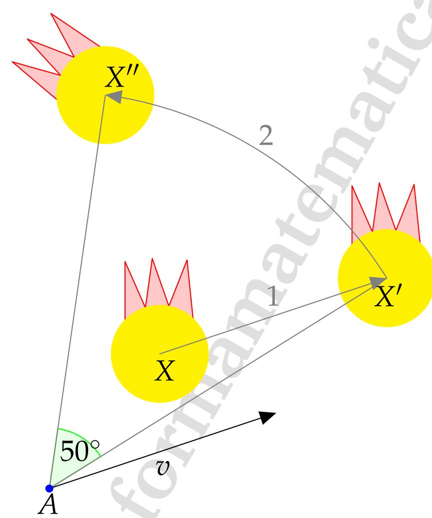


Figura 119: X'' se obtiene al aplicar a X' una rotación de centro A y amplitud $50°$.

Procedamos ahora a la inversa. Primero la rotación de $50°$ con centro en A:

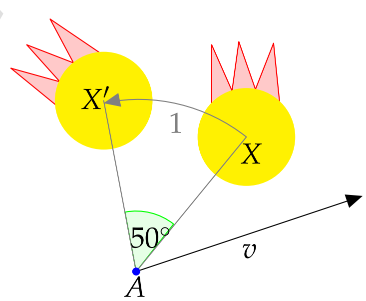


Figura 120: X' se obtiene al aplicar a X una rotación de centro A y amplitud $50°$.

Ahora apliquemos a X' la traslación según el vector v:

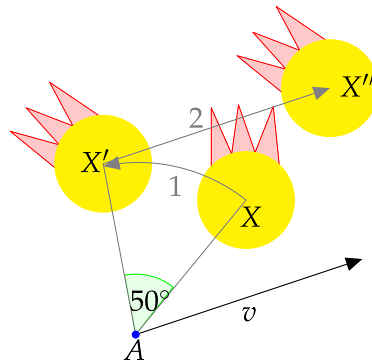


Figura 121: X'' se obtiene al aplicar a X' una traslación de vector v.

Es evidente que la figura X'' que se obtiene en el segundo procedimiento no ocupa el mismo lugar que la X'' que se obtiene con el primer procedimiento.

Ejemplos adicionales

Ejemplo 78

En la siguiente figura, se dan dos triángulos P y Q. Determine al menos dos formas de obtener Q a partir de P mediante transformaciones en el plano.

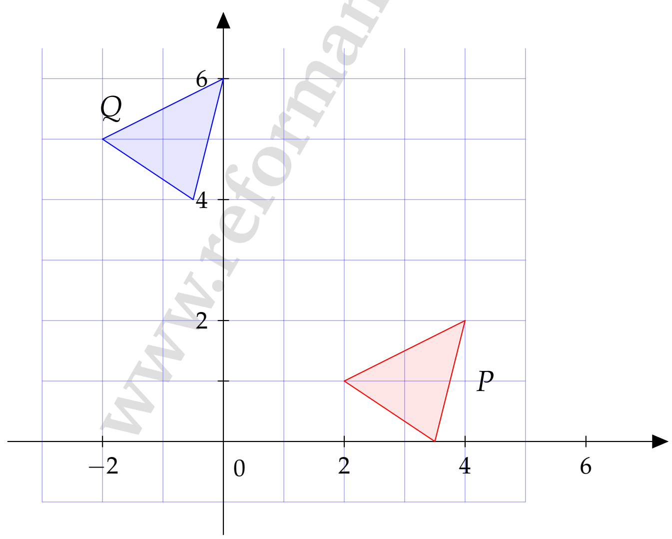


Figura 122: Q se obtiene de P mediante transformaciones

Solución

En primer lugar vemos que Q y P están orientados de la misma manera y son congruentes; esto significa que uno se puede obtener del otro mediante una traslación. De la figura se observa que tal traslación es de vector $v = (-4, 4)$ pues se corre la figura 4 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia arriba.

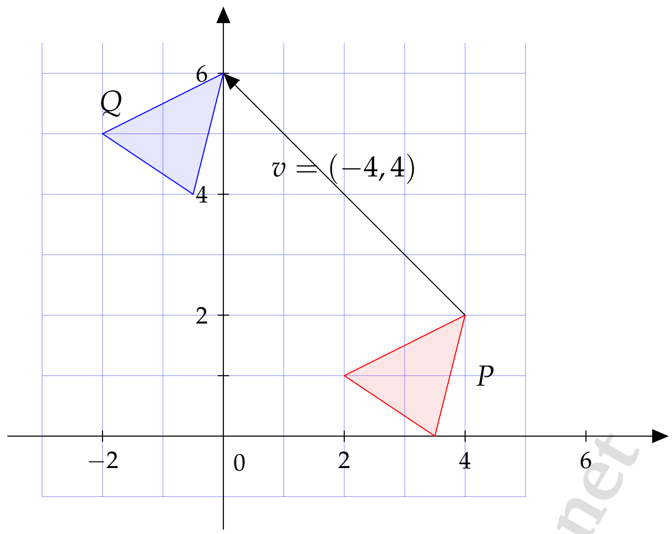


Figura 123: Q se obtiene de P mediante una traslación de vector $v = (-4, 4)$.

Otra manera, menos evidente, es reflejando primero P con respecto a la recta $y = x$ para obtener P' y luego reflejar P' con respecto a la recta $y = x + 4$ para obtener Q.

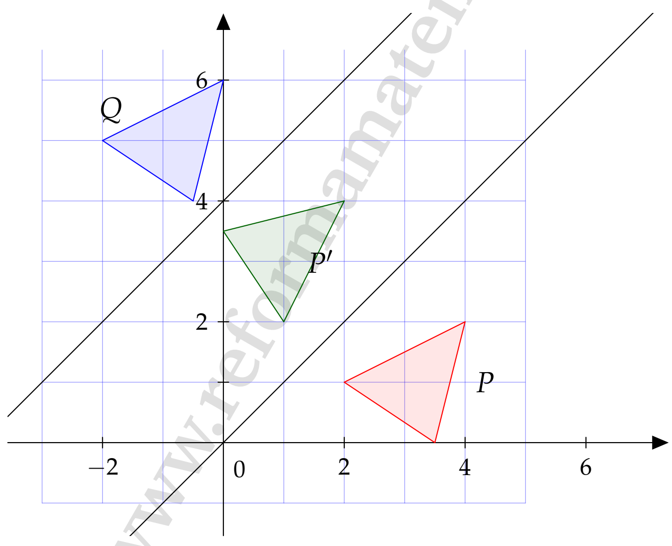


Figura 124: Q se obtiene de P mediante una traslación de vector $v = (-4, 4)$.

Nota

De hecho, toda traslación es equivalente a la composición de dos reflexiones de manera análoga a como se hizo en el ejemplo anterior.

Ejemplo 79

[Seleccionar la respuesta correcta] En la siguiente figura, el cuadrilátero P se obtiene del cuadrilátero Q mediante la aplicación de una homotecia con centro en A y razón k.

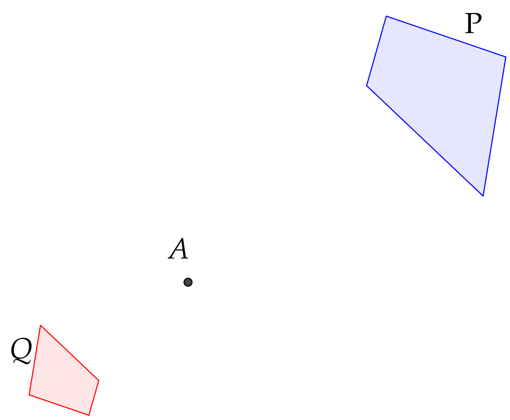


Figura 125: P se obtiene de Q mediante una homotecia.

Podemos asegurar que

A) $k < -1$

B) $-1 < k < 0$

C) $0 < k < 1$

D) $1 < k$

Solución

Se observa que la imagen es de mayor tamaño que la original por lo que $|k| > 1$. Por otra parte, el centro de la homotecia está entre ambas figuras por lo que k es negativo. Se concluye que $k < -1$.

Ejemplo 80

Al punto $A(-1,3)$ se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = x$ y luego al punto que se obtiene se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = 2$. Â¿Qué punto se obtiene?

Solución

Al aplicar la reflexión con respecto a la recta $y = x$ lo que sucede es que se intercambian ambas coordenadas de manera que se obtiene el punto $A'(3,-1)$. Al aplicar la reflexión con respecto a una recta $y = k$ cambia la segunda coordenada del punto pues se convierte en $2k - b$ donde b es la segunda coordenada del punto al que se le aplica. En este caso se aplica a $A'(3,-1)$ por lo que $b = -1$ y como se refleja según la recta $y = 2$ entonces $k = 2$ de modo que se obtiene $A''(3, 2 \cdot 2 - (-1)) = A''(3,5)$.

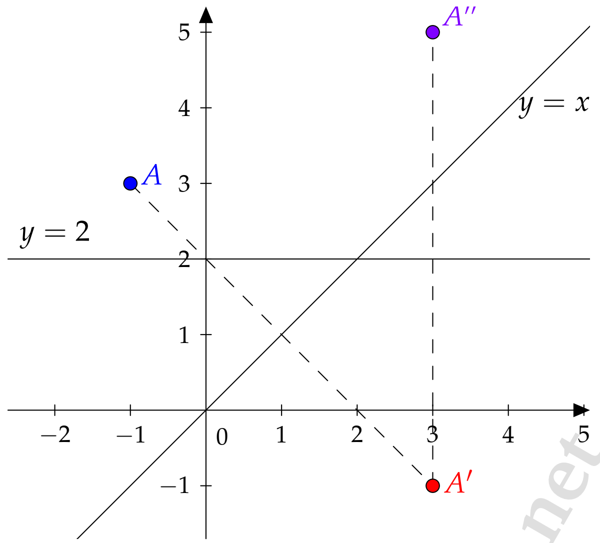


Figura 126: A' es la reflexión de A con respecto a la recta $y = x$ y A'' es la reflexión de A' con respecto a la recta $y = 2$.

Ejemplo 81

Al punto $A(-1, 3)$ se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = 2$ y luego al punto que se obtiene se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = x$. Â¿Qué punto se obtiene?

Solución

Al aplicar la reflexión con respecto a la recta $y = 2$ se obtiene el punto $A'(-1, 2 \cdot 2 - 3) = A'(-1, 1)$. Al aplicar a $A'(-1, 1)$ la reflexión con respecto a la recta $y = x$ es obtiene $A''(1, -1)$. Observe que se aplicó al mismo punto del ejemplo previo las mismas dos reflexiones pero en otro orden; se obtuvo puntos diferentes.

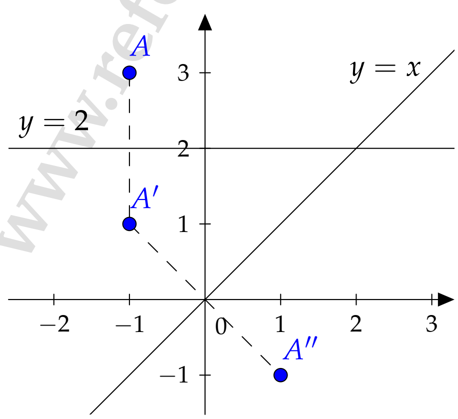


Figura 127: A' es la reflexión de A con respecto a la recta $y = 2$ y A'' es la reflexión de A' con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 82

En la siguiente figura aparece un cuadrilátero P, Â¿cuál o cuáles de los cuadriláteros Q, R, S, T, que se dan a continuación, corresponden a la aplicación a P de una sola rotación?

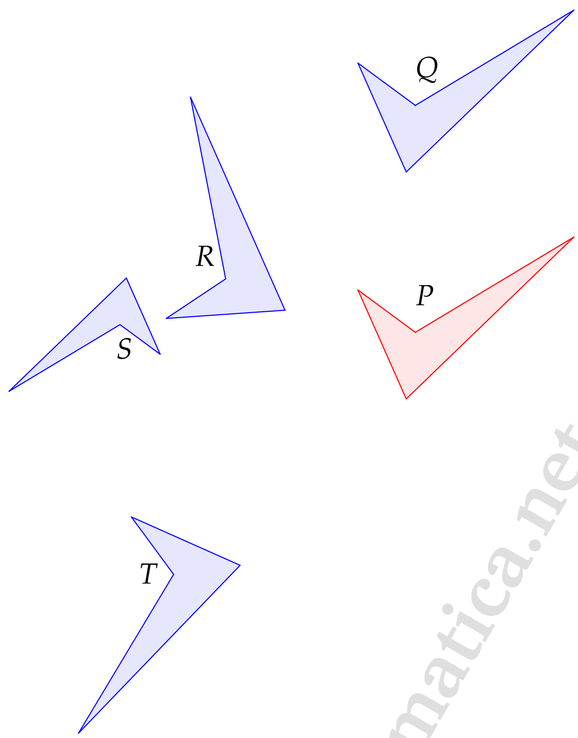


Figura 128: Al aplicar diversas transformaciones al cuadrilátero P se obtienen otros cuadriláteros.

Solución

Analicemos cada uno de los cuadriláteros:

Q: Es congruente a P y está orientado de la misma manera por lo que corresponde a una traslación. En general una rotación produce un cambio de orientación a no ser que sea una rotación de 360°, en cuyo caso se obtiene la misma figura original; este no es el caso. Si la figura a la que se aplica la rotación presenta simetría axial puede suceder que su imagen quede orientada de la misma manera que la original. Por ejemplo, en la siguiente figura, el triángulo rojo tiene simetría axial. El triángulo azul se puede obtener del rojo de tres formas directas: mediante una reflexión con respecto a la recta l, como una rotación de centro A y amplitud 120° y mediante una traslación.

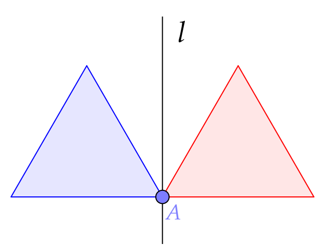


Figura 129: Un triángulo se puede obtener del otro mediante una reflexión, una rotación o una traslación.

R: Se puede obtener de P mediante una rotación.

S: Es de menor tamaño que P por lo que no se puede obtener mediante una rotación.

T: Es una reflexión de P. Dado que P no es simétrico, no hay manera de obtener T a partir de P mediante una rotación.

Solo R es una rotación de P.

Cortesía de holohololand en FreeDigitalPhotos.net

5. Visualización espacial

Rectas y planos

Paralelismo

En el espacio, si un plano y una recta no contenida en él no se cortan, diremos que **el plano y la recta son paralelos**. También se dice que cualquier recta contenida en un plano es paralela a dicho plano. Si el plano P es paralelo a la recta ℓ, lo denotamos por $P \| \ell$ o por $\ell \| P$.

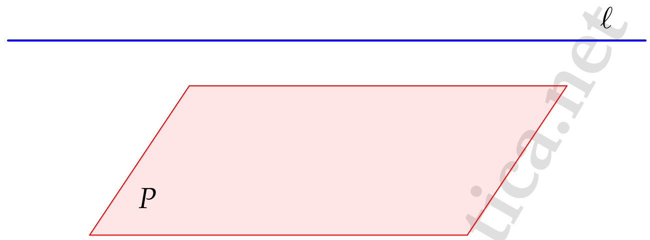


Figura 130: El plano P y la recta ℓ son paralelos.

Perpendicularidad

En el espacio, si una recta ℓ interseca a un plano P en un punto A, se dice que la recta es **perpendicular** al plano si ℓ es perpendicular a toda recta en P que contiene a A. Esto se denota por $\ell \perp P$.

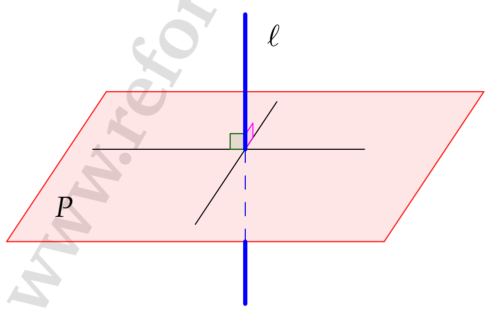


Figura 131: El plano P y la recta ℓ son perpendiculares.

Planos paralelos

Dos planos distintos son **paralelos** si ellos no tienen puntos en común. Si los planos P y Q son paralelos escribimos $P \| Q$.

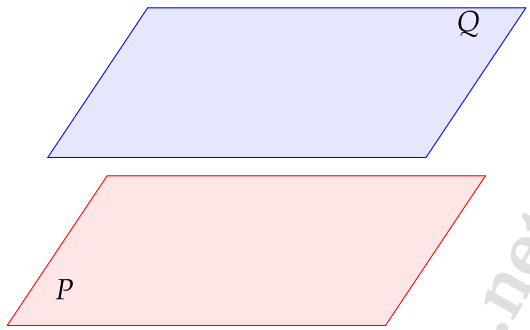


Figura 132: Los planos P y Q son paralelos.

Distancia entre planos

Dados dos planos paralelos, si trazamos un segmento de recta perpendicular a ambos planos y con un extremo en cada plano, entonces la **distancia entre ambos planos** es igual a la longitud de ese segmento de recta.

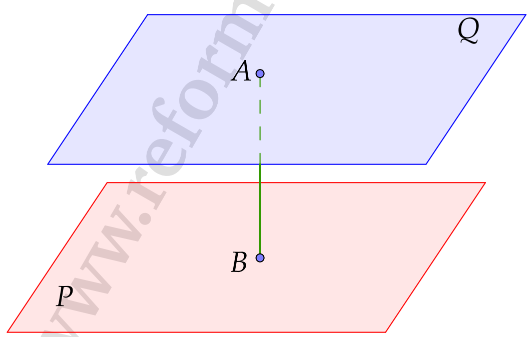


Figura 133: La distancia entre los planos P y Q es igual a la medida de $\overline{AB}$.

Distancia de una recta a un plano

Dados un plano y una recta paralela a él, no contenida en el plano, si trazamos un segmentos de recta perpendicular al plano y a la recta, con un extremo en el plano y otro en la recta, entonces la **distancia entre la recta y el plano** es la longitud de ese segmento de recta.

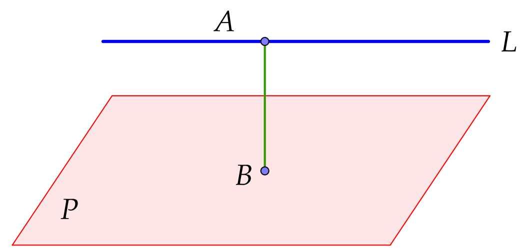


Figura 134: La distancia entre el plano P y la recta Q es igual a la medida de $\overline{AB}$.

Ángulo formado por dos planos

Dos planos P y Q se intersecan en una recta ℓ. Al cortarse forman cuatro ángulos. Puede suceder que todos estos ángulos son rectos, en cuyo caso se dice que los planos son perpendiculares.
Lo otro que puede suceder es que dos de estos ángulos son agudos de la misma medida y los otros dos son obtusos de la misma medida.

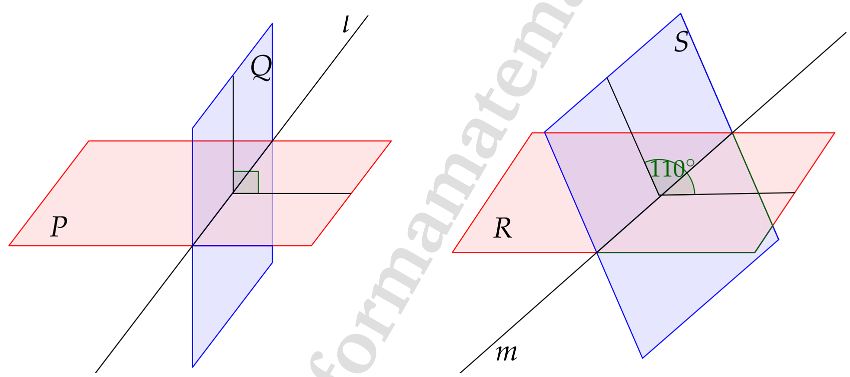


Figura 135: P y Q son perpendiculares. R y S no son perpendiculares, forman un ángulo menor de 70° y un ángulo mayor de 110°.

Poliedro

Un **poliedro** es una unión de polígonos y sus interiores, no todos coplanares, que delimitan una porción finita del espacio. La porción del espacio delimitada se llama **interior** del poliedro. La unión del poliedro y su interior se llama **poliedro sólido**. Las regiones poligonales que conforman el poliedro se llaman **caras del poliedro**; los lados de los polígonos se llaman **aristas del poliedro**; los vértices de esos polígonos se llaman **vértices del poliedro**

Ejemplo 83

El poliedro que se presenta en la siguiente figura tiene seis caras que son los polígonos: $ABCD$, $EFGH$, $ABEF$, $CDGH$, $CBEH$ y $ADGF$; sus aristas son: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{AF}$, $\overline{DG}$, $\overline{BE}$, $\overline{CH}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$; sus vértices son: A, B, C, D, E, F, G, H.

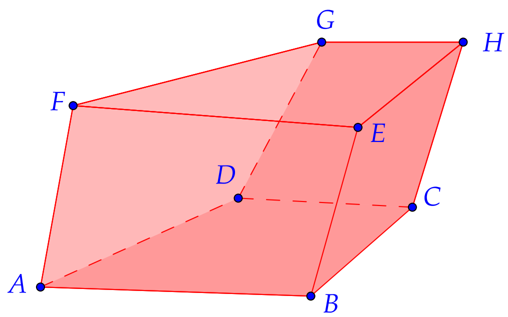


Figura 136: Poliedro de seis caras

Prisma

Si un poliedro tiene dos caras poligonales congruentes contenidas en planos paralelos entonces se dice que es un **prisma**.
Las caras congruentes se llaman **bases** del prisma y las otras se llaman **caras laterales**. Estas caras laterales son paralelogramos.
Si la base es un triángulo, el prisma se llama **prisma triangular**; si la base es un pentágono, se llama **prisma pentagonal** y así sucesivamente.

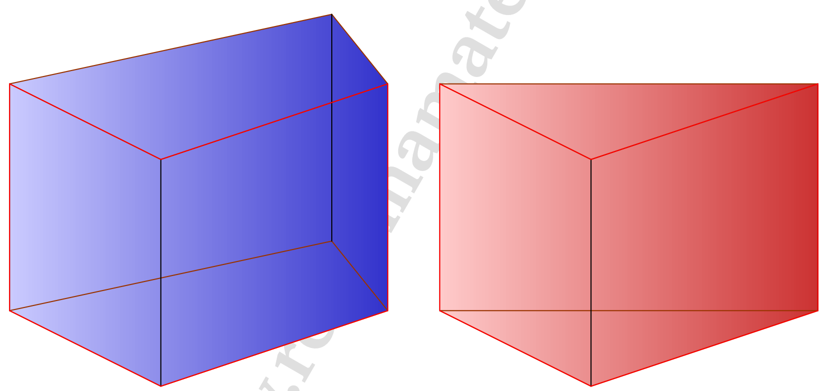


Figura 137: Primas cuadrangular y prisma triangular.

Secciones cónicas

Las secciones cónicas son un tipo especial de sección plana.

Sección plana

Una sección plana es la curva intersección de un plano con un sólido

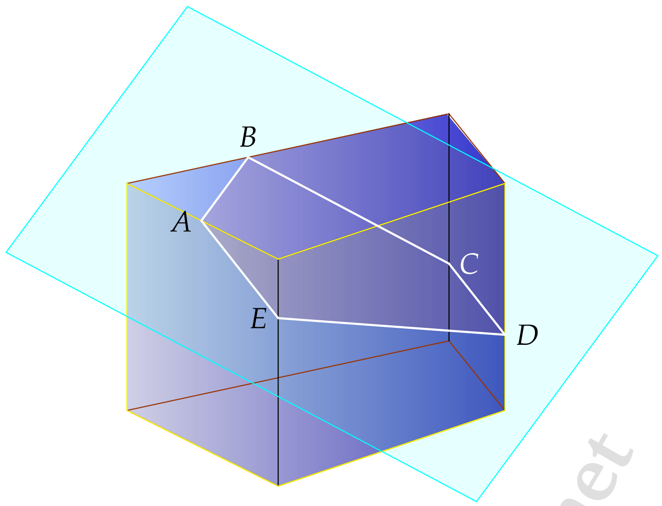


Figura 138: La sección que se obtiene al cortar el prisma con el plano es el pentágono $ABCDE$.

Las secciones cónicas se definen como cierto tipo de curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano.

Para definirlas, se considerará un tipo especial de cono, que para nuestros efectos llamaremos cono doble. Consideremos una circunferencia C en el espacio y un punto V fuera de ella de modo que si O es el centro de la circunferencia, entonces la recta OV es perpendicular al plano que contiene la circunferencia.

Cono

Un **cono doble** (no delimitado) es la superficie que se genera al trazar todas las recta que pasan por la circunferencia C y por el punto V.

El punto V se llama vértice del cono, $\overleftrightarrow{OV}$ se llama eje del cono, cualquiera de las rectas que constituyen el cono se llama una generatriz, la circunferencia C se llama directriz.

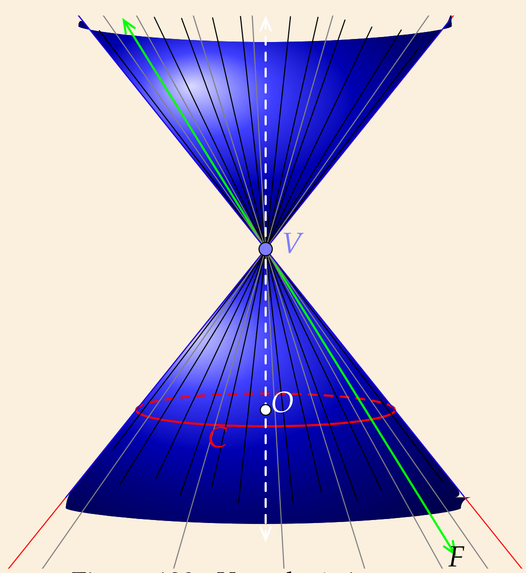


Figura 139: V es el vértice, C de centro O es directriz, $\overleftrightarrow{OV}$ es el eje, $\overleftrightarrow{VF}$ es una generatriz.

Elipse

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice, que no es paralelo eje del cono ni paralelo a alguna generatriz. Si A y B son los puntos en una elipse más alejados entre sí, entonces se llaman **vértices** de la elipse, también $\overline{AB}$ se llama **eje mayor**; ese mismo nombre recibe la medida de dicho segmento. La mediatriz del eje mayor interseca la elipse en dos puntos C y D; tanto $\overline{CD}$ como su medida reciben el nombre de **eje menor**. El punto O intersección de esos ejes se llama **centro** de la elipse.

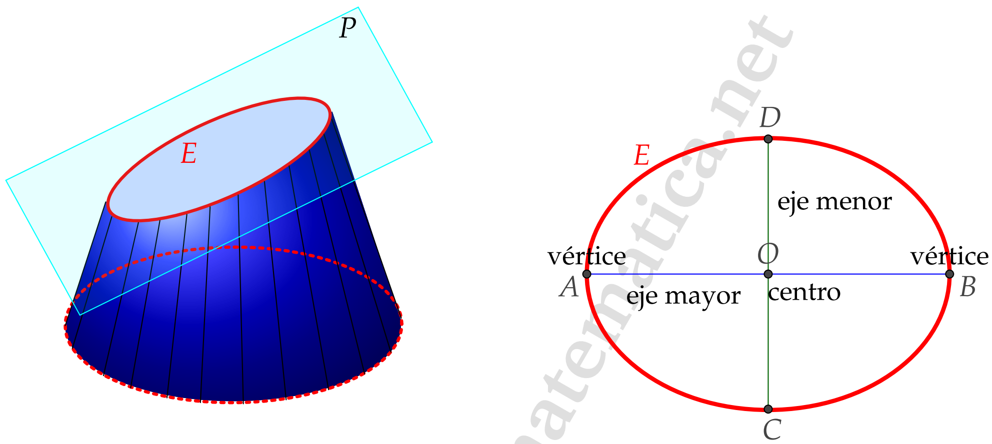


Figura 140: Al cortar el cono con el plano P se obtiene una curva E denominada elipse. A la derecha se muestra una elipse E, $\overline{AB}$ es su eje mayor, $\overline{AB}$ es su eje menor, O es su centro, A y B son sus vértices.

Cuando una elipse tiene los dos ejes de la misma medida entonces es una circunferencia. En este caso se obtiene cuando el cono doble es cortado por un plano que no contiene al vértice y es perpendicular al eje.

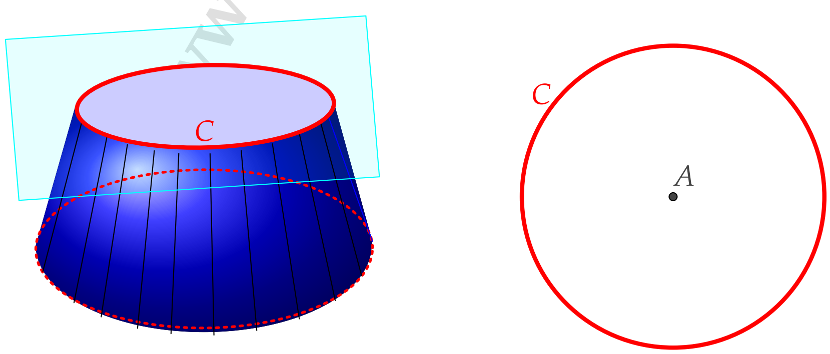


Figura 141: Al cortar el cono con un plano paralelo a la base, que no contenga el vértice, se obtiene una circunferencia. A la derecha, circunferencia C de centro A.

Parábola

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice y es paralelo a alguna generatriz del cono.

La parábola es una curva simétrica con respecto a un eje. El punto donde se cortan la parábola y el eje de simetría se llama vértice.

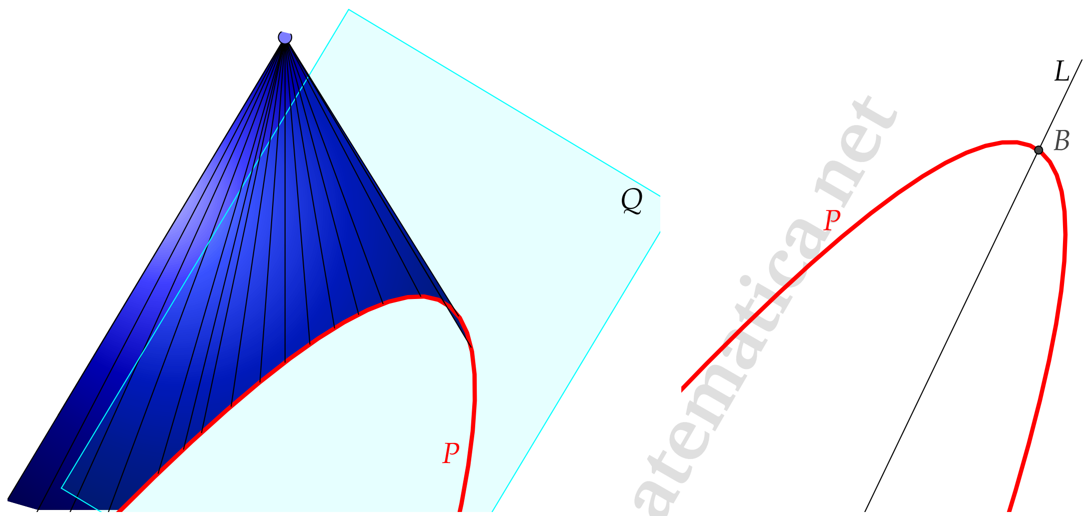
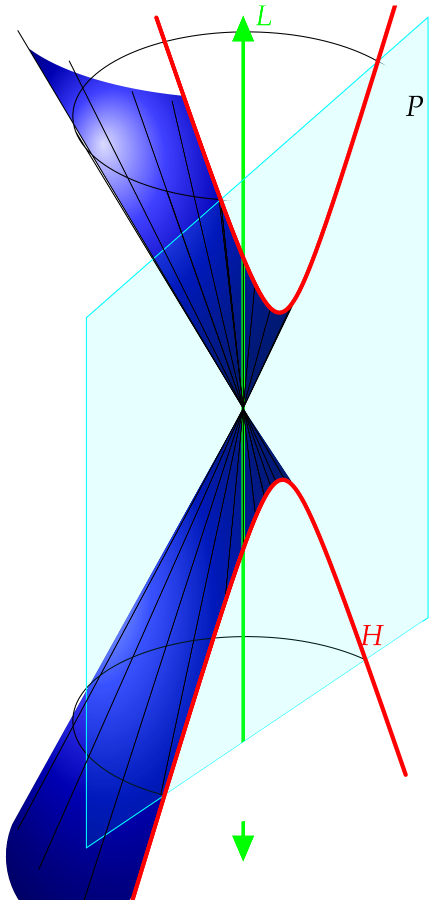


Figura 142: Al cortar el cono con el plano Q se obtiene una curva P denominada parábola. A la derecha, B es el vértice de la parábola P, L es su eje de simetría.

Hipérbola

Es la sección plana que se obtiene al cortar un cono doble con un plano que no contiene al vértice y es paralelo al eje del cono.

La hipérbola está compuesta por dos ramas separadas y es una curva simétrica con respecto a un eje. Los puntos donde se cortan la hipérbola y el eje de simetría se llaman vértices.



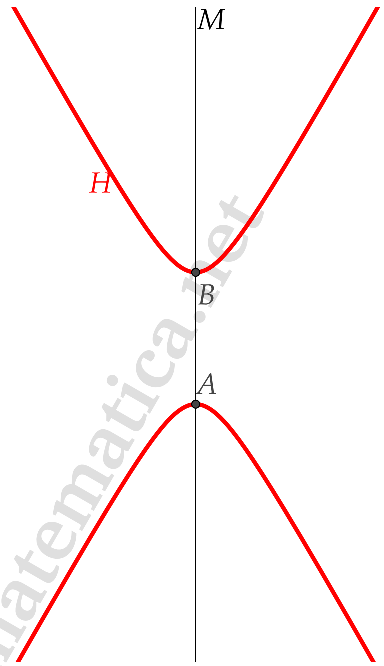


Figura 143: Al cortar el cono con un plano P paralelo al eje L se obtiene una curva llamada Hipérbola (H). A la derecha aparece una hipérbola H con eje M y vértices A y B.

Cilindros

Cilindro circular

Un **cilindro circular** es la unión de dos circunferencias congruentes (junto con su interior) que están en planos paralelos y de todos los segmentos (llamados **generatriz**) que tienen un extremo en cada circunferencia y que son paralelos a la recta que une los centros de las circunferencias.

Las dos circunferencias se llaman **bases** del cilindro. Se llama altura del cilindro a la distancia entre los dos planos que contienen las bases. El segmento que une los centros de ambas bases se llama **eje del cilindro**. Si el eje es perpendicular a los planos que contienen las bases, se dice que el cilindro es **recto**.

En adelante el término cilindro se referirá a un cilindro circular recto.

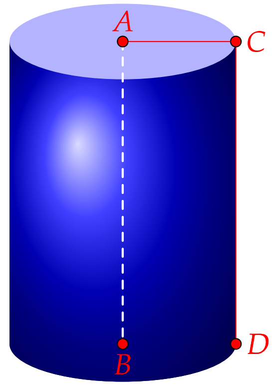


Figura 144: $\overline{AB}$ es el eje del cilindro, AB es la altura, $\overline{AC}$ es el radio de la base, $\overline{CD}$ es generatriz.

Área del cilindro

Si la altura del cilindro es h y el radio del círculo base es r entonces el área lateral del cilindro es

$$A_L = 2\pi rh.$$

Como las bases son círculos de radio r, entonces cada uno de ellos tiene área πr^2. Así, el área sumada de sus bases es $A = 2\pi r^2$. De todo esto, el área total del cilindro será:

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Ejemplo 84

Determinar el área lateral y el área total de un cilindro en el que el radio de la base es 4 y cuya altura es 10.

Solución

De acuerdo con lo anterior

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 80\pi. \\ A_T &= 80\pi + 2\pi(4)^2 = 80\pi + 32\pi = 112\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Secciones planas de un cilindro

- Si un cilindro se corta mediante planos paralelos a las bases se obtienen como secciones circunferencias congruentes a la base.
- Las secciones por planos no paralelos a las bases y que no intersecan las bases son elipse.

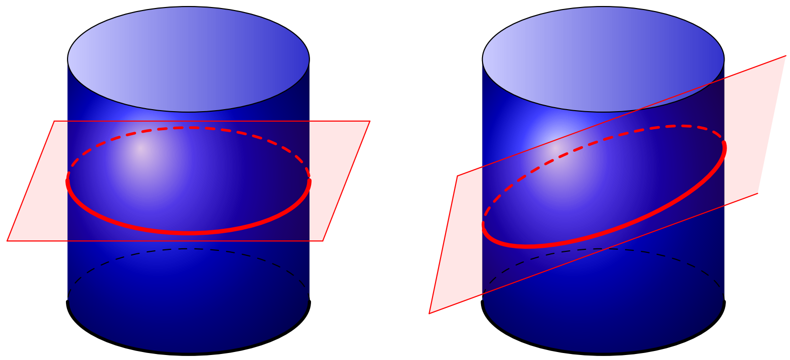


Figura 145: A la izquierda, el cilindro es cortado con un plano paralelo a la base; la sección que se obtiene es una circunferencia. A la derecha, el cilindro es cortado con un plano no paralelo a la base, sin intersecarla; la sección es una elipse.

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos del cilindro y elementos de las curvas que se forman cuando el cilindro se corta con un plano.

Ejemplo 85

En la figura siguiente se representa un cilindro circular recto donde el radio de la base es 3 cm y una sección obtenida mediante un plano que forma un ángulo de 45° con el plano que contiene la base. ¿Cuánto mide el eje mayor $\overline{AB}$, de la elipse?

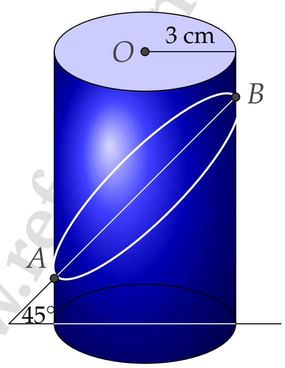


Figura 146: Un cilindro y una sección mediante un plano que forma 45° con el plano de la base.

Solución

En la siguiente figura se han trazado algunos elementos que permite visualizar la solución.

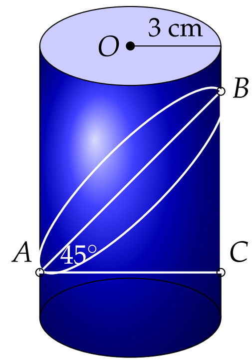


Figura 147: Se agregaron elementos para tener un esquema que permite resolver el ejercicio.

Si se traza un segmento $\overline{BC}$ paralelo al plano de la base, que interseca al eje del cilindro y donde C pertenece al cilindro (vea la figura anterior), entonces BC es igual al diámetro de la base, es decir $BC = 6$ y formamos un triángulo rectángulo BCA. Tenemos entonces $\cos 45^\circ = \frac{6}{AB}$ y por lo tanto

$$AB = \frac{6}{\cos 45^\circ} \approx \frac{6}{0,70711} = 8,4852.$$

Conos

En adelante trataremos con otro tipo de cono el cual es una porción particular delimitada del cono doble.

Cono circular recto

Un **cono** circular recto (al que llamaremos simplemente cono) es la figura formada por la unión de una circunferencia, junto con su interior, llamada base, un punto V (llamado vértice), que no está en el mismo plano y todos los segmentos de recta (llamados generatriz) que unen un punto de la circunferencia base con el punto V.
Si el segmento de recta que se traza desde el punto V hasta el centro del círculo, llamado **eje** del cono, es perpendicular al plano que contiene al círculo se dice que el cono es **recto**.
La **altura** del cono es el segmento de recta que va del vértice al centro de la circunferencia base del cono. También se llama altura a la medida de tal segmento. Se llama **eje** del cono a la recta que contiene a la altura.

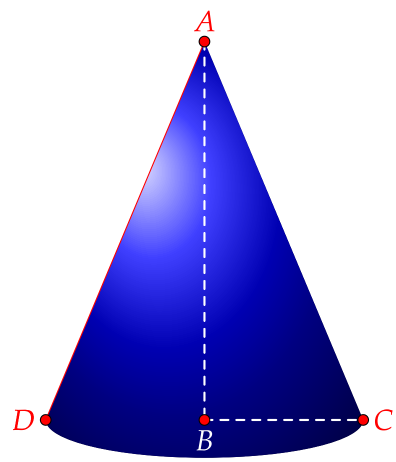


Figura 148: A es el vértice del cono, $\overline{AB}$ es la altura del cono, $\overline{BC}$ es el radio de la base, $\overline{AD}$ es generatriz.

Área del cono

El área lateral de un cono recto es

$$A_L = \frac{C \cdot g}{2},$$

donde C es la longitud de la circunferencia base y g es la longitud de la generatriz. Si el radio de la circunferencia es r, entonces $C = 2\pi r$ y, por lo tanto, podemos escribir el área lateral como

$$A_L = \pi r g.$$

El área total del cono es la suma del área lateral más el área de la base:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2.$$

Ejemplo 86

Determinar el área lateral y el área total de un cono cuya generatriz mide 7 y el radio de su base es 4.

Solución

De acuerdo con las fórmulas anteriores:

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 7 = 28\pi,$$
$$A_T = \pi r g + \pi r^2 = 28\pi + \pi(4)^2 = 28\pi + 16\pi = 44\pi.$$

Ejemplo 87

Determine el área lateral de un cono de altura 6 y radio de la base 3.

Solución

Para calcular el área lateral debemos calcular primero la longitud de su generatriz s. Observe la figura siguiente.

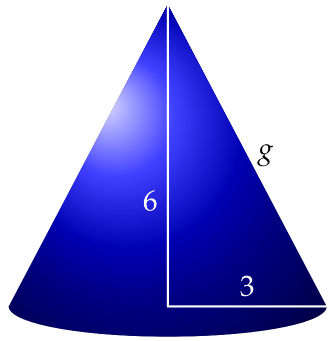


Figura 149: Se forma un triángulo rectángulo con hipotenusa g y catetos de medidas 6 y 3.

La generatriz es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la altura del cono.

De acuerdo con lo anterior:

$$g = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}.$$

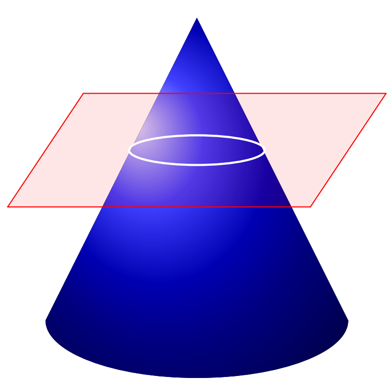
Por lo tanto, el área lateral del cono es

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{45} = 3\sqrt{45}\,\pi.$$

Secciones planas de un cono

Las secciones planas de un cono circular recto se describen a continuación:

- Una sección mediante un plano paralelo a la base es una **circunferencia**.
- Una sección mediante un plano no paralelo a la base, que no corte la base, y no paralelo a una generatriz es una elipse.
- Una sección mediante un plano paralelo a una generatriz del cono es un arco de **parábola** (diremos simplemente que es una parábola).
- Una sección mediante un plano perpendicular a la base y que no contenga al vértice del cono es un arco de **hipérbola** (diremos simplemente que es una hipérbola).



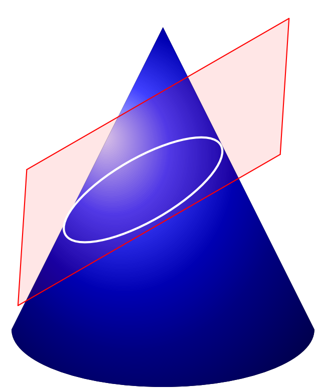


Figura 150: A la izquierda: la intersección de un cono con un plano paralelo a la base es una circunferencia. A la derecha, al cortar un cono con un plano que no corta la base, no es paralelo al eje y no es paralelo a ninguna generatriz es una elipse.

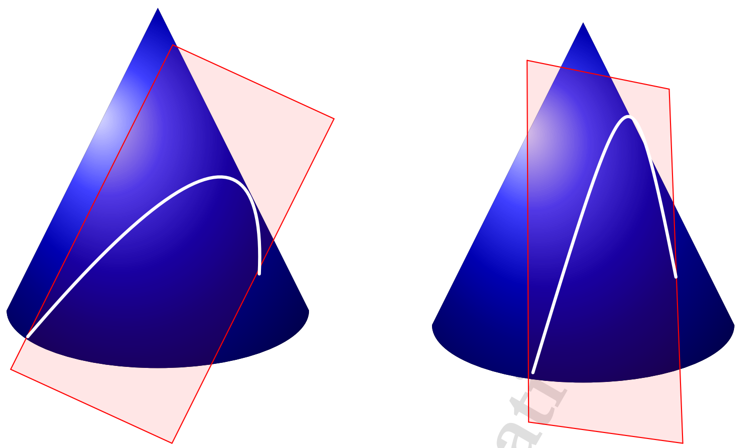


Figura 151: A la izquierda: la intersección de un cono con un plano paralelo a una generatriz es una parábola. A la derecha, al cortar un cono con un plano paralelo al eje es una hipérbola.

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos del cono y elementos de las curvas que se forman cuando el cilindro se corta con un plano.

Ejemplo 88

Un cono de radio de la base igual a 5 cm y altura 10 cm se corta mediante un plano paralelo a la base. Si la distancia entre el plano de la sección y el plano de la base es 4 cm, determine el radio de la sección.

Solución

La figura siguiente representa la situación.

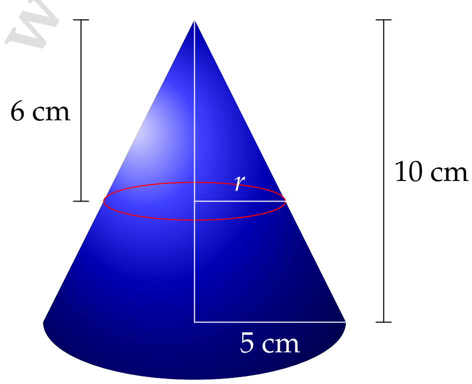


Figura 152: La circunferencia es la sección que se obtiene al cortar el cono mediante un plano paralelo a la base y que está a 4 cm de ella.

Del centro de la circunferencia al vértice del cono la distancia es $10 - 4 = 6$ cm.

Si r representa el radio de la sección tenemos, por semejanza de triángulos que $\frac{10}{5} = \frac{6}{r}$ y, de aquí, $r = 3$.

Esferas

Esfera

Una **esfera** es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto dado, llamado **centro** de la esfera.

La distancia desde cada punto de la esfera hasta su centro se llama **radio** de la esfera; también se llama radio a cualquier segmento de recta trazado desde algún punto de la esfera hasta su centro. El **diámetro** de la esfera es cualquier segmento de recta trazado desde un punto a otro de la esfera pasando por el centro; también se llama diámetro a la medida de tal segmento.

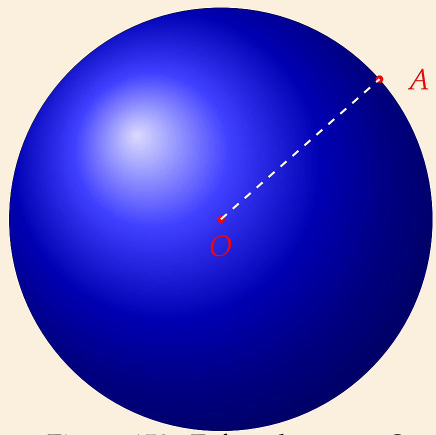


Figura 153: Esfera de centro O y radio $\overline{OA}$.

Área de la esfera

El área de una esfera se calcula mediante la fórmula:

$$A = 4\pi r^2,$$

donde A es el área de la esfera y r es su radio.

Ejemplo 89

Determinar el área de una esfera cuyo radio es 5 cm.

Solución

De acuerdo con la fórmula anterior tenemos que

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi.$$

Intersección de una esfera con un plano

Dadas una esfera y un plano en el espacio pueden suceder tres cosas: que la esfera y el plano no se intersequen, que el plano sea tangente a la esfera (su intersección es un punto) o que el plano corte a la esfera en más de un punto, en este último caso la intersección entre ambos es una circunferencia.

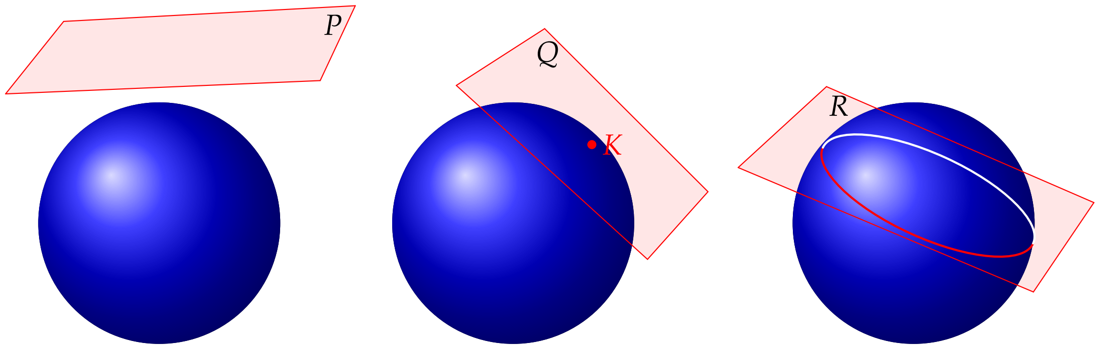


Figura 154: A la izquierda, el plano P y la esfera no se intersecan. Al centrol, el plano Q es tangente a la esfera en el punto K. A la derecha, el plano R corta a la esfera en una circunferencia.

Circunferencias máximas de una esfera

Si el plano corta a la esfera en una circunferencia, decimos que la intersección es una **circunferencia máxima de la esfera** si el plano contiene al centro de la esfera.

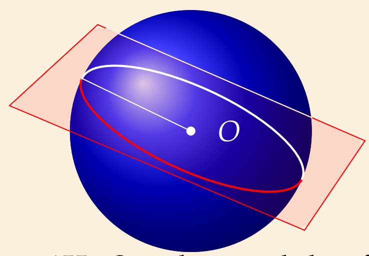


Figura 155: O es el centro de la esfera y de la circunferencia, por lo tanto esta es una circunferencia máxima de la esfera.

Se pueden establecer algunas relaciones métricas entre elementos de la esfera y elementos de las circunferencias que se forman cuando la esfera se corta con un plano.

Ejemplo 90

Una esfera de 10 cm de radio es cortada por un plano Q, cuya distancia al centro de la esfera es 5 cm, ¿cuál es el radio del círculo que se forma al intersecar la esfera con el plano Q?

Solución

La figura ilustra la situación propuesta y sugiere la forma en que se puede resolver el problema.

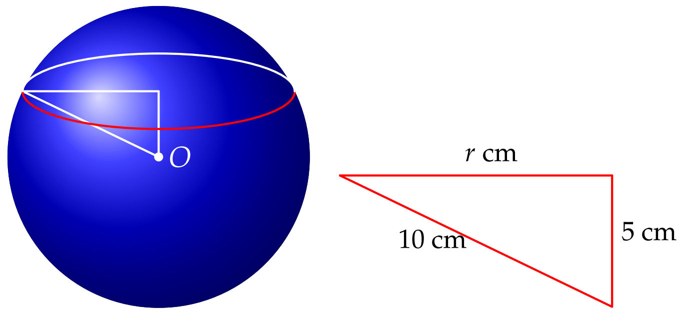


Figura 156: A la izquierda, el plano corta a la esfera en una circunferencia.
A la derecha, el esquema dela situación por resolver.

En efecto, el radio r del círculo corresponde a un cateto de un triángulo rectángulo en el que el otro cateto es la distancia entre los dos planos y la hipotenusa es el radio de la esfera. De modo que

$$r = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Es decir, el radio del círculo es $r = 5\sqrt{3}$ cm.

Cortesía de seksuat en FreeDigitalPhotos.net

Créditos

Este documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación MatemÃ¡tica en Costa Rica*, del Ministerio de Educación Pública.

Autor

Hugo Barrantes Campos

Revisores

Edison de Faria, Johanna Mena, Keibel RamÃrez, Ángel Ruiz

Edición final de este documento

Hugo Barrantes

Director del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2020). *Geometría, Material de consulta*, San José, Costa Rica: autor.