REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COSTA RICA

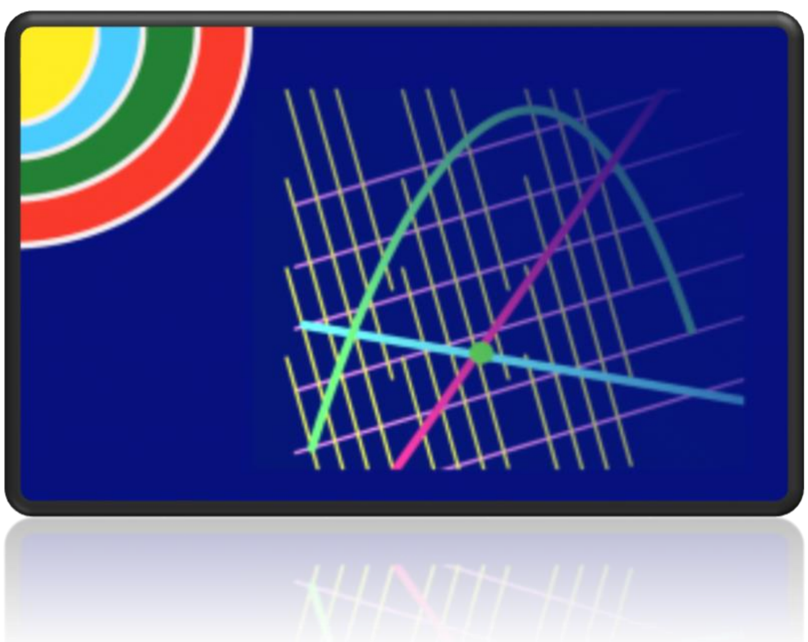
Ministerio de Educación Pública

www.reformamatematica.net

Curso MAT∑PJA en línea

RELACIONES Y ÁLGEBRA

Material de consulta



Costa Rica
2020

Tabla de contenidos

Índice alfabético

Introducción

Este documento fue elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatematica.net).

La primera versión de este documento fue ofrecida en el 2016 como apoyo a un curso virtual con la modalidad MOOC denominado *Preparación Matemáticas Bachillerato*. Varias de sus partes también fueron usadas en 2017 y 2018 para cursos Mini-MOOC ofrecidos por el Proyecto. La presente versión está dirigida especialmente a apoyar el curso **Curso MAT∑PJA en línea** ofrecido por el Ministerio de Educación Pública para estudiantes que desean obtener su Bachillerato por Madurez.

Se describen diferentes conocimientos vinculados con las funciones matemáticas: generalidades acerca de las funciones, representaciones y aplicaciones de las funciones, para la resolución de problemas de acuerdo con las temáticas incluidas en los Programas de Estudio de Matemáticas para la Educación Diversificada.

Al inicio del documento se le proporciona un índice alfabético en el que se da un listado, en orden alfabético, de los temas o contenidos con el número de página donde aparecen. Si usted hace clic sobre dicho número, será remitido a la página donde se proporciona el concepto, tema o contenido correspondiente. Se puede regresar al índice alfabético desde cualquier página haciendo clic sobre la palabra Índice que aparece en el encabezado de todas ellas.

Es importante aclarar que el presente documento no es un libro de texto y tampoco es exhaustivo. Procuramos que sea autosuficiente pero no está pensado para ser utilizado como un medio para organizar la acción de aula.

Más materiales educativos se pueden acceder en el sitio web **Recursos Libres de Matemáticas** (https://recursoslibres.reformamatematica.net).

Algunos conocimientos previos

Potencias con exponente natural

La **potenciación** es una operación matemática entre dos términos denominados **base** y **exponente**. Si la base es el número real a y el exponente es el número natural n entonces a^n, se lee "a elevado a la n", representa el número $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\,veces}$.
Por definición $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.

Ejemplo 1 ____________________

a. Encuentre el valor de la potencia 5^4

Solución: Lo que se debe de calcular es la cuarta potencia de 5, es decir, se debe efectuar la multiplicación

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

b. Encuentre el valor de la potencia $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

Solución: Lo que se debe de calcular es la tercera potencia de $-\frac{3}{2}$, es decir, se debe efectuar la multiplicación

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{27}{8}$$

Propiedades de las potencias

Si n, m son números enteros y a es real entonces las propiedades de las potencias son:

1. $a^1 = a$
2. *Producto de potencias con misma base.*
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
3. *División de potencias con misma base* $a \neq 0$.
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
4. *Potencia de una potencia.*
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
5. *Producto de potencias con el mismo exponente.*
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
6. *Cociente de potencias con el mismo exponente.*
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \ \ b \neq 0$$
7. Las potencias con exponente par son siempre positivas
8. Las potencias con exponente impar tienen el mismo signo de la base
9. Una potencia de una base no nula con exponente negativo $-n$ es igual al inverso multiplicativo de la base elevado al exponente positivo n.
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0, n \text{ natural}$$

Si $a \neq 0, b \neq 0$ entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Observaciones:

i. En la *propiedad 5* no hay que confundir $(a^n)^m$ con a^{n^m}. Por lo general $a^{n^m} \neq (a^n)^m$ pues cuando tenemos a^{n^m} sin paréntesis, la convención es que se calcula primero n^m y este valor será la potencia para la base a, es decir, $a^{n^m} = a^{(n^m)}$ mientras que en $(a^n)^m$ multiplicamos n por m y este valor será la potencia para la base a.
ii. Por otro lado, $-a^n$ no es lo mismo que $(-a)^n$ pues $-a^n = -\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\,veces}$ mientras que $(-a)^n = \underbrace{(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdots (-a)}_{n\,veces}$.

Ejemplo 2 ___________________

Calcule las siguientes potencias.

a. $2^0 = 1$
b. $(-6)^0 = 1$
c. $\left(\frac{5}{7}\right)^0 = 1$
d. $-4^1 = -4$
e. $\left(\frac{8}{3}\right)^1 = \frac{8}{3}$
f. $(-3)^4 = 81$
g. $\left(\frac{-4}{5}\right)^4 = \frac{(-4)^4}{5^4} = \frac{256}{625}$
h. $3^5 = 243$
i. $(-2)^7 = -128$
j. $\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = \frac{-1}{8}$

Ejemplo 3 ___________________

Aplique la propiedad de las potencias correspondiente en cada caso.

a. $(-3)^2 \cdot (-3)^6 = (-3)^{2+6} = (-3)^8$
b. $11^2 \cdot 11^8 \cdot 11^{-3} = 11^{2+8-3} = 11^7$
c. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^6 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-5+6} = \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$
d. $9^7 \div 9^4 = 9^{7-4} = 9^3$
e. $(-2)^2 \div (-2)^7 = (-2)^{2-7} = (-2)^{-5}$
f. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-7}$
g. $(2^3)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}$
h. $(3^3)^{-2} = 3^{3\cdot -2} = 3^{-6}$
i. $\left(\left(\frac{2}{11}\right)^3\right)^7 = \left(\frac{2}{11}\right)^{3\cdot 7} = \left(\frac{2}{11}\right)^{21}$

j. $7^5 \cdot 2^5 = (7 \cdot 2)^5$

Ejemplo 4 ___________________

Calcule las siguientes potencias aplicando la propiedad correspondiente según sea el caso.

a. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

b. $2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$

c. $\frac{1}{6^{-2}} = 6^2 = 36$

d. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

e. $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{5}{-3}\right)^5 = \frac{5^5}{(-3)^5} = -\frac{3125}{243}$

Ejemplo 5 ___________________

a. Observe que no es lo mismo $(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6$, que $3^{2^3} = 3^8$

b. Note también que no es lo mismo, $-2^4 = -16$, que $(-2)^4 = 16$ ya que:

$$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$
$$(-2)^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16$$

Potencias con exponente racional

Si a es un número real positivo y si m, n son números enteros con $n > 1$ entonces $a^{m/n}$ se define como $\sqrt[n]{a^m}$, es decir,

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si reemplazamos m por 1 en la definición anterior obtendremos el caso particular

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Las propiedades vistas anteriormente para exponentes enteros son válidas para los exponentes racionales.

Ejemplo 6 ____________________

a. $5^{3/2} = \sqrt{5^3}$
b. $7^{5/3} = \sqrt[3]{7^5}$
c. $11^{1/4} = \sqrt[4]{11}$

Propiedades de las potencias con exponentes reales

Como todo número real puede ser aproximado por números racionales entonces las propiedades vistas son válidas para exponentes reales, es decir, si a y b son reales positivos distinto de 1, x, y son reales positivos entonces

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left((a^x)\right)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Ejemplo 7 ____________________

¿Cuál número es mayor: 2^{3^2} o $(2^3)^2$?

Solución

$2^{3^2} = 2^9 = 512$ mientras que $(2^3)^2 = 2^6 = 64$. Por lo tanto $2^{3^2} > (2^3)^2$.

Ejemplo 8 ___________________

Calcule $\left(-\frac{2}{5}\right)^n - 9^n + ((-3)^2)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n$ si n es un número real impar.

Solución

Por ser n impar, $\left(-\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{2^n}{5^n}$, $((-3)^2)^n = (-3)^{2n} = 3^{2n}$ pues $2n$ es par. También tenemos que $9^n = (3^2)^n = 3^{2n}$ por ser $9 = 3^2$. Reemplazando estos valores en la expresión dada y simplificando obtendremos

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^n - 9^n + ((-3)^2)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{2^n}{5^n} - 3^{2n} + 3^{2n} + \frac{2^n}{5^n} = 0$$

Proporcionalidad directa.

Dos cantidades variables x, y son **directamente proporcionales** si existe una constante $k \neq 0$ tal que $y = kx$. El número k se denomina **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 9 ___________________

- La longitud C de una circunferencia de radio r es directamente proporcional al radio: $C = 2\pi r$. La constante de proporcionalidad es 2π.
- El precio que pagamos al comprar un producto (por ejemplo, al llenar el depósito de gasolina) y la cantidad comprada (litros, en el ejemplo).
- El volumen de líquido que sale de un tubo de caudal constante y el tiempo que mantenemos el tubo abierto.
- La distancia medida sobre un plano o mapa realizado a una escala dada y la distancia real.

Ejemplo 10 ___________________

El kilo de queso en la pulpería "Amiga del pueblo" está en oferta.

Si el kilo del queso es de ₡ 3 750. ¿Cuánto costará 3 kilos? ¿medio kilo? ¿x kilos?

Solución

3 kilos costarán el triple del precio de 1 kilo. Medio kilo costará la mitad del precio de 1 kilo. En general, x kilos costarán x veces el precio de 1 kilo.
De esta forma el precio del queso, en colones, que denominaremos con la letra P, es directamente proporcional a la cantidad de queso. Escribimos

$$P = 3750x$$

La constante de proporcionalidad es 3750.
También es posible representar la relación entre magnitudes variables mediante la construcción de una tabla:

Kilogramos	½	1	2	3
Precio del queso	1875	3750	7500	11250

Observe que el cociente entre la magnitud dependiente y la independiente es igual a la constate de proporcionalidad.

Ejemplo 11 ___________________

Un automóvil a velocidad constante consume 5 litros de gasolina cada 100 kilómetros recorridos. Si quedan en el depósito 11 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

Solución:
Es claro que con una mayor cantidad de litros de gasolina en el depósito se recorren más kilómetros. Recíprocamente, para un menor número de litros de gasolina se recorren menos kilómetros. Se debe determinar la cantidad de kilómetros que se recorren, suponiendo que el consumo de combustible es constante en cada kilómetro recorrido . Para solucionar el problema se puede utilizar una regla de tres simple de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{r} 5\ litros \to 100km \\ 11\ litros \to x\ km \end{array}\right\} \quad x = \frac{11 \cdot 100}{5} = 220\ km$$

El automóvil podrá recorrer 220 km.

Proporcionalidad inversa.

Dos cantidades variables x, y son **inversamente proporcionales** si existe una constante $k \neq 0$ tal que $y = \frac{k}{x}$. El número k se denomina **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 12 ___________________

- El tiempo t que gasta un auto para recorrer una distancia fija d es inversamente proporcional a su rapidez v: $t = \frac{d}{v}$. La constante de proporcionalidad es d.
- La presión P de un gas a temperatura constante es inversamente proporcional a su volumen V: $P = \frac{k}{V}$. La constante de proporcionalidad es k.

Ejemplo 13___________________

Si 4 personas realizan una obra en 6 días, ¿en cuántos días harían la misma obra 8 personas, si trabajan a un mismo ritmo de las 4 personas?

Solución

Es claro que un mayor número de personas necesitarían menos tiempo para completar la obra. Recíprocamente, un menor número de personas necesitarían más tiempo para completarla. Al suponer un ritmo de trabajo constante entonces existe una relación inversa entre el tiempo para completar la obra y la cantidad de personas.

Si d representa la cantidad de días para completar la obra y P la cantidad de trabajadores entonces

$$P = \frac{k}{d}$$

Tenemos un dado inicial: P es igual a 4 cuando d es igual a 6. Con esto podemos calcular la constante de proporcionalidad

$$k = Pd = 4 \cdot 6 = 24$$

Por lo tanto $Pd = k = 24$. Si P es igual a 8 entonces

$$d = \frac{24}{8} = 3 \text{ días.}$$

También es posible colocar las magnitudes variables en una tabla de la siguiente manera:

Días	3	4	8	12
Trabajadores	8	6	3	2

Observe que el producto entre la magnitud dependiente y la magnitud independiente es igual a la constate de proporcionalidad.

Ejemplo 14___________________

Un ganadero tiene suficiente forraje para alimentar a 80 caballos durante 30 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 200 caballos?

Solución:
En este problema entre mayor cantidad de animales hay que alimentar, el forraje dura menos días Recíprocamente, para un menor número de caballos, el forraje rinde más días. Para solucionar el problema se puede utilizar una regla de tres simple inversa de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} 80 \; caballos \to 30 \; días \\ 200 \; caballos \to x \; días \end{array}\right\} \quad x = \frac{80 \cdot 30}{200} = 12 \; días$$

Se podrán alimentar durante 12 días.

Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligados por símbolos de suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo 15___________________

Las siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

a. $4x^3 + x - 1$
b. $\frac{8m^2n}{3}$
c. $\frac{1-m}{n+3}$
d. $\sqrt[3]{7}xy^2$
e. $-x^4zy^{-3}$
f. 8

Monomio

Se llama **monomio** a toda constante o bien, a toda expresión algebraica, en la cual las potencias de las variables son exponentes enteros positivos y están relacionados únicamente por la multiplicación y además no contiene letras en el denominador.
En un monomio se puede distinguir el **factor numérico** (o coeficiente numérico) y el **factor literal**.
Le llamamos **grado de un monomio** a la suma de todos los exponentes de las variables que lo conforman.
Si dos o más monomios en cada variable tienen el mismo exponente se denominan **monomios semejantes.**

Ejemplo 16 ___________________

Indique si las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a. $12xn^6$, corresponde a un monomio.
b. n^4m^{-2}, no corresponde a un monomio ya que posee un exponente negativo en una de sus variables.
c. $\frac{2}{3}xy^2$, corresponde a un monomio.
d. $-m^2p^3s$, corresponde a un monomio.
e. $\frac{x}{y}$, no corresponde a un monomio ya que posee una variable en el denominador.
f. $2x + y$, no corresponde a un monomio ya que las variables están relacionadas mediante el signo de suma.

Ejemplo 17

Complete la siguiente tabla.

Monomio	Factor numérico	Factor literal	Grado
$6mn^5q^2$	6	mn^5q^2	1 + 5 + 2 = 8
$\frac{2}{3}xy^2$	$\frac{2}{3}$	xy^2	1+2 = 3
$-m^5rp^3$	-1	m^5rp^3	5+1+3= 9
$\frac{ab^5c}{5}$	$\frac{1}{5}$	ab^5c	1+5+1 =7

Ejemplo 18

a. Los monomios $-2x^3yz$ y $-2x^2yz$ **no** son semejantes pues la parte literal del primero es x^3yz mientras que la del segundo es x^2yz. Por lo tanto son distintas pues aunque contienen las mismas letras (variables) el exponente de la variable x no es igual en los dos términos.

b. Los monomios $13n^5q^2$, $-n^5q^2$ y $\frac{2}{3}n^5q^2$ corresponden a monomios semejantes.

Polinomio

Se llama **polinomio** a toda expresión algebraica que es monomio o una suma (resta) de monomios NO semejantes..
Un **término** en una expresión algebraica que consta de coeficientes numericos y factores literales separados entre sí por los signos de multiplicación o división.
Si un polinomio está formado por la suma de dos monomios no semejantes entre sí recibe el nombre de **binomio**. Un binomio posee dos términos
Si un polinomio está formado por la suma de tres monomios no semejantes entre sí (dos a dos) recibe el nombre de **trinomio**. Un trinomio posee tres términos

Ejemplo 19

- Son ejemplos de polinomios

a. $\frac{xz^4}{3}$

b. 17

c. $4m^4 - \frac{n}{5}$

d. $\frac{3}{5}w - \frac{1}{4}abc + 4y^8$

e. $2p + 5q - 100s + pqs + 1$

- Las siguientes expresiones **No** son polinomios

a. $4y^{-2}x$ $\quad$ y^{-2} es una potencia negativa de y.
b. $8m^2 + \frac{5}{n^3}$ $\quad$ contiene al término $\frac{5}{n^3} = 5n^{-3}$.

Ejemplo 20 ___________________

- Son ejemplos de binomios:

a. $2x - 1$
b. $\frac{4m^2-7m}{5}$
c. $\frac{x}{7} - 10y + 8x$
d. $\sqrt[3]{7} + 19xy^2z^3$

- Son ejemplos de trinomios:

a. $4x^2 - 5x + 11$
b. $\frac{y^2-7}{2} + n$
c. $\frac{x}{8} + x^2 - \sqrt[5]{2}$
d. $p + 5q - 100s + 8q$

Operaciones con monomios

La **suma**(**resta**) de monomios semejantes entre sí es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma(resta) de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.
Para **multiplicar** dos monomios se multiplican sus coeficientes y se aplican las propiedades de multiplicación de potencias de igual base para la parte literal.
Para **dividir** dos monomios se dividen sus coeficientes y se aplican las propiedades de división de potencias de igual base para la parte literal

Ejemplo 21 ___________________

Efectúe las siguientes operaciones con monomios.

a. $3x^4y + \frac{2}{5}x^4y = \left(3 + \frac{2}{5}\right)x^4y = \frac{17}{5}x^4y$
b. $-mp^3 + 17p^3m - 11mp^3 = (-1 + 17 - 11)mp^3 = 5mp^3$
c. $(4xz^2)\cdot(-x^3y)\cdot(7y^2z^3) = (4\cdot -1\cdot 7)x^{1+3}y^{1+2}z^{2+3} = -28x^4y^3z^5$
d. $(3x^4y)\cdot\left(-\frac{7}{10}y^5z^2\right) = \left(3\cdot -\frac{7}{10}\right)x^4y^{1+5}z^2 = -\frac{21}{10}x^4y^6z^2$
e. $-5x^4y^3 \div 2xy^2 = \frac{-5x^4y^3}{2xy^2} = -\frac{5}{2}x^{4-1}y^{3-2} = -\frac{5}{2}x^3y^1 == -\frac{5}{2}x^3y$

Simplificación de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica de un solo término está simplificada si:

- Los coeficientes numéricos están expresados en su forma más simple.
- Los factores literales que aparecen en el numerador son diferentes de los que aparecen en el denominador y no se repiten.
- Las potencias involucradas en el factor literal tienen exponentes positivos.

Ejemplo 22 ____________________

Simplifique las siguientes expresiones algebraicas.

a. $\frac{(7x^{-1}y^2)^3}{2y^5}$

$= \frac{7^3x^{-1\cdot3}y^{2\cdot3}}{2y^5}$ aplicando las propiedades de las potencias

$= \frac{343x^{-3}y^6}{2y^5}$

$= \frac{343y^{6-5}}{2x^3}$

$= \frac{343y}{2x^3}$

b. $\left(\frac{m^{-1}r}{2xr^2q^{-3}}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{2xr^2q^{-3}}{m^{-1}r}\right)^2$ aplicando las propiedades de las potencias

$= \left(\frac{2xr^2m}{q^3r}\right)^2$

$= \frac{2^2x^2r^{2\cdot2}m^2}{q^{3\cdot2}r^2}$

$= \frac{4x^2r^4m^2}{q^6r^2}$

$= \frac{4x^2r^{4-2}m^2}{q^6}$

$= \frac{4x^2r^2m^2}{q^6}$

Operaciones con polinomios

Para **sumar o restar polinomios** se combinan únicamente los términos semejantes presentes en ellos.
Para **multiplicar** un **monomio** por un **polinomio se** multiplica el monomio por cada uno de los términos que conforman el polinomio. Esto es lo que se conoce como propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma; por ejemplo $a(b+c)=ab+ac$, que se puede generalizar para polinomios con más de dos términos de la siguiente manera:

$$a\cdot(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)=a\cdot b_1+a\cdot b_2+a\cdot b_3+\cdots+a\cdot b_n$$

donde n es un entero no negativo.

Para multiplicar dos **polinomios** se multiplica cada término del primer polinomio por el segundo polinomio y para cada uno de estos productos se aplica la regla anterior pues cada término del primer polinomio es un monomio.

Ejemplo 23 ____________________

Efectúe las siguientes operaciones con polinomios.

a. $(4x^2-9xy+17)+(8y^2-xy-1)$

$=4x^2-9xy+17+8y^2-xy-1$ se eliminan los paréntesis.

$=4x^2+8y^2+(-9-1)\text{xy}+(17-1)$ se reducen términos semejantes.

$=4x^2+8y^2-10\text{xy}+16$

b. $(4x^2-9xy+17)-(8y^2-xy-1)$

$=4x^2-9xy+17-8y^2+xy+1$ Se eliminan los paréntesis. Tome en cuenta que el signo menos que precede a la segunda expresión entre paréntesis cambia el signo de cada término de ese polinomio.

$=4x^2-8y^2+(-9+1)\text{xy}+(17+1)$ Se reducen términos semejantes.

$=4x^2-8y^2-8\text{xy}+18$

c. $(2x^3+xyz)\cdot(3xy^2-5z+1)$

$=2x^3\cdot(3xy^2-5z+1)+xyz\cdot(3xy^2-5z+1)$ se aplica la propiedad distributiva
$=2x^3\cdot(3xy^2)+2x^3\cdot(-5z)+2x^3\cdot 1+\ xyz\cdot(3xy^2)+xyz\cdot(-5z)+xyz\cdot 1$
$=6x^4y^2-10x^3z+2x^3+3x^2y^3z-5xyz^2+xyz$ se reducen términos semejantes.

d. $(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y)$

$= x\cdot(x+y) + y\cdot(x+y)$ se aplica la propiedad distributiva
$= x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y$
$= x^2 + xy + yx + y^2$ Se reducen términos semejantes. Note que $xy = yx$
$= x^2 + 2xy + y^2$

Productos notables

Los productos notables son los siguientes:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$ **Trinomio cuadrado perfecto**
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2a\cdot b + b^2$ **Trinomio cuadrado perfecto**
3. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ **Diferencia de cuadrados**

Ejemplo 24 ____________________

a. Efectúe $(2x^2 + 5y)^2$

$= (2x^2)^2 + 2\cdot 2x^2\cdot 5y + (5y)^2$
$= 4x^4 + 20x^2y + 25y^2$

b. Efectúe $(25m^2n - 3mn)^2$

$= (25m^2n)^2 - 2\cdot 25m^2n\cdot 3mn + (3mn)^2$
$= 625m^4n^2 - 150m^3n^2 + 9m^2n^2$

c. Desarrolle $(4x+17)(4x-17)$

$= (4x)^2 - (17)^2$
$= 16x^2 - 289$

d. Desarrolle $(5m^3 + 2n)(2n - 5m^3)$

$= (2n)^2 - (5m^3)^2$
$= 4n^2 - 25m^6$

Factorización

Si un polinomio es producto de otros polinomios, entonces cada polinomio en ese producto es un **factor** del polinomio original.
Un polinomio que no se puede factorizar se dice que es **irreducible**.
Se dice que un polinomio está **completamente factorizado** si cada uno de sus factores es un polinomio irreducible.

Ejemplo 25 ___________________

a. De acuerdo con la tercera fórmula notable podemos escribir:

$$9x^4 - 1 = (3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$$

De modo que el polinomio $9x^4 - 1$ se factoriza como $(3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$. Cada uno de los polinomios $(3x^2 + 1)$ y $(3x^2 - 1)$ se llaman **factores** de $9x^4 - 1$

b. El polinomio $x^2 + 4$ es irreducible sobre el conjunto de los números reales.

Factorización por factor común

La factorización de polinomios por factor común consiste básicamente en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, para esto recordemos que esta propiedad expresa:

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{para } a, b, c \text{ reales.}$$

Para factorizar por factor común se pueden seguir los siguientes pasos:

- Se determina el máximo divisor común de los coeficientes numéricos de cada término que conforma el polinomio.
- Se determina entre todos los factores literales del polinomio la variable o variables comunes de menor exponente. Este será el máximo divisor común entre los literales.
-
- El factor común es el monomio cuyo coeficiente numérico es el máximo divisor común obtenido en el primer paso; el factor literal estará conformado por todas las variables de menor exponente obtenidas en el paso anterior.

Ejemplo 26 ___________________

Factorice completamente la expresión$12x^2 - 16x$

El primer paso para factorizar la expresión dada consiste en sacar el máximo divisor común entre los coeficientes 12 y 16, es decir, el mayor número que divide a 12 y a 16. Este número es 4 pues los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12 mientras que los divisores de 16 son 1, 2, 4, 8, 16. El mayor de los divisores comunes a ambos coeficientes es 4. Por otro lado, el máximo divisor común entre las literales x, x^2 es x. Por lo tanto

$$12x^2 - 16x = 4x(3x - 4)$$

Ejemplo 27

Factorice completamente las siguientes expresiones.

a. $4x + 4y = 4(x + y)$
b. $21m - 12n = 3(7m - 4n)$
c. $7x - 4yx^3 + 5xy = x(7 - 4yx^2 + 5y)$
d. $mx + nx - rx = x(m + n - r)$
e. $12xy^2 - 15x^3y + 18x^4y^2 = 3xy(4y - 5x^2 + 6x^3y)$
f. $4(m - 1) - y(m - 1) = (m - 1)(4 - y)$

Trinomio cuadrado perfecto

Al factorizar por fórmulas notables el polinomio aparece desarrollado y si se puede verificar que sus términos satisfacen alguna de las fórmulas notables, se utiliza la que corresponda para establecer la factorización.

Trinomio cuadrado perfecto.

Se utiliza el primer o el segundo producto notable:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplo 28

Factorizar completamente $4x^2 - 12x + 9$

En el trinomio $4x^2 - 12x + 9$ el primer término y el último son cuadrados perfectos. Sus raíces cuadradas son $2x$ para el primer término y 3 para el segundo. Esto nos lleva a investigar si $12x$ es el doble del producto de estas dos raíces cuadradas: $2(2x)(3) = 12x$ y como esto es cierto entonces, por la primera fórmula notable 3la expresión dada es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza de la siguiente manera:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

Ejemplo 29 ____________________

Factorice completamente los siguientes polinomios

a. $49x^2 + 70xm^3 + 25m^6 = (7x + 5m^3)^2$

Es posible verificar que:

$$(7x)^2 = 49x^2$$

$$(5m^3)^2 = 25m^6$$

$$2 \cdot 7x \cdot 5m^3 = 70xm^3.$$

b. $121q^4 - 22q^2n + n^2 = (11q^2 - n)^2$

Es posible verificar que:

$$(11q^2)^2 = 121q^4$$

$$(n)^2 = n^2$$

$$2 \cdot 11q^2 \cdot n = 22q^2n$$

c. $36x^3 - 24x^2 + 4x$

$= 4x(9x^2 - 6x + 1)$ primero se extrae el factor común 4x
$= 4x(3x - 1)^2$ se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

Diferencia de cuadrados

Para factorizar por diferencia de cuadrados se utiliza el tercer producto notable:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 30 ____________________

Factorice completamente $16x^2y^4 - 49z^6$

Se tiene que $16x^2y^4$ y $49z^6$ son cuadrados perfectos. Por lo tanto $16x^2y^4 - 49z^6$ es una diferencia de cuadrados. Se factoriza como el producto de la suma y la resta de las raíces cuadradas de ambos términos. La raíz cuadrada del primer término es $4xy^2$ mientras que la del segundo término es $7z^3$. Por lo tanto, por la tercera fórmula notable

$$16x^2y^4 - 49z^6 = (4xy^2 + 7z^3)(4xy^2 - 7z^3)$$

Ejemplo 31 ___________________

Factorice completamente los siguientes polinomios

a. $64x^2 - 9 = (8x+3)(8x-3)$

b. $y^4 - 1 = (y^2+1)(y^2-1)$ se aplica el método en dos ocasiones
$= (y^2+1)(y+1)(y-1)$

c. $8x^3y - 18xy^3 = 2xy(4x^2 - 9y^2)$ se extrae primero el factor común $2xy$
$= 2xy(2x+3y)(2x-3y)$

d. $(x+1)^2 - 25 = (x+1+5)(x+1-5)$
$= (x+6)(x-4)$

Factorización por agrupación de términos

Dado un polinomio en el cual no existe un factor común a todos los sumandos que lo componen, en algunos casos es posible obtener la factorización de dicho polinomio, realizando una agrupación conveniente de aquellos sumandos que poseen un factor común.

Ejemplo 32 ___________________

Factorice completamente los siguientes polinomios

a. $px + mx + py + my$
$= (px + mx) + (py + my)$
$= x(p+m) + y(p+m)$
$= (p+m)(x+y)$

b. $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$
$= x(2x-3y) - 2(2x-3y)$
$= (2x-3y)(x-2)$

En algunas ocasiones la agrupación puede incluir el trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados.

c. $x^2 - y^2 + 10x + 25$
$= (x^2 + 10x + 25) - y^2$
$= (x+5)^2 - y^2$
$= (x+5+y)(x+5-y)$

Factorización por inspección

La inspección es un método basado en la siguiente relación dada para p, q ,b ,c números reales:

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + (pq)$$

De modo que dado un trinomio $x^2 + bx + c$, se tiene que $b = p + q$, $c = p \cdot q$

Ejemplo 33 ___________________

Factorice completamente $x^2 - 10x + 21$

Solución:
Se puede observar que $x^2 - 10x + 21$ no es un trinomio cuadrado perfecto. Es posible que con la ayuda de

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + (pq)$$

logremos factorizar el trinomio dado. Al comparar el trinomio dado con esta última fórmula tenemos que investigar si existen dos números p, q tales que la suma de ellos sea 10 y el producto sea 21. Como los factores de 21 son 1, 3, 7, 21 entonces las posibilidades para que el producto sea son 1 y 21, 3 y 7. Pero como la suma tiene que ser igual a 10 entonces la única posibilidad es 3 y 7. Concluimos que

$$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$$

Ejemplo 34 ___________________

Factorice completamente los siguientes polinomios.

a. $x^2 + 7x + 12$
b. $x^2 - 6x + 5$

Solución:

a. Debemos buscar dos números cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Estos números son 4 y 3, por lo tanto, el trinomio se factoriza como:
$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$$

b. Debemos buscar dos números cuyo producto sea 5 y cuya suma sea -6. Estos números son -1 y -5, por lo tanto, el trinomio se factoriza como:
$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Una **solución** de una ecuación es un número real que, al sustituirlo en la variable, provoca una identidad numérica. El conjunto que contiene todas las soluciones de una ecuación se denota con la letra **S** y se llama **conjunto solución.**

Ejemplo 35

Considere las expresiones algebraicas $x^2 - x$ y $3(x+7)$. Al igualarlas se obtiene la siguiente ecuación:

$$x^2 - x = 3(x+7)$$

Se tiene que $x = 7$ es una solución, ya que al sustituir este valor en la ecuación dada se obtiene la igualdad:

$$(7)^2 - 7 = 3(7+7)$$
$$49 - 7 = 3 \cdot 14$$
$$42 = 42$$ se verifica la igualdad

Por el contario, si se evalúa en $x = -1$ se obtiene que:

$$(-1)^2 - 7 \neq 3(-1+7)$$
$$1 - 7 \neq 3 \cdot 6$$
$$-6 \neq 18$$

Por lo tanto, $x = -1$ no es solución de la ecuación.
También es posible verificar que $x = -3$ es solución de la ecuación. De lo anterior se tiene que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-3,7\}$.

Ecuación de primer grado con una incógnita.

Una **ecuación de primer grado** o **ecuación lineal** con una incógnita es una igualdad que involucra una variable elevada a la primera potencia, es decir, es una igualdad del tipo $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, o cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar asuman esta forma.

El número a se conoce como **coeficiente .**de la variable x, y b es el **término independiente**. La variable x se denomina **incógnita.**

Ejemplo 36

Son ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

a. $4x - 8 = 0$

b. $5 - 3x = 13$

c. $11x - 1 = \frac{19-4x}{2}$

d. $4(2x+3) = \frac{2x}{3} + 7(1-x)$

Ejemplo 37

Resolver la ecuación de primer grado $3x + 5 = 0$.

Solución

La igualdad $3x + 5 = 0$ es una ecuación de primer grado con una incógnita. La variable x es la incógnita, 3 es el coeficiente y 5 el término independiente. El número $x = 1$ no es solución de la ecuación pues $3 \cdot 1 + 5 = 8$ no es igual a cero. El número $x = -\frac{5}{3}$ es una solución de la ecuación pues $3 \cdot \frac{-5}{3} + 5 = 3 \cdot \frac{-5}{3} + 5 = -5 + 5 = 0$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones. Algunas propiedades relacionadas con ecuaciones equivalentes son:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta un mismo término, la ecuación resultante es equivalente a la dada.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se divide por un mismo número no nulo, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

Ejemplo 38 ____________________

La ecuación $4x - 3 = 9 - 2x$ es equivalente a la ecuación $5(2x + 1) = 2x + 21$ ya que en ambas las solución (única) es $x = 2$. En efecto,

$$4 \cdot 2 - 3 = 9 - 2 \cdot 2$$
$$8 - 3 = 9 - 4$$
$$5 = 5$$

También en la segunda ecuación se verifica la igualdad

$$5(2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 2 + 21$$
$$5(4 + 1) = 4 + 21$$
$$5 \cdot 5 = 25$$
$$25 = 25$$

Procedimiento de solución de una ecuación de primer grado

El procedimiento para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita del tipo

$$ax + b = cx + d$$

con a, b, c, d números reales, x incógnita, a y b no simultáneamente nulos es:

- Se hace la transposición de términos aplicando inverso aditivo o multiplicativo. Los términos que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo de la ecuación y los términos independientes en el miembro derecho.

- Se reducen términos semejantes.
- Se despeja la incógnita aplicando el inverso multiplicativo al coeficiente de la incógnita y se simplifica.

Ejemplo 39 ___________________

Resolver la ecuación de primer grado $2x - 3 = 5x + 7$

Solución

$2x - 3 = 5x + 7$

$2x - 3 - 5x = 5x + 7 - 5x$ Restando $5x$ en ambos lados de la ecuación

$-3x - 3 = 7$ $2x - 5x$ es igual a $3x$ (primer miembro de la ecuación) y $5x$ se cancela con $-5x$ en el segundo miembro

$-3x - 3 + 3 = 7 + 3$ Sumando 3 en ambos lados de la ecuación

$-3x = 10$ Simplificando

$\frac{-3x}{-3} = \frac{10}{-3}$ Dividiendo ambos miembros de la ecuación por -3.

$x = -\frac{10}{3}$ Simplificando en el primer miembro

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = -\frac{10}{3}$.

Ejemplo 40

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado

a. $3(x-1)+6=4(2x-3)$
b. $\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=\frac{1-x}{6}$
c. $\frac{x+1}{2-x}=\frac{1}{4}$

Solución

a. $3(x-1)+6=4(2x-3)$

$3\cdot x-3\cdot 1+6=4\cdot 2x-4\cdot 3$ Se efectúan las multiplicaciones indicadas.

$3x-3+6-8x=8x-12-8x$ Restando $8x$ en ambos lados de la igualdad. Se cancela $8x$ y $-8x$ en el miembro derecho de la ecuación.

$-5x+3-3=-12-3$ Restando 3 en ambos miembros de la ecuación.

$-5x=-15$ Simplificando.

$\frac{-5x}{-5}=\frac{-15}{-5}$ Dividiendo ambos miembros por -3

$x=3$ Simplificando en el primer miembro.

b. $\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=\frac{1-x}{6}$ Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir, de 3, 4 y 6. Se obtiene m.c.m (3,4,6) = 12

$12\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)=12\cdot\left(\frac{1-x}{6}\right)$ Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo.

$\frac{24}{3}x+\frac{12}{4}=\frac{12-12x}{6}$

$8x+3=2-2x$ Se simplifica cada fracción.

$8x+3+2x=2-2x+2x$ Sumando $2x$ en ambos miembros de la ecuación. Se cancela $2x$ y $-2x$ en el miembro derecho de la ecuación.

$8x+3+2x-3=2-3$ Restando 3 en ambos miembros de la ecuación. Se cancela 3 y -3 en el miembro izquierdo de la ecuación.

$8x+2x=2-3$ Simplificando.

$10x=-1$

$\frac{10x}{10}=\frac{-1}{10}$ Dividiendo ambos miembros por 10

$x=\frac{-1}{10}$ Simplificando en el primer miembro.

c. $\frac{x+1}{2-x}=\frac{1}{4}$

$4\cdot(x+1)=1\cdot(2-x)$ Se realiza el producto cruzado de los términos de ambos miembros de la ecuación.

$4 \cdot x + 4 \cdot 1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot -x$	Se efectúan las multiplicaciones indicadas.
$4x + 4 = 2 - x$	
$4x + 4 + x = 2 - x + x$	Se suma x en ambos lados de la ecuación .
$4x + 4 + x - 4 = 2 - 4$	Se resta 4 en ambos lados de la ecuación.
$4x + x = 2 - 4$	Simplificando.
$5x = -2$	
$\frac{5x}{5} = \frac{-2}{5}$	Dividiendo ambos miembros por 5
$x = \frac{-2}{5}$	Simplificando en el primer miembro.

Ecuación de segundo grado con una incógnita

Una **ecuación cuadrática** o **ecuación de segundo grado** en una variable, es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en donde a, b, c son números reales con $a \neq 0$.
b es el coeficiente lineal, el que acompaña la variable x, c es el término independiente.
Cada valor de la variable x que satisface la ecuación se denomina **raíz, cero** o **solución** de la ecuación.

Ejemplo 41 ____________________

Son ejemplos de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

a. $3x^2 = 12$
b. $4x^2 - 8 = 0$
c. $5x^2 - 7x = 1$
d. $x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{x+3}{2}$
e. $2x(5x - 1) = \frac{2x}{3} + 23$

Método de solución de la ecuación $x^2 = k$

Resolver una ecuación cuadrática consiste en determinar sus raíces o ceros.
Si el coeficiente lineal es nulo, $b = 0$, entonces la ecuación cuadrática se escribe como

$$ax^2 + c = 0$$

que puede escribirse como

$$x^2 = K$$

en donde $K = -\frac{c}{a}$.

- Si $k > 0$ entonces la ecuación cuadrática $x^2 = K$ tiene dos soluciones: $x = \pm\sqrt{K}$ pues $\left(\pm\sqrt{K}\right)^2 = K$.
- Si $K = 0$ la ecuación $x^2 = 0$ tiene solución única $x = 0$.
- Si $K < 0$ la ecuación $x^2 = K$ no tiene solución real pues no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea un número negativo.

Ejemplo 42 ____________________

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 = 25$
b. $4x^2 = 144$
c. $x^2 - 18 = 0$
d. $x^2 + 7 = 0$

Solución:

a. $x^2 = 25$

$x = \pm\sqrt{25}$

$S = \{-5,5\}$

b. $4x^2 = 144$

$x^2 = \frac{144}{4}$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

$S = \{-6,6\}$

c. $x^2 - 18 = 0$

$x^2 = 18$

$x = \pm\sqrt{18}$

$x = \pm 3\sqrt{2}$

$S = \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$

d. $x^2 + 7 = 0$
$x^2 = -7$
$S = \emptyset$

Método de completar cuadrado

El método anterior es válido para resolver ecuaciones de la forma $(Ax + B)^2 = C$ y se utiliza para desarrollar una estrategia que es muy útil para resolver ecuaciones cuadráticas Esta técnica se conoce como **completar cuadrado** y consiste en partir del binomio $x^2 + 2ax$, sumar y restar el término a^2 para no cambiar el valor de la expresión algebraica, y así tener $(x^2 + 2ax + a^2) - a^2$. La expresión que se encuentra entre paréntesis es el trinomio cuadrado perfecto $(x + a)^2$. Por lo tanto

$$x^2 + 2ax = (x^2 + 2ax + a^2) - a^2 = (x + a)^2 - a^2$$

Pasos para completar cuadrado en la expresión algebraica $\boldsymbol{ax^2 + bx}$

1. Se factoriza el coeficiente a: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$
2. Se determina la mitad del coeficiente lineal dentro del paréntesis y se eleva al cuadrado: $\frac{b^2}{4a^2}$
3. Se sumar y restar la cantidad anterior dentro del paréntesis. Luego se obtiene un trinomio cuadrado perfecto:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Por lo tanto

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Ejemplo 43

Complete cuadrados en cada caso.

a. $x^2 - 3x$
b. $3x^2 + 2x$

Solución

a. El coeficiente lineal es -3, se toma la mitad y se eleva al cuadrado, es decir, $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$x^2 - 3x$

$= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$ Se suma y resta $\frac{9}{4}$

$= \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}$ Se agrupa el trinomio. Note que $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

Por lo tanto, $x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

b. Como el coeficiente de x^2 es diferente de uno, entonces hay que factorizar el coeficiente 3 del monomio $3x^2$ antes de completar cuadrado.

$$3x^2 + 2x = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right)$$

En el binomio $x^2 + \frac{2}{3}x$ ocupamos la mitad del coeficiente lineal. Esta mitad es $\frac{1}{3}$ y su cuadrado es $\frac{1}{9}$. Por lo tanto, hay que sumar y restar $\frac{1}{9}$ al binomio

$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right)$

$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) =$ Se suma y resta $\frac{1}{9}$

$= 3\left(\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\right)$ Se agrupa el trinomio. Note que $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

Por lo tanto, $3x^2 + 2x = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

Ejemplo 44

Complete el cuadrado en la expresión $5x^2 - x + 10$

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es factorizar el 5 del monomio $5x^2$ en el binomio que queremos completar cuadrado.

$$5x^2 - x + 10 = 5\left(x^2 - \frac{1}{5}x\right) + 10$$

En el binomio que se encuentra dentro del paréntesis el coeficiente lineal es $-\frac{1}{5}$ y su mitad corresponde a $-\frac{1}{10}$. Luego su cuadrado es $\frac{1}{100}$, este es el valor que se suma y resta dentro del paréntesis de la siguiente manera:

$= 5\left(x^2 - \frac{1}{5}x\right) + 10 + \frac{1}{100} - \frac{1}{100}$ Sumando y restando $\frac{1}{100}$

$= 5\left(\left(x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100}\right) - \frac{1}{100}\right) + 10$ Agrupando el trinomio donde existe el trinomio cuadrado perfecto.

Como $x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100} = \left(x - \frac{1}{10}\right)^2$ entonces

$$\begin{aligned} &5\left(\left(x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100}\right) - \frac{1}{100}\right) + 10 \\ &= 5\left(\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\right) + 10 \\ &= 5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{20} + 10 \\ &= 5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{199}{20} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $5x^2 - x + 10 = 5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{199}{20}$.

Ejemplo 45

Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$ por el método de completar cuadrado.

Solución:

Conviene reacomodar la ecuación, para que solo haya términos en x en el miembro izquierdo.

$x^2 - 5x + 3 - 3 = -3$ Restando 3 en ambos miembros de la ecuación

$x^2 - 5x = -3$ Cancelando 3 y -3 en el miembro derecho

$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ Se completa el cuadrado sumando $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a ambos miembros.

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -3 + \frac{25}{4}$

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{13}{4}$ Simplificando

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ Note que $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$

$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$ Se saca raíz cuadrada.

$x - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}} + \frac{5}{2}$ Sumando $\frac{5}{2}$.

$x = \pm\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{5}{2}$ Extrayendo la raíz

$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ Reacomodando.

Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.

La **ecuación cuadrática** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$

1. Tiene dos soluciones distintas: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac > 0$
2. Tiene dos soluciones iguales: $x = -\frac{b}{2a}$ si $b^2 - 4ac = 0$
3. No tiene solución real si $b^2 - 4ac < 0$

La expresión $b^2 - 4ac$ se conoce como **discriminante** de la expresión algebraica $ax^2 + bx - c$, y se representa por la letra griega mayúscula delta: Δ. Entonces

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Las fórmula general puede escribirse como:

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ejemplo 46 ____________________

a. Resolver la ecuación cuadrática $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Solución

Para utilizar la fórmula general se deben determinar los valores de a, b, c que son: $a = 4, b = -12, c = 9$.
El discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$.
Por lo tanto, las dos raíces son iguales y su valor es

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

b. Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 15 = 0$ utilizando la fórmula general.

Solución

Para utilizar la fórmula cuadrática tenemos: $a = 1, b = 2, c = -15$. El discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-15) = 64$. La ecuación tiene dos soluciones reales distintas

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2 + \sqrt{64}}{2} = -\frac{2 + 8}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2 - \sqrt{64}}{2} = -\frac{2 - 8}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$S = \{-5, 3\}$$

c. Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$ utilizando la fórmula general.

Solución
Para utilizar la fórmula cuadrática tenemos: $a = 1, b = 1, c = 1$. El discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$. Como el discriminante es un número negativo, entonces la ecuación no posee soluciones reales.

$$S = \emptyset$$

Factorizar mediante la fórmula general

Si queremos factorizar el trinomio $ax^2 + bx + c$ con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ entonces:

1. Calculamos las raíces x_1, x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con la fórmula general.
2. El trinomio se factoriza como $a(x - x_1)(x - x_2)$, es decir

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si el discriminante es cero entonces $x_1 = x_2$ y la factorización se escribe como

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Ejemplo 47___________________

Utilice la fórmula general para factorizar los siguientes trinomios

a. $2x^2 - 3x + 1$
b. $-3x^2 + x + \frac{1}{4}$

Solución

a. Utilizando $a = 2, b = -3, c = 1$ el discriminante es $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$. Las dos raíces reales distintas son

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = -\frac{-3 + 1}{4} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = -\frac{-3 - 1}{4} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Por lo tanto $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

b. Como $a = -3, b = 1, c = \frac{1}{4}$ el discriminante es $\Delta = (1)^2 - 4(-3)\left(\frac{1}{4}\right) = 4$. Por lo tanto

$$x_1 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1+\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = -\frac{1+2}{-6} = -\frac{3}{-6} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1-\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = -\frac{1-2}{-6} = -\frac{-1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

Entonces $-3x^2 + x + \frac{1}{4} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)$

Solución de una ecuación cuadrática mediante factorización

En el método de resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización, se utiliza el hecho de que un producto es igual a cero, si cualesquiera de sus factores es igual a cero.

- **Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$**
  Es posible resolver ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$ aplicando factor común.
- **Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$**
  Algunas ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es posible factorizarlas por los métodos de inspección o de trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 48

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 4x = 0$
b. $14x^2 - 21x = 0$

Solución:
Es posible resolver ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$ aplicando factor común, de la siguiente manera:

a. $x^2 + 4x = 0$
Se tiene que $x(x+4) = 0$, luego
$x = 0$ $\quad$ $x + 4 = 0$
$x = -4$
$S = \{-4, 0\}$

b. $14x^2 - 21x = 0$
Se tiene que $7x(2x-3) = 0$, luego
$7x = 0$ $\quad$ $2x - 3 = 0$
$x = \frac{0}{7}$ $\quad$ $2x = 3$
$x = 0$ $\quad$ $x = \frac{3}{2}$
$S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$

Ejemplo 49

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 2x - 15 = 0$
b. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Solución:

a. El trinomio $x^2 - 2x - 15$ se puede factorizar por inspección. Para ello se deben buscar dos números cuyo producto sea -15 y la suma sea -2. Los números buscados son -5 y 3. Se tiene entonces que:

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$$

Luego como $(x-5)(x+3) = 0$, se tiene:

$$(x-5) = 0 \qquad\qquad (x+3) = 0$$
$$x = 5 \qquad\qquad x = -3$$

$$S = \{-3,5\}$$

b. El trinomio $4x^2 - 12x + 9$ se puede factorizar utilizando la segunda fórmula notable(trinomio cuadrado perfecto)

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

Luego como $(2x-3)^2 = 0$, se tiene que:

$$2x - 3 = \pm\sqrt{0}$$
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Inecuación lineal con una incógnita

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

$<$ menor que
$>$ mayor que
$\leq$ menor o igual que
$\geq$ mayor o igual que

Cuando las expresiones algebraicas en la inecuación son lineales y utilizan la misma variable se dice que es una **inecuación lineal con una incógnita**. La **solución de una inecuación lineal con una incógnita** es el conjunto de valores de la variable que satisfacen la inecuación.

Dos inecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones

Ejemplo 50 ___________________

Son ejemplos de inecuaciones lineales con una incógnita.

a. $2x - 3 < 5x + 1$

b. $4 + 11x \geq 1 + 3x$

c. $4\left(\frac{x+1}{3}\right) > 5x - \frac{1}{2}$

Propiedades de la inecuaciones equivalentes

- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo término, la inecuación resultante es equivalente a la dada.
  $p < q$ es equivalente a $p + c < q + c$.
- Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o se divide por un mismo número positivo, la inecuación resultante es equivalente a la dada.
  $p < q$ y $c > 0$ es equivalente a $pc < qc$.
- Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o se divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante cambia de sentido y es equivalente a la dada.
  $p < q$ y $c < 0$ es equivalente a $pc > qc$.

Nota: las propiedades anteriores son válidas si utilizamos los símbolos $\leq, \geq$.

Ejemplo 51 ___________________

Resolver la inecuación $10 - x \leq 4x + 7$.

Solución

Hay que ubicar los términos que contengan la incógnita en el miembro izquierdo de la ecuación y los términos independientes en el miembro derecho.

$10 - x \leq 4x + 7$	
$10 - x - 10 \leq 4x + 7 - 10$	Restando 10 en ambos miembros de la inecuación
$-x \leq 4x - 3$	10 se cancela con -10 mientras que $7 - 10$ es igual a -3
$-x - 4x \leq 4x - 3 - 4x$	Restando $4x$ en ambos miembros de la inecuación
$-5x \leq -3$	Simplificando y cancelando $4x$ con $-4x$
$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{-3}{-5}$	Dividiendo ambos miembros por -5. Observe que la inecuación cambió de sentido, de $\leq$ a $\geq$ pues dividimos ambos miembros por un número negativo
$x \geq \frac{3}{5}$	Simplificando para despejar la variable x

Entonces la solución de la inecuación es $x \geq \frac{3}{5}$.

Constantes y variables

Una **constante** es una cantidad que tiene un valor fijo en un determinado cálculo, proceso o ecuación, es decir, es un valor permanente que no puede modificarse dentro de cierto contexto.

Una **variable** es una cantidad que, según el contexto, toma diferentes valores. Por lo general utilizaremos letras para designar las variables.

Ejemplo 52 ____________________

Algunas constantes son: $2, \pi, \sqrt{2}, e$ la base del logaritmo natural, también conocido como número de Euler pues el que lo utilizó por primera vez fue el famoso matemático suizo Leonhard Euler, uno de los más prolíficos matemáticos de todos los tiempos; $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como número de oro, entre otras.

Relación entre variables

Dos variables x, y están **relacionadas** cuando el conocimiento de una de ellas determina el conocimiento de la otra.

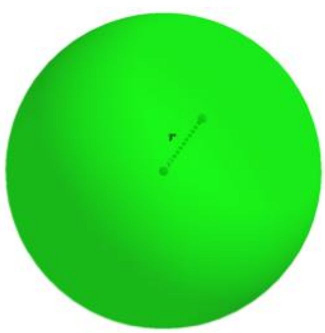
Ejemplo 53 ____________________

Al dejar caer una piedra desde cierta altura, existe una fórmula o modelo que relaciona la altura de la piedra con el tiempo transcurrido: $h = \frac{1}{2}gt^2$ en donde g es la aceleración de la gravedad.
En este ejemplo decimos que el tiempo es la *variable independiente* y la altura es la *variable dependiente*.

En general, cualquier fórmula matemática permite establecer una relación de dependencia entre dos variables.

Ejemplo 54 ____________________

El área A y el volumen V de una esfera de radio r dependen del radio:

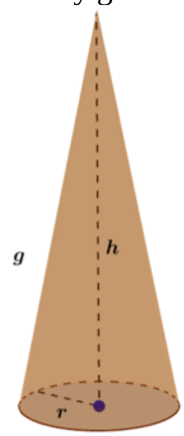


$$A = 4\pi r^2\,, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

En la fórmula para calcular el volumen de la esfera, los números 3, 4, π son constantes, r es la variable independiente, V es la variable dependiente. En la fórmula para el área, 2, 4, π son constantes, r es la *variable independiente*, A es la *variable dependiente*.

Ejemplo 55 ___________________

El área lateral de un cono circular recto con radio r y generatriz de longitud g depende de ambas variables:



$$A = \pi r g$$

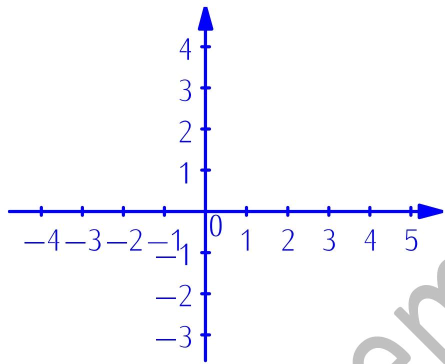
En esta fórmula π es constante, r, g son las *variables independientes*, A es la *variable dependiente*.

Ejemplo 56 ___________________

La tarifa de taxis en nuestro país tiene un costo fijo para el primer kilometro que es de ¢ 635 más ¢ 605 por cada kilometro adicional. Si se desea calcular el monto por pagar para cierta cantidad de kilómetros es posible representar dicha relación mediante la fórmula $T = 605(x - 1) + 635$, donde x corresponde a la cantidad de kilómetros recorridos y T el monto por pagar.
En esta fórmula x corresponde a la *variable independiente* y T a la *variable dependiente*.

Sistema de coordenadas cartesianas

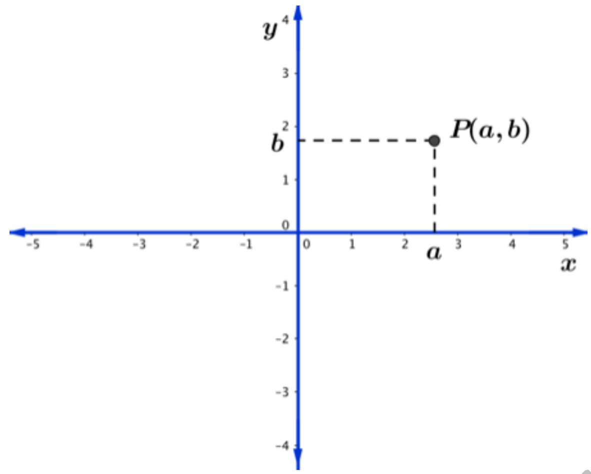
Cada punto en el plano es representado por un par ordenado de números reales. Trazamos dos rectas perpendiculares entre sí y hacemos corresponder al punto de intersección entre ellas el **origen** O representado por el par ordenado (0,0).
La recta horizontal se denomina **eje de las abscisas** (o eje x) del sistema mientras que la recta vertical se denomina **eje de las ordenadas** (o eje y) del sistema.
Esta representación se conoce como **sistema de coordenadas cartesianas** o **plano cartesiano**.



Representar un punto *P* en un sistema de coordenadas cartesianas

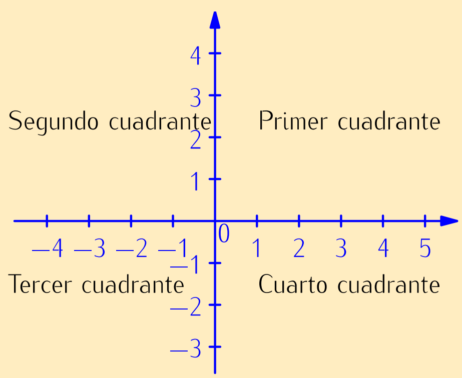
Para representar un punto P en un sistema de coordenadas cartesianas procedemos de la siguiente forma:

- Se ubica el punto P que queremos representar.
- Se traza una recta que contiene el punto P y que es perpendicular al eje x. El punto de intersección de la recta y el eje x corresponde a un número real. Sea a este número.
- Se traza una recta que contiene el punto P y que es perpendicular al eje y. El punto de intersección de la recta y el eje y corresponde a un número real. Sea b este número.
- Con esta construcción, el punto P se representa mediante el par ordenado de números reales (a, b) y escribimos $P(a, b)$. La coordenada a se denomina **abscisa** del punto y la coordenada b es conocida como **ordenada** del punto P.



Cuadrantes en el plano

Un sistema de coordenadas cartesianos separa el plano en cuatro semiplanos. Cada uno de ellos es conocido como cuadrante. Por convención los cuadrantes son numerados en el sentido contrario de las agujas del reloj como se indica en la figura abajo.



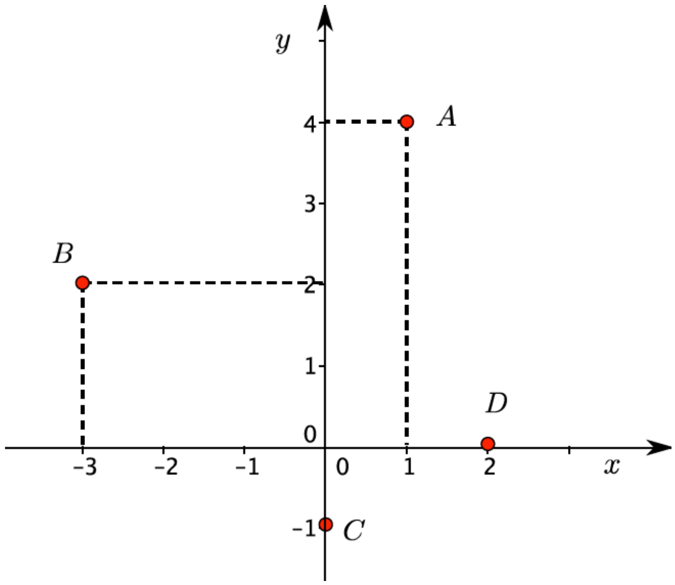
Los puntos que están en el eje de las abscisas tienen su ordenada igual a cero, es decir, son representados por pares ordenados de la forma $(x, 0)$.

Los puntos que están en el eje de las ordenadas tienen su abscisa igual a cero, es decir, son representados por pares ordenados de la forma $(0, y)$.

Ejemplo 57

Ubique los puntos A(1,4) B(-3,2) C(0,-1) y D(2,0) en el sistema de coordenadas cartesiano.

Solución:



Generalidades acerca de funciones

Conjuntos numéricos

Un **conjunto** es una colección de objetos que poseen una o varias características en común. Cuando los objetos son números el conjunto se llama **conjunto numérico**. Utilizamos letras mayúsculas para denotar los conjuntos y doble llaves { } para encerrar sus elementos o bien un criterio que define los elementos (notación por comprensión)
Si A es un conjunto y si x es un elemento de A, escribimos $x \in A$ (se lee "x pertenece a A" o bien "x es un elemento de A"). Si y no es un elemento de A escribimos $y \notin A$ (se lee "y no pertenece a A" o bien "y no es un elemento de A").
Un conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto vacío** y se representa por $\emptyset$ o bien por { }.

Ejemplo 58

a. $A = \{2,3,5,7,11,13\}$ es el conjunto de los 6 primeros números primos.
b. $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,\cdots\}$ los tres puntos $\cdots$ indican que el patrón continua sin finalizar. Este es el conjunto de los números naturales, los que se utilizan para "contar".
c. $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ es el conjunto de los números enteros.
d. $\mathbb{Q} = \left\{x : \ x = \frac{p}{q}, \ \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q \neq 0\right\}$ el conjunto de los números racionales. Esta es una notación por comprensión y se lee: el conjunto de los números x tales que $x = \frac{p}{q}$ con p, q enteros y q es distinto de cero.
e. $B = \{m : m = 2k, \ \ k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$ el conjunto de los números pares.
f. $C = \{m : m \text{ es un número natural y } \ 2 < m \leq 10\}$ el conjunto de los números naturales mayores que 2 y menores o iguales a 10.

El conjunto $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

g. $\mathbb{I} = \{x : x \text{ es un número real pero no es racional}\}$ es el conjunto de los números irracionales. Los elementos de $\mathbb{Z}$ no pueden ser escritos como el cociente de dos números enteros como por ejemplo los números $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{25}, e$ el número de Euler (base de los logaritmos naturales), $3{,}1445121221222122222 \cdots$ existe un patrón, pero no existe un grupo de dígitos que se repite (número decimal infinito no periódico).

Operaciones con conjuntos

- Un conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si cada elemento de A es elemento de B. Cuando A es un **subconjunto** de B se dice que A está contenido en B y se denota como $A \subseteq B$. Ejemplo: $\{1,3,5,8,15\} \subseteq \{1,2,3,5,8,12,15\}$
- La **unión** de dos conjuntos A y B, denotada como $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B.
  Ejemplo: $\{1,5,13,20\} \cup \{3,5,20,50,100\} = \{1,3,5,13,20,50,100\}$
- La **intersección** de dos conjuntos A y B, denotada como $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos comunes a A y a B.
  Ejemplo: $\{1,5,13,20\} \cap \{3,5,20,50,100\} = \{5,20\}$
  Dos conjuntos A y B son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$ (conjunto vacío)
- El **complemento** de un conjunto A, denotado como A^C es el conjunto que contiene todos los elementos que no pertenecen a A respecto a un conjunto D que contiene a A.
  Ejemplo: Si A es el conjunto de todos los números pares entonces su complemento respecto al conjunto de los números naturales es es conjunto de todos los números impares.

Ejemplo 59 ____________________

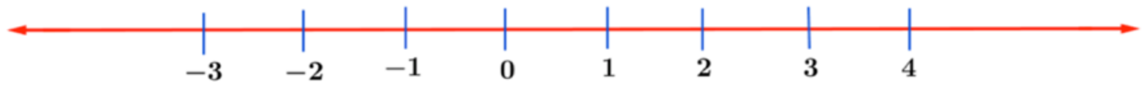
a. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ corresponde al conjunto de los números reales.
b. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ por lo tanto, el conjunto de los números racionales y el de los irracionales son disjuntos.
c. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ el conjunto de los números naturales es subconjunto de los números enteros y el conjunto de los números enteros es subconjunto de los números racionales pues todo número entero x puede ser escrito como una fracción con denominador 1.

La recta numérica

Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales: a cada número real se le puede asignar un único punto de una recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta se le puede asignar un único número real.
En una recta, seleccionamos un punto arbitrario O el cual le asignamos el número cero. Posteriormente seleccionamos un punto que corresponderá al número 1. A una unidad de medida del cero, al lado opuesto al punto asignado a 1, seleccionamos el punto correspondiente al número -1. Repetimos este procedimiento para ubicar los números positivos y los negativos como puntos en la recta que se denomina **recta numérica**.

Ejemplo 60

Represente los números $-3, -1, 0, 4$ en la recta numérica.



Recta numérica

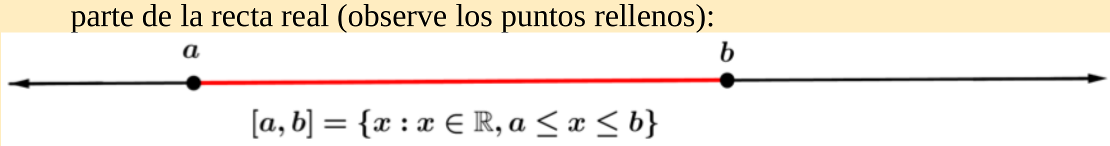
Relaciones de orden en la recta numérica

Si el punto correspondiente al número a está a la izquierda del punto correspondiente al número b en la recta real entonces a es **menor que** b. Escribimos $a < b$.
Si el punto correspondiente al número a está a la derecha del punto correspondiente al número b en la recta real entonces a es **mayor que** b. Escribimos $a > b$.
Decimos que $a \leq b$ (a es **menor o igual que** b) si $a < b$ o bien $a = b$.

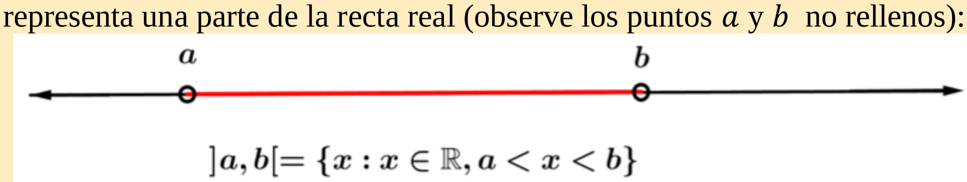
Intervalos en la recta numérica

Los intervalos en la recta numérica son subconjuntos de los números reales.

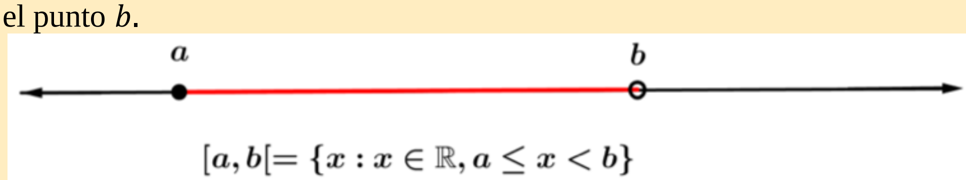
1. Si $a < b$ entonces el intervalo cerrado que incluye los puntos a, b y todos los puntos que se encuentran entre ellos se denota como $[a, b]$ y gráficamente representa una parte de la recta real (observe los puntos rellenos):



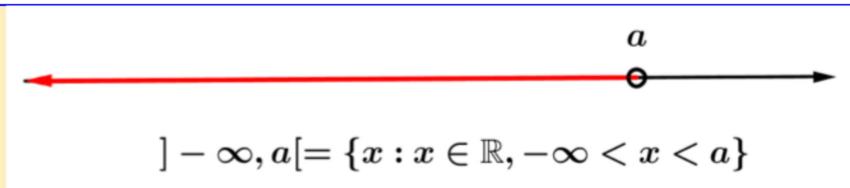
2. Si $a < b$ entonces el intervalo abierto que excluye los puntos a, b pero incluye todos los puntos que se encuentran entre ellos se denota como $]a, b[$ y gráficamente representa una parte de la recta real (observe los puntos a y b no rellenos):



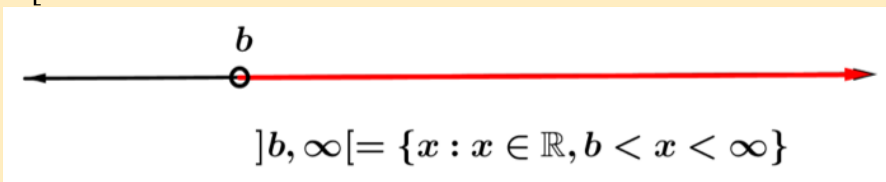
3. De igual forma $[a, b[$ incluye el punto a y todos los puntos entre a y b pero excluye el punto b.



4. La semirrecta a la izquierda del punto correspondiente al número a se denota como $]-\infty, a[$



5. La semirrecta a la derecha del punto correspondiente al número a se denota como $]b, \infty[$



Relación

Una *relación* entre dos variables reales es una **regla de correspondencia** que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida A (subconjunto no vacío de los números reales $\mathbb{R}$), un número real "y" de un conjunto de llegada B (subconjunto no vacío de los números reales $\mathbb{R}$).

Ejemplo 61 ____________________

1. La relación $x^2 + 4x + 3 = 0$ es una *ecuación*. Tenemos que calcular los valores de "x" para los cuales el lado izquierdo de la ecuación sea igual que el lado derecho. En este caso las soluciones son $x = -3$ y $x = -1$ pues $(-3)^2 + 4(-3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$, igualmente $(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$. Para estos dos valores de la variable "x" los dos lados de la ecuación son equivalentes.

2. La relación $10x + 3y - x^2 - 5 = 0$ tiene la forma de una ecuación que relaciona dos variables. Podemos considerar que "x" es la variable de entrada mientras que "y" es la variable de salida (también podríamos suponer lo contrario). Si despejamos "y" en términos de "x" obtendremos $y = \frac{x^2-10x+5}{3}$.

Definición de función.

Una **función** real de variable real es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida A **un único número** real "y" de un conjunto de llegada B. Considere A y B subconjuntos no vacío de los números reales $\mathbb{R}$.

El conjunto de partida A es conocido como ***dominio*** de la función.
El conjunto de llegada B se llama ***codominio*** de la función.

Para simbolizar la correspondencia entre los dos conjuntos no vacíos A y B que representa una función, que denotaremos por f, se utiliza la siguiente notación: $f: A \rightarrow B$.

En este caso el único número real "y" de B (se dice que "y pertenece a B", y se escribe $y \in B$) que corresponde al número real "x" de A, $x \in A$, se denomina ***imagen** de x*, y se denota como $f(x)$. También se dice que *x* es una ***preimagen*** de *y*.

Por definición de función cada preimagen sólo puede tener una imagen, pero una imagen puede tener varias preimágenes, puesto que la restricción se impone sobre las imágenes (un *único* número real "*y*").

El conjunto de los elementos "*f(x)*" de *B* para elementos *x* de *A* se conoce como *imagen*, ***rango, ámbito o recorrido*** de la función.

Criterio de una función.

La representación simbólica que involucra la imagen *"y"* la preimagen "*x*", y la correspondencia *"f"* se escribe como $y = f(x)$, y es conocido como ***criterio de la función*.** Decimos que *x* es la ***variable independiente*** mientras que *y* es la ***variable dependiente*.**

La notación $f(x)$ se lee "*f de x*". Representa la aplicación de la regla de correspondencia al elemento *x* del dominio de la función. Observe que la notación **no significa** *f* multiplicado por *x*.
Cuando escribimos un criterio en la forma $y = f(x)$, esta representación se parece a una ecuación. En la parte derecha aparece la variable de entrada "*x*" mientras que en el lado izquierdo de la igualdad aparece la variable de salida "*y*". Pero en realidad una función no es una ecuación pero existen relaciones entre dos variables, una de entrada y una de salida que representan funciones y que son escritas en forma de ecuación.

La representación $y = f(x)$ que denominamos anteriormente como *criterio de la función*, también se conoce como *forma estándar* de la función.

Ejemplo 62

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio y $B = \{1,4,\ 9,16,25,\ 36,49\}$ el codominio de la función cuyo criterio es $f(x) = x^2$.

a. ¿Cuál es el rango o ámbito de la función
b. ¿Cuál es la imagen de 3?
c. ¿Cuál es la preimagen de 25?
d. ¿Cuál es la preimagen de 49?

Solución

Como $f(x) = x^2$ entonces la regla de correspondencia en forma verbal es "eleve al cuadrado cada preimagen". El conjunto de preimágenes es el dominio *A* mientras que las imágenes son:

$$f(1) = 1^2 = 1, \qquad f(2) = 2^2 = 4, f(3) = 3^2 = 9, f(4) = 4^2 = 16$$

Todas ellas pertenecen al conjunto *B*, dado previamente como codominio de la función.

a. El rango, ámbito o imagen de la función es el conjunto de las imágenes de la función, que en este caso es el conjunto (que denotaremos con la letra R)

$$\text{R} = \{1, 4, 9, 16\}$$

En este caso el ámbito o rango R es un subconjunto del codominio *B*.

b. La imagen de 3 es $f(3) = 9$.

c. Para encontrar la preimagen de 25, tenemos que 25 es la imagen de algún elemento x del dominio, por lo tanto basta dar el valor 25 a "y" en el criterio $y = x^2$.
La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = -5,\ x = 5$.
Pero $x = -5$ no es elemento del dominio dado mientras que $x = 5$ sí lo es.
Por lo tanto la preimagen de 25 es 5.

d. Para encontrar la preimagen de 49 hay que resolver la ecuación $x^2 = 49$. Ambas soluciones $x = -7,\ x = 7$ no pertenecen al dominio de la función. Por lo tanto 49 no tiene preimagen.

Ejemplo 63 ____________________

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ el dominio de una función cuyo criterio es $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$.

a. ¿Cuál es el rango o ámbito de la función?
b. ¿Cuál es la imagen de 5?
c. ¿Cuál es la preimagen de $-\frac{13}{6}$?
d. ¿Cuál es la preimagen de $-2{,}25$?

Solución

En este ejemplo no se da el codominio de la función.

Como $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 3$ entonces:

a. El rango de la función dada es el conjunto de las imágenes de la función.

$$f(1) = \frac{1+1}{1+2} - 3 = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{2}\ ;\ f(2) = \frac{2+1}{2+2} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$$
$$f(3) = \frac{3+1}{3+2} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}\ ;\ f(4) = \frac{4+1}{4+2} - 3 = \frac{5}{6} - 3 = -\frac{13}{6}$$
$$f(5) = \frac{5+1}{5+2} - 3 = \frac{6}{7} - 3 = -\frac{15}{7}$$

Entonces el rango de la función es el conjunto $\left\{-\frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{11}{5},\ -\frac{13}{6}, -\frac{15}{7}\right\}$.

b. La imagen de 5 es $f(5) = -\frac{15}{7}$.

c. La preimagen de $-\frac{13}{6}$ es 4 conforme se observa en la parte a. Pero otra forma de determinarlo consiste en resolver la ecuación $f(x) = -\frac{13}{6}$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -\frac{13}{6}$$

Esto equivale a $\frac{x+1}{x+2} = -\frac{13}{6} + 3 = \frac{5}{6}$ que puede ser escrito como

$6(x+1) = 5(x+2)$. Multiplicando obtenemos $6x + 6 = 5x + 10$, y así

$6x - 5x = 10 - 6$. Simplificando tendremos $x = 4,$ la preimagen de $-\frac{13}{6}$.

d. Para la preimagen de -2,25 tenemos que resolver la ecuación $f(x) = -2{,}25$:

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 = -2{,}25$$

Operando como antes, $\frac{x+1}{x+2} = -2{,}25 + 3 = 0{,}75$ es decir, $x + 1 = 0{,}75x + 1{,}5$ lo que, al simplificar queda $x - 0{,}75x = 1{,}5 - 1$ que es equivalente a $0{,}25x = 0{,}5$. Por lo tanto $x = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2$ que pertenece al dominio de la función.
La respuesta podría ser obtenida sin resolver ecuación si sabemos que $-2{,}25 = -\frac{9}{4}$.

Ejemplo 64 ____________________

Una persona debe trasladarse de lunes a viernes por cuestiones de trabajo. Para ello debe tomar todas las mañanas el autobús de Alajuela a San José y luego en la tarde hacer el viaje de regreso. El pasaje cuesta ₡535,00. Se supone que trabaja 5 días a la semana.

a. ¿Cuánto gasta en una semana en transporte?
b. ¿Cuántos días puede viajar si tiene ₡15 000,00.

Solución:
La relación anterior se puede modelar mediante el criterio $G(x) = 1070x$, donde x corresponde a la cantidad de días y G al gasto en colones. El dominio corresponde al conjunto formado por el número de días que se va a trabajar y el ámbito o recorrido corresponde al conjunto formado por los montos a pagar durante cada día.

a. Para contestar la primera pregunta es necesario calcular la imagen de 5 (viaja de lunes a viernes), es decir, $G(5) = 1070 \cdot 5 = 5350$
Gasta ₡5 350,00 en una semana.

b. En la segunda pregunta se debe calcular la preimagen de 15 000, esto es

$$1070x = 15\,000$$
$$x = \frac{15\,000}{1070}$$
$$x = 14{,}01$$

Puede viajar 14 días.

Diferencia entre función y relación

La principal diferencia entre una función y una relación es que en una función el elemento del conjunto de llegada es *único*. En una relación esta condición no es necesaria: puede haber más de un número real del conjunto de llegada que corresponda a un elemento del conjunto de salida.
Por lo tanto, toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo 65 ___________________

1. La relación $x^2 + y^2 = 4$ también tiene forma de una ecuación que relaciona dos variables. Si "*x*" es la variable de entrada y "*y*" la de salida entonces $y^2 = 4 - x^2$, y por lo tanto

   $$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

   Para cada valor de entrada "*x*" entre -2 y 2, es decir $-2 < x < 2$, existen dos valores distintos para la salida "*y*". Por ejemplo, si la entrada $x = 1$ entonces $y = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$ son dos valores distintos para la variable de salida "*y*", por lo tanto la ecuación

   $$x^2 + y^2 = 4$$

   no representa una función. Decimos que dicha ecuación representa una *relación* entre las variables "*x*" y "*y*".

2. En la "ecuación" $y^3 + 2x^2 = x - 1$, si consideramos a "*x*" como variable de entrada y "*y*" como variable de salida entonces podemos despejar $y^3 = x - 1 - 2x^2$, y por lo tanto $y = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. Aquí no aparecen los dos signos $\pm$ debido a que el índice de la raíz es 3, un número impar. Para cada valor de la entrada "*x*" se obtiene un único valor para la salida "*y*". Por lo tanto la "ecuación" $y^3 + 2x^2 = x - 1$ representa una función que se escribe en forma estándar como $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1 - 2x^2}$. En este caso el dominio de la función f es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$, pues no existe restricción para la variable independiente o de entrada "*x*".

Ejemplo 66 ___________________

El peso de una persona no es función de su altura. Dada la altura de una persona no se puede determinar su peso en forma exacta. Dicha relación no se considera una relación funcional.

Ejemplo 67 ___________________

Keibel lanza una piedra en un lago, creando ondas circulares que se expanden de tal forma que el radio aumenta con una rapidez de 90 centímetros por segundo.

a. Determine el radio de las ondas circulares como función del tiempo, $r(t)$ (criterio).
b. Determine el área de las ondas circulares como función del radio, $A(r)$ (criterio)

Solución

a. Como el radio de cada onda circular aumenta 90 centímetros en cada segundo, entonces en un tiempo de *t* segundos el radio aumentará *90t* centímetros. Por lo tanto, el criterio que relaciona el radio con el tiempo es

$$r(t) = 90t$$

con $t \geq 0$.

b. El área de un círculo de radio *r* es $A(r) = \pi r^2,\ r\ \geq 0$, y esta es la relación entre el área y el radio de un círculo.
Ambas relaciones se consideran relaciones funcionales.

Gráfica de una función

La **gráfica de una función real de una variable real** *f* es el conjunto de los puntos (*x*, *y*) del plano cartesiano donde la variable independiente "*x*" pertenece al dominio de la función y la variable dependiente "*y*" satisface $y = f(x)$, es decir, "*y*" es la imagen de "*x*" al aplicar la regla de correspondencia *f*.

Para construir la representación gráfica de una función es conveniente construir primeramente una representación tabular para la función, que contenga algunos puntos de la forma $(x,\ f(x))$ para *x* en el dominio de la función, y unirlos con una línea continua cuando los puntos intermedios (entre dos puntos de la tabla) sean parte del dominio de la función. Esto nos proporciona una parte de la representación gráfica de la función.

Algunos de los puntos que son importantes para la construcción de la representación gráfica son:

- Los ***ceros de la función*** (si pertenecen al dominio), que son los puntos donde la gráfica de la función ***interseca al eje de las abscisas.*** Tales puntos son las raíces o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
- También el punto donde la gráfica de la función ***interseca el eje de las ordenadas*** , denominada ***ordenada en el origen***, que es el punto que satisface $y = f(0)$.

Al representar la gráfica de una función mediante puntos en el plano de coordenadas cartesianas, pares ordenados, entonces obtenemos otra representación simbólica para una función $f: A \rightarrow$

B como el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ con $x \in A$. Dicho conjunto recibe el nombre de gráfico de la función.

Ejemplo 68 ____________________

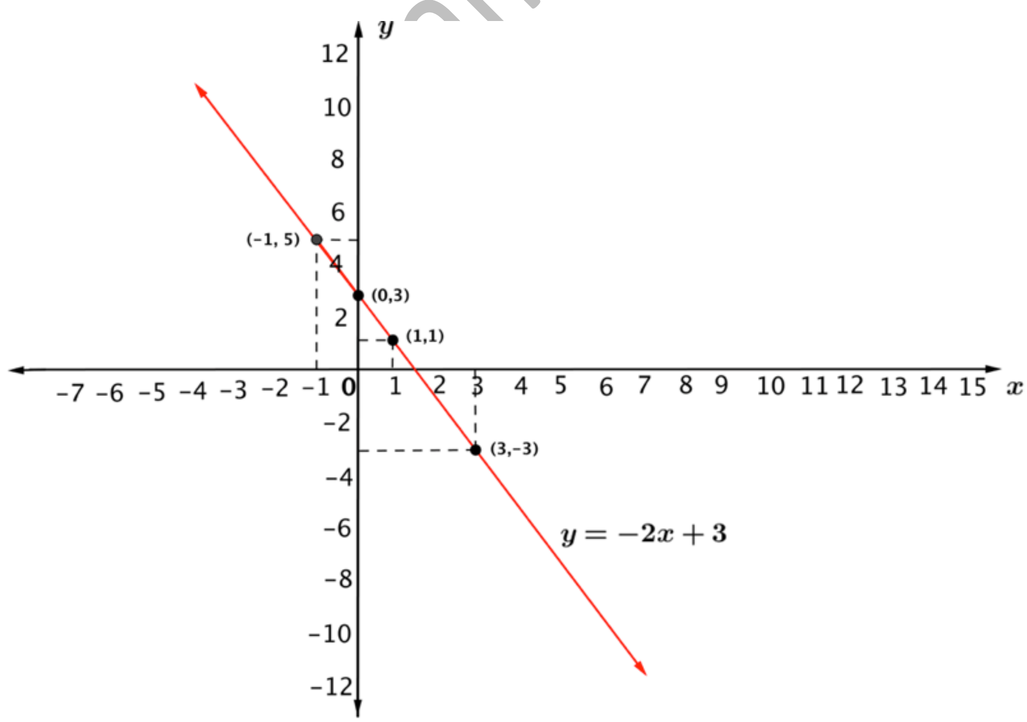
1. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con representación simbólica $f(x) = -2x + 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Primeramente construiremos una tabla con dos columnas (podrían ser dos filas). En la primera columna daremos algunos valores para la variable independiente o de entrada "*x*" y en la otra columna escribiremos los valores de $f(x)$.

x	*f*(*x*)
-1	5
0	3
1	1
3	-3

Representando los puntos (-1, 5), (0,3), (1, 1), (3, -3) en el plano cartesiano y uniéndolos con una línea continua (lo podemos hacer pues el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales) obtendremos la siguiente representación gráfica:



Entre más puntos contenga la representación tabular, mejor es la representación gráfica para la función. En este ejemplo bastarían dos puntos pues la gráfica es una recta

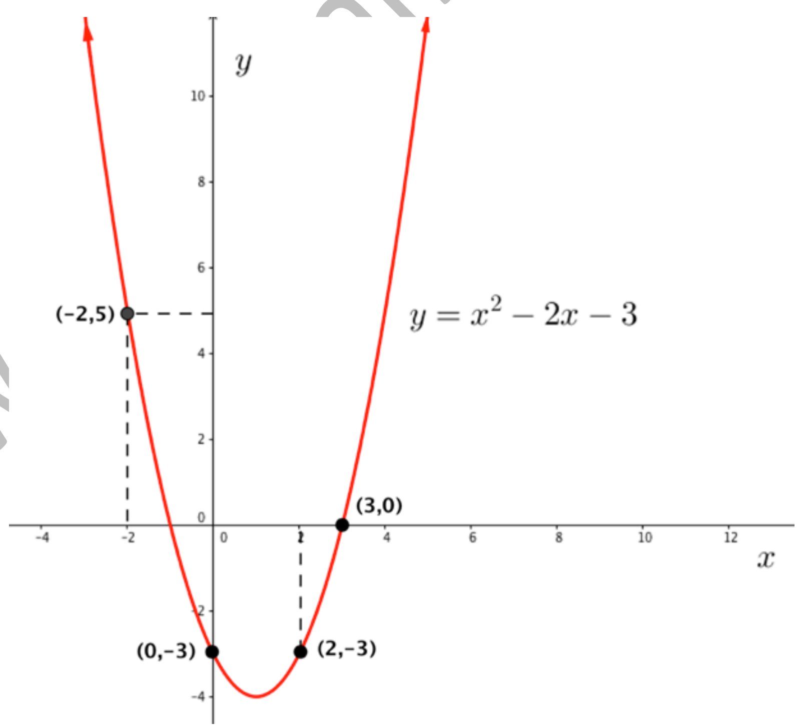
- Otro dato importante para dibujar la gráfica consiste en determinar la intersección con el eje de las abscisas. Tales puntos son las raíces, ceros o soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, $-2x + 3 = 0$ de donde $x = \frac{3}{2}$. Obtenemos el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Luego, se halla la intersección en el eje de las ordenadas, para ello se debe buscar el punto que satisface $y = f(0)$, esto es $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$. Obtenemos el punto $(0,3)$

2. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con representación simbólica $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Represente gráficamente la función dada.

Solución

Sigue la representación tabular de algunos pares ordenados (puntos) de la gráfica de la función y su representación gráfica.

x	$f(x)$
-2	5
0	-3
2	-3
3	0

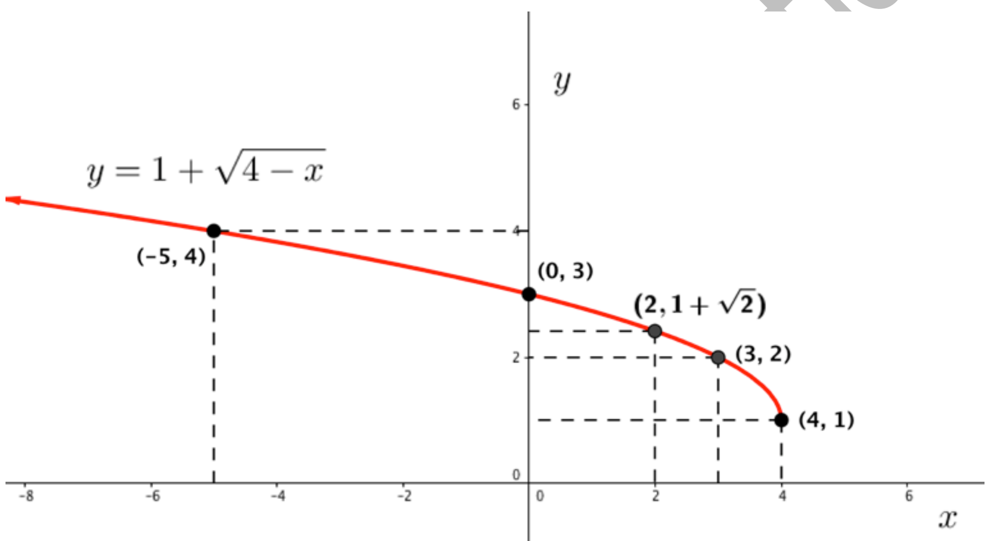


La representación gráfica para la función con criterio $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es una parábola que se abre hacia arriba.

3. Considere la función $f:]-\infty,\ 4] \to\ \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x}$. Represente gráficamente la función dada.

   Una representación tabular y gráfica para la función son dadas abajo:

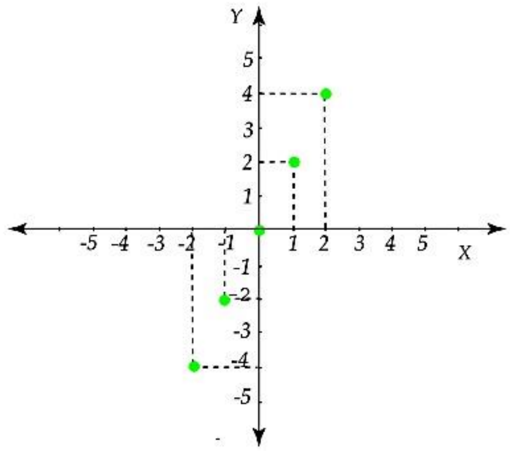
x	-5	0	2	3	4
$f(x)$	4	3	$1 + \sqrt{2}$	2	1



Ejemplo 69 ____________________

Considere los conjuntos Q = {−2, −1, 0, 1, 2} y R = {−6, −5, −4, −2, 0, 1, 2, 4, 6} y $f: Q \to\ R$, $f(x) =\ 2x$. Represente la función f graficamente.

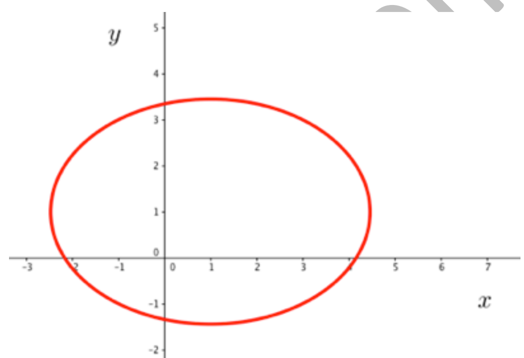
Solución:
Note que el dominio de dicha función es discreto por lo que a la hora de dibujar la gráfica en el sistema de coordenadas no se debe trazar una línea continua.



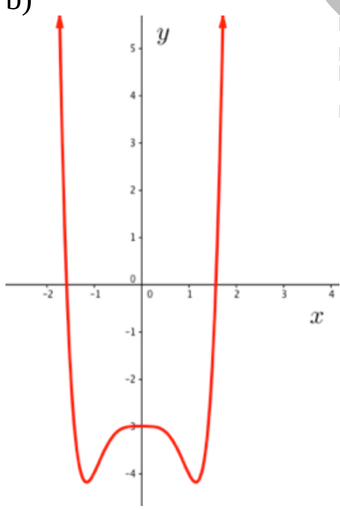
Ejemplo 70 ____________________

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?

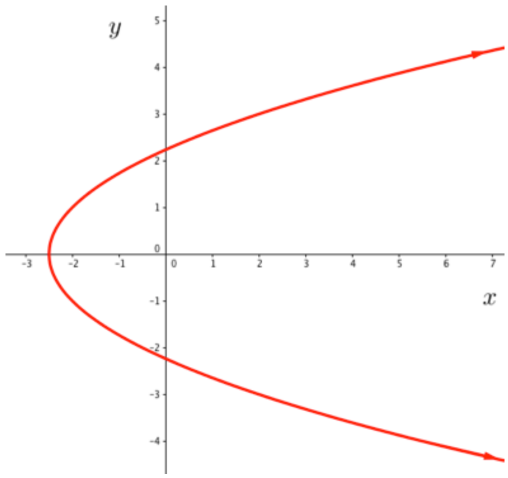
a)



b)

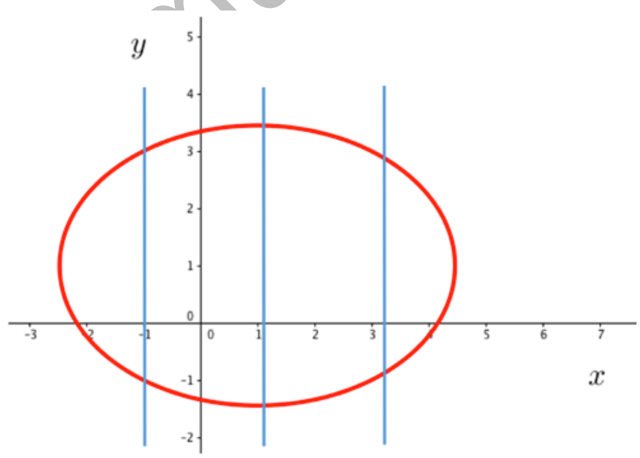


c)

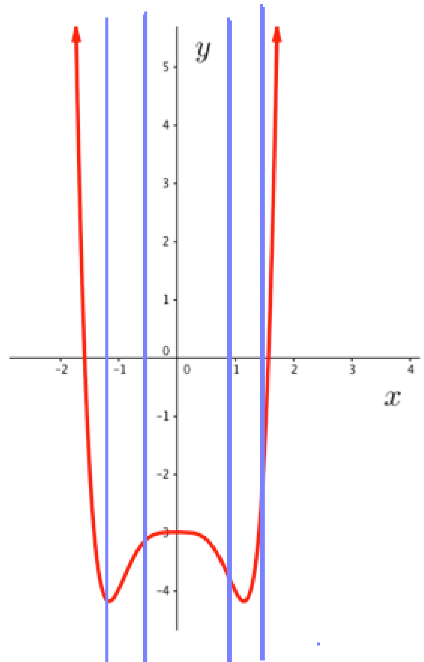


Solución:

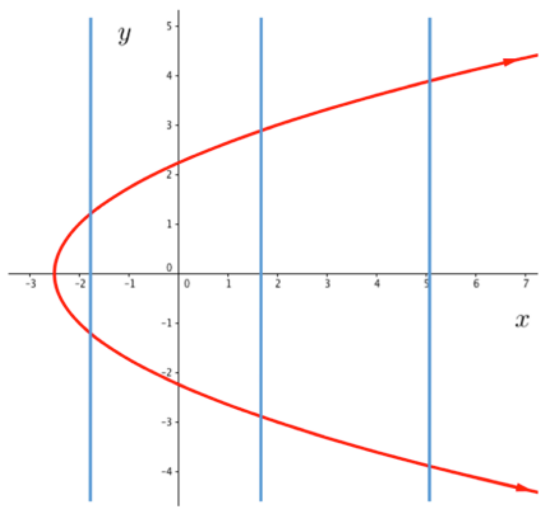
a) La gráfica corresponde a una *relación* pero no a una función pues existen rectas verticales que intersecan a la gráfica en dos puntos. Esto quiere decir que existen preimágenes con dos imágenes.



b) La gráfica si representa a una función, se puede verificar haciendo la prueba de la recta vertical.



c) La prueba de la vertical, indica que la gráfica NO representa a una función. Existen preimágenes con dos imágenes



Diversas representaciones de una función

Las funciones pueden representarse en forma ***simbólica*** como:

- $f: A \to B$, A dominio, B codominio
- $y = f(x)$, x elemento del conjunto de entrada, y elemento del conjunto de salida
- Conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$, x pertenece al dominio de la función.

La representación simbólica pone de manifiesto la habilidad de generalización y se relaciona principalmente con el álgebra.

Representación tabular:

x	$f(x)$
-1	5
0	3
1	1
3	-3

La representación tabular pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos de una relación entre variables.

También existe la ***representación verbal***, cuando utilizamos el lenguaje cotidiano para expresar el criterio de una función o bien para traducir palabras a símbolos. Este tipo de representación se vincula con la capacidad lingüística de las personas.

Ejemplo 71

Representar algebraicamente la representación verbal:

a. La suma de un número y 32 es menor que la mitad de la resta del número y 56.
b. La fuerza de atracción entre dos objetos con masas m_1 y m_2 es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Represente simbólicamente esta ley gravitacional.

Solución

a. Si etiquetamos con la variable *x* el número desconocido entonces la representación verbal dada se traduce a la representación algebraica:

$$x + 32 < \frac{1}{2}(x - 56)$$

b. Si etiquetamos con la letra *r* la distancia entre las masas m_1 y m_2, que supondremos masas puntuales y *F* para fuerza de atracción entonces tenemos:

$F \propto m_1 m_2$ la fuerza es directamente proporcional al producto de las masas
$F \propto \frac{1}{r^2}$ la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

Por lo tanto, si *k* es la constante de proporcionalidad, podemos escribir:

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Ejemplo 72

Dada la tabla

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	8	3

Complete la tabla que sigue

x	0	1	2	3
$2f(x) + 3$				

Solución

Si $g(x) = 2f(x) + 3$ entonces $g(0) = 2f(0) + 3 = 2(1) + 3 = 5$, $g(1) = 2f(1) + 3 = 2(5) + 3 = 13$, $g(2) = 2f(2) + 3 = 2(8) + 3 = 19$, $g(3) = 2f(3) + 3 = 2(3) + 3 = 9$.

x	0	1	2	3

$2f(x)+3$	5	13	19	9

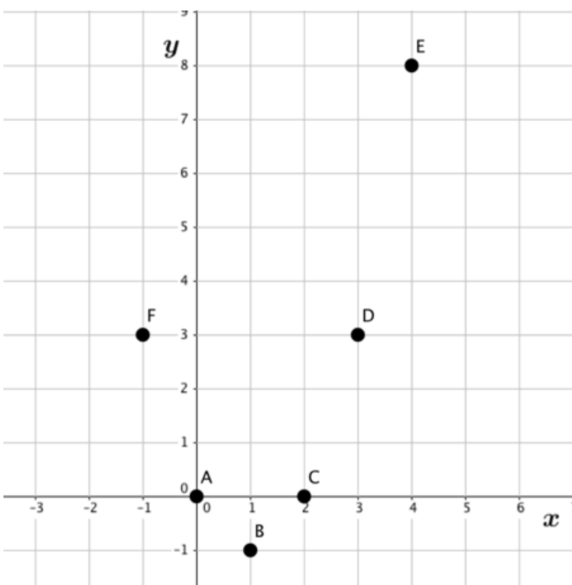
En esta solución utilizamos una tabla de valores para obtener otra tabla. Esto es lo que se conoce como un tratamiento dentro de una misma representación que en este caso es tabular-tabular. Pero también utilizamos la representación algebraica para hacer los cálculos de los valores de la función g. Esto se conoce como una transformación o conversión entre representaciones. Claro que podríamos hacer los cálculos directamente dentro de la representación tabular.

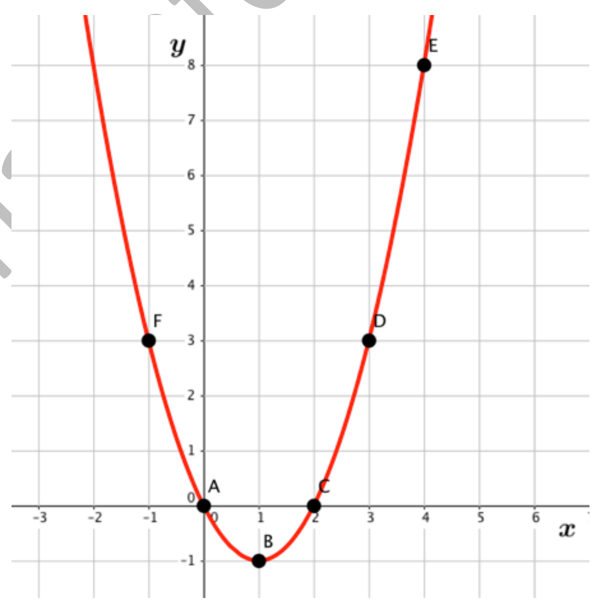
Ejemplo 73 ___________________

Construya una gráfica con representación tabular

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8	15

Graficamos primeramente los puntos dados y posteriormente los unimos con una curva suave. Esto nos da una posible representación gráfica para la función.





En este ejemplo hemos partido de una representación tabular y obtenido una representación gráfica. Es una transformación entre dos representaciones: tabular-gráfica.

Dominio máximo

Es usual dar únicamente la forma simbólica de la regla de correspondencia de una función, es decir, el criterio de la función: $y = f(x)$ sin especificar su dominio. En este caso se considera como dominio de la función el conjunto de todos los valores reales que pueden ser asignados a la variable independiente "*x*" de tal forma que la variable dependiente "*y*" resulte un número real único y se conoce como ***dominio máximo* o *dominio natural*.** Nosotros siempre utilizaremos el dominio máximo como dominio de un función, excepto cuando se especifique explícitamente el dominio.

Existen una serie de criterios para definir según sea el caso cual será el dominio máximo:

- El dominio máximo de cualquier polinomio es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.
- El dominio máximo de una función racional es el conjunto de los números reales excluyendo los valores que indefinen la función. Dominio máximo: $\mathbb{R} - \left\{\begin{matrix}\text{valores que indefinen} \\ \text{el denominador}\end{matrix}\right\}$
- Si en el criterio aparece un radical de índice par, se debe garantizar que el subradical sea positivo o cero. Para ello se resuelve una inecuación donde el subradical debe ser mayor o igual a cero.
- Si en el criterio aparece un radical de índice impar, no hay problema el dominio máximo es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 74 ____________________

Determine el dominio máximo de la función $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

Solución:

Dado que $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$ es una función racional por lo que tenemos que garantizar que el denominador no se indefina. Para ello hay que determinar el valor de x para el cual 2x + 3 se hace cero, esto es

$$2x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-3}{2}$$

Por lo tanto, el dominio máximo de f es $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Ejemplo 75 ____________________

Determine el dominio máximo para cada regla de correspondencia o criterio dado.

a. $f_1(x) = 2 - 3\sqrt{5 - 2x}$
b. $f_2(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{5x-8}} + x^2 + 4x - 1$

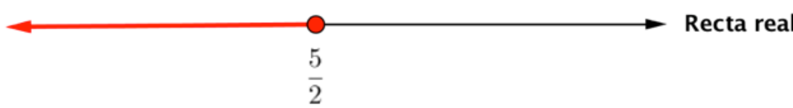
Solución

a. En el criterio de la función f_1 aparece un radical de índice par (raíz cuadrada). Siempre que ocurra esto el subradical no puede ser negativo, es decir $5 - 2x$ tiene que ser mayor o igual a cero (si el índice fuera impar entonces no tendríamos problemas y el dominio sería $\mathbb{R}$). Por lo tanto, $5 - 2x \geq 0$, lo que equivale a $5 \geq 2x$, cuyas soluciones satisfacen $\frac{5}{2} \geq x$. El conjunto de los números que satisfacen esta desigualdad: $x \leq \frac{5}{2}$ es el *dominio* (máximo o natural) de la función y puede ser representado de tres formas distintas:

Notación de intervalo: $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$

Notación de conjunto por comprensión: $\left\{x \text{ tales que } x \in \mathbb{R},\ \ x \leq \frac{5}{2}\right\}$

Representación gráfica (en la recta numérica) en color rojo:



Observe que el punto que representa 5/2 en la recta numérica está relleno, indicando que dicho punto está incluido en la representación gráfica del dominio de la función.

b. En el criterio de la función $f_2(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{5x-8}} + x^2 + 4x - 1$ aparecen tres expresiones: una función lineal una raíz cuadrada en el denominador y una función cuadrática.
El dominio (máximo) de cualquier polinomio es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. Por lo tanto no tenemos restricciones para el argumento de la función lineal, $2x + 3$ ni para la función cuadrática.
La única restricción es para la raíz cuadrada. Como aparece en el denominador el radicando no puede ser nulo. Por lo tanto $5x - 8$ tiene que ser estrictamente positivo.

$$5x - 8 > 0$$

De esta forma obtenemos $x > \frac{8}{5}$. El dominio (máximo) de la función es:

Notación de intervalo: $\left]\frac{8}{5}, \infty\right[$

Notación de conjunto por comprensión: $\left\{x \text{ tales que } x \in \mathbb{R},\ \ x > \frac{8}{5}\right\}$

Representación gráfica (en la recta numérica), en color rojo:

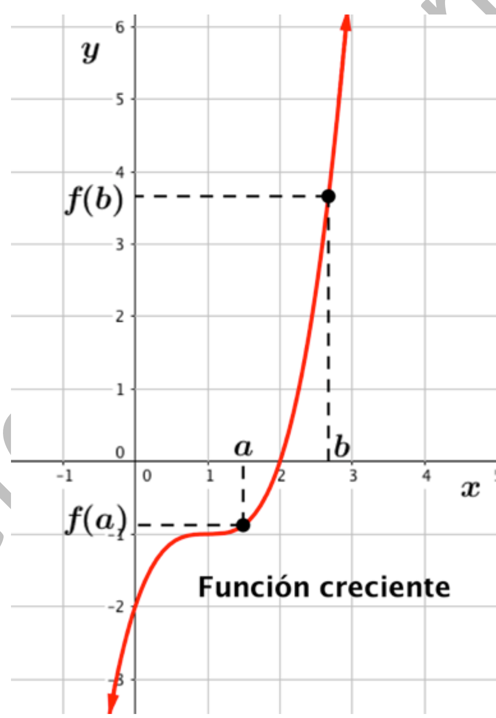
Crecimiento y decrecimiento de una función.

Función creciente
Decimos que una función con representación simbólica $y = f(x)$ es *creciente* en un intervalo abierto A si para cualquier par de puntos a y b de A tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$.

Función decreciente
De la misma forma, decimos que una función con representación simbólica $y = f(x)$ es *decreciente* en un intervalo abierto A si para cualquier par de puntos a y b de A tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \geq f(b)$.

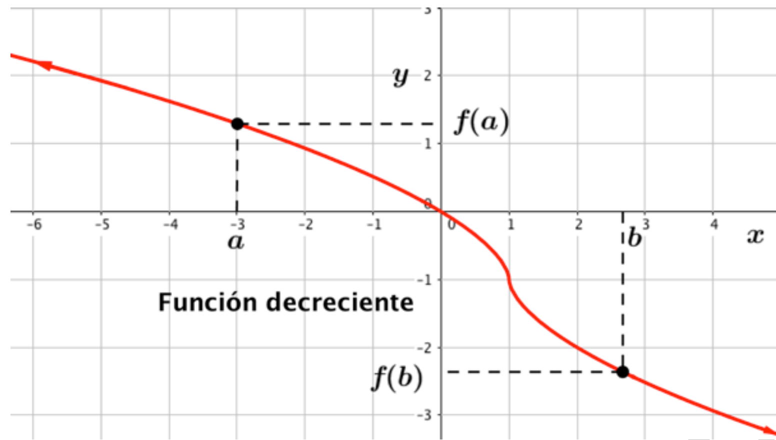
Ejemplo 76 ____________________

Observe que, en el intervalo dado, cuando nos "movemos" de izquierda a derecha (en el eje de las abscisas x) la gráfica de la función creciente se "eleva (sube)" o se mantiene horizontal.



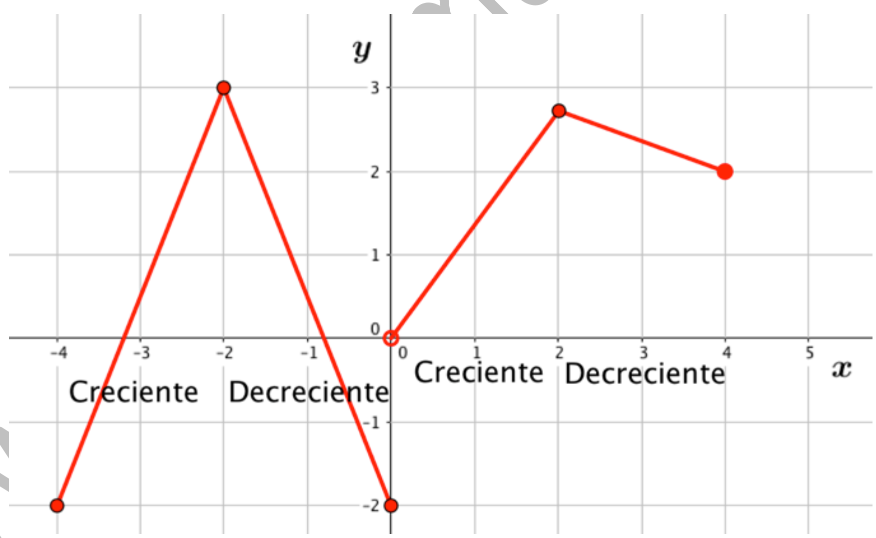
Ejemplo 77 ____________________

En el intervalo dado, cuando nos "movemos" de izquierda a derecha (en el eje de las abscisas x) la gráfica de la función decreciente "desciende (baja)" o se mantiene horizontal.



Ejemplo 78 ____________________

En la representación gráfica que sigue podemos ver intervalos donde la función es creciente o decreciente.



Máximo y mínimo

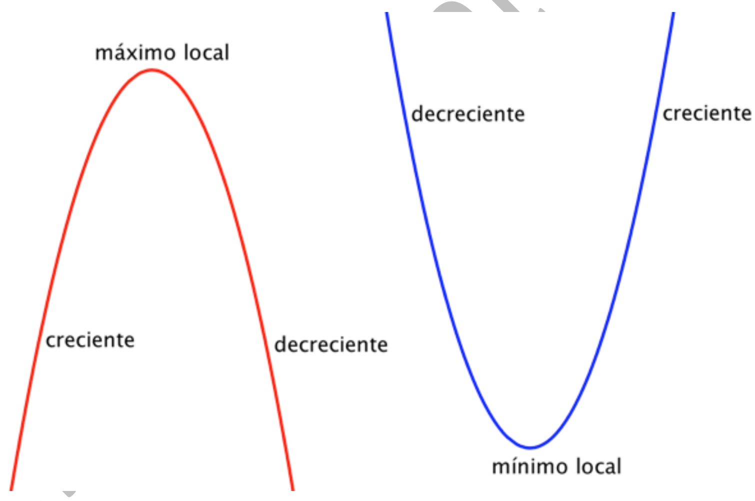
La función *f* tiene un *valor máximo relativo o local* en el número *c*, si existe un intervalo abierto que contiene a *c*, en el que *f* está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda *x* en el intervalo.

La función *f* tiene un *valor mínimo relativo o local* en el número *c*, si existe un intervalo abierto que contiene a *c*, en el que *f* está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda *x* en el intervalo.

En las definiciones anteriores tenemos que $f(c)$ es un ***valor máximo*** si el punto $(c, f(c))$ es el punto más elevado en la representación gráfica de *f*, en algún intervalo abierto que contiene *c*. Igualmente, $f(c)$ es un ***valor mínimo*** si el punto $(c, f(c))$ es el punto más bajo en la representación gráfica de *f*, en algún intervalo abierto que contiene *c*.

Ejemplo 79 ___________________

Observe que en un punto de máximo la función cambia, de izquierda a derecha, de creciente a decreciente. En el caso de mínimo la función cambia de decreciente a creciente. Estamos suponiendo que la función es continua (su gráfica puede ser trazada sin quitar el lápiz del papel en el punto de máximo o de mínimo). Todos los polinomios cumplen esta condición.



El mayor de los valores de una función en todo su dominio se conoce como ***valor máximo absoluto***, y el menor de los valores de la función en todo su dominio se denomina ***valor mínimo absoluto***.

Composición de funciones

Bajo ciertas condiciones, podemos usar los valores de salida de una función como valores de entrada para otra función, creando así una nueva función.

La *composición de la función f con la función g*, simbolizada por $f \circ g$, se define como $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los elementos *x* del dominio de *g* cuyas imágenes $g(x)$ pertenezcan al dominio de *f*.

Si representamos por D_f , D_g , $D_{f\circ g}$ el dominio de *f* , *g* y de $f \circ g$ respectivamente, entonces podemos escribir:

$$D_{f\circ g} = \{x:\ x \in\ D_g\ \text{ y }\ g(x) \in D_f\ \}$$

La composición $f \circ g$ hace actuar primero la función g sobre un elemento del dominio de g con imagen en el dominio de *f* y posteriormente hace actuar la función *f*

$$x\ \longmapsto\ g(x)\ \longmapsto\ f\big(g(x)\big)$$

Ejemplo 80 ____________________

Considere las siguientes funciones con representaciones algebraicas o simbólicas (criterios) $f(x) = 2x - 3,\ g(x) =\ x^2 - 10$. El dominio y codominio para ambas es el conjunto de los números reales ℝ.

a. Calcule $(f \circ g)(-1)$ y $(g \circ f)(-1)$
b. Determine el criterio para $(fog)(x)$
c. Determine el criterio para $(g \circ f)(x)$
d. ¿Para qué valores de *x* se cumple $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?
e. Determine el criterio o representación simbólica para $(f \circ f)(x)$
f. Determine el criterio o representación simbólica para $(g \circ g)(x)$

Solución

a. $(f \circ g)(-1) = f\big(g(-1)\big)$. Como $g(-1) = (-1)^2 - 10 = -9$ mientras que $f(-9) = 2(-9) - 3 = -21$ entonces $(f \circ g)(-1) = f\big(g(-1)\big) = f(-9) = -21$.

$(g \circ f)(-1) = g\big(f(-1)\big)$. Como $f(-1) = 2(-1) - 3 = -5$ mientras que $g(-5) = (-5)^2 - 10 = 15$ entonces $(g \circ f)(-1) = g\big(f(-1)\big) = g(-5) = 15$.

Observe que $(f \circ g)(-1)$ no es igual que $(gof)(-1)$.

b. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 10) = 2(x^2 - 10) - 3 = 2x^2 - 20 - 3 = 2x^2 - 23.$

c. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 - 10 = 4x^2 - 12x + 9 - 10 = 4x^2 - 12x - 1.$

d. La igualdad se cumple si $2x^2 - 23 = 4x^2 - 12x - 1$, es decir, $2x^2 - 12x + 22 = 0$. Pero esta ecuación no tiene solución real pues su discriminante es negativo. Por lo tanto, para todos los valores reales de x se cumple que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

e. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9.$

f. $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 10) = (x^2 - 10)^2 - 10 = x^4 - 20x^2 + 100 - 10 = x^4 - 20x^2 + 90.$

Ejemplo 81 ____________________

Cuando la estrella comienza la expansión, su radio varia con el tiempo. Supongamos que esta función es $r(t) = 1{,}05t$ en donde t se mide en días y $r(t)$ en gigámetros (Gm).

a. Determine el radio de la estrella dos días después que la fase de expansión se inicia.
b. Determine el área S de la superficie de la estrella dos días después que la fase de expansión se inicia.
c. Determine la composición $(S \circ r)(t)$ y calcule su valor dos días después que la fase de expansión se inicia. ¿Qué representa esta composición?

Solución

a. En este caso el modelo que relaciona el radio de la estrella con el tiempo es un dato del problema: $r(t) = 1{,}05t$. Por lo tanto dos días después de iniciada la expansión de la estrella su radio será igual a $r(2) = 1{,}05 \times 2 = 2{,}10$ Gm. Este número es bastante grande pues un gigámetro equivale a mil millones de metros, es decir, 10^9 metros. Equivale a más de 5 veces la distancia entre la Tierra y la Luna.

b. El área superficial de una esfera de radio r es $S(r) = 4\pi r^2,\ r \geq 0,$ y este es un modelo que relaciona el área superficial con el radio de una esfera. Como encontramos en la parte a. que $r = 2{,}10$ Gm

$$S(2) = 4\pi(2{,}1)^2 = 17{,}64\pi \ \text{Gm}^2$$

c. La composición

$$(S \circ r)(t) = S(r(t)) = S(1{,}05t) = 4\pi(1{,}05t)^2 = 4{,}41\pi t^2$$

Este criterio representa la relación entre el área superficial de la estrella como función del tiempo. Para *t* = 2 días tenemos: $(S \circ r)(2) = 4{,}41\pi(2)^2 = 17{,}64\pi$ Gm^2, lo que coincide con el valor calculado en el punto anterior.

Ejemplo 82 ___________________

Para las funciones *f* y *g* representadas simbólicamente por: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$, analizar el dominio de:

a. $(f \circ g)(x)$
b. $(g \circ f)(x)$

Solución

a. Para que g esté definida, es necesario que $x \neq -2$. Esta es la primera restricción. Si utilizamos $g(x)$ como entrada para *f* tenemos: $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$, por lo tanto la segunda restricción es $g(x) \geq 0$, es decir, $\frac{x+1}{x+2} \geq 0$. Esto ocurre cuando numerador $x + 1$, y denominador $x + 2$ tengan el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) o bien cuando $x = -1$, cuando $g(x) = 0$.

   Caso 1: $x + 1 > 0,\ x + 2 > 0$, o sea, cuando numerador y denominador son positivos. Entonces $x > -1$ y $x > -2$. Los valores de *x* que satisfacen ambas desigualdades es $x > -1$ (la intersección de los dos conjunto solución).
   Caso 2: : $x + 1 < 0,\ x + 2 < 0$, numerador y denominador negativos. En este caso tenemos $x < -1$ y $x < -2$. Los valores de *x* que satisfacen ambas desigualdades (intersección de los dos conjuntos solución) es $x < -2$ (la intersección de los dos conjunto solución).

   Por lo tanto para el dominio de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ tenemos que considerar todos los posibles valores para *x*:

$$\text{Dominio de } (f \circ g)(x)\text{: } \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que} -\infty < x < -2, -1 \leq x < \infty\ \}$$

b. Para que *f* esté definida necesitamos que $x \geq 0$. La primera restricción es que *x* no puede ser negativo. Al utilizar $f(x)$ como entrada para g tenemos: $g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2}$. Esto exige que $f(x) \neq -2$, pero esto se cumple pues la raíz cuadrada de *x* siempre es mayor o igual a cero cuando $x \geq 0$, es decir $f(x) \geq 0$ y por lo tanto $f(x) + 2 \geq 2$ para todo valor de *x* en el dominio de *f*.

$$\text{Dominio de } (g \circ f)(x)\text{: } \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x\ \geq 0\}$$

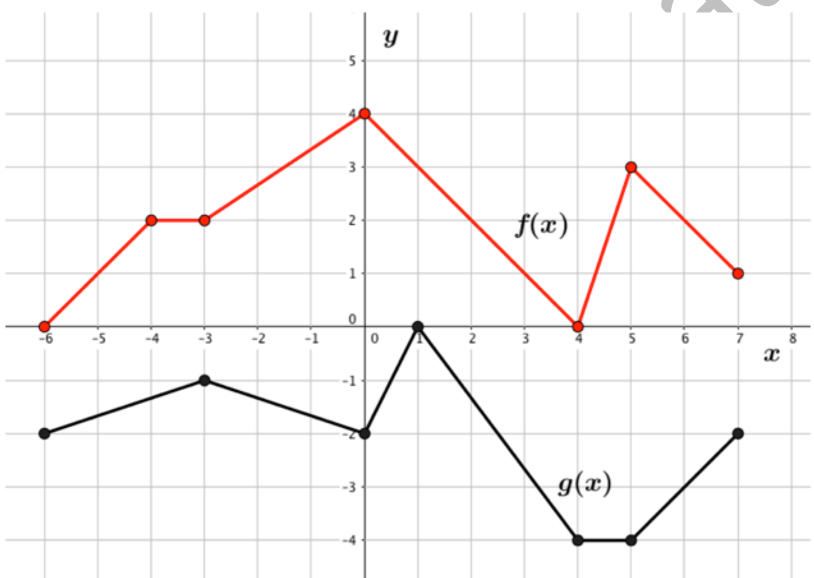
Ejemplo 83

Complete la siguiente tabla (determine los valores de *a*, *b*, *c*, *d*):

Solución
Cálculo de a: $a = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$
Cálculo de b: $b = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 7$
Cálculo de c: $c = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$
Cálculo de d: $d = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 8$

Ejemplo 84

1. Utilice las representaciones gráficas para las funciones f y g para calcular:

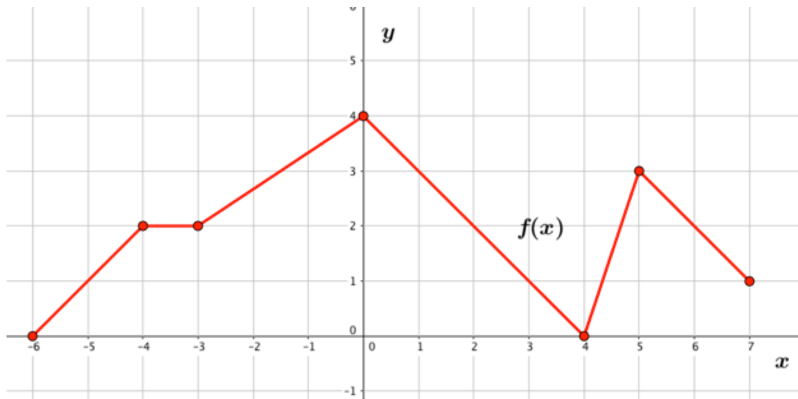


a. $(f \circ g)(4)$
b. $(g \circ f)(4)$
c. $(f \circ g)(1)$
d. $(f \circ f)(0)$

Solución

a. $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-4) = 2$
b. $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = -2$
c. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 4$
d. $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(4) = 0$

2. Considere la representación algebraica (criterio) de la función g: $g(x) = 3x + 1$
y la representación gráfica de la función f con dominio $[-6, 7]$



a. ¿Existe la composición $f \circ g$?
b. ¿Existe la composición $g \circ f$?

Solución

a. Como el dominio y el rango de la función g no son dados, se supone que el dominio es el máximo posible. Por ser polinomial la función (es lineal) entonces tanto su dominio como su rango es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Para la composición $f \circ g$ el rango de g tiene que ser un subconjunto del dominio de f, pero esto no ocurre aquí. Es claro que algunas imágenes de g pertenecen al dominio de f pero esto no es suficiente para definir $f \circ g$.
b. Como el rango de f es subconjunto del dominio de g entonces podemos definir la $g \circ f$. Calculemos algunos valores de esta composición:

$$(g \circ f)(6) = g\big(f(6)\big) = g(0) = 1, \qquad (g \circ f)(-4) = g\big(f(-4)\big) = g(2) = 7,$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) = 1.$$

Observe que la función gof con dominio $[-6, 7]$ no es inyectiva pues $(g \circ f)(6) = (g \circ f)(4) = 1$.

Ejemplo 85

Complete la siguiente tabla (determine los valores de a, b, c, d):

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
0	1	-1	-1	c
1	3	0	a	d
2	5	3	b	24
3	7	8	17	48

Solución

Cálculo de a: $a = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$
Cálculo de b: $b = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 7$
Cálculo de c: $c = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$
Cálculo de d: $d = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 8$

Inyectividad

La función ***inyectiva*** es aquella para la cual cada imagen tiene una única preimagen. En otras palabras, es la función en que a elementos distintos del dominio les corresponden elementos distintos del codominio y reciprocamente.

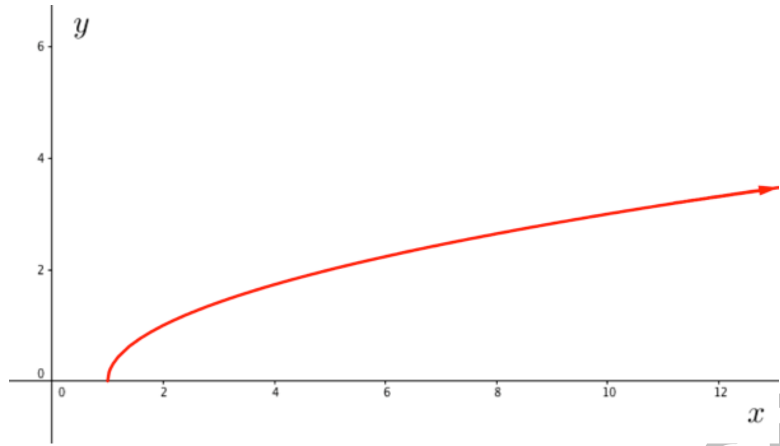
Simbólicamente escribimos: si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$. Imágenes iguales tienen preimágenes iguales.

Graficamente significa que toda ***recta horizontal*** en el rango de la función intersecará la gráfica de la función en un único punto (prueba de la horizontal). Además, es claro, que toda recta vertical en el dominio de la función intersecará la gráfica de la función en un único punto (prueba de la vertical para garantizar que la gráfica representa una función).

Ejemplo 86

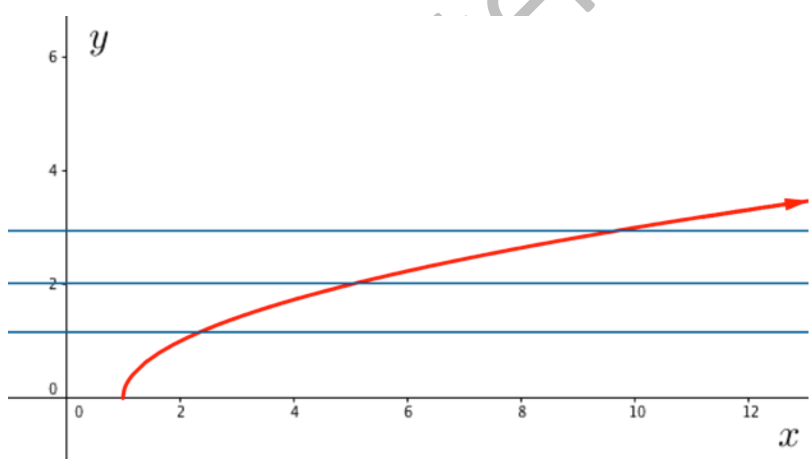
¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a una función inyectiva?

a) f: $[1, \infty[\ \rightarrow \ \mathbb{R}$ con gráfica:

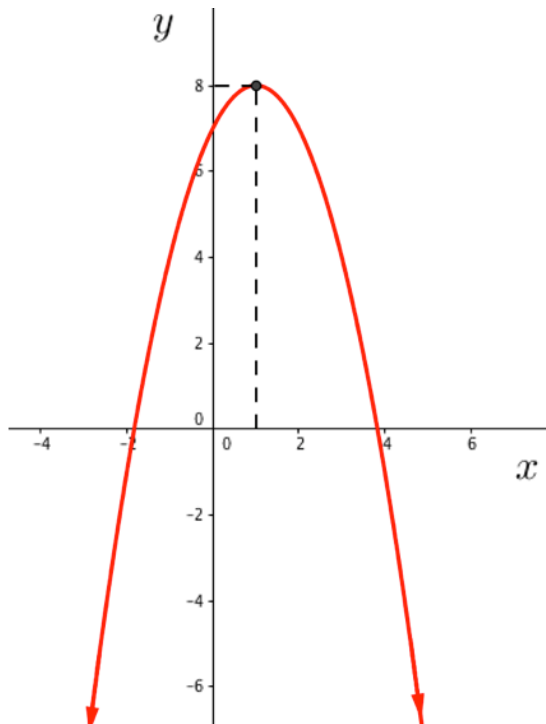


Solución.

Por la prueba de las rectas horizontales se observa que la función es inyectiva.

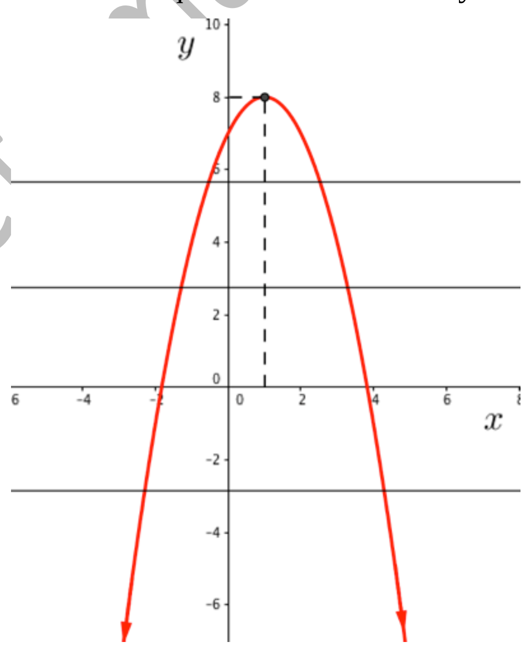


b) $f: \mathbb{R} \to \left]-\infty,\ 8\right]$ con gráfica:

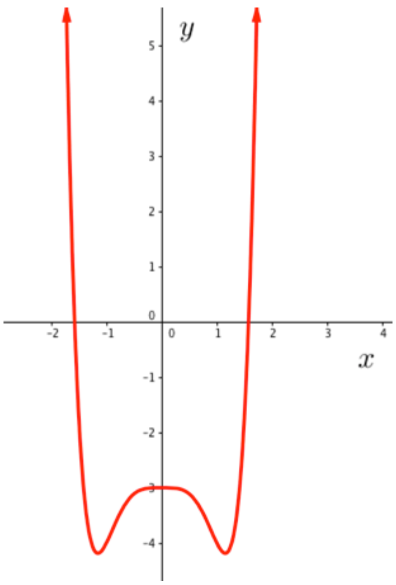


Solución:

La prueba de las rectas horizontales muestra que la función no es inyectiva.

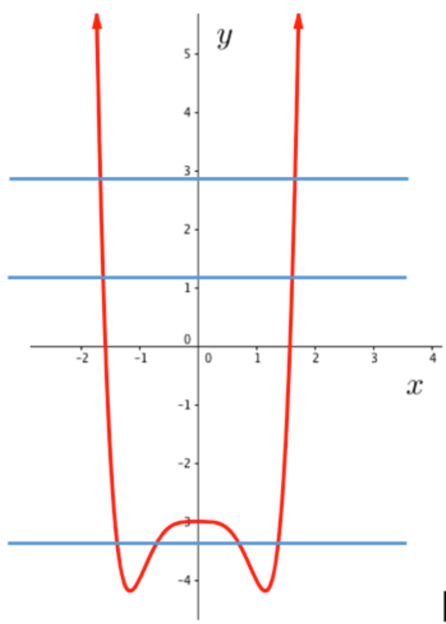


c)



Solución

Esta gráfica representa a una función que no es inyectiva en su dominio pues la prueba de la horizontal revela que existen imágenes que tienen más de una preimagen. Algunas imágenes tienen hasta cuatro preimágenes.



Ejemplo 87 ___________________

Indique dada la regla de correspondencia o criterio si la función es inyectiva.

a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 18$
b. $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3}{x-1}$
c. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 5$

Solución:

a. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 18$; tenemos

$$f(a) = f(b)$$

$$a - 18 = b - 18$$

$$a = b$$

Entonces f es inyectiva.

b. Considere la función $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3}{x-1}$; tenemos

$$g(a) = g(b)$$

$$\frac{3}{a-1} = \frac{3}{b-1}$$

$$a - 1 = b - 1$$

$$a = b$$

Entonces g es inyectiva.

c. Considere la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 5$; tenemos

$$h(a) = h(b)$$

$$a^2 - 5 = b^2 - 5$$

$$a^2 = b^2$$

De la última igualdad NO se puede deducir que $a = b$; más bien, se tiene que $|a| = |b|$. Por ejemplo, tanto 2 como -2 pertenecen al dominio de h y $h(2) = h(-2)$ por lo que no se da la inyectividad. Para garantizar la inyectividad se debe *restringir* el dominio de tal forma que la restricción de la función al nuevo dominio sea inyectiva. Por ejemplo, si consideramos como dominio el intervalo $[0,\infty[$ entonces la nueva función $p\colon [0,\infty[\ \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2 - 5$, que es la restricción de la función *h* al dominio $[0,\infty[$ es inyectiva. Además, si restringimos el codominio al intervalo $[-5,\infty[$ entonces la nueva restricción de *h* $q\colon [0,\infty[\ \rightarrow [-5,\infty[\ , q(x) = x^2 - 5$ es invertible (inyectiva y sobreyectiva).

Elementos para el análisis de una función.

Al analizar una función se toman en cuenta elementos como los siguientes:

- Dominio.
- Codominio
- Ámbito, recorrido o rango
- Imágenes y preimágenes.
- Ceros.
- Intersecciones con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos
- Inyectividad.

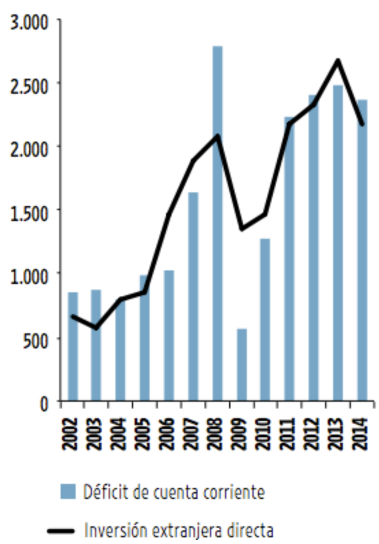
Ejemplo 88

Realice el análisis correspondiente, considere que el ingreso en millones de dólares de inversión extranjera directa está en función de los años.

GRÁFICO 3.6

Evolución de la inversión extranjera directa y el déficit de cuenta corriente[a/]

(millones de dólares)



Tomado del Informe del estado de la Nación 2015.

a. ¿En qué intervalos la función es creciente? y ¿en qué intervalos la función es decreciente?
b. ¿ Cuál es el dominio de la función?
c. ¿Cuál es su ámbito aproximado?
d. ¿Es inyectiva la función?
e. ¿Cuál fue el ingreso (aproximado) en el 2013?
f. ¿Cuál es el ingreso máximo (aproximado)?
g. ¿Cuál es el ingreso mínimo (aproximado)?

Solución:

a. La función es creciente del año 2003 al año 2008 y del años 2009 al 2013. Es decreciente del año 2008 al 2009.
b. El dominio de la función viene dado por en conjunto de años A={2002, 2003,2004,2005,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014}
c. El ámbito va aproximadamente de los 550 a los 2600 millones de dólares.
d. El ingreso en el 2013 fue aproximadamente de 2600 millones de dólares.
e. El ingreso máximo fue en el año 2013 con aproximadamnete 2 600 millones de dólares.
f. El ingreso mínimo fue en el año 2003, aproximadamente 550 millones de dólares.

Función inversa

Si $f: A \to B$ es una *función* real de una variable real donde el codominio coincide con el ámbito y además f es ***inyectiva,*** entonces su *inversa* es la función, que simbolizaremos por f^{-1}, que satisface la siguiente condición:

(x, y) **es un punto en la gráfica de** f **si y sólo si** (y, x) **es un punto en la gráfica de** f^{-1}

De la definición se tiene que $f^{-1}(y) = x$ significa que $f(x) = y$

En la notación f^{-1} para la función inversa, el -1 ***no es un exponente***, es decir $f^{-1}(x)$ ***no es*** igual a $\frac{1}{f(x)}$. Además, la definición indica que el dominio de la función f es el rango o ámbito de f^{-1} mientras que el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Método para hallar el criterio de la inversa de una función f.
En la práctica, la regla de correspondencia (criterio) para la inversa de una función con criterio $y = f(x)$ se puede obtener cambiando "*x*" por "*y*" , y "*y*" por "*x*". Luego se despeja "*y*" en términos de "*x*", quedando la representación simbólica (criterio) $y = f^{-1}(x)$ para la inversa de *f*. La dificultad puede consistir en despejar "*y*" en términos de "*x*".

Ejemplo 89 ____________________

Determine la inversa de cada función

a. $f(x) = 3x - 2$, Dominio $= \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \sqrt{-1-x}$, Dominio = $]-\infty,-1]$.
c. $m(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, Dominio = $[0,+\infty[$
d. $p(x) = x^3 + 8$, Dominio = $\mathbb{R}$

Solución

a. Procedemos de la siguiente manera:
Intercambiamos las variables x, y en $y = 3x - 2$. Por lo tanto

$$x = 3y - 2$$

El segundo paso consiste en despejar la variable y en la última relación.

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Como la correspondencia anterior no presenta restricciones entonces su dominio (que es rango de la función original f) es $\mathbb{R}$. Por lo tanto el ámbito de f es $\mathbb{R}$ para que la función tenga inversa, y su inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

Observe que el dominio de la inversa de f es el rango de la función f.

b. Para encontrar la inversa de g intercambiamos las variables "x" y "y" en $y = \sqrt{-1-x}$, es decir, $x = \sqrt{-1-y}$, y despejamos la variable "y": $x^2 = -1 - y$, y por lo tanto

$$y = -1 - x^2 = -(1 + x^2)$$

Concluimos que $g^{-1}(x) = -1 - x^2$, la inversa de g, para $0 \leq x < \infty$.
Note que , el ámbito de g es el dominio de g^{-1}.

c. La expresión $\frac{x^2}{2} + 2$ no presenta ninguna restricción para x, pero el dominio dado para la función m no es todo $\mathbb{R}$ sino un subconjunto de los números reales, $[0,+\infty[$. Esto es para garantizar que la función sea inyectiva. Para encontrar la inversa de m, tenemos que intercambiar "x" y "y" en $y = \frac{x^2}{2} + 2$, para obtener: $x = \frac{y^2}{2} + 2$. Empezamos a despejar la variable y,

$$\frac{y^2}{2} = x - 2$$

y así

$$y^2 = 2(x-2)$$

Al despejar "y" obtenemos dos valores:

$$y_1 = -\sqrt{2(x-2)}\ , \qquad y_2 = \sqrt{2(x-2)}$$

Pero como el dominio de *m* (rango de la inversa de *m*) fue dado como $[0, +\infty[$ entonces tenemos que descartar la solución y_1 por ser no positiva. Entonces la inversa de *m* es

$$m^{-1}(x) = \sqrt{2(x-2)}\text{ , donde } x \in [2, +\infty[$$

d. Como el dominio y rango de todo polinomio de grado impar es ℝ y además para cada valor de *y* existe un único valor de x tal que $y = x^3 + 8$, entonces la función dada es inyectiva, y su rango es ℝ. Intercambiando "*x*" y "*y*" en $y = x^3 + 8$, obtenemos $x = y^3 + 8$, y así

$$y^3 = x - 8$$

Despejando "*y*"

$$y = \sqrt[3]{x-8}$$

La inversa de la función dada es

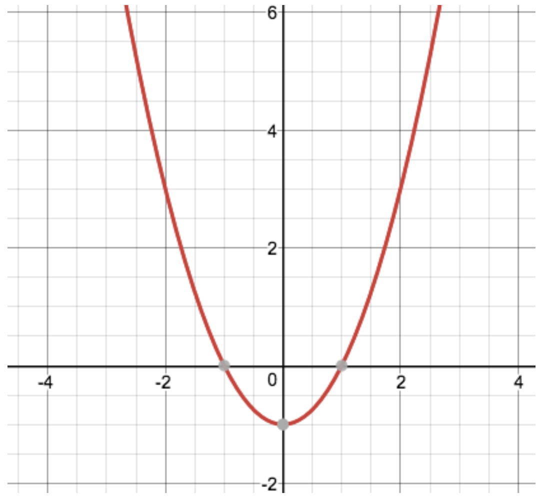
$$p^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

El dominio de la inversa es el rango de la función *p*.

Ejemplo 90 ___________________

Determine un dominio máximo de la función $f(x) = x^2 - 1$ cuyo ámbito es $[-1, +\infty[$ de tal manera que se pueda garantizar que la *restricción* de f a este dominio posee inversa.

Solución:
Se debe indicar en que puntos del dominio la función es inyectiva. Observe en la representación gráfica de *f* que si se toma el intervalo $[0, +\infty[$ como dominio, es posible garantizar inyectividad de la restricción de *f*, y por lo tanto inversa. Por otro lado, también es posible tomar como dominio el intervalo $]-\infty, 0]$ en lugar de $[0, +\infty[$.


6
4
2
0
-2
-4
-2
2
4

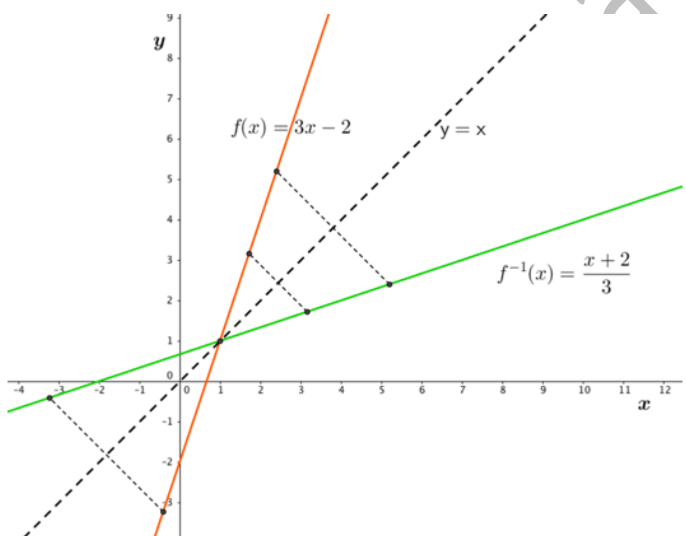
Representación gráfica de una función y su inversa

Existe una simetría respecto a la recta $y = x$ de la gráfica de la función respecto a su inversa. Esto se debe a que los puntos (x, y) y (y, x) son simétricos respecto a la recta $y = x$ en el plano cartesiano, y en la definición de inversa tenemos que si (x, y) pertenece a la gráfica de una función invertible entonces (y, x) pertenece a la gráfica de su función inversa (y recíprocamente).

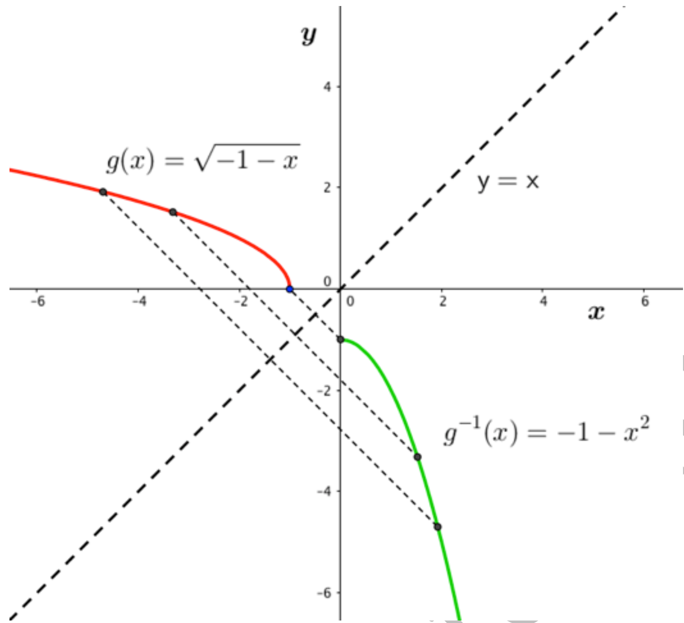
Ejemplo 91 ___________________

Las gráficas de las funciones dadas aparecen en color rojo mientras que las de las funciones inversas aparecen en color verde. También agregamos la gráfica de función identidad $y = x$, en líneas discontinuas.

a. $f(x) = 3x - 2$, Dominio $= \mathbb{R}$.

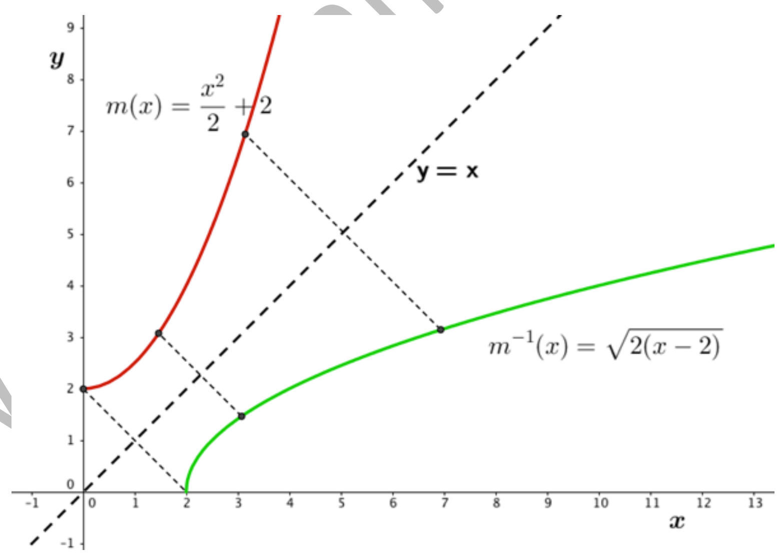


b. $g(x) = \sqrt{-1-x}$, Dominio $=]-\infty, -1]$.

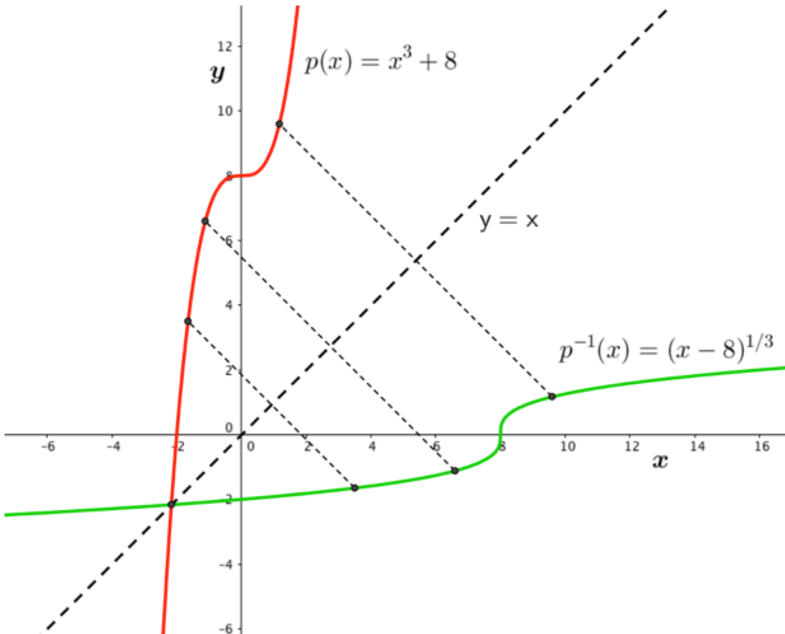


Observe que el dominio de *g-1* es es $[0, +\infty[$.

c.



d. $p(x) = x^3 + 8$, Dominio = $\mathbb{R}$



Función lineal .

Sea f una función tal que, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f se llama función lineal donde $f(x) = mx + b$, con m y b constantes reales.
Se llama ***recta*** al gráfico de una función lineal.

Pendiente: Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación punto-pendiente: Si (x_1, y_1) es un punto de la recta, entonces

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma general de la ecuación de la recta:

$$ax + by = c$$

Intresección con los ejes:

- La gráfica de f interseca al eje de las abscisas en el punto: $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$
- También interseca al eje de las ordenadas en el punto: $(0, b)$

Monotonía en relacion a m

- Si $m > 0$ la función lineal es creciente
- Si $m = 0$ la función lineal es constante
- Si $m < 0$ la función lineal es decreciente

Ejemplo 92 ___________________

En las vías del ferrocarril, se puede ver que siempre existe un espacio libre en la unión de los rieles. Este espacio es necesario porque el metal con que se construyen se dilata con el calor. Por eso las vías necesitan ese espacio, para no curvarse con temperaturas altas. Estudios de ingeniería han obtenido la relación entre las distintas temperaturas y el alargamiento de los rieles, como muestra la tabla siguiente:

Temperatura en ºC	Dilatación en mm
-12	$-1,4$
8	1
25	3
50	6
75	9

Es posible tomar dos puntos de la tabla para aproximar una función que modele la situación, por ejemplo si se toma $(-12,\ -1,4)$ y $(75,9)$, entonces la pendiente es:

$$m = \frac{9 — 1,4}{75 - -12} = \frac{10,4}{87} = \frac{52}{435}$$

donde $y_2 = 9$, $y_1 = -1,4$, $x_2 = 75$ y $y_1 = -12$.
Luego, como $y = mx + b$ se tiene:

$$9 = \frac{52}{435} \cdot 75 + b$$
$$b = \frac{1}{29}$$

Por lo tanto, $y = \frac{52}{435}x + \frac{1}{29}$

La temperatura máxima promedio en Cartago es de 26º, entonces el alargamineto de los rieles se determina calculando la imagen de 26 en el criterio de la función

$$y = \frac{52}{435} \cdot 26 + \frac{1}{29} = \frac{1367}{435} \approx 3,14\text{mm}$$

A la temperatura indicada los rieles sufren un alargamiento de $3,14$mm aproximadamente.

Ejemplo 93 ___________________

La empresa de correos internacionales FedEx ofrece un portafolio de soluciones para satisfacer las necesidades de envíos internacionales de documentos o paquetes. Entre estos servicios se encuentran en los de prioridad internacional para importación y para exportación (http://images.fedex.com/downloads/lac/rates_2016/cr_2016.pdf). Es un servicio expreso de puerta a puerta con despacho de aduanas incluido y entrega en tiempo definido. Las tarifas, que rigen a partir del 4 de enero de 2016, son las siguientes:

Tarifas en US$	PESO EN KG	ZONA A	ZONA B	ZONA C	ZONA D	ZONA E	ZONA F	ZONA G
Importación	**FedEx® 10 kg y 25 kg Box****							
FedEx® 10 kg Box	Hasta 10 kg.	180.30	192.60	301.20	218.80	464.30	461.40	555.10
	por kg adicional	18.00	19.30	30.10	21.90	46.40	46.10	55.50
FedEx® 25 kg Box	11 kg hasta 25 kg.	233.10	281.20	383.40	352.60	621.70	693.40	832.10
	por kg adicional	9.30	11.20	15.30	14.10	24.90	27.70	33.30
Exportación	**FedEx® 10 kg y 25 kg Box****							
FedEx® 10 kg Box	Hasta 10 kg.	115.30	121.20	223.90	237.40	317.30	346.00	383.10
	por kg adicional	11.50	12.10	22.40	23.70	31.70	34.60	38.30
FedEx® 25 kg Box	11 kg hasta 25 kg.	157.90	162.00	263.70	265.60	361.50	420.40	514.70
	por kg adicional	6.30	6.50	10.60	10.60	14.50	16.80	20.60

a. Edwin quiere importar de Japón, que es parte de la zona F, una un equipo electrónico de 15 kg y quiere saber si es más económico importalo en una caja FedEx 10 kg Box o en una 25 kg Box. El equipo electrónico cabe en cualquiera de las dos cajas.
Ayude a Edwin a decidir cuál es la opción más económica.

b. Roxana también quiere importar de Japón un equipo electrónico parecido al de Edwin pero que es de 19 kg. Ayude a Roxana a decidir cuál es la opción más económica si el equipo cabe en cualquiera de las dos cajas.

c. Ileana quiere exportar a Canadá, que es parte de la zona C, 30 kg en portajoyas que ella, como pequeña empresaria, fabrica. Si todos los portajoyas caben en ambos tipos de cajas (10 kg Box y 25 kg Box), ayude a Ileana a decidir cuál es la opción más económica.

Solución

a. En la primera opción (10 kg Box), por los primeros 10 kg Edwin tiene que pagar \$ 461,40 y por cada kg adicional pagará \$ 46,10. Para generalizar, si x representa la cantidad adicional para la primera opción entonces el modelo para calcular el costo C del envío de la importación es

$$C(x) = 461{,}40 + 46{,}10x$$

El envío desde Japón para primera opción costará $C(5) = 461{,}40 + 5 \cdot 46{,}10 = 691{,}90$ dólares.
Para la segunda opción (25 kg Box), Edwin tendría que pagar \$ 693,40 pues el equipo se encuentra en el rango de 11 kg hasta 25 kg. Por lo tanto la opción más económica para Edwin es la primera.

b. Para Roxana tenemos 9 kg adicionales y el costo para la primera opción es de

$$C(9) = 461{,}40 + 9 \cdot 46{,}10 = 876{,}30 \text{ dólares}$$

Esta cantidad es mayor que los \$ 693,40 que pagaría por la segunda opción. Entonces la opción más económica para Roxana es la segunda.

c. Para la primera opción (10 kg Box), Ileana pagará una cantidad fija de \$ 223,90 por los 10 kg y \$ 22,40 por cada kg adicional. Por x kg adicionales el pago por el envío será de

$$C(x) = 223{,}90 + 22{,}40x$$

Como hay 20 kg adicionales entonces el costo para enviar el producto, para la primera opción será de $C(20) = 223{,}90 + 20 \cdot 22{,}40 = 671{,}90$ dólares.

Para la segunda opción (25 kg Box), Ileana pagará una cantidad fija de \$ 263,70 por los 25 kg y \$ 10,60 por cada kg adicional. Por x kg adicionales el pago por el envío será de

$$P(x) = 263{,}70 + 10{,}60x$$

Como hay 5 kg adicionales entonces el costo para enviar el producto, para la segunda opción será de $P(5) = 263{,}70 + 5 \cdot 10{,}60 = 316{,}70$ dólares.

Por lo tanto la opción más económica para Ileana es la segunda.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de dos ecuaciones lineales** o de **primer grado** con dos incógnitas x, y es un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ Ax + By + C = 0 & (2) \end{cases}$$

donde a, b, c, A, B, C son números reales constantes con a y b, A y B no simultáneamente nulos. La representación gráfica de cada ecuación es una recta en el plano. Cada valor de x, y que satisface ambas ecuaciones es una **solución** del sistema y corresponde al punto de intersección de las dos rectas.

Métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ Ax + By + C = 0 & (2) \end{cases}$$

1. ***Método por sustitución***
   Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación para obtener una ecuación con una sola incógnita. Se resuelve la ecuación y el valor obtenido (si existe) se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada. Los valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
2. ***Método por igualación***
   Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones para obtener una ecuación con una única incógnita. Se resuelva la ecuación y el valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita. Los valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
3. ***Método por reducción***
   Se multiplican cada ecuación por números apropiados para que, al sumar o restar las nuevas

ecuaciones se elimina una de las incógnitas. Se resuelve la ecuación resultante. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve. Los valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

4. ***Método gráfico***
Se grafican las dos rectas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas. Si las rectas se intersecan en un único punto (rectas secantes) entonces las coordenadas del punto de intersección constituyen la solución del sistema. Si las rectas son coincidentes el sistema tiene infinitas soluciones mientras que si son paralelas el sistema no tiene solución.

Ejemplo 94 ______________

Los precios de las entradas para el juego del Saprissa de Costa Rica ante San Lorenzo de Argentina fueron desde ₡ 3400,00 a ₡ 29 400,00. El precio de la entrada para sombra este preferencial costó ₡ 9400,00 y para palco ₡ 29 400,00.

Para el partido Saprissa San Lorenzo se vendieron en total 935 entradas para las dos opciones mencionadas y los ingresos correspondientes fueron ₡ 9 789 000,00.

¿Cuántas entradas de cada tipo fueron vendidas?

Solución

Sean x la cantidad de entradas vendidas para sombra preferencial, y la cantidad de entradas vendidas para palco. Como el total de las entradas vendidas para estas dos opciones fue de 935 entonces

$$x + y = 935$$

El precio de las x entradas fue de $9400x$ mientras que el de las y entradas fue de $29400y$. Por lo tanto

$$9400x + 29400y = 9789000$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 935 & (1) \\ 9400x + 29400y = 9789000 & (2) \end{cases}$$

Solución por sustitución

Despejamos la variable y en la primera ecuación:

$$y = 935 - x$$

Reemplazamos este valor de y en la segunda ecuación:

$$9400x + 29400(935 - x) = 9789000$$

Obtuvimos una ecuación en la variable x. Simplificamos

$$9400x + 27489000 - 29400x = 9789000$$

Restamos 27489000 en ambos lados de la ecuación y simplificamos

$$9400x - 29400x = -17700000$$

Simplificamos el primer miembro de la igualdad

$$-20000x = -17700000$$

Dividimos ambos miembros por -20000 y simplificamos

$$x = \frac{-17700000}{-20000} = 885$$

Reemplazamos el valor encontrado para x en $y = 935 - x$

$$y = 935 - 885 = 50$$

La respuesta es fueron vendidas 885 entradas para sombra este preferencial y 50 para palcos.

Solución por igualación

Despejamos la variable y en la primera ecuación:

$$y = 935 - x$$

y en la segunda ecuación:

$$29400y = 9789000 - 9400x$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación por 29400

$$y = \frac{9789000 - 9400x}{29400}$$

Igualando las dos expresiones algebraicas del lado derecho de cada ecuación despejada

$$935 - x = \frac{9789000 - 9400x}{29400}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 29400 y simplificando

$$27489000 - 29400x = 9789000 - 9400x$$

Restamos 9789000 en ambos miembros de la ecuación y simplificamos

$$27489000 - 29400x - 9789000 = -9400x$$

Simplificamos y sumamos 29400x en ambos miembros de la ecuación

$$17700000 = 29400x - 9400x = 20000x$$

Dividiendo por 20000 los dos miembros de la ecuación y simplificando

$$x = \frac{17700000}{20000} = 885$$

reemplazando este valor en $y = 935 - x$ obtenemos $y = 50$.

Solución por reducción

En el sistema

$$\begin{cases} x + y = 935 & (1) \\ 9400x + 29400y = 9789000 & (2) \end{cases}$$

podemos multiplicar la ecuación (1) por 29400 (el coeficiente de y en la ecuación (2)) para obtener

$$\begin{cases} 29400x + 29400y = 935 \cdot 29400 = 27489000 \\ 9400x + 29400y = 9789000 \end{cases}$$

Ahora podemos restar las dos ecuaciones para eliminar la variable y

$$\begin{cases} 29400x + \cancel{29400}y = 27489000 \\ 9400x + \cancel{29400}y = 9789000 \end{cases}$$
$$(29400 - 9400)x = 27489000 - 9789000$$

Simplificando

$$20000x = 17700000$$

Despejando *x*

$$x = \frac{17700000}{20000} = 885$$

y en la ecuación $x + y = 935$ despejamos *y*: $y = 935 - 885 = 50$.

Solución gráfica

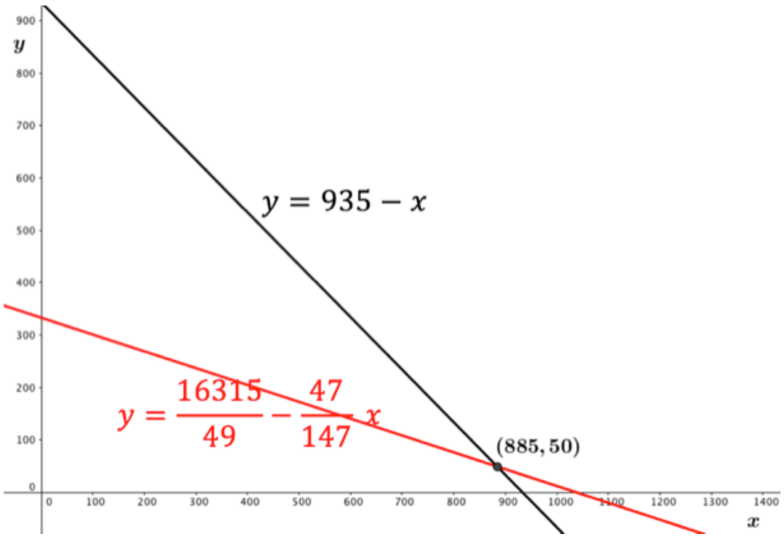
Debido a esto cada ecuación puede ser representada gráficamente por una recta. La solución del sistema, si existe, consiste en aquellos valores de *x*, *y* que satisfacen ambas ecuaciones. Graficamente representa el punto de intersección de las dos rectas.

Para graficar las funciones lineales para las ecuaciones podemos construir una tabla con dos valores pues sabemos que la representaión gráfica es una recta.

$$\begin{cases} y = 935 - x & (1) \\ y = \frac{9789000}{29400} - \frac{9400}{29400} = \frac{16315}{49} - \frac{47}{147}x & (2) \end{cases}$$

x	$y = 935 - x$
0	935
800	135

x	$y = \frac{16315}{49} - \frac{47}{147}x$
0	$\frac{16315}{49}$
500	$\frac{25454}{147}$



Función cuadrática

Sea f una función tal que, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f se llama función cuadrática donde $y = f(x)$ con

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para $a \neq 0$ y a, b, c constantes reales.

- ***Concavidad:***

  - Si $a > 0$ la parábola es concava hacia arriba.
  - Si $a < 0$, entones la parabola es cócava hacia abajo.

- ***Intersecciones con los ejes:***

  -Eje de las abscisas: Se encuentra al resolver $f(x) = 0$
  -Eje de las ordenadas: Se encuentra al evaluar en $x = 0$, esto es $f(0) = c$

- ***Vértice:***

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  El vértice de la parábola representa el punto máximo de f si $a < 0$ y el punto de mínimo de f si $a > 0$.

- ***Eje de simetría:***

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Ecuación normal o forma estándar de la parábola:

$$y = a(x-h)^2 + k$$

para $a \neq 0$ y a, h, k constantes reales.

El vértice de la parábola es el punto (h, k).

Ejemplo 95 ____________________

Analizar la función representada algebraicamente por

$$y = -x^2 - x + 6$$

(Ceros de la función, ordenada en el origen, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximo/mínimo, concavidad, imagen de 1, preimagen de 5).

Solución

Los ceros de la función son las soluciones de la ecuación $-x^2 - x + 6 = 0$. Como el discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25$ es positivo entonces la ecuación tiene dos raíces reales. Si utilizamos la fórmula general

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2(-1)} = \frac{1 - \sqrt{25}}{-2} = \frac{1-5}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2(-1)} = \frac{1 + \sqrt{25}}{-2} = \frac{1+5}{-2} = -3$$

La gráfica de la función interseca al eje de las abscisas en -3 y 2.
La ordenada en el origen ocurre al hacer $x = 0$ en el criterio de la función $y = f(x) = -x^2 - x + 6$, es decir $y = f(0) = 6$.

La función cuadrática es representada gráficamente por una parábola. Como el coeficiente de x^2 es negativa entonces la parábola se abre hacia abajo (cóncava hacia abajo). Por lo tanto su vértice es el punto de máximo. Como ya tenemos el valor del discriminante entonces podemos calcular directamente las coordenadas del vértice:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2(-1)} = -\frac{1}{2}, \qquad y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{4(-1)} = \frac{25}{4}$$

Por lo tanto la función es creciente si $x < -\frac{1}{2}$, decreciente si $x > -\frac{1}{2}$, y el valor máximo de la función es $y = \frac{25}{4}$.

Otra forma para encontrar la abscisa del vértice de la parábola es calcular el promedio de los dos ceros de la función:

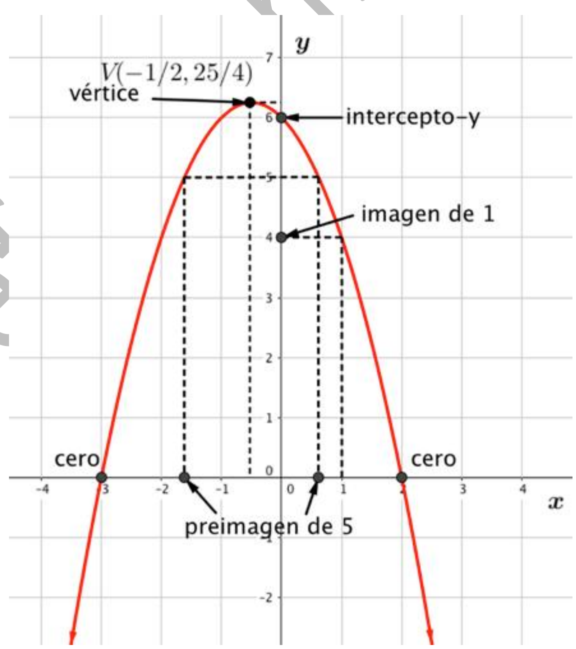
$$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Posteriormente podemos calcular la ordenada del vértice: $y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4}$.

La imagen de 1 es $f(1) = -(1)^2 - 1 + 6 = 4$. La preimagen de 5 es el valor (o los valores) de *x* para los cuales $f(x) = 5$, es decir, $-x^2 - x + 6 = 5$, lo que equivale a la ecuación $-x^2 - x + 1 = 0$. Como el discriminante $\Delta = 1 + 4 = 5$ es positivo existen dos soluciones, es decir, dos preimágenes de 5:

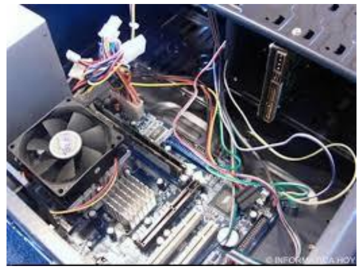
$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Ejemplo 96 ____________________

El coste total de fabricación de un determinado componente para computadora puede ser modelado por la función $C(n) = 0{,}1n^2$ donde n es el número de componentes fabricados y el coste $C(n)$ está en dólares. Si cada componente se vende a un precio de \$ 11,45 el ingreso es modelado por $R(n) = 11{,}45n$.



a. Encontrar la función que representa la ganancia total obtenida por la venta de los componentes.
b. Calcule el número de componentes a fabricar y vender para que la ganancia sea máxima.
c. ¿Qué sucede si la empresa fabrica y vende más de 114 componentes?

Solución

a. La ganancia total obtenida es igual al ingreso menos el coste de fabricación de los componentes. Por lo tanto la ganancia que designaremos por $G(n)$ es modelada por

$$G(n) = R(n) - C(n) = 11{,}45n - 0{,}1n^2$$

b. La función G es cuadrática. Su representación gráfica es una parábola cóncava hacia abajo pues el coeficiente de n^2 es negativo. El punto de máximo es el vértice de la parábola.

Recordemos que el vértice de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el punto con abscisa $x = -\frac{b}{2a}$.
En este caso $a = -0{,}1$; $b = 11{,}45$; $c = 0$; por lo tanto la abscisa del vértice de $G(n)$ es

$$n = -\frac{11{,}45}{2(-0{,}1)} = 57{,}25$$

Pero, como n tiene que ser un número entero entonces tomamos la parte entera del resultado anterior, es decir, $n = 57$ componentes.
En este caso la ganancia (máxima) por la venta de los 57 componentes es

$$G(57) = 11{,}45(57) - 0{,}1(57)^2 = 327{,}75 \text{ dólares}$$

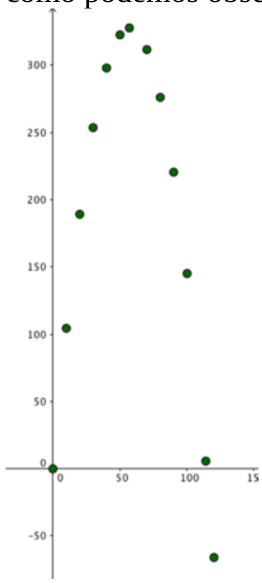
c. Cuando la empresa fabrica y vende 114 componentes su ganancia será de

$$G(114) = 11{,}45(114) - 0{,}1(114)^2 = 5{,}70 \text{ dólares}$$

Si vende 115 componentes la ganancia será negativa:

$$G(115) = 11{,}45(115) - 0{,}1(115)^2 = -5{,}70 \text{ dólares}$$

A partir de los 114 componentes la empresa pierde en lugar de ganar. Esto se debe al tipo de modelo como podemos observar en la gráfica abajo:



Ejemplo 97 ____________________

El Ping An Finance Center es un edificio de 115 plantas de altura que actualmente se encuentra en construcción en Shenzhen, provincia de Guandgong, China. El rascacielos que se encuentra en construcción y que será inaugurado muy pronto es el cuarto edificio más alto del mundo, con una altura total de 599 metros.

¿Cuánto tiempo tardaría para llegar al suelo un objeto que cae de la cima del Ping An Finance Center, si despreciamos la resistencia del aire?

Solución

Suponiendo que el objeto se encontraba inicialmente en reposo (velocidad inicial cero), la distancia y (en metros) recorrida por un objeto en caída libre es modelada por $y = \frac{1}{2}gt^2$ en donde g es la aceleración de la gravedad (en metros por segundo al cuadrado). Utilizando el valor 9,8 para g tenemos

$$y = 4{,}9t^2$$

Como la distancia recorrida por el objeto es de 599 metros entonces

$$4{,}9t^2 = 599$$

Despejando t^2,

$$t^2 = \frac{599}{4{,}9}$$

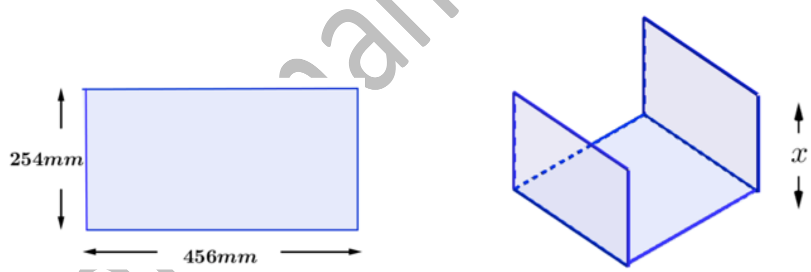
Tomando la raíz cuadrada positiva pues tiempo negativo no tiene sentido en esta situación dada

$$t = \sqrt{\frac{599}{4{,}9}} \approx 11{,}06 \text{ segundos}$$

Por lo tanto el objeto toma aproximadamente 11,06 segundos para alcanzar el suelo, si el mismo cae libremente desde la cima del rascacielo Ping An Finance Center.

Ejemplo 98 ____________________

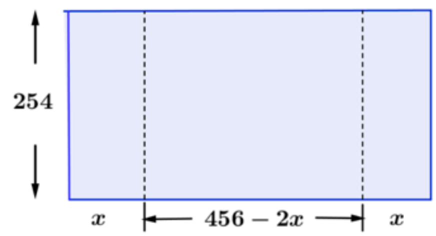
La pequeña empresa Monito Pitanga planea producir un archivo vertical con un único compartimiento, doblando una hoja de plástico de dimensiones 456 mm de largo por 254 mm de ancho, para hacer un archivo en forma de ⊔.

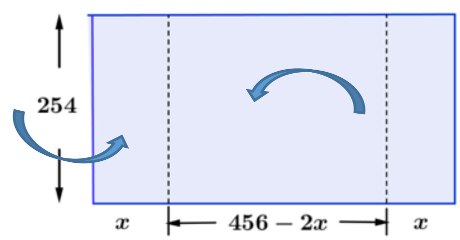


¿Qué tan alto debe ser el archivo para que su volumen sea máximo?

Solución

Existen dos posibilidades para doblar la lámina, para construir el archivo en forma de ⊔. Una es por el largo de la lámina conforme se indica en la figura que sigue. Se marca *x* mm a la derecha y a la izquierda del lado más largo y después se dobla:





Al doblar el archivador formado tendrá volume V igual al área del rectángulo base multiplicado por la altura. Un lado del rectángulo base mide $456 - 2x$ mm mientras que el otro mide 254 mm. La altura es x, por lo tanto el volumen es igual a

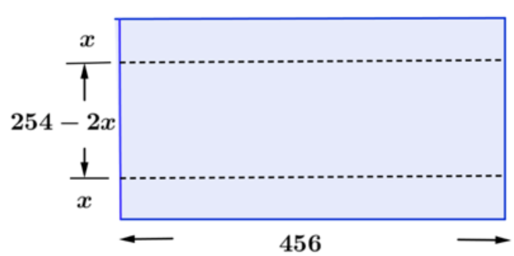
$$V(x) = 254x(456 - 2x) = 115824x - 508x^2$$

Este es el modelo que nos permite calcular el volumen de la caja en términos de x si doblamos la lámina por el largo.

El volumen máximo corresponderá al vértice de la parábola que es la representación gráfica del modelo. La abscisa del vértice es $x = -\frac{115824}{2(-508)} = 114$. Por lo tanto, al doblar la lámina por el largo, y su volumen máximo será

$$V(114) = 115824(114) - 508(114)^2 = 6\,601\,968\,mm^3$$

Otra posibilidad consiste en doblar la lámina por el ancho.



Al doblar en las líneas marcadas, el volumen del archivador será

$$V(x) = 456x(254 - 2x) = 912x(127 - x)$$

La parábola interseca el eje x en $x = 0,\ x = 127$, por lo tanto la abscisa del vértice se encuentra en el punto medio de estos dos valores:

$$x = \frac{127+0}{2} = 63{,}5 \text{ mm}$$

En este caso el volumen máximo será de $V(63{,}5) = 912(63{,}5)(127 - 63{,}5) = 3\,677\,412$ milímetros cúbicos, un valor mucho menor que el encontrado al doblar la lámina por su largo.

Por lo tanto la respuesta es: el alto del archivo para que su volumen sea máximo es de 114 milímetros.

Ejemplo 99 ____________________

Un prototipo de cohete es lanzado con una velocidad inicial de 50 metros por segundo desde una altura de 12 metros. La función con criterio $y(t) = -4{,}9t^2 + 50t + 12$ modela la altura del cohete, en metros, t segundos después de haber sido lanzado.

a. Determinar el tiempo en el que el cohete alcanza su altura máxima.
b. Encontrar de altura máxima.

Solución

El modelo que relaciona la altura del cohete con el tiempo es una función cuadrática. Su representación gráfica es una parábola que se abre hacia abajo debido a que el coeficiente del término cuadrático es negativo. El punto de máximo es el vértice de la parábola, cuya abscisa es

$$t = -\frac{50}{2(-4{,}9)} \approx 5{,}1 \text{ segundos}$$

Esta es la respuesta de la pregunta 14. El tiempo para que el cohete alcance su altura máxima es aproximadamente 5,1 segundos.

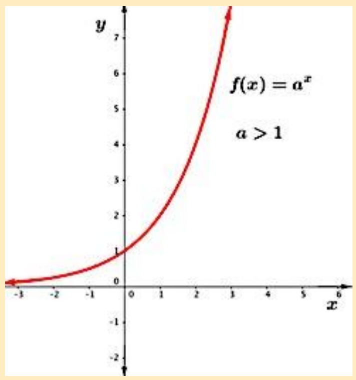
Para encontrar la altura máxima basta reemplazar el valor de *t* en el modelo:

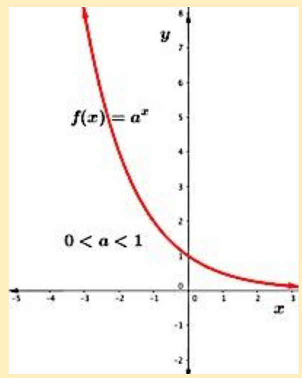
$$y(5{,}1) \approx -4{,}9(5{,}1)^2 + 50(5{,}1) + 12 = 139{,}55 \text{ metros}$$

La altura máxima máxima alcanzada por el cohete es de aproximadamente 139,55 metros, lo que responde la pregunta.

Función exponencial y sus propiedades

Una función *exponencial* en *base a* es una función con representación simbólica de la forma $f(x) = a^x$ donde *x* es un número real positivo y a es un número real positivo distinto de 1, $a > 0, a \neq 1$.
El dominio de *f* es ℝ y su rango es el conjunto de todos los números reales positivos.





1. La gráfica de $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ contiene el punto (0,1)
2. Como $a^1 = a$ entonces la gráfica de f contiene el punto (1, a)
3. Si $a > 1$ la función f es creciente.
4. Si $0 < a < 1$ la función f es decreciente.
5. La función *f* es biyectiva y por lo tanto tiene inversa.
6. El eje de las abscisas es asíntota horizontal para la gráfica de *f*.

Ejemplo 100 ____________________

Una población de 4 millones de habitantes crece a una tasa de 3% anual. Determine el tamaño de la población al cabo de 5 años.

Solución:
Si utilizamos el modelo $P(t) = p_0(1 + r)^t$, donde $p_0 = 4$, $r = 0{,}03$ y $t = 5$. Se tiene entonces que:

$$P(5) = 4(1 + 0{,}03)^5$$
$$P(5) = 4{,}63$$

La población al cabo de 5 años será de 4,63 millones de habitantes aproximadamente.

Ejemplo 101 ____________________

En una pequeña ciudad cuya población es de 3500 habitantes, se propaga una enfermedad creando una epidemia. El número *N* de personas infectadas *t* días después de iniciada la enfermedad se relaciona con el tiempo de acuerdo al siguiente modelo:

$$N(t) = \frac{3500}{1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}}$$

a. ¿Cuántas personas estaban infectadas cuando inició la enfermedad (t = 0)?
b. Determine el número de infectados 5 días después de iniciada la enfermedad.

Solución

a. Cuando t = 0, la cantidad de personas infectadas era de

$$N(0) = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-0{,}6\times 0}} = \frac{3500}{1+19{,}9} \approx 167 \text{ personas}$$

pues la exponencial de cero es igual a 1.

b. Cuando t = 5 días,

$$N(5) = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-0{,}6(5)}} = \frac{3500}{1+19{,}9e^{-3}} \approx 1758 \text{ personas}$$

Ejemplo 102 ___________________

La población de Costa Rica era de aproximadamente 4 808 000 habitantes en 2015 y la tasa de crecimiento exponencial aproximada para el 2015 era de 1,05% por año (Fuente: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.GROW)

a. Determinar la función de crecimiento exponencial para la población costarricense, suponiendo que la tasa de crecimiento anual se mantiene constante.
b. Predecir la población de Costa Rica en el año 2020, utilizando el modelo construido.

Solución

En la primera pregunta se nos pide un modelo que relaciona la población de Costa Rica con el tiempo en años.

Sea $P(t)$ la población de Costa Rica en el instante *t*, en donde *t* es el tiempo en años. Para simplificar los cálculos consideraremos el año 2015 como el año inicial, es decir relacionamos 2015 con $t = 0$. De esta forma 2016 corresponderá a $t = 1$, 2017 a $t = 2$ y así sucesivamente.

Como la población en el 2015 era de 4 808 000 habitantes entonces $P(0) = 4\,808\,000$.

En el año 2016 la población $P(1)$ será igual a la población inicial $P(0)$ más 1,05% de $P(0)$. Por lo tanto

$$P(1) = P(0) + 1{,}05\% \text{ de } P(0) = P(0) + 0{,}0105P(0) = P(0)(1{,}0105)$$

En el año 2017 la población $P(2)$ será igual a la población del año anterior $P(1)$ más 1,05% de $P(1)$, es decir

$$P(2) = P(1) + 1{,}05\% \text{ de } P(1) = P(1) + 0{,}0105P(1) = P(1)(1{,}0105)$$

Reemplazando $P(1)$ por $P(0)(1{,}0105)$ tenemos

$$P(2) = P(1)(1{,}0105) = P(0)(1{,}0105)^2$$

En el año 2018 la población $P(3)$ será igual a la población del año anterior $P(2)$ más 1,05% de $P(2)$, es decir

$$P(3) = P(2) + 1{,}05\% \text{ de } P(2) = P(2) + 0{,}0105P(2) = P(2)(1{,}0105)$$

Reemplazando $P(2)$ por $P(0)(1{,}0105)^2$ tenemos

$$P(3) = P(2)(1{,}0105) = P(0)(1{,}0105)^3$$

Podemos visualizar el patrón que permitirá generalizar la relación entre la población de Costa Rica y el tiempo, y esta es

$$P(t) = P(0)(1{,}0105)^t$$

Este es nuestro modelo y responde la pregunta.

a. El año 2020 corresponde a $t = 5$. Podemos utilizar nuestro modelo para calcular

$$P(5) = P(0)(1{,}0105)^5 = 4\,808\,000(1{,}0105)^5 \approx 5\,065\,776 \text{ habitantes}$$

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una igualdad donde la variable se presenta en el exponente de alguno de sus miembros.
Para resolver ecuaciones exponenciales con la misma base, donde hay exponentes en ambos miembros, se pueden utilizar las siguientes propiedades:

E1. $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.

E2. Si $x \neq 0$ entonces $a^x = b^x$ si y sólo si $a = b$.

Ejemplo 103 ____________________

1. Resolver las ecuaciones exponenciales

   a. $20 \cdot 5^{x+1} = 4 \cdot 25^x$
   b. $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 56$
   c. $3^{x^2-4} = 27^{x-2}$
   d. $\sqrt[3]{8^x} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 512$

Solución:

a. Procedemos de la siguiente manera:

$20 \cdot 5^{x+1} = 4 \cdot 25^x$	
$\frac{20}{4} \cdot 5^{x+1} = 4 \cdot 25^x$	Pasando el 4 a dividir.
$5 \cdot 5^{x+1} = 5^{2x}$	Simplificando y aplicando las propiedades de las potencias.
$5^{x+2} = 5^{2x}$	Aplicando propiedades de las potencias.
$x + 2 = 2x$	Suprimiendo las bases en ambos miembros. Propiedad **E1**
$x = 2$	Despejando x.

b. Como $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2 \cdot 2^x$, y $56 = 7 \cdot 8 = 7 \cdot 2^3$ entonces, reemplazando estas expresiones en la ecuación dada:

$4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^x = 7 \cdot 2^3$	Reemplazando los valores indicados arriba.
$7 \cdot 2^x = 7 \cdot 2^3$	Simplificando.
$2^x = 2^3$	Por la inyectividad de la función exponencial (propiedad E1).

$x = 3$ Suprimiendo las bases en ambos miembros. Propiedad E1.

c. Como $27 = 3^3$ entonces $27^{x-2} = 3^{3(x-2)}$, tenemos

$3^{x^2-4} = 3^{3(x-2)}$ Reemplazando en la ecuación los valores indicados arriba.
$x^2 - 4 = 3(x-2)$ Unicidad de la función exponencial (propiedad E1)
$x^2 - 3x + 2 = 0$ Simplificando

Las raíces de esta ecuación son $x = 1,\ \ x = 2$. Ambas soluciones satisfacen la ecuación dada.

d. Tenemos que $\sqrt[3]{8^x} = (2^3)^{x/3} = 2^{3(x/3)} = 2^x$ mientras que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$. Así

$$\sqrt[3]{8^x} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x + 3 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x = 512$$

Simplificando obtenemos

$$2^x = 128 = 2^7$$

La solución es $x = 7$.

Definición de logaritmo

La inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$, a real positivo distinto de uno se denomina función logarítmica en base a, es decir, si $y = a^x$ con a real, $a > 0, a \neq 1$ entonces x es el ***logaritmo de y en base a***. Escribimos $x = \log_a y$.

Observación:
Por convención $\log$ representa $\log_{10}$, es decir, la base es 10.

Logaritmo natural

Los logaritmos naturales o neperianos son aquellos cuya base es el número de $\boldsymbol{Euler\ e}$. Si la base de un logaritmo es $\boldsymbol{e}$ escribimos:

$$log_e a = ln\ e$$

El número irracional $\boldsymbol{e}$ es aproximadamente 2,71828182845

Ejemplo 104 ___________________

Con base en las igualdades dadas, escriba una igualdad en notación logarítmica para cada caso.

a. $2^5 = 32$
b. $10^{-2} = 0{,}01$
c. $e^y = 4$
d. $x^{\frac{2}{3}} = 2$

Solución:

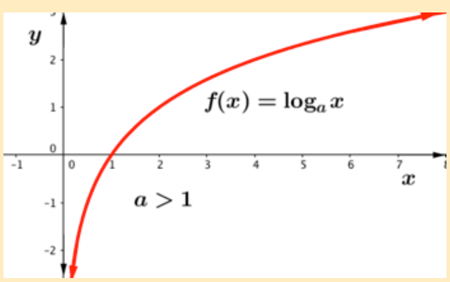
a. Como $2^5 = 32$, entonces $log_2 32 = 5$.
b. Como $10^{-2} = 0{,}01$, entonces $\log 0{,}01 = -2$. Note que la base es 10 por lo que no es necesario escribir $\log_{10}$.
c. Dado que $e^y = 4$, se tiene que $\ln 4 = y$. Note que en este caso la base es el número de ***Euler e*** y el logaritmo es natural.
d. En este último caso se tiene que $x^{\frac{2}{3}} = 2$, entonces $log_x 2 = \frac{2}{3}$

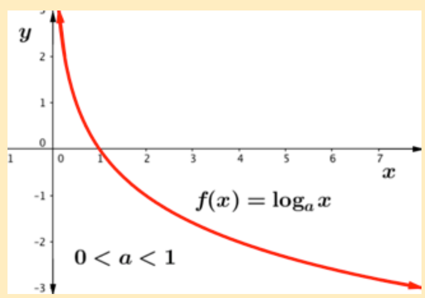
Función logarítmica

Una función *logarítmica* en base a es la función inversa de la función exponencial en base a.

$y = f(x) = \log_a x$ si y sólo si $x = f^{-1}(y) = a^y$ para a real positivo distinto de 1

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales positivos y su rango es $\mathbb{R}$.





1. La gráfica de $f(x) = \log_a x$, x real positivo, a real positivo, $a \neq 1$ contiene los puntos (1,0) y (a,1), es decir, $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.
2. Si $a > 1$ la función f es creciente.
3. Si $0 < a < 1$ la función f es decreciente.
4. La función f es inyectiva y su rango es $\mathbb{R}$ por lo tanto tiene inversa (su inversa es la función exponencial en base a).
5. El eje de las ordenadas es asíntota vertical para la gráfica de f.

Observaciones:

- La función logarítmica está definida únicamente para números reales mayores que cero.

- La base de la función logarítmica es un número real positivo diferente de uno.

Ejemplo 105 ___________________

Los químicos miden la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno. En 1909, Peter Lauritz Sorensen propuso:

$$pH = -log[H^+]$$

donde H^+ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro(M).
Durante el último año el volcán Turrialba ha estado en una continua actividad, lo que ha generado que los niveles de acidez de los suelos de las fincas cercanas al volcán cambien drásticamente. Si el pH registrado en una finca cercana en el 2015 fue de 5,07 determine la concentración de iones de hidrógeno.

Solución:
Se sabe que pH = 5,07 y se desea determinar $[H^+]$ por lo tanto se debe resolver

$$5{,}07 = -log[H^+]$$
$$-5{,}07 = log[H^+]$$
$$10^{-5{,}07} = [H^+]$$
$$0{,}000008 \approx [H^+]$$

Por lo tanto, la concentración de iones de hidrógeno es de aproximadamente $0{,}000008$

Propiedades de los logaritmos

Las propiedades importantes de la función logarítmica en base *a* son:

L1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

L2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

L3. $\log_a(x^n) = n \log_a x$

L4. $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$

L5. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ para *b* real positivo distinto de 1 (Cambio de base)

L6. $\log_a x = \log_a y$ si y sólo si $x = y$, x, y reales positivos.
Esta es una importante propiedad para resolver ecuaciones logarítmicas.

L7. Si $x \neq 1$ es real y positivo entonces $\log_a x = \log_b x$ si y sólo si $a = b$.

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual está presente un logaritmo en alguno de los miembros que la conforman.
Existen diversas estrategias que nos permiten resolver ecuaciones logarítmica, a continuación se detalla una de ellas:

- Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; quizá sea necesario primero reducir los términos logarítmicos aplicando algunas propiedades.
- Reescriba la ecuación en su forma exponencial.
- Despeje la variable.

Otra estrategia consiste en utilizar la propiedad de unicidad de la función logarítmica de la siguiente manera:

$$\log_a P(x) = \log_a Q(x) \text{ implica que}$$
$$P(x) = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en una variable con valores positivos.

Ejemplo 106 ___________________

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $\log_2(x+2) = 5$
b. $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = \log_3(x+5)$
c. $\log(16-x^2) - 2\log(x-4) = 1$
d. $e^{4x} = 2e^{2x} + 3$

Solución:

a. Para despejar x escribimos la ecuación en su forma exponencial:

$\log_2(x+2) = 5$
$x + 2 = 2^5$ Forma exponencial
$x = 32 - 2$ Despeje de x
$x = 30$

b. Usando la propiedad L1 se tiene que

$$\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = \log_3(2x+1)(x-3) = \log_3(2x^2-5x-3)$$

Por lo tanto

$$\log_3(2x^2-5x-3) = \log_3(x+5)$$

Por la unicidad de la función logarítmica se tiene $2x^2 - 5x - 3 = x + 5$, o de forma equivalente $2x^2 - 6x - 8 = 0$. Podemos dividir ambos lados por 2:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = -1$ y $x = 4$. Pero el dominio de la función logarítmica es el conjunto de todos los números reales positivos. Por esto tenemos que comprobar si las soluciones encontradas satisfacen la ecuación dada.

El valor $x = -1$ no está en el dominio de $\log_3(x - 3)$ pues $x - 3 = -4$. Por lo tanto hay que eliminar este valor del conjunto solución.
Si $x = 4$ entonces la igualdad dada se cumple. La solución de la ecuación logarítmica dada es $x = 4$.

c. Por las propiedades L2 y L3 podemos escribir:

$$\log(16 - x^2) - 2\log(x - 4) = \log(16 - x^2) - \log(x - 4)^2 = \log\left(\frac{16 - x^2}{(x - 4)^2}\right)$$

La ecuación dada se reescribe como

$\log\left(\frac{16-x^2}{(x-4)^2}\right) = 1$

$\log\left(\frac{16-x^2}{(x-4)^2}\right) = \log(10)$ Como $\log_a a = 1$ para cualquier base válida.

$\frac{16-x^2}{(x-4)^2} = 10$ Por la unidad de la función logarítmica.

$16 - x^2 = 10(x - 4)^2$

$16 - x^2 = 10(x^2 - 8x + 16)$ Realizando el producto notable

$16 - x^2 = 10x^2 - 80x + 160$ Simplificando

$11x^2 - 80x + 144 = 0$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = 4,\ x = \frac{36}{11}$. El valor $x = 4$ no pertenece al dominio de $\log(x - 4)$ por lo que hay que desecharlo. El valor $x = \frac{36}{11}$ satisface la ecuación dada y por lo tanto es la única solución de la ecuación.

c. Es difícil resolver esta ecuación utilizando únicamente función exponencial y sus propiedades, pero un poco de análisis nos ayuda a visualizar la estrategia a utilizar.

Por ejemplo, $e^{4x} = \left((e^{2x})\right)^2$ y esto nos sugiere hacer un cambio de variables: $y = e^{2x}$. Con este cambio la ecuación $e^{4x} = 2e^{2x} + 3$ se escribe como

$$y^2 = 2y + 3$$

La ecuación de segundo grado $y^2 - 2y - 3 = 0$ tiene raíces $y = -1,\ y = 3$.

Pero $y = e^{2x} = -1$ no tiene solución real pues e^{2x} es positivo para cualquier x real. Así, hay que descartar la raíz $y = -1$.

Para $y = 3$ tenemos $y = e^{2x} = 3$. Para resolver esta última ecuación hay que aplicar logaritmo natural (base e) en ambos lados:

$$\ln(e^{2x}) = \ln(3)$$

Utilizando propiedades de los logaritmos y tomando en cuenta que logaritmo natural y exponencial en base e son inversas tendremos:

$$2x = \ln(3)$$

Por lo tanto $x = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0{,}549306$.

Ecuaciones exponenciales de diferente base

Existen diversas estrategias que nos permiten resolver ecuaciones exponenciales de este tipo, a continuación se detalla una de ellas:

- Aísle la expresión exponencial de un lado de la ecuación.
- Tome el logaritmo de ambos lados, y después utilice las propiedades de los logaritmos para "bajar el exponente".
- Despeje la variable.

Ejemplo 107 ____________________

En una pequeña ciudad cuya población es de 3500 habitantes, se propaga una enfermedad creando una epidemia. El número N de personas infectadas t días después de iniciada la enfermedad se relaciona con el tiempo de acuerdo al siguiente modelo:

$$N(t) = \frac{3500}{1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}}$$

¿Cuántos días después de iniciada la enfermedad, la cantidad de infectados será de 3000 habitantes?

Solución:

Tenemos que resolver la ecuación

$$N(t) = \frac{3500}{1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}} = 3000$$

para determinar la cantidad de días para que existan 3000 personas infectadas por la enfermedad.

Multplicando ambos lados de la ecuación por el denominador se tiene

$$3000(1 + 19{,}9e^{-0{,}6t}) = 3500$$

Dividiendo por 3000

$$1 + 19{,}9e^{-0{,}6t} = \frac{3500}{3000} = \frac{7}{6}$$

Restando 1

$$19{,}9e^{-0{,}6t} = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Dividiendo por 19,9

$$e^{-0{,}6t} = \frac{1}{6(19{,}9)} = \frac{1}{119{,}4}$$

Aplicando logarítmo natural en ambos lados y recordando que $\ln e^x = x$ entonces

$$-0{,}6t = \ln\frac{1}{119{,}4} = \ln 1 - \ln(119{,}4) = -\ln\,(119{,}4)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln\,(119{,}4)}{0{,}6} \approx 8 \text{ dias}$$

Entonces, 8 días después de iniciada la enfermedad, la cantidad de infectados será de 3000 habitantes.

Ejemplo 108

La población de Costa Rica era de aproximadamente 4 808 000 habitantes en 2015 y la tasa de crecimiento exponencial aproximada para el 2015 era de 1,05% por año (Fuente: http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.GROW)

la función de crecimiento exponencial para la población costarricense, suponiendo que la tasa de crecimiento anual se mantiene constante viene dada por

$$P(t) = P(0)(1{,}0105)^t$$

¿En que año la población de Costa Rica será de 10 millones de habitantes?

Solución:

Para calcular en que año la población de Costa Rica alcanzará los 10 millones de habitantes, tenemos que resolver la ecuación exponencial

$$P(t) = 4\,800\,000\,(1{,}0105)^t = 10\,000\,000$$

Simplificando

$$(1{,}0105)^t = \frac{10000000}{4800000} = \frac{25}{12}$$

Aplicando logaritmos en ambos lados, puede ser en cualquier base pero lo tomaremos en base *e*, y aplicando propiedades de logaritmos

$$t\ln(1{,}0105) = \ln\left(\frac{25}{12}\right) = \ln(25) - \ln(12)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln(25) - \ln(12)}{\ln(1{,}0105)} \approx 70 \text{ años}$$

Entonces, para el año 2085, que corresponde a $t = 70$, Costa Rica tendrá cerca de 10 millones de habitantes.

Ejemplo 109 ___________________

Cuando un objeto con temperatura T_1 es colocado en un ambiente que se encuentra a una temperatura T_a distinta de T_1 entonces el objeto se enfriará o bien se calentará para que su temperatura se aproxime a la del ambiente. El modelo que relaciona la temperatura del objeto *T* (℃) con el tiempo *t* (minutos) es dado por la ley de Newton de enfriamiento (o de calentamiento):

$$T(t) = T_a + (T_1 - T_a)e^{-kt}$$

Ileana preparó una buena taza de café para disfrutarlo, pero estaba muy caliente. Ella usó un termómetro para medir la temperatura del café y la temperatura de la sala de su casa.

La temperatura de la sala en este momento era de 25℃ y la del café era de 68℃.

a. Pasados 3 minutos Ileana volvió a medir la temperatura del café y ésta era de 50℃. ¿Cuál es el valor de la constante *k* que aparece en el modelo?

b. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar, desde el momento en que preparó el café, para que su temperatura sea de 40 °C?

Solución

a. Reemplazando los datos en el modelo tendremos:

$$T(3) = 25 + (68 - 25)e^{-3k} = 50$$

Por lo tanto $43e^{-3k} = 50 - 25 = 25$. Simplificando,

$$e^{-3k} = \frac{25}{43}$$

Aplicando logarítmo natural en ambos lados y como $\ln(e) = 1$ entonces

$$-3k = \ln\left(\frac{25}{43}\right) = \ln(25) - \ln(43)$$

Despejamos k

$$k = \frac{\ln(25) - \ln(43)}{-3} \approx 0{,}18077476$$

b. Para que la temperatura del café sea de 40 °C utilizaremos el modelo con el valor de k obtenido

$$T(t) = 25 + 43e^{-0{,}18077476t}$$

Reemplazando $T(t)$ por 40

$$25 + 43e^{-0{,}18077476t} = 40$$

Simplificando

$$43e^{-0{,}18077476t} = 40 - 25 = 15$$

lo que equivale a

$$e^{-0{,}18077476t} = \frac{15}{43}$$

Aplicando logarítmo natural

$$-0{,}18077476t = \ln\left(\frac{15}{43}\right) = \ln(15) - (43)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\ln(15) - (43)}{-0{,}18077476} \approx 5{,}83 \text{ minutos}$$

Ileana tendrá que esperar casi 6 minutos para disfrutar del café. Esta es la respuesta de la parte b de la pregunta.

Índice

Bibliografía

Aufmann R., Barker V., Nation R. (2011). *College Algebra and Trigonometry*. Seventh Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Harshbarger R., Yocco L. (2013). *College Algebra in Context*. 4th Edition. Pearson

Larson R. (2011). *Algebra and Trigonometry*. Eighth Edition. Brooks/Cole Cengage Learning

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Rockswold G. (2012). *Essentials of College Algebra: with Modeling / Visualization*. 4th Edition. Addison-Wesley

Swokowski, E. y Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 13a. edición. Cengage Learning

Créditos

Este documento ha sido elaborado por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, del Ministerio de Educación Pública.

Autor
Edison de Faría Campos

Revisores
Hugo Barrantes, Johanna Mena, Keibel Ramírez, Ángel Ruiz

Edición final de este documento
Johanna Mena, Hugo Barrantes

Director del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2020). *Relaciones y Álgebra*, *Material de consulta*, San José, Costa Rica: autor.